МЕХАНИКА 2018. Т. 28. Вып. 3

УДК 531.36

© ***А. И. Сафонов, О. В. Холостова***

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЯХ СИММЕТРИЧНОГО СПУТНИКА НА СЛАБОЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ОРБИТЕ В ОДНОМ СЛУЧАЕ КРАТНОГО КОМБИНАЦИОННОГО РЕЗОНАНСА ТРЕТЬЕГО И ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКОВ

Рассматривается движение близкой к автономной, периодической по времени гамильтоновой системы с двумя степенями свободы в окрестности тривиального равновесия, устойчивого в линейном приближении. Пусть значения параметров задачи таковы, что в системе реализуется одновременно двойной комбинационный резонанс третьего порядка и резонанс четвертого порядка. Решается вопрос о существовании и устойчивости резонансных периодических решений системы. Исследование проводится на примере задачи о движении динамически симметричного спутника (твердого тела) относительно центра масс в центральном ньютоновском гравитационном поле на слабоэллиптической орбите. В качестве невозмущенных рассматриваются периодические движения спутника, рождающиеся из его стационарных вращений на круговой орбите (гиперболоидальной и конической прецессий), для резонансных значений параметров. Проведена нормализация гамильтонианов возмущенного движения, определены положения равновесия приближенных (модельных) систем, методом Пуанкаре построены соответствующие резонансные периодические движения спутника в окрестности указанных невозмущенных движений, дана их геометрическая интерпретация. Выявлены неустойчивые периодические движения, а также движения, являющиеся устойчивыми для большинства (в смысле меры Лебега) начальных условий и формально устойчивыми.

Ключевые слова: гамильтонова система, кратный резонанс, устойчивость, периодическое движение, динамически симметричный спутник, гиперболоидальная прецессия, коническая прецессия.

DOI: 10.20537/vm180308

Введение

Вопросы влияния резонансов на характер устойчивости систем впервые рассмотрены в работах [1–3]. Случаи однократных резонансов исследованы к настоящему времени весьма полно; обширная библиография представлена в монографии [4] и обзорах [5, 6]. Изучению нелинейных колебаний в окрестности положений равновесия периодических по времени гамильтоновых и близких к гамильтоновым систем с одной степенью свободы в резонансных случаях посвящены работы [7–18].

Исследование случаев кратных резонансов является существенно более сложной задачей и начато сравнительно недавно. В работах [19–21] рассмотрены случаи кратных параметрических резонансов в близких к автономным периодических по времени линейных гамильтоновых системах. Разработан алгоритм построения областей параметрического резонанса; показано, что, в зависимости от типа резонанса, из резонансной точки может выходить от одной до трех областей неустойчивости. Соответствующие области построены в ряде задач динамики спутников относительно центра масс [21–23].

Вопросы существования, бифуркации и устойчивости периодических движений близкой к автономной периодической по времени нелинейной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы вблизи положения равновесия в случаях, когда одна из частот малых линейных колебаний целое или полуцелое число, а другая равна нулю, исследовались в статье [24]. Для указанных случаев кратного параметрического резонанса построены периодические движения динамически симметричного спутника в окрестности его цилиндрической прецессии на слабоэллиптической орбите.

Различные варианты кратных резонансов третьего порядка в неавтономных гамильтоновых системах с двумя степенями свободы рассмотрены в работе [25]; показана неустойчивость тривиального равновесия системы при любом соотношении между резонансными коэффициентами. В статье [26] изучается взаимодействие слабого комбинационного резонанса третьего порядка и сильного основного резонанса четвертого порядка (в зоне его устойчивости) и их влияние на движения неавтономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы; найдены условия ограниченности движений соответствующей модельной системы.

Случаи кратных параметрических резонансов третьего и четвертого порядков в задаче об устойчивости треугольных точек либрации плоской эллиптической ограниченной задачи трех тел рассмотрены в работе [27]. Кратные резонансы четвертого порядка в задаче об устойчивости относительных равновесий на вертикали плоского двойного маятника, точка подвеса которого колеблется вдоль вертикали по гармоническому закону с произвольной частотой и амплитудой, исследованы в монографии [28].

В статье [29] изучаются движения близкой к автономной периодической по времени гамильтоновой системы с двумя степенями свободы в случаях кратного резонанса третьего порядка, когда один из резонансов основной (сильный), а другой комбинационный (сильный или слабый). Решен вопрос о существовании, бифуркациях и устойчивости (в линейном приближении) резонансных периодических движений системы.

Случаи двойного комбинационного резонанса третьего порядка, сильного и слабого, в аналогичных системах сложнее для полного аналитического исследования. При их наличии в системе имеется также резонанс четвертого порядка, проявляющийся уже в автономном случае (в слагаемых нулевого порядка по малому параметру). На первом этапе можно изучить взаимное влияние резонансов третьего порядка, без учета резонанса четвертого порядка. Соответствующая этому случаю приближенная (модельная) система рассмотрена в статье [30], решена задача о существовании и числе ее положений равновесия. При этом решение вопроса об их устойчивости в общем виде проблематично даже в этом упрощенном случае из-за большого числа возникающих вариантов. Более детальное исследование, без учета или при учете резонанса четвертого порядка, целесообразно проводить для конкретных задач, когда значения параметров известны. Разрабатываемый при этом подход может быть использован и в других аналогичных случаях.

В данной статье изучается взаимодействие указанных двойного резонанса третьего и резонанса четвертого порядков в задаче о движении динамически симметричного спутника (моделируемого твердым телом) относительно центра масс в центральном ньютоновском гравитационном поле на слабоэллиптической орбите. В предельном случае круговой орбиты существуют два типа стационарных вращений спутника — гиперболоидальная и коническая прецессии, для которых имеются наборы параметров, соответствующие рассматриваемым тройным резонансам. При малых e определены точки в трехмерном пространстве параметров и построены отвечающие им 2π-периодические по ν (ν — истинная аномалия) движения спутника, рождающиеся из его прецессий на круговой орбите, для которых характеристические показатели линеаризованных уравнений возмущенного движения удовлетворяли тем же резонансным соотношениям. В окрестности этих движений найдены резонансные 10π-периодические по ν движения спутника, дана их геометрическая интерпретация. Выявлены неустойчивые периодические движения, а также движения, являющиеся устойчивыми для большинства (в смысле меры Лебега) начальных условий и формально устойчивыми.

Вопросы существования и устойчивости гиперболоидальной и конической прецессий динамически симметричного спутника на круговой орбите изучались ранее в работах [31–34]. Существование, в случае слабоэллиптической орбиты, периодических движений спутника, рождающихся из гиперболоидальной прецессии на круговой орбите, показано в статье [35]. Периодические движения спутника, рождающиеся из конической прецессии, обсуждаются в [21].

§ 1. Постановка задачи

Рассмотрим движение твердого тела (спутника) относительно центра масс в центральном ньютоновском гравитационном поле. Предполагаем, что центр масс спутника движется по слабоэллиптической орбите с эксцентриситетом e $(0 < e \ll 1)$ и движение тела относительно центра масс не влияет на движение самого центра масс [34, 36].

Введем орбитальную систему координат $OXYZ$, оси OX, OY и OZ которой направлены соответственно по трансверсали к орбите центра масс O спутника, по нормали к плоскости орбиты и вдоль радиус-вектора центра масс относительно притягивающего центра, и жестко связанную с телом систему координат $Oxyz$ с осями, совпадающими с главными центральными осями инерции спутника. Ориентацию связанной системы в $OXYZ$ зададим при помощи углов Эйлера ψ, θ, φ. Центральный эллипсоид инерции тела считаем эллипсоидом вращения, экваториальный и осевой моменты инерции тела обозначим через A и C.

В рассматриваемой задаче координата φ циклическая, и имеется первый интеграл $r = r_0 = \mathrm{const}$, где r — проекция вектора угловой скорости тела в системе координат $OXYZ$ на ось динамической симметрии.

Запишем уравнения движения спутника в форме канонических уравнений Гамильтона. Введем канонически сопряженные с ψ и θ обобщенные импульсы p_ψ и p_θ, обезразмеренные при помощи множителя $A\omega_0$, где ω_0 — среднее движение центра масс O по орбите. Введем также безразмерные параметры $\alpha = C/A$ $(0 \leqslant \alpha \leqslant 2)$ и $\beta = r_0/\omega_0$. За независимую переменную примем истинную аномалию ν.

Функция Гамильтона приведенной системы с двумя степенями свободы, описывающей движение динамически симметричного спутника относительно центра масс на эллиптической орбите произвольного эксцентриситета, имеет вид [37]

$$\begin{aligned} H = {} & \frac{p_\psi^2}{2(1+e\cos\nu)^2\sin^2\theta} + \frac{p_\theta^2}{2(1+e\cos\nu)^2} - p_\psi \operatorname{ctg}\theta\cos\psi - \\ & - \frac{\alpha\beta(1-e^2)^{3/2}p_\psi\cos\theta}{(1+e\cos\nu)^2\sin^2\theta} - p_\theta\sin\psi + \frac{\alpha\beta(1-e^2)^{3/2}\cos\psi}{\sin\theta} + \\ & + \frac{\alpha^2\beta^2(1-e^2)^3\operatorname{ctg}^2\theta}{2(1+e\cos\nu)^2} + \frac{3}{2}(\alpha-1)(1+e\cos\nu)\cos^2\theta. \end{aligned} \qquad (1.1)$$

1.1. Случай круговой орбиты

В предельном случае $e = 0$, соответствующем круговой орбите центра масс, система с гамильтонианом (1.1) имеет два частных решения (положения равновесия) [34]. Первое из них задается соотношениями

$$\theta_0 = \frac{\pi}{2}, \quad \psi = \psi_0 \quad (\cos\psi_0 = -\alpha\beta), \quad p_{\theta_0} = \sin\psi_0, \quad p_{\psi_0} = 0 \qquad (1.2)$$

и соответствует такому движению тела (называемому гиперболоидальной прецессией), для которого ось его динамической симметрии расположена перпендикулярно радиус-вектору центра масс и составляет угол $\pi - \psi_0$ с нормалью к плоскости орбиты.

Область выполнения достаточных и одновременно необходимых условий устойчивости гиперболоидальной прецессии задается [34] неравенствами $1 < \alpha < 2$, $0 < \psi_0 < \pi/2$, а частоты ω_1, ω_2 $(\omega_1 \geqslant \omega_2)$ малых колебаний линеаризованных уравнений возмущенного движения являются корнями уравнения

$$\omega^4 - (3\alpha-2)\omega^2 + 3(\alpha-1)\sin^2\psi_0 = 0. \qquad (1.3)$$

Второе частное решение определяется соотношениями

$$\theta = \theta_0 \left(\sin\theta_0 = \frac{\alpha\beta}{3\alpha-4}\right), \quad \psi_0 = 0, \ p_{\theta_0} = 0, \ p_{\psi_0} = 3(\alpha-1)\sin\theta_0\cos\theta_0 \qquad (1.4)$$

и отвечает конической прецессии тела, для которой ось симметрии спутника перпендикулярна вектору скорости центра масс и составляет с радиус-вектором угол θ_0.

Неравенство $\alpha < 1$ является необходимым и достаточным условием устойчивости данного движения. В области, задаваемой неравенствами

$$\frac{4}{3} \leqslant \alpha \leqslant 2, \quad \sin^2\theta \geqslant \frac{18\alpha^2 - 27\alpha + 8 + 2(3\alpha-2)\sqrt{(3\alpha-1)(3\alpha-4)}}{27\alpha^2(\alpha-1)},$$

выполняются только необходимые (не являющиеся достаточными) условия устойчивости. Соответствующее конической прецессии уравнение частот малых линейных колебаний имеет вид

$$\omega^4 - \left[1 + 6(1-\alpha) - 9\alpha(1-\alpha)\sin^2\theta_0\right]\omega^2 + 3\cos^2\theta_0(4-3\alpha)(1-\alpha) = 0. \tag{1.5}$$

Из уравнения (1.3) следует, что для значений параметров

$$\alpha = \frac{6}{5}, \quad \psi_0 = \arcsin\frac{4\sqrt{15}}{25} \quad \left(\beta = -\frac{\sqrt{385}}{30}\right) \tag{1.6}$$

частоты малых линейных колебаний системы таковы: $\omega_1 = 6/5$, $\omega_2 = 2/5$. Эти значения частот связаны двумя соотношениями резонанса третьего порядка и соотношением резонанса четвертого порядка:

$$\omega_1 + 2\omega_2 = 2, \quad 2\omega_1 - \omega_2 = 2, \quad \omega_1 - 3\omega_2 = 0. \tag{1.7}$$

Для уравнения (1.5) решения $\omega_1 = 6/5$ и $\omega_2 = 2/5$ реализуются в точках

$$1)\ \alpha = 0.557571,\ \theta_0 = 1.294174 \ \text{ и } \ 2)\ \alpha = 1.459060, \quad \theta_0 = 0.841967 \tag{1.8}$$

из областей выполнения достаточных и только необходимых условий устойчивости соответственно.

1.2. Случай слабоэллиптической орбиты

В случае слабоэллиптической орбиты из рассматриваемых положений равновесия (1.2) и (1.4) рождаются 2π-периодические по ν, аналитические по e движения спутника, представляемые в виде

$$\tilde\theta(\nu) = \theta_0 + \tilde q_1(\nu),\ \tilde\psi(\nu) = \psi_0 + \tilde q_2(\nu),\ \tilde p_\theta(\nu) = p_{\theta_0} + \tilde p_1(\nu),\ \tilde p_\psi(\nu) = p_{\psi_0} + \tilde p_2(\nu).$$

Эти решения могут быть построены при помощи метода малого параметра Пуанкаре [38]. Приведем их явный вид с точностью до слагаемых порядка e^2 включительно для наборов параметров (1.6) и (1.8), соответствующих точным резонансам на круговой орбите.

В случае гиперболоидальной прецессии для точки (1.6) имеем

$$\tilde q_j(\nu) = \hat q_j(\nu) + O(e^3), \qquad \tilde p_j(\nu) = \hat p_j(\nu) + O(e^3) \qquad (j = 1, 2), \tag{1.9}$$

$$\begin{aligned}
\hat q_1(\nu) &= \frac{10575\sqrt{15}}{39424}\, e^2 \sin 2\nu,\\
\hat q_2(\nu) &= -\frac{8\sqrt{231}}{77}\, e\cos\nu - \frac{\sqrt{231}}{77}\, e^2\left(4 - \frac{3673}{1024}\cos 2\nu\right),\\
\hat p_1(\nu) &= \frac{37\sqrt{15}}{77}\, e^2\left(-\frac{26}{25} + \frac{725}{1024}\cos 2\nu\right),\\
\hat p_2(\nu) &= \frac{\sqrt{231}}{77}\left(8e\sin\nu + \frac{423}{512}\, e^2\sin 2\nu\right).
\end{aligned} \tag{1.10}$$

В случае конической прецессии для первой точки из (1.8) имеем решение (1.9), в котором полагаем

$$\begin{aligned}
\hat{q}_1(\nu) &= 0.308789\, e\cos\nu - e^2(11.442735 - 1.543846\cos 2\nu),\\
\hat{q}_2(\nu) &= 2.043667\, e\sin\nu - 2.555583\, e^2\sin 2\nu,\\
\hat{p}_1(\nu) &= 1.734878\, e\sin\nu - 3.908397\, e^2\sin 2\nu,\\
\hat{p}_2(\nu) &= 2.818998\, e\cos\nu - e^2(12.350424 + 0.528982\cos 2\nu),
\end{aligned} \tag{1.11}$$

а для второй точки (1.8) — решение (1.9) при

$$\begin{aligned}
\hat{q}_1(\nu) &= 4.400529\, e\cos\nu + e^2(78.703197 + 8.137707\cos 2\nu),\\
\hat{q}_2(\nu) &= 3.649377\, e\sin\nu + 5.330592\, e^2\sin 2\nu,\\
\hat{p}_1(\nu) &= -0.751152\, e\sin\nu - 11.695975\, e^2\sin 2\nu,\\
\hat{p}_2(\nu) &= 1.603907\, e\cos\nu + e^2(-28.105787 + 4.192797\cos 2\nu).
\end{aligned} \tag{1.12}$$

Характеристические показатели $\pm i\lambda_j$ $(j = 1,2)$ линеаризованных уравнений возмущенного движения, соответствующие выписанным решениям, таковы, что $\lambda_1 = 6/5 + O(e^2)$, $\lambda_2 = 2/5 + O(e^2)$, и для них точные резонансные соотношения, аналогичные (1.7), не выполняются. Однако, в силу непрерывности по малому параметру характеристических показателей, в трехмерном пространстве параметров имеются точки из окрестностей порождающих точек (1.6) и (1.8), соответствующие точным резонансам.

Для этих значений параметров из-за наличия двойного резонанса третьего порядка соответствующие периодические движения спутника неустойчивы [25]. Цель данной работы — построение в окрестности этих движений аналитических по e периодических (с периодом 10π) движений спутника, обусловленных взаимодействием резонансов третьего и четвертого порядков, и анализ их устойчивости в строгой нелинейной постановке.

§ 2. Резонансные периодические движения в окрестности гиперболоидальной прецессии

Осуществим нормализацию гамильтониана (1.1) (при малых e) в окрестности периодического движения, рождающегося из гиперболоидальной прецессии для значений параметров (1.6) и соответствующего, в трехмерном пространстве параметров, точному резонансу.

2.1. Нормализация гамильтониана при $e = 0$

Сначала нормализуем гамильтониан возмущенного движения для случая $e = 0$. Введем возмущения по формулам

$$\theta = \theta_0 + q_1, \quad \psi = \psi_0 + q_2, \quad p_\theta = p_{\theta_0} + p_1, \quad p_\psi = p_{\psi_0} + p_2 \tag{2.1}$$

и представим гамильтониан в виде $H = H_2 + H_3 + H_4 + \ldots$, где H_k — совокупность слагаемых степени k $(k = 2,3,4)$, а многоточие — совокупность слагаемых не менее пятой степени относительно возмущений.

Линейная каноническая замена $q_j, p_j \to q_j', p_j'$ $(j = 1,2)$ вида

$$\begin{aligned}
q_1 &= -\frac{\sqrt{11}}{4}\, q_1' + \frac{\sqrt{7}}{4}\, q_2', \qquad q_2 = \frac{\sqrt{35}}{8}\, p_1' + \frac{\sqrt{55}}{8}\, p_2',\\
p_1 &= -\frac{\sqrt{11}}{8}\, p_1' + \frac{3\sqrt{7}}{8}\, p_2', \quad p_2 = -\frac{3\sqrt{35}}{20}\, q_1' - \frac{\sqrt{55}}{20}\, q_2'
\end{aligned} \tag{2.2}$$

приводит квадратичную часть гамильтониана к нормальной форме

$$H_{20} = \frac{3}{5}\left({q_1'}^2 + {p_1'}^2\right) + \frac{1}{5}\left({q_2'}^2 + {p_2'}^2\right).$$

Последующая близкая к тождественной нелинейная нормализующая замена $q_j', p_j' \to x_j, X_j$ $(j = 1, 2)$ приводит к нормальной форме слагаемые четвертой степени относительно возмущений, получаемой с учетом имеющегося резонанса четвертого порядка. Это преобразование получено при помощи метода Деприа–Хори [4] и имеет вид

$$q_j' = x_1 + x_{j1} + \frac{1}{2}\, x_{j2}, \qquad\qquad p_j' = X_j + X_{j1} + \frac{1}{2}\, X_{j2}, \tag{2.3}$$

$$x_{j1} = \frac{\partial V_1}{\partial X_j}, \qquad X_{j1} = -\frac{\partial V_1}{\partial x_j}, \qquad x_{j2} = \frac{\partial V_2}{\partial X_j} + (x_{j1}, V_1)\,, \qquad X_{j2} = -\frac{\partial V_2}{\partial x_j} + (X_{j1}, V_1).$$

Круглые скобки в последней строке обозначают скобки Пуассона стоящих в них функций, а

$$\begin{aligned} V_1 = &-\frac{\sqrt{165}}{38400}\left(294x_1^3 - 486x_2^2x_1 + 175X_1^2x_1 - 765X_2^2x_1 - 30x_2X_1X_2\right) - \\ &\qquad - \frac{\sqrt{105}}{268800}\left(-16786x_2^3 + 9186x_1^2x_2 + 8895X_1^2x_2 - 17325X_2^2x_2 - 2790x_1X_1X_2\right), \\ V_2 = &-\frac{52039}{1228800}x_1^3X_1 + \frac{15}{16384}X_1^3x_1 - \frac{59243}{409600}x_2^3X_2 - \frac{5485}{49152}X_2^3x_2 + \\ &+ \frac{1601}{32768}X_2^2x_1X_1 + \frac{144083}{819200}x_2^2x_1X_1 + \frac{3085}{32768}X_1^2x_2X_2 + \frac{93023}{819200}x_1^2x_2X_2 + \\ &+ \sqrt{77}\left[\frac{4573}{1433600}x_1^3X_2 - \frac{559}{21504}X_1^3x_2 + \frac{3491}{860160}X_2^3x_1 + \frac{27}{2048}X_1^2x_1X_2 - \right. \\ &\qquad \left. - \frac{6617}{204800}x_1^2x_2X_1 - \frac{3847}{51200}x_2^2x_1X_2 - \frac{19811}{286720}X_2^2x_2X_1\right]. \end{aligned}$$

В симплектических полярных координатах φ_j, r_j $(j = 1, 2)$, задаваемых формулами $x_j = \sqrt{2r_j}\sin\varphi_j$, $X_j = \sqrt{2r_j}\cos\varphi_j$ $(j = 1, 2)$, нормализованный при $e = 0$ гамильтониан имеет вид

$$\begin{aligned} H_0 = \frac{6}{5}r_1 + \frac{2}{5}r_2 - \frac{3479}{20480}r_1^2 + \frac{2031}{5120}r_1r_2 - \frac{16923}{20480}r_2^2 - \\ - \frac{21\sqrt{77}}{2560}r_1^{1/2}r_2^{3/2}\cos(\varphi_1 - 3\varphi_2) + O\left(r_j^{5/2}\right). \end{aligned} \tag{2.4}$$

2.2. Нормализация неавтономной части гамильтониана

Преобразуем далее неавтономную часть гамильтониана. Рассмотрим окрестность точки (1.6), полагая

$$\alpha = \frac{6}{5} + \sum_{k=1}^{5} e^k\alpha_k + O(e^6), \qquad\qquad \beta = -\frac{\sqrt{385}}{30} + \sum_{k=1}^{5} e^k\beta_k + O(e^6). \tag{2.5}$$

Постоянные коэффициенты α_k и β_k подберем таким образом, чтобы для характеристических показателей линеаризованной в окрестности соответствующего периодического решения системы выполнялись соотношения $\lambda_1 = 6/5 + O(e^6)$, $\lambda_2 = 2/5 + O(e^6)$. Дальнейшие расчеты показали, что коэффициенты α_k и β_k с нечетными индексами равны нулю.

Периодическое решение, отвечающее точке (2.5), в слагаемых до e^2 включительно совпадает с решением (1.10), полученным для случая $e = 0$. Часть периодического решения в слагаемых порядка e^3 и e^4 зависит от значений α_2, β_2 и должно определяться совместно с ними; коэффициенты α_4 и β_4 влияют на решение в слагаемых порядка e^5 и e^6 и т. д.

Вводим возмущения в окрестности периодического решения, полагая

$$\theta = \theta_0 + \tilde{q}_1(\nu) + q_1, \quad \psi = \psi_0 + \tilde{q}_2(\nu) + q_2, \quad p_\theta = p_{\theta_0} + \tilde{p}_1(\nu) + p_1, \quad p_\psi = p_{\psi_0} + \tilde{p}_2(\nu) + p_2.$$

В гамильтониане возмущенного движения осуществляются замены (2.2) и (2.3), затем при помощи близкой к тождественной 2π-периодической по ν унивалентной канонической замены $x_j, X_j \to y_j, Y_j$ $(j = 1, 2)$ проводится нормализация квадратичной части преобразованного гамильтониана в слагаемых до порядка e^5 включительно, приводящая ее к виду

$$\tilde{H}_2 = \frac{3}{5}(y_1^2 + Y_1^2) + \frac{1}{5}(y_2^2 + Y_2^2) + O(e^6). \tag{2.6}$$

Проводя расчеты, находим, что

$$\begin{aligned} &\alpha_2 = -\frac{128473}{255255}, && \beta_2 = -\frac{82274957\sqrt{385}}{707566860}, \\ &\alpha_4 = \frac{41263286648313365643547}{27902471272797516 59520}, && \beta_4 = \frac{2371791327345661867901 3107\sqrt{385}}{7734565036819471600189440}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Соответствующее периодическое решение приведем явно до слагаемых порядка e^3 включительно:

$$\begin{aligned} \tilde{q}_1(\nu) &= \hat{q}_1(\nu) - \sqrt{15}e^3\left(\frac{255320525}{1097800704}\sin 3\nu + \frac{1829475}{6071296}\sin\nu\right) + O(e^4), \\ \tilde{q}_2(\nu) &= \hat{q}_2(\nu) - \sqrt{231}e^3\left(\frac{22327891}{431278848}\cos 3\nu - \frac{2066615401}{2012634624}\cos\nu\right) + O(e^4), \\ \tilde{p}_1(\nu) &= \hat{p}_1(\nu) - \sqrt{15}e^3\left(\frac{32149265}{137225088}\cos 3\nu - \frac{86715}{758912}\cos\nu\right) + O(e^4), \\ \tilde{p}_2(\nu) &= \hat{p}_2(\nu) + \sqrt{231}e^3\left(\frac{1037875}{1006317312}\sin 3\nu - \frac{2377130125}{2012634624}\sin\nu\right) + O(e^4). \end{aligned} \tag{2.8}$$

Входящие сюда функции $\hat{q}_j(\nu)$, $\hat{p}_j(\nu)$ $(j = 1, 2)$ определены в (1.10).

Указанная нормализующая замена переменных подбирается так, чтобы одновременно с квадратичными слагаемыми к нормальной форме были приведены слагаемые третьей и четвертой степеней относительно возмущений (первые до порядков e^3 и вторые до порядка e включительно). В результате форма четвертой степени порядка e, а также формы третьей степени порядков e и e^3 уничтожаются. В форме третьей степени порядка e^2 остаются только слагаемые с резонансными гармониками.

Процедура нормализации форм второй, третьей и четвертой степеней может быть осуществлена методом Депри–Хори. Описанная замена переменных представляется в виде, аналогичном (2.3):

$$x_1 = y_j + ey_{j1} + \frac{e^2}{2}\,y_{j2} + O(e^3), \qquad X_1 = Y_j + eY_{j1} + \frac{e^2}{2}\,Y_{j2} + O(e^3) \qquad (j = 1, 2),$$

$$y_{j1} = \frac{\partial W_1}{\partial Y_j}, \qquad Y_{j1} = -\frac{\partial W_1}{\partial y_j}, \qquad y_{j2} = \frac{\partial W_2}{\partial Y_j} + (y_{j1}, W_1), \qquad Y_{j2} = -\frac{\partial W_2}{\partial y_2} + (Y_{j1}, W_1).$$

Сначала нормализуются слагаемые порядка e в формах второй, третьей и четвертой степеней относительно возмущений. Соответствующая часть производящей функции есть сумма трех однородных форм: $W_1 = W_{12} + W_{13} + W_{14}$, где

$$\begin{aligned} W_{12} = &\left[\frac{167}{48}\,y_2Y_2 - \frac{219}{1904}\,y_1Y_1 + \frac{\sqrt{77}}{16016}\,(4047y_2Y_1 - 1699y_1Y_2)\right]\cos\nu + \\ &+ \left[\frac{1783}{3808}\,y_1^2 + \frac{31}{96}\,y_2^2 + \frac{2027}{7616}\,Y_1^2 - \frac{629}{192}\,Y_2^2 + \frac{\sqrt{77}}{32032}\,(6154y_1y_2 + 2595Y_1Y_2)\right]\sin\nu, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
W_{13} = \Bigg[\sqrt{165}\,\Bigg(&\frac{28837173}{324163840}\,y_1^3 - \frac{249503}{1084160}\,y_2^2 y_1 + \frac{3410345}{37047296}\,Y_1^2 y_1 - \\
&- \frac{1446163}{4336640}\,Y_2^2 y_1 + \frac{3051}{28160}\,y_2 Y_1 Y_2\Bigg) + \sqrt{105}\,\Bigg(\frac{21289}{689920}\,y_2^3 + \frac{22661}{306432}\,y_1^2 y_2 + \\
&+ \frac{564173}{6128640}\,Y_1^2 y_2 - (\frac{420445}{551936}\,Y_2^2 y_2 + \frac{10247}{3064320}\,y_1 Y_1 Y_2\Bigg)\Bigg]\cos\nu + \\
&+ \Bigg[\sqrt{165}\,\Bigg(-\frac{40135083}{518662144}\,Y_1^3 - \frac{17538271}{277854720}\,y_1^2 Y_1 + \frac{75829}{309760}\,y_2^2 Y_1 + \\
&+ \frac{2745933}{8673280}\,Y_2^2 Y_1 \frac{2745933}{8673280}\,Y_2^2 Y_1 + \frac{3083}{98560}\,y_1 Y_2 y_2\Bigg) + \sqrt{105}\,\Bigg(\frac{1670729}{3311616}\,Y_2^3 - \\
&- \frac{324143}{3064320}\,Y_2 y_1^2 - \frac{373789}{137984}\,Y_2 y_2^2 - \frac{1535929}{12257280}\,Y_2 Y_1^2 - \frac{54533}{1532160}\,y_1 y_2 Y_1\Bigg)\Bigg]\sin\nu.
\end{aligned}
$$

Явный вид формы W_{14} не приводим в силу громоздкости, далее он не потребуется.

Затем проводится нормализация слагаемых порядка e^2 в формах второй и третьей степеней. Для производящей функции W_2 имеем выражение $W_2 = W_{22} + W_{23}$, где

$$
\begin{aligned}
W_{22} = -\Bigg[&\frac{7387599819}{3066871808}\,y_1 Y_1 + \frac{1020577865}{114802688}\,Y_2 y_2 - \\
&- \sqrt{77}\,\Bigg(\frac{2286900347}{5854937088}\,Y_2 y_1 + \frac{180091315}{1951645696}\,y_2 Y_1\Bigg)\Bigg]\cos 2\nu + \\
&+ \Bigg[-\frac{5218288875}{3066871808}\,y_1^2 - \frac{408876899}{114802688}\,y_2^2 + \frac{6677149539}{6133743616}\,Y_1^2 + \\
&+ \frac{1314764067}{229605376}\,Y_2^2 + \sqrt{77}\,\Bigg(\frac{120243391}{2927468544}\,y_1 y_2 + \frac{649071153}{1951645696}\,Y_1 Y_2\Bigg)\Bigg]\sin 2\nu - \\
&- \frac{403099}{1633632}\,y_1 Y_1 + \frac{457675}{49504}\,Y_2 y_2 - \sqrt{77}\,\Bigg(\frac{2532147}{41929888}\,Y_2 y_1 + \frac{9439873}{41929888}\,y_2 Y_1\Bigg).
\end{aligned}
$$

Явный вид формы W_{23} третьей степени также не приводим.

Далее нормализуем слагаемые второй и третьей степеней выше второго порядка по e (соответствующая часть замены также не потребуется).

В преобразованном гамильтониане перейдем от переменных y_j, Y_j к симплектическим полярным координатам и, сохраняя за ними обозначения, принятые в (2.4), запишем гамильтониан в виде

$$
\begin{aligned}
H = H_0 + e^2\,\Bigg[&\frac{8731191\sqrt{330}}{14417920}\,r_1^{1/2} r_2 \cos(2\varphi_2 + \varphi_1 - 2\nu) + \\
&+ \frac{2772049349\sqrt{210}}{13776322560}\,r_1 r_2^{1/2} \cos(2\varphi_1 - \varphi_2 - 2\nu)\Bigg] + e^6 \tilde{H}_2 + e^4 \tilde{H}_3 + e^2 \tilde{H}_4 + O_5. \quad (2.9)
\end{aligned}
$$

Автономная часть H_0 определена в (2.4). Через $e^k \tilde{H}_\ell$ обозначена совокупность слагаемых ℓ-й степени по $r_j^{1/2}$, имеющих по e порядок не меньший, чем k, а O_5 — совокупность слагаемых пятой степени и выше по $r_j^{1/2}$; эти четыре группы слагаемых 2π-периодичны по ν и переменным φ_1, φ_2.

Проведем дальнейшее преобразование гамильтониана. Унивалентная каноническая замена переменных $\varphi_j, r_j \to R_j, \Phi_j$ по формулам

$$
r_j = R_j \ (j = 1, 2), \qquad \varphi_1 = \Phi_1 + \frac{6}{5}\nu, \qquad \varphi_2 = \Phi_2 + \frac{2}{5}\nu \qquad (2.10)
$$

исключает в (2.9) переменную ν из слагаемых с резонансными гармониками и уничтожает слагаемые, линейные по r_j. Последние четыре группы слагаемых в преобразованном гамильтониане 10π-периодичны по ν.

Осуществим еще одну каноническую замену

$$\Phi_j = \Phi_j, \qquad R_j = e^4\xi\rho_j \quad (j = 1, 2)$$

и перейдем к новой независимой переменной $\tau = e^4\eta\nu$. Здесь

$$\xi = \frac{127056160464135}{165203771392}, \qquad \eta = \frac{76233696278481}{249879855104}.$$

Получаем в итоге

$$F = \rho_1^{1/2}\rho_2\cos(2\Phi_2 + \Phi_1) + \frac{5544098698\sqrt{77}}{183538366011}\rho_1\rho_2^{1/2}\cos(2\Phi_1 - \Phi_2) - \frac{3479}{8124}\rho_1^2 + \\ + \rho_1\rho_2 - \frac{5641}{2708}\rho_2^2 - \frac{14\sqrt{77}}{677}\rho_1^{1/2}\rho_2^{3/2}\cos(\Phi_1 - 3\Phi_2) + O(e^2). \quad (2.11)$$

Слагаемое $O(e^2)$ 2π-периодично по Φ_1, Φ_2 и периодично по τ с периодом порядка e^4.

2.3. Положения равновесия модельной системы

Отбрасывая в (2.11) последнее слагаемое, получим модельный гамильтониан, характерный для рассматриваемого здесь резонансного случая. Найдем отличные от тривиального положения равновесия отвечающей ему модельной системы.

Приравнивая нулю частные производные функции F по Φ_j и ρ_j $(j = 1, 2)$, получим систему уравнений для нахождения равновесных значений переменных:

$$\rho_1^{1/2}\rho_2\sin\Psi_1 + \frac{11088197396\sqrt{77}}{183538366011}\rho_1\rho_2^{1/2}\sin\Psi_2 - \frac{14\sqrt{77}}{677}\rho_1^{1/2}\rho_2^{3/2}\sin\Psi_{21} = 0,$$
$$2\rho_1^{1/2}\rho_2\sin\Psi_1 - \frac{5544098698\sqrt{77}}{183538366011}\rho_1\rho_2^{1/2}\sin\Psi_2 + \frac{42\sqrt{77}}{677}\rho_1^{1/2}\rho_2^{3/2}\sin\Psi_{21} = 0,$$
$$\frac{\rho_2}{2\rho_1^{1/2}}\cos\Psi_1 + \frac{5544098698\sqrt{77}}{183538366011}\rho_2^{1/2}\cos\Psi_2 + \rho_2 - \frac{3479}{4062}\rho_1 - \frac{7\sqrt{77}}{677}\frac{\rho_2^{3/2}}{\rho_1^{1/2}}\cos\Psi_{21} = 0,$$
$$\rho_1^{1/2}\cos\Psi_1 + \frac{2772049349\sqrt{77}}{183538366011}\frac{\rho_1}{\rho_2^{1/2}}\cos\Psi_2 + \rho_1 - \frac{5641}{1354}\rho_2 - \frac{21\sqrt{77}}{677}\rho_1^{1/2}\rho_2^{1/2}\cos\Psi_{21} = 0.$$

Здесь введены обозначения $\Psi_1 = 2\Phi_2 + \Phi_1$, $\Psi_2 = 2\Phi_1 - \Phi_2$, $\Psi_{21} = \Psi_2 - \Psi_1$.

Рассмотрим сначала случай, когда $\sin\Psi_j \neq 0$ $(j = 1, 2)$, $\sin\Psi_{21} \neq 0$. Разрешим первые два уравнения этой системы относительно ρ_1, ρ_2:

$$\rho_1 = \frac{531439130618438956567 29}{122948121492661180816}\,\frac{\sin^4\Psi_1}{\sin^2\Psi_2\sin^2\Psi_{21}}, \qquad \rho_2 = \frac{458329}{15092}\,\frac{\sin^2\Psi_1}{\sin^2\Psi_{21}}.$$

Подставляя эти выражения в третье и четвертое уравнения, получим систему двух уравнений $f_1(\Psi_1, \Psi_2) = 0$, $f_2(\Psi_1, \Psi_2) = 0$. Функции f_1 и f_2 имеют по Ψ_1, Ψ_2 период π, их явный вид в силу громоздкости не приводим.

Геометрическое место точек в плоскости величин Ψ_1, Ψ_2, удовлетворяющих условиям $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, представлено на рис. 1. В области, задаваемой условиями $-\pi/2 \leqslant \Psi_1 \leqslant \pi/2$, $0 \leqslant \Psi_2 \leqslant \pi$, изображенные кривые имеют только две общие точки $(0, 0)$ и $(0, \pi)$, которые на данном этапе исключены из рассмотрения. Таким образом, в рассматриваемой системе нет положений равновесия, для которых $\sin\Psi_j \neq 0$, $\sin\Psi_{21} \neq 0$.

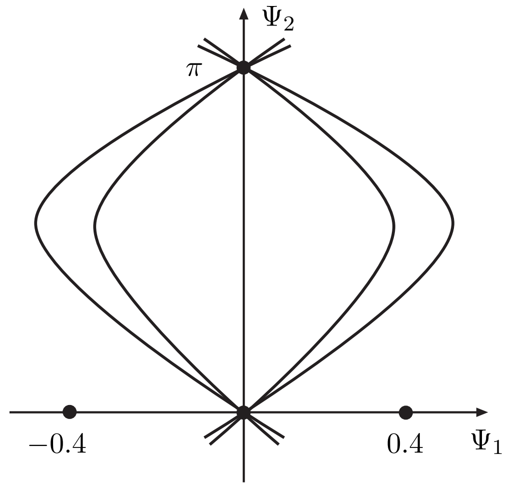

Рис. 1. Графический анализ системы уравнений $f_1 = 0$, $f_2 = 0$

При $\sin\Psi_1 = 0$ и $\sin\Psi_2 = 0$ первые два уравнения системы тождественно удовлетворяются. Положим $\cos\Psi_j = \delta_j$ ($j = 1$ или -1). Подставляя различные варианты пар (δ_1, δ_2) в третье и четвертое уравнения системы, найдем следующие решения:

$$\begin{array}{llll} 1.\ \delta_1 = 1, & \delta_2 = 1, & \rho_1 = 1.044473, & \rho_2 = 0.496149; \\ 2.\ \delta_1 = 1, & \delta_2 = -1, & \rho_1 = 0.346079, & \rho_2 = 0.218707; \\ 3.\ \delta_1 = -1, & \delta_2 = 1, & \rho_1 = 0.103127 \cdot 10^{-2}, & \rho_2 = 0.192837 \cdot 10^{-4}. \end{array} \tag{2.12}$$

Исследуем устойчивость этих решений. Введем в модельном гамильтониане возмущения по формулам $\Phi_j = \Phi_{j0} + x_j$, $\rho_j = \rho_{j0} + y_j$ ($j = 1, 2$) относительно найденных равновесных значений Φ_{j0} и ρ_{j0} (2.12). Характеристическое уравнение линеаризованных уравнений возмущенного движения имеет вид

$$\lambda^4 + a\lambda^2 + b = 0. \tag{2.13}$$

Если выполнены условия

$$a > 0, \qquad b > 0, \qquad d = a^2 - 4b > 0,$$

то корни уравнения чисто мнимые, и рассматриваемое положение равновесия устойчиво в линейном приближении. Если знак хотя бы одного из неравенств меняется на противоположный, то характеристическое уравнение имеет корни с положительной вещественной частью, и положение равновесия неустойчиво (причем не только в линейной, но и в полной системе).

Для равновесия 1 квадратичная часть гамильтониана возмущенного движения имеет вид

$$h_2 = -0.611142\, x_1^2 - 0.818542\, x_1 x_2 - 0.819976 x_2^2 - \\ - 0.478911\, y_1^2 + 1.583593\, y_1 y_2 - 2.280843\, y_2^2. \tag{2.14}$$

Отсюда находим, что $a = 6.059203$, $b = 2.484149$, $d = 26.777342$, и данное равновесие устойчиво в линейном приближении. Равновесие 1 устойчиво и в полной модельной системе на основании теоремы Ляпунова об устойчивости. Это следует из того, что форма h_2 отрицательно определена и в автономной системе гамильтониан является первым интегралом.

Рассматривая характеристические уравнения, отвечающие равновесиям 2 и 3, находим соответственно $a = 1.073075$, $b = -0.174557 < 0$ и $a = -0.913964 \cdot 10^{-3} < 0$, $b = -6.163395 \cdot 10^{-9} < 0$. Таким образом, оба эти равновесия неустойчивы.

2.4. Резонансные периодические движения спутника

2.4.1. Периодические движения. Вернемся к полной системе с гамильтонианом (2.11). В окрестности рассмотренных положений равновесия модельной системы полную систему можно рассматривать как квазилинейную с возмущениями порядка e^2. Корни характеристических уравнений линеаризованных уравнений возмущенного движения порядка единицы, в то время как возмущения в слагаемых $O(e^2)$ периодичны по τ с периодом $T \sim e^4$. Таким образом, имеет место нерезонансный случай теории периодических движений Пуанкаре [38], и из найденных положений равновесия модельной системы в полной системе с гамильтонианом (2.11) рождаются аналитические по e, T-периодические по τ решения, имеющие вид

$$\varrho_j = \varrho_{j0} + O(e^2), \qquad \Phi_j = \Phi_{j0} + O(e^2) \quad (j = 1, 2).$$

В исходной системе им отвечают аналитические по e, 10π-периодические по ν резонансные движения оси симметрии спутника, происходящие в окрестности движения (2.8), (1.10). Проводя обратную последовательность замен переменных из разд. 2.1, 2.2, получим описывающие их соотношения вида

$$\begin{aligned}
q_1 = q_1(\nu) = &-\frac{\sqrt{2}}{4}\left[\sqrt{11}\sqrt{\xi\rho_{10}}\sin\left(\frac{6}{5}\nu + \Phi_{10}\right) - \sqrt{7}\sqrt{\xi\rho_{20}}\sin\left(\frac{2}{5}\nu + \Phi_{20}\right)\right]e^2 - \\
&-\frac{\sqrt{2}}{408408}\left[3\sqrt{11}\sqrt{\xi\rho_{10}}\left(10087\sin\left(\frac{11}{5}\nu + \Phi_{10}\right) + 11271\sin\left(\frac{1}{5}\nu + \Phi_{10}\right)\right) + \right.\\
&\left. + 187\sqrt{7}\sqrt{\xi\rho_{20}}\left(1841\sin\left(\frac{7}{5}\nu + \Phi_{20}\right) - 2223\sin\left(-\frac{3}{5}\nu + \Phi_{20}\right)\right)\right]e^3 + O\left(e^4\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q_2 = q_2(\nu) = &\frac{\sqrt{10}}{8}\left[\sqrt{7}\sqrt{\xi\rho_{10}}\cos\left(\frac{6}{5}\nu + \Phi_{10}\right) + \sqrt{11}\sqrt{\xi\rho_{20}}\cos\left(\frac{2}{5}\nu + \Phi_{20}\right)\right]e^2 - \\
&-\frac{\sqrt{10}}{204204}\left[33\sqrt{7}\sqrt{\xi\rho_{10}}\left(-149\cos\left(\frac{11}{5}\nu + \Phi_{10}\right)\right) + 2210\cos\left(\frac{1}{5}\nu + \Phi_{10}\right) + \right.\\
&\left. + 119\sqrt{11}\sqrt{\xi\rho_{20}}\left(80\cos\left(\frac{7}{5}\nu + \Phi_{20}\right) + 507\cos\left(-\frac{3}{5}\nu + \Phi_{20}\right)\right)\right]e^3 + O(e^4).
\end{aligned}$$

Рассмотрим первую порождающую точку из (2.12). В области $0 \leqslant \Phi_{j0} < 2\pi$ $(j = 1, 2)$ существует пять пар точек (Φ_{10}, Φ_{20}) вида

$$(0, 0)\,, \qquad \left(\frac{2}{5}\pi, \frac{4}{5}\pi\right), \qquad \left(\frac{4}{5}\pi, \frac{8}{5}\pi\right), \qquad \left(\frac{6}{5}\pi, \frac{2}{5}\pi\right), \qquad \left(\frac{8}{5}\pi, \frac{6}{5}\pi\right),$$

удовлетворяющих условию $\delta_1 = \delta_2 = 1$. Из приведенных соотношений, однако, следует, что решения, отвечающие второй и следующим парам, отличается от решения для пары $(0, 0)$ сдвигом по ν соответственно на -2π, -4π, 4π и 2π. Эти пять периодических решений соответствуют одному и тому же движению спутника, задаваемому формулами

$$\begin{aligned}
q_1(\nu) = &\left(-33.234394\,\sin\frac{6}{5}\nu + 18.272509\,\sin\frac{2}{5}\nu\right)e^2 - \left(9.850013\,\sin\frac{11}{5}\nu + \right.\\
&\left. + 11.006196\,\sin\frac{1}{5}\nu + 61.611152\,\sin\frac{7}{5}\nu + 74.395215\,\sin\frac{3}{5}\nu\right)e^3 + O\left(e^4\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q_2(\nu) = &\left(29.641178\,\cos\frac{6}{5}\nu + 25.609465\,\cos\frac{2}{5}\nu\right)e^2 + \left(5.709807\,\cos\frac{11}{5}\nu - \right.\\
&\left. - 84.689079\,\cos\frac{1}{5}\nu - 9.551316\,\cos\frac{7}{5}\nu - 60.531463\,\cos\frac{3}{5}\nu\right)e^3 + O\left(e^4\right).
\end{aligned}$$

Аналогичные выводы делаются для второй и третьей порождающей точек из (2.12), для них берем $\Phi_{10} = 0$, $\Phi_{20} = \pi$ и $\Phi_{10} = \pi$, $\Phi_{20} = 0$ соответственно. Для второй точки имеем периодическое движение вида

$$q_1(\nu) = \left(-19.130515 \sin\frac{6}{5}\nu - 12.131749 \sin\frac{2}{5}\nu\right) e^2 + \left(-5.669904 \sin\frac{11}{5}\nu - {} \right.$$
$$\left. - 6.335430 \sin\frac{1}{5}\nu + 40.905770 \sin\frac{7}{5}\nu + 49.393551 \sin\frac{3}{5}\nu\right) e^3 + O\left(e^4\right),$$

$$q_2(\nu) = \left(17.062173 \cos\frac{6}{5}\nu - 17.003008 \cos\frac{2}{5}\nu\right) e^2 + \left(3.286702 \cos\frac{11}{5}\nu - {} \right.$$
$$\left. - 48.749066 \cos\frac{1}{5}\nu + 6.341448 \cos\frac{7}{5}\nu + 40.188928 \cos\frac{3}{5}\nu\right) e^3 + O\left(e^4\right),$$

а для третьей точки — вида

$$q_1(\nu) = \left(1.044301 \sin\frac{6}{5}\nu + 0.113917 \sin\frac{2}{5}\nu\right) e^2 + \left(0.309510 \sin\frac{11}{5}\nu + {} \right.$$
$$\left. + 0.345840 \sin\frac{1}{5}\nu - 0.384104 \sin\frac{7}{5}\nu - 0.463804 \sin\frac{3}{5}\nu\right) e^3 + O\left(e^4\right),$$

$$q_2(\nu) = \left(-0.931394 \cos\frac{6}{5}\nu + 0.159658 \cos\frac{2}{5}\nu\right) e^2 + \left(-0.179415 \cos\frac{11}{5}\nu + {} \right.$$
$$\left. + 2.661125 \cos\frac{1}{5}\nu - 0.059546 \cos\frac{7}{5}\nu - 0.377373 \cos\frac{3}{5}\nu\right) e^3 + O\left(e^4\right).$$

В плоскости величин q_1, q_2 эти три пары соотношений описывают замкнутые кривые, имеющие (если пренебречь слагаемыми порядка e^3 и выше) вид, показанный на рис. 2 *а*, *б*, *в* соответственно для случая $e = 0.1$.

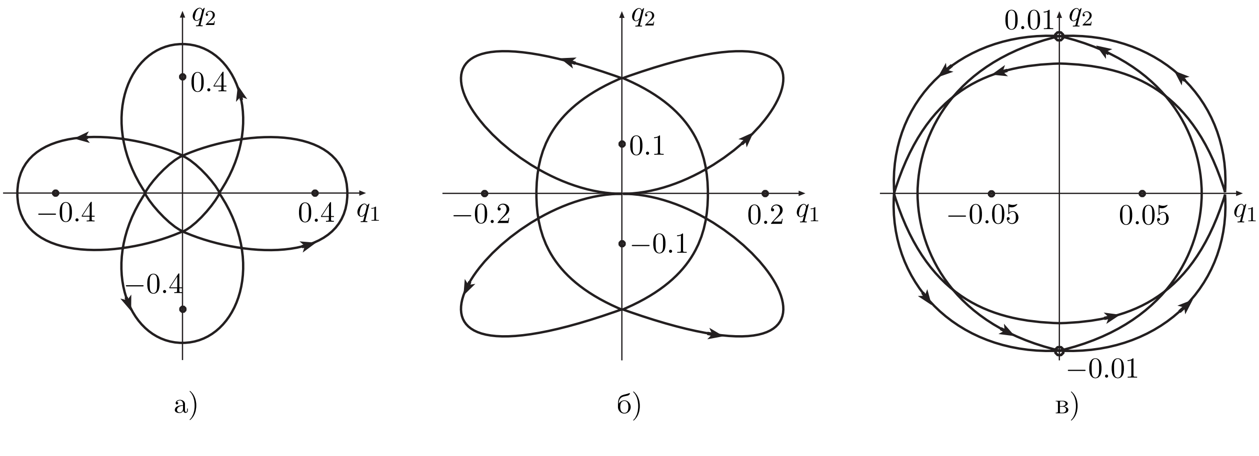

Рис. 2. Периодические решения в окрестности движения (2.7), (1.10)

2.4.2. Устойчивость периодических движений. Рассмотрим вопрос об устойчивости найденных периодических движений. Движение, рождающееся из устойчивого положения равновесия 1 модельной системы, устойчиво в линейном приближении, а движения, рождающиеся из неустойчивых положений равновесия 2 и 3, также неустойчивы. Это следует из непрерывности по малому параметру соответствующих характеристических показателей линеаризованных уравнений возмущенного движения.

Чтобы решить вопрос об устойчивости первого периодического движения в строгой нелинейной постановке, рассмотрим гамильтониан возмущенного движения полной системы и осуществим его нормализацию в слагаемых до четвертой степени включительно относительно возмущений. Учитывая выражение (2.14) для главной части квадратичной формы, получаем нормализованный гамильтониан возмущенного движения в виде

$$H_n = -\left(\Omega_1 + O(e)\right) r_1 - \left(\Omega_2 + O(e)\right) r_2 + \\ + \left(c_{20} + O(e)\right) r_1^2 + \left(c_{11} + O(e)\right) r_1 r_2 + \left(c_{02} + O(e)\right) r_2^2 + O_5, \quad (2.15)$$

$$\Omega_1 = 2.370009, \qquad \Omega_2 = 0.665026, \qquad c_{20} = 2.157979, \qquad c_{11} = 2.487900, \qquad c_{02} = 0.511268.$$

Поправки $O(e)$ к частотам Ω_j и коэффициентам c_{ij} — постоянные числа.

Так как выполнено условие

$$\Delta = c_{11}^2 - 4c_{20}c_{02} = 1.776428 \neq 0,$$

то для достаточно малых значений e рассматриваемое периодическое движение устойчиво для большинства (в смысле меры Лебега) начальных условий [4]. Кроме того, квадратичная форма

$$c_{20}r_1^2 + c_{11}r_1r_2 + c_{02}r_2$$

положительно определена при $r_1 \geqslant 0$, $r_2 \geqslant 0$, что означает формальную устойчивость данного движения [39].

§ 3. Резонансные периодические движения в окрестности конической прецессии

Исследуем теперь резонансные периодические движения спутника в окрестности его конической прецессии для порождающих точек (1.8). Процедура построения и анализа совершенно аналогична рассмотренной в разд. 2. Опуская детали, опишем основные этапы и результаты исследования.

3.1. Периодические движения вблизи первой точки (1.8)

3.1.1. Преобразование гамильтониана. Приведем к нормальной форме часть гамильтониана возмущенного движения при $e = 0$. Введем возмущения по формулам (2.1). Осуществим линейное каноническое преобразование

$$q_1 = 0.270890\, q_1' - 1.509919\, q_2', \qquad q_2 = 0.943897\, p_1' + 0.169342\, p_2',$$
$$p_1 = 1.268965\, p_1' - 0.434626\, p_2', \qquad p_2 = -0.695256\, q_1' - 2.029920\, q_2'.$$

Затем при помощи близкого к тождественному преобразования, аналогичного (2.3), уничтожим слагаемые третьей степени и нормализуем слагаемые четвертой степени. Получаем гамильтониан, имеющий в симплектических полярных координатах вид

$$H_0 = \frac{6}{5}r_1 + \frac{2}{5}r_2 - 0.424836\, r_1^2 - 2.842471\, r_1 r_2 - 8.690427\, r_2^2 + \\ + 2.612670\, r_1^{1/2} r_2^{3/2} \cos(\varphi_1 - 3\varphi_2) + O\left(r_j^{5/2}\right). \quad (3.1)$$

При $e \neq 0$ рассмотрим окрестность резонансной точки в плоскости параметров α, θ_0, полагая

$$\alpha = \alpha_* + e^2\alpha_2 + e^4\alpha_4 + O(e^6), \qquad \theta_0 = \theta_{0*} + e^2\theta_{02} + e^4\theta_{04} + O(e^6), \quad (3.2)$$

где (α_*, θ_{0*}) — первый набор из (1.8). Если принять, что

$$\alpha_2 = 1.287951, \qquad \alpha_4 = -361.154100, \qquad \theta_{02} = 23.784455, \qquad \theta_{04} = 1677.152504, \tag{3.3}$$

то периодическое движение спутника, рождающееся из конической прецессии для точки (3.2), будет иметь вид

$$\begin{aligned}
\tilde{q}_1(\nu) &= \hat{q}_1(\nu) - e^3(17.338297\cos\nu + 2.170284\cos 3\nu) + O(e^4),\\
\tilde{q}_2(\nu) &= \hat{q}_2(\nu) - e^3(134.594004\sin\nu - 3.1132581\sin 3\nu) + O(e^4),\\
\tilde{p}_1(\nu) &= \hat{p}_1(\nu) - e^3(123.532203\sin\nu - 4.770203\sin 3\nu) + O(e^4),\\
\tilde{p}_2(\nu) &= \hat{p}_2(\nu) - e^3(157.839743\cos\nu - 0.040622\cos 3\nu) + O(e^4),
\end{aligned} \tag{3.4}$$

причем функции $\hat{q}_j(\nu)$ и $\hat{p}_j(\nu)$ $(j = 1, 2)$ определены в (1.11). Нормализованная до слагаемых порядка e^6 квадратичная часть соответствующего этому движению возмущенного гамильтониана имеет вид (2.6).

Одновременно приводим к нормальной форме (до порядков по e, указанных в разд. 2.2) слагаемые третьей и четвертой степеней относительно возмущений. Преобразованный гамильтониан примет вид аналогичный (2.9):

$$\begin{aligned}
H = H_0 + \sqrt{2}e^2 \Big[&24.250690\, r_1 r_2^{1/2}\sin(2\varphi_1 - \varphi_2 - 2\nu) -\\
&- 76.683915\, r_1^{1/2} r_2 \sin(2\varphi_2 + \varphi_1 - 2\nu)\Big] + e^6\tilde{H}_2 + e^4\tilde{H}_3 + e^2\tilde{H}_4 + O_5.
\end{aligned}$$

Функция H_0 определена в (3.1).

Проведем далее каноническую замену (2.10), затем положим $R_j = e^4\xi\rho_j$, заменим Φ_j на $\Phi_j - \pi/2$ $(j = 1, 2)$ и введем независимую переменную $\tau = e^4\eta\nu$. Здесь введены обозначения $\xi = 1455.614780$, $\eta = 4137.542851$.

Получаем гамильтониан вида

$$\begin{aligned}
F = 0.316242\rho_1\rho_2^{1/2}\cos(2\Phi_1 - \Phi_2) + \rho_1^{1/2}\rho_2\cos(2\Phi_2 + \Phi_1) + 0.149460\rho_1^2 +\\
+ 3.057349\rho_2^2 + \rho_1\rho_2 + 0.919154\rho_1^{1/2}\rho_2^{3/2}\cos(\Phi_1 - 3\Phi_2) + O\left(e^2\right).
\end{aligned} \tag{3.5}$$

3.1.2. Положения равновесия модельной системы. Отбрасывая в (3.5) последнее слагаемое, получаем модельную систему. Для ее отличных от тривиального положений равновесия, как и в разд. 2.3, имеем условия $\sin\Psi_1 = \sin\Psi_2 = 0$ (величины Ψ_j введены в разд. 2.3).

Полагая $\cos\Psi_1 = \delta_1$, $\cos\Psi_2 = \delta_2$ $(\delta_j = 1$ или $-1)$, выпишем уравнения для равновесных значений ρ_1, ρ_2:

$$\begin{aligned}
0.316242\delta_2\rho_2^{1/2} + \frac{\delta_1\rho_2}{2\rho_1^{1/2}} + 0.298920\rho_1 + \rho_2 + \frac{0.459577\delta_1\delta_2\rho_2^{3/2}}{\rho_1^{1/2}} = 0,\\
\frac{0.158121\rho_1\delta_2}{\rho_2^{1/2}} + \delta_1\rho_1^{1/2} + 6.114699\rho_2 + \rho_1 + 1.378732\delta_1\delta_2\rho_1^{1/2}\rho_2^{1/2} = 0.
\end{aligned}$$

Данная система имеет решения для трех наборов (δ_1, δ_2):

1. $\delta_1 = 1$, $\quad\delta_2 = -1$, $\quad\rho_1 = 0.012155$, $\quad\rho_2 = 0.000250$;
2. $\delta_1 = -1$, $\quad\delta_2 = 1$, $\quad\rho_1 = 0.028392$, $\quad\rho_2 = 0.024077$;
3. $\delta_1 = -1$, $\quad\delta_2 = -1$, $\quad\rho_1 = 0.206129$, $\quad\rho_2 = 0.044312$.

Для найденных положений равновесия коэффициенты соответствующих характеристических уравнений (2.13) таковы:

1. $a = -0.958798 \cdot 10^{-2}$, $\quad b = -0.129720 \cdot 10^{-5}$;
2. $a = 0.0648609$, $\quad b = -0.592875 \cdot 10^{-3}$;
3. $a = 0.555051$, $\quad b = 0.0122799$.

Отсюда следует, что положения равновесия 1 и 2 неустойчивы, а положение равновесия 3 устойчиво в линейном приближении. Решение 3 устойчиво и в полной модельной системе в силу знакоопределенности квадратичной части соответствующего гамильтониана возмущенного движения.

3.1.3. Резонансные периодические движения. Используя метод Пуанкаре и осуществляя обратную последовательность замен переменных, строим резонансные периодические движения оси симметрии спутника, происходящие в окрестности движения (3.4), (1.11). Запишем их в виде $q_1 = q_1(\nu)$, $q_2 = q_2(\nu)$, где соответственно имеем

1.

$$q_1(\nu) = \left(1.611427\,\sin\frac{6}{5}\nu + 1.288410\,\sin\frac{2}{5}\nu\right)e^2 + \left(-5.631644\,\sin\frac{11}{5}\nu + \right.$$
$$\left. +47.216983\,\sin\frac{1}{5}\nu - 1.973375\,\sin\frac{7}{5}\nu + 6.067030\,\sin\frac{3}{5}\nu\right)e^3 + O\left(e^4\right),$$

$$q_2(\nu) = \left(5.614897\,\cos\frac{6}{5}\nu - 0.144499\,\cos\frac{2}{5}\nu\right)e^2 + \left(-8.374474\,\cos\frac{11}{5}\nu + \right.$$
$$\left. +4.644567\,\cos\frac{1}{5}\nu - 3.314436\,\cos\frac{7}{5}\nu - 1.220345\,\cos\frac{3}{5}\nu\right)e^3 + O\left(e^4\right);$$

2.

$$q_1(\nu) = \left(-2.462814\,\sin\frac{6}{5}\nu - 12.641314\,\sin\frac{2}{5}\nu\right)e^2 + \left(8.607089\,\sin\frac{11}{5}\nu - \right.$$
$$\left. -72.163790\,\sin\frac{1}{5}\nu + 19.361884\,\sin\frac{7}{5}\nu - 59.527003\,\sin\frac{3}{5}\nu\right)e^3 + O\left(e^4\right),$$

$$q_2(\nu) = \left(-8.581494\,\cos\frac{6}{5}\nu + 1.417759\,\cos\frac{2}{5}\nu\right)e^2 + \left(12.799076\,\cos\frac{11}{5}\nu - \right.$$
$$\left. -7.098496\,\cos\frac{1}{5}\nu + 32.519772\,\cos\frac{7}{5}\nu + 11.973486\,\cos\frac{3}{5}\nu\right)e^3 + O\left(e^4\right);$$

3.

$$q_1(\nu) = \left(-6.635919\,\sin\frac{6}{5}\nu + 17.149494\,\sin\frac{2}{5}\nu\right)e^2 + \left(23.191335\,\sin\frac{11}{5}\nu - \right.$$
$$\left. -194.441425\,\sin\frac{1}{5}\nu - 26.266773\,\sin\frac{7}{5}\nu + 80.755689\,\sin\frac{3}{5}\nu\right)e^3 + O\left(e^4\right),$$

$$q_2(\nu) = \left(-23.122372\,\cos\frac{6}{5}\nu - 1.923364\,\cos\frac{2}{5}\nu\right)e^2 + \left(34.486417\,\cos\frac{11}{5}\nu - \right.$$
$$\left. -19.126513\,\cos\frac{1}{5}\nu - 44.117063\,\cos\frac{7}{5}\nu - 16.243504\,\cos\frac{3}{5}\nu\right)e^3 + O\left(e^4\right).$$

Если в этих соотношениях пренебречь слагаемыми порядка e^3 и выше, то в плоскости величин q_1, q_2 они описывают замкнутые кривые, показанные на рис. 3 *а*, *б*, *в* соответственно, где принято, что $e = 0.1$.

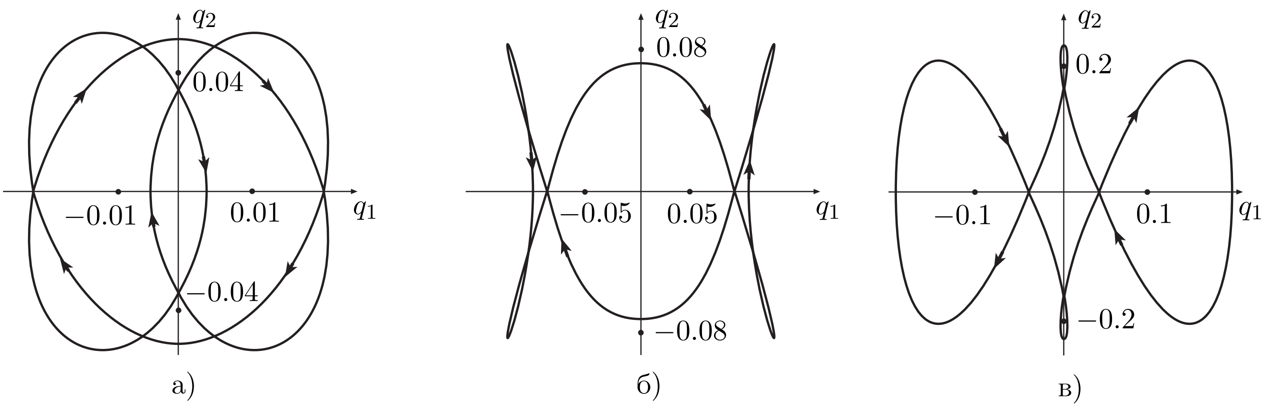

Рис. 3. Периодические решения в окрестности движения (3.3), (1.11)

Первые два периодические движения спутника неустойчивы, а третье устойчиво в линейном приближении. Для полного решения вопроса об устойчивости третьего решения проведем нормализацию соответствующего ему гамильтониана возмущенного движения полной системы и запишем его в виде (2.15), где

$$\Omega_1 = -0.729361, \qquad \Omega_2 = -0.151934,$$
$$c_{20} = -6.227365, \qquad c_{11} = -3.488544, \qquad c_{02} = -0.460472.$$

Применяя критерии, выписанные в разд. 2.4.2, заключаем, что при достаточно малых e исследуемое движение устойчиво для большинства начальных условий и формально устойчиво.

3.2. Периодические движения вблизи второй точки (1.8)

Рассмотрим второй резонансный случай для конической прецессии. В окрестности резонансной точки пространства параметров выбираем точку вида (3.2), где (α_*, θ_{0*}) — второй набор из (1.8), а $\alpha_2 = -89.652220$, $\theta_{02} = -172.745302$.

Соответствующее этой точке периодическое решение, рождающееся из конической прецессии спутника на круговой орбите, имеет вид

$$\begin{aligned}
\tilde{q}_1(\nu) &= \hat{q}_1(\nu) + e^3\,(6931.161178\cos\nu + 6.996445\cos 3\nu) + O\left(e^4\right),\\
\tilde{q}_2(\nu) &= \hat{q}_2(\nu) + e^3\,(6700.976621\sin\nu - 0.344129\sin 3\nu) + O\left(e^4\right),\\
\tilde{p}_1(\nu) &= \hat{p}_1(\nu) + e^3\,(-247.392447\sin\nu - 30.440981\sin 3\nu) + O\left(e^4\right),\\
\tilde{p}_2(\nu) &= \hat{p}_2(\nu) + e^3\,(2869.864486\cos\nu + 6.060462\cos 3\nu) + O\left(e^4\right),
\end{aligned}$$

причем функции $\hat{q}_j(\nu)$ и $\hat{p}_j(\nu)$ определены формулами (1.12).

В случае $e = 0$ сделаем линейную каноническую замену

$$\begin{aligned}
q_1 &= -1.354290\,q_1' + 1.732715\,q_2', \qquad & q_2 &= 1.371325\,p_1' + 1.071827\,p_2',\\
p_1 &= -0.253823\,p_1' + 0.378741\,p_2', \qquad & p_2 &= -0.4785523\,q_1' - 0.320714\,q_2'.
\end{aligned}$$

Продолжая нормализацию, получаем для случая круговой орбиты гамильтониан вида

$$H_0 = \frac{6}{5}r_1 - \frac{2}{5}r_2 + 25.661851 r_1^2 - 2.532359 r_2^2 - 5.312807 r_2 r_1 + \\ + 50.218861 r_1^{1/2} r_2^{3/2}\cos(\varphi_1 + 3\varphi_2) + O\left(r_j^{5/2}\right).$$

Далее проводим нормализацию неавтономной части гамильтониана при малых e и находим резонансные кубические слагаемые порядка e^2:

$$\sqrt{2}e^2\left[-2716.105152 r_2^{1/2} r_1 \sin(2\varphi_1 + \varphi_2 - 2\nu) - 8562.720420 r_2 r_1^{1/2}\sin(\varphi_1 - 2\varphi_2 - 2\nu)\right].$$

Полагая затем

$$R_j = e^4\xi\rho_j \ (j=1,2), \qquad \varphi_1 = -\Phi_1 - \frac{\pi}{2} + \frac{6}{5}\nu, \qquad \varphi_2 = -\Phi_2 - \frac{\pi}{2} - \frac{2}{5}\nu, \qquad \tau = e^4\eta\nu,$$

где $\xi = 5.195238 \cdot 10^6$, $\eta = 2.760130 \cdot 10^7$, приводим гамильтониан к окончательному виду

$$F = 0.317201\rho_1\rho_2^{1/2}\cos(2\Phi_1+\Phi_2) + \rho_1^{1/2}\rho_2\cos(\Phi_1 - 2\Phi_2) - 4.830187\rho_1^2 + \\ + \rho_1\rho_2 + 0.476652\rho_2^2 - 9.452416\rho_1^{1/2}\rho_2^{3/2}\cos(3\Phi_2+\Phi_1) + O\left(e^2\right). \quad (3.6)$$

Положения равновесия модельной системы с гамильтонианом (3.6) (без последнего слагаемого) удовлетворяют соотношениям $\sin\Psi_j = 0$ ($\cos\Psi_j = \delta_j = \pm 1$, $j = 1,2$), где $\Psi_1 = \Phi_1 - 2\Phi_2$, $\Psi_2 = 2\Phi_1 + \Phi_2$, и системе

$$-9.660374\rho_1 + \rho_2 - \frac{4.726208\delta_1\delta_2\rho_2^{3/2}}{\rho_1^{1/2}} + 0.317201\delta_2\rho_2^{1/2} + \frac{\delta_1\rho_2}{2\rho_1^{1/2}} = 0,$$
$$0.953304\rho_2 + \rho_1 - 14.178624\delta_1\delta_2\rho_2^{1/2}\rho_1^{1/2} + \frac{0.158601\delta_2\rho_1}{\rho_2^{1/2}} + \delta_1\rho_1^{1/2} = 0.$$

Эта система имеет решения только для пары $\delta_1 = \delta_2 = 1$, при этом

$$\rho_1 = 0.439450\cdot 10^{-3}, \quad \rho_2 = 0.014544 \quad \text{или} \quad \rho_1 = 0.472782\cdot 10^{-2}, \quad \rho_2 = 0.846698\cdot 10^{-2}.$$

Коэффициенты соответствующих характеристических уравнений таковы: $a = -0.049015$, $b = 0.606292\cdot 10^{-3}$ для первой точки и $a = -0.104405\cdot 10^{-2}$, $b = -0.358610\cdot 10^{-3}$ для второй точки. Таким образом, оба положения равновесия модельной системы неустойчивы.

Неустойчивыми будут и рождающиеся из этих равновесных точек периодические решения полной системы. В исходных переменных они записываются в виде

$$q_1(\nu) = -\left(91.513230\sin\frac{6}{5}\nu + 673.585352\sin\frac{2}{5}\nu\right)e^2 - \left(240.923190\sin\frac{11}{5}\nu + \right. \\ \left. + 5199.463706\sin\frac{1}{5}\nu + 27945.78010\sin\frac{3}{5}\nu + 17374.55553\sin\frac{7}{5}\nu\right)e^3 + O\left(e^4\right),$$

$$q_2(\nu) = \left(92.664327\cos\frac{6}{5}\nu + 416.667911\cos\frac{2}{5}\nu\right)e^2 + \left(78.461666\cos\frac{11}{5}\nu + \right. \\ \left. + 1757.166188\cos\frac{1}{5}\nu + 22359.34495\cos\frac{3}{5}\nu + 17204.34954\cos\frac{7}{5}\nu\right)e^3 + O\left(e^4\right)$$

для первой и в виде

$$q_1(\nu) = -\left(300.164929\sin\frac{6}{5}\nu + 513.936272\sin\frac{2}{5}\nu\right)e^2 - \left(790.232107\sin\frac{11}{5}\nu + \right. \\ \left. + 17054.32823\sin\frac{1}{5}\nu + 21322.24224\sin\frac{3}{5}\nu + 13256.54465\sin\frac{7}{5}\nu\right)e^3 + O\left(e^4\right),$$

$$q_2(\nu) = \left(303.940547\cos\frac{6}{5}\nu + 317.911832\cos\frac{2}{5}\nu\right)e^2 + \left(257.355583\cos\frac{11}{5}\nu + \right. \\ \left. + 5763.534591\cos\frac{1}{5}\nu + 17059.86977\cos\frac{3}{5}\nu + 13126.67985\cos\frac{7}{5}\nu\right)e^3 + O\left(e^4\right)$$

для второй порождающей точки.

Если пренебречь слагаемыми выше второго порядка по e, имеем в плоскости параметров q_1, q_2 кривые, изображенные для случая $e = 0.01$ на рис. 4 *а*, *б*.

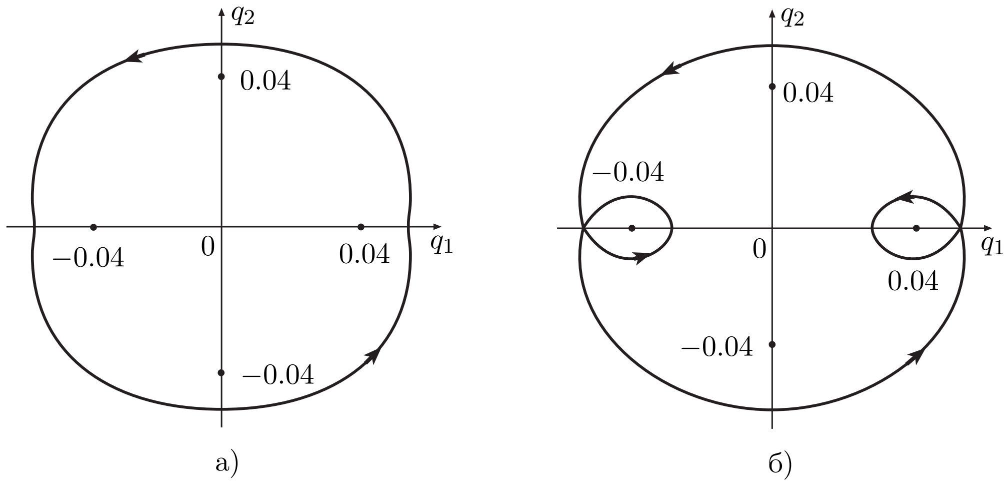

Рис. 4. Периодические решения в окрестности движения (3.5), (1.12)

Финансирование. Работа выполнена в рамках государственного задания
(проект № 3.3858.2017/4.6).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Korteweg D.J. Sur certaines vibrations d'ordre supérieur et d'intensité anomalé, vibrations de relation, dans les mécanismes à plusieurs degrés de liberté // Archives Néerlandaises des Sciences Exactes et Naturelles. Série 2. 1898. Tome 1. P. 229–260.
2. Beth H. Les oscillations autour d'une position d'équilibre dans le cas d'existence d'une relation linéaire simple entre les nombres vibratoires // Archives Néerlandaises des Sciences Exactes et Naturelles. Série 2. 1911. Tome 15. P. 246–283.
3. Beth H.J.E. Les oscillations autour d'une position d'équilibre dans le cas d'existence d'une relation linéaire simple entre les nombres vibratoires (suite) // Archives Néerlandaises des Sciences Exactes et Naturelles. Série 3A (Sciences Exactes). 1912. Tome 1. P. 185–208.
4. Маркеев А.П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978. 312 с.
5. Куницын А.Л., Маркеев А.П. Устойчивость в резонансных случаях // Итоги науки и техники. Сер. Общая механика. 1979. Т. 4. С. 58–139.
6. Маркеев А.П. Устойчивость гамильтоновых систем // Нелинейная механика. М.: Физматгиз, 2001. С. 114–130.
7. Маркеев А.П. Резонанс третьего порядка в гамильтоновой системе с одной степенью свободы // Прикладная математика и механика. 1994. Т. 58. Вып. 5. С. 37–48.
8. Маркеев А.П. О поведении нелинейной гамильтоновой системы с одной степенью свободы на границе области параметрического резонанса // Прикладная математика и механика. 1995. Т. 59. Вып. 4. С. 569–580.
9. Маркеев А.П. Параметрический резонанс и нелинейные колебания тяжелого твердого тела в окрестности его плоских вращений // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 1995. № 5. С. 34–44.
10. Холостова О.В. Параметрический резонанс в задаче о нелинейных колебаниях спутника на эллиптической орбите // Космические исследования. 1996. Т. 34. Вып. 3. С. 312–316.
11. Холостова О.В. О движении гамильтоновой системы с одной степенью свободы при резонансе в вынужденных колебаниях // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 1996. № 3. С. 167–175.
12. Холостова О.В. О движении близкой к гамильтоновой системы с одной степенью свободы при резонансе в вынужденных колебаниях // Прикладная математика и механика. 1996. Т. 60. Вып. 3. С. 405–412.

13. Маркеев А.П. О критическом случае резонанса четвертого порядка в гамильтоновой системе с одной степенью свободы // Прикладная математика и механика. 1997. Т. 61. Вып. 3. С. 369–376.
14. Холостова О.В. О нелинейных колебаниях спутника при резонансе третьего порядка // Прикладная математика и механика. 1997. Т. 61. Вып. 4. С. 556–565.
15. Холостова О.В. О нелинейных колебаниях гамильтоновой системы с одной степенью свободы при резонансе четвертого порядка // Прикладная математика и механика. 1998. Т. 62. Вып. 6. С. 957–967.
16. Холостова О.В. О движеннии близкой к гамильтоновой системы с одной степенью свободы при резонансе четвертого порядка // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 1999. № 4. С. 25–30.
17. Холостова О.В. О бифуркациях и устойчивости резонансных периодических движений гамильтоновых систем с одной степенью свободы при вырождении гамильтониана // Нелинейная динамика. 2006. Т. 2. № 1. С. 87–108.
18. Холостова О.В. О резонансных периодических движениях гамильтоновых систем с одной степенью свободы при вырождении гамильтониана // Прикладная математика и механика. 2006. Т. 70. Вып. 4. С. 568–580.
19. Маркеев А.П. О кратном резонансе в линейных системах Гамильтона // Доклады Российской академии наук. 2005. Т. 402. № 3. С. 339–343.
20. Маркеев А.П. О кратном параметрическом резонансе в системах Гамильтона // Прикладная математика и механика. 2006. Т. 70. Вып. 2. С. 200–220.
21. Маркеев А.П. Линейные гамильтоновы системы и некоторые задачи об устойчивости движения спутника относительно центр масс. М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2009. 396 с.
22. Маркеев А.П. Об одном особом случае параметрического резонанса в задачах небесной механики // Письма в астрономический журнал. 2005. Т. 31. № 5. С. 388–394.
23. Маркеев А.П. Кратный резонанс в одной задаче об устойчивости движения спутника относительно центра масс // Письма в астрономический журнал. 2005. Т. 31. № 9. С. 701–708.
24. Холостова О.В. О периодических движениях неавтономной гамильтоновой системы в одном случае кратного параметрического резонанса // Нелинейная динамика. 2017. Т. 13. № 4. С. 477–504. DOI: 10.20537/nd1704003
25. Холостова О.В. О движениях гамильтоновой системы с двумя степенями свободы при наличии кратных резонансов третьего порядка // Нелинейная динамика. 2012. Т. 8. № 2. С. 267–288. DOI: 10.20537/nd1202005
26. Холостова О.В. О взаимодействии резонансов третьего и четвертого порядков в гамильтоновой системе с двумя степенями свободы // Нелинейная динамика. 2015. Т. 11. № 4. С. 671–683. DOI: 10.20537/nd1504004
27. Kholostova O. Stability of triangular libration points in a planar restricted elliptic three body problem in cases of double resonances // International Journal of Non-Linear Mechanics. 2015. Vol. 73. P. 64–68. DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2014.11.005
28. Холостова О.В. Задачи динамики твердых тел с вибрирующим подвесом. М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2016. 308 с.
29. Сафонов А.И., Холостова О.В. О периодических движениях гамильтоновой системы в окрестности неустойчивого равновесия в случае двойного резонанса третьего порядка // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2016. Т. 26. Вып. 3. С. 418–438. DOI: 10.20537/vm160310
30. Холостова О.В., Сафонов А.И. О бифуркациях положений равновесия гамильтоновой системы в случаях двойного комбинационного резонанса третьего порядка // Труды МАИ. 2018. № 100. `http://trudymai.ru/published.php?ID=93297`
31. Дубошин Г.Н. О вращательном движении искусственных небесных тел // Бюллетень Института теоретической астрономии Академии наук СССР. 1960. № 7. С. 511–520.
32. Черноусько Ф.Л. Об устойчивости регулярной прецессии спутника // Прикладная математика и механика. 1964. Т. 28. Вып. 1. С. 155–157.
33. Маркеев А.П. Резонансные эффекты и устойчивость стационарных вращений спутника // Космические исследования. 1967. Т. 5. Вып. 3. С. 365–375.
34. Белецкий В.В. Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. М.: Изд-во МГУ, 1975. 308 с.
35. Сарычев В.А. Асимптотически устойчивые стационарные вращения спутника // Космические исследования. 1965. Т. 3. № 5. С. 667–673.

36. Белецкий В.В. Движение искусственного спутника относительно центра масс. М.: Изд-во МГУ, 1965. 416 с.
37. Маркеев А.П. О вращательном движении динамически симметричного спутника на эллиптической орбите // Космические исследования. 1967. Т. 5. Вып. 4. С. 530–539.
38. Малкин И.Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: Гостехиздат, 1956. 492 с.
39. Glimm J. Formal stability of Hamiltonian systems // Communications of Pure and Applied Mathematics. 1964. No. 4. P. 509–526.

Поступила в редакцию 15.08.2018

Сафонов Алексей Игоревич, инженер-программист 1-ой категории, АО «НПФ «ИнфоСистем-35», 129626, Россия, Москва, ул. 3-я Мытищинская, 16, стр. 37.
E-mail: lexafonov@mail.ru

Холостова Ольга Владимировна, д. ф.-м. н., профессор, кафедра мехатроники и теоретической механики, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), 125993, Россия, Москва, Волоколамское шоссе, 4;
профессор, кафедра теоретической механики, Московский физико-технический институт (государственный университет), 141700, Россия, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский переулок, 9.
E-mail: kholostova_o@mail.ru

A. I. Safonov, O. V. Kholostova

On periodic motions of a symmetrical satellite in an orbit with small eccentricity in the case of multiple combinational resonance of the third and fourth orders

Citation: *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2018, vol. 28, issue 3, pp. 373–394 (in Russian).

Keywords: Hamiltonian system, multiple resonance, stability, periodic motion, dynamically symmetrical satellite, hyperboloidal precession, conical precession.

MSC2010: 70H05, 70H14, 70H15, 70K45

DOI: 10.20537/vm180308

The motion of a near-autonomous time-periodic two-degree-of-freedom Hamiltonian system in the vicinity of a linearly stable trivial equilibrium is considered. The values of the problem parameters are supposed to be such that the system implements both a double combinational third-order resonance and a fourth-order resonance. The problem of existence and stability of resonant periodic motions of the system is considered. The study is carried out using as an example the problem of the motion of a dynamically symmetric satellite (a rigid body) relative to the center of mass in the central Newtonian gravitational field in an elliptical orbit with small eccentricity. The satellite's periodic motions generated from its stationary rotations in a circular orbit (hyperboloidal and conical precessions) for the resonant values of the parameters are considered as unperturbed ones. The normalization of the Hamiltonian functions of perturbed motion is performed, and the equilibrium positions of approximate (model) systems are determined. The corresponding resonant periodic motions of the satellite in the vicinity of these unperturbed motions are obtained by the Poincaré method, and their geometric interpretation is given. The unstable periodic motions and the motions that are stable for the majority (in the sense of Lebesgue measure) of the initial conditions and formally stable are revealed.

Funding. This work was carried out within the state assignment (project no. 3.3858.2017/4.6).

REFERENCES

1. Korteweg D.J. Sur certaines vibrations d'ordre supérieur et d'intensité anomale, vibrations de relation, dans les mécanismes à plusieurs degrés de liberté, *Archives Néerlandaises des Sciences Exactes et Naturelles, Série 2*, 1898, tome 1, pp. 229–260.

2. Beth H. Les oscillations autour d'une position d'équilibre dans le cas d'existence d'une relation linéaire simple entre les nombres vibratoires, *Archives Néerlandaises des Sciences Exactes et Naturelles, Série 2*, 1911, tome 15, pp. 246–283.
3. Beth H.J.E. Les oscillations autour d'une position d'équilibre dans le cas d'existence d'une relation linéaire simple entre les nombres vibratoires (suite), *Archives Néerlandaises des Sciences Exactes et Naturelles, Série 3A (Sciences Exactes)*, 1912, tome 1, pp. 185–208.
4. Markeev A.P. *Tochki libratsii v nebesnoi mekhanike i kosmodinamike* (Libration points in celestial mechanics and cosmodynamics), Moscow: Nauka, 1978, 312 p.
5. Kunitsyn A.L., Markeev A.P. Stability in resonant cases, *Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Obshchaya mekhanika*, 1979, vol. 4, pp. 58–139 (in Russian).
6. Markeev A.P. Stability in Hamiltonian systems, *Nelineinaya Mekhanika*, Moscow: Fizmatgiz, 2001, pp. 114–130 (in Russian).
7. Markeyev A.P. Third-order resonance in a Hamiltonian system with one degree of freedom, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1994, vol. 58, issue 5, pp. 793–804. DOI: 10.1016/0021-8928(94)90004-3
8. Markeyev A.P. The behaviour of a non-linear Hamiltonian system with one degree of freedom at the boundary of a parametric resonance domain, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1995, vol. 59, issue 4, pp. 541–551. DOI: 10.1016/0021-8928(95)00063-1
9. Markeev A.P. Parametric resonance and nonlinear oscillations of a heavy rigid body in the neighborhood of its planar rotations, *Izv. Ross. Akad. Nauk. Mekh. Tverd. Tela*, 1995, no. 5, pp. 34–44 (in Russian).
10. Kholostova O.V. Parametric resonance in the problem of nonlinear oscillations of a satellite in an elliptic orbit, *Cosmic Research*, 1996, vol. 34, no. 3, pp. 288–292.
11. Kholostova O.V. On motions of a Hamiltonian system with one degree of freedom under resonance in forced oscillations, *Izv. Ross. Akad. Nauk. Mekh. Tverd. Tela*, 1996, no. 3, pp. 167–175 (in Russian).
12. Kholostova O.V. The motion of a system close to Hamiltonian with one degree of freedom when there is resonance in forced vibrations, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1996, vol. 60, issue 3, pp. 399–406. DOI: 10.1016/S0021-8928(96)00050-0
13. Markeyev A.P. The critical case of fourth-order resonance in a hamiltonian system with one degree of freedom, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1997, vol. 61, issue 3, pp. 355–361. DOI: 10.1016/S0021-8928(97)00045-2
14. Kholostova O.V. The non-linear oscillations of a satellite with third-order resonance, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1997, vol. 61, issue 4, pp. 539–547. DOI: 10.1016/S0021-8928(97)00068-3
15. Kholostova O.V. Non-linear oscillations of a hamiltonian system with one degree of freedom and fourth-order resonance, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1998, vol. 62, issue 6, pp. 883–892. DOI: 10.1016/S0021-8928(98)00113-0
16. Kholostova O.V. On motions of a one-degree-of-freedom system close to a Hamiltonian system under resonance of the fourth order, *Izv. Ross. Akad. Nauk. Mekh. Tverd. Tela*, 1999, no. 4, pp. 25–30 (in Russian).
17. Kholostova O.V. On bifurcations and stability of resonance periodic motions of hamiltonian systems with one degree of freedom caused by degeneration of the hamiltonian, *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*, 2006, vol. 2, no. 1, pp. 89–110. DOI: 10.20537/nd0601005
18. Kholostova O.V. Resonant periodic motions of Hamiltonian systems with one degree of freedom when the Hamiltonian is degenerate, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2006, vol. 70, issue 4, pp. 516–526. DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2006.09.005
19. Markeev A.P. On a multiple resonance in linear Hamiltonian systems, *Doklady Physics*, 2005, vol. 50, no. 5, pp. 278–282. DOI: 10.1134/1.1941506
20. Markeyev A.P. Multiple parametric resonance in Hamiltonian systems, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2006, vol. 70, issue 2, pp. 176–194. DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2006.06.001
21. Markeev A.P. *Lineinye gamil'tonovy sistemy i nekotorye zadachi ob ustoichivosti dvizheniya sputnika otnositel'no tsentra mass* (Linear Hamiltonian systems and some problems of stability of satellite motion relative to the center of mass), Moscow–Izhevsk: Institute of Computer Science, 2009, 396 p.
22. Markeev A.P. On one special case of parametric resonance in problems of celestial mechanics, *Astronomy Letters*, 2005, vol. 31, no. 5, pp. 350–356. DOI: 10.1134/1.1922534
23. Markeev A.P. Multiple resonance in one problem of the stability of the motion of a satellite relative to the center of mass, *Astronomy Letters*, 2005, vol. 31, no. 9, pp. 627–633. DOI: 10.1134/1.2039974
24. Kholostova O.V. On periodic motions of a nonautonomous Hamiltonian system in one case of multiple parametric resonance, *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*, 2017, vol. 13, no. 4, pp. 477–504 (in Russian). DOI: 10.20537/nd1704003
25. Kholostova O.V. Motions of a two-degree-of-freedom Hamiltonian system in the presence of multiple

third-order resonances, *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*, 2012, vol. 8, no. 2, pp. 267–288 (in Russian). DOI: 10.20537/nd1202005
26. Kholostova O.V. The interaction of resonances of the third and fourth orders in a Hamiltonian two-degree-of-freedom system, *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*, 2015, vol. 11, no. 4, pp. 671–683 (in Russian). DOI: 10.20537/nd1504004
27. Kholostova O. Stability of triangular libration points in a planar restricted elliptic three body problem in cases of double resonances, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2015, vol. 73, pp. 64–68. DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2014.11.005
28. Kholostova O.V. *Zadachi dinamiki tverdykh tel s vibriruyushchim podvesom* (Problems of dynamics of rigid bodies with vibrating suspension), Moscow–Izhevsk: Institute of Computer Science, 2016, 308 p.
29. Safonov A.I., Kholostova O.V. On the periodic motions of a Hamiltonian system in the neighborhood of unstable equilibrium in the presence of a double three-order resonance, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2016, vol. 26, no. 3, pp. 418–438 (in Russian). DOI: 10.20537/vm160310
30. Kholostova O.V., Safonov A.I. On equilibrium positions bifurcations of Hamiltonian system in cases of double combined third order resonance, *Trudy Moskovskogo Aviatsionnogo Instituta*, 2018, no. 100. `http://trudymai.ru/published.php?ID=93297`
31. Duboshin G.N. On the rotational motion of artificial celestial bodies, *Byulleten' Instituta Teoreticheskoi Astronomii Akademii Nauk SSSR*, 1960, no. 7, pp. 511–520 (in Russian).
32. Chernous'ko F.L. On the stability of regular precession of a satellite, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1964, vol. 28, issue 1, pp. 181–184. DOI: 10.1016/0021-8928(64)90145-5
33. Markeev A.P. Resonant effects and stability of stationary rotations of a satellite, *Kosmicheskie Issledovaniya*, 1967, vol. 5, no. 3, pp. 365–375 (in Russian).
34. Beletskii V.V. *Dvizhenie sputnika otnositel'no tsentra mass v gravitatsionnom pole* (Satellite's motion about center of mass in a gravitational field), Moscow: Moscow State University, 1975, 308 p.
35. Sarychev V.A. Asymptotically stable stationary rotation of a satellite, *Kosmicheskie Issledovaniya*, 1965, vol. 3, no. 5, pp. 667–673 (in Russian).
36. Beletskii V.V. *Motion of an artificial satellite about its center of mass*, Jerusalem: Israel Program for Scientific Translations, 1966.
37. Markeev A.P. On the rotational motion of a dynamically symmetric satellite in an elliptical orbit, *Kosmicheskie Issledovaniya*, 1967, vol. 5, no. 4, pp. 530–539 (in Russian).
38. Malkin I.G. *Nekotorye zadachi teorii nelineinykh kolebanii* (Some problems of the theory of nonlinear oscillations), Moscow: Gostekhizdat, 1956, 492 p.
39. Glimm J. Formal stability of Hamiltonian systems, *Communications of Pure and Applied Mathematics*, 1964, no. 4, pp. 509–526.

Received 15.08.2018

Safonov Aleksei Igorevich, Engineer–Programmer, Research and Production Company "Infosystem-35", ul. Tret'ya Mytishchinskaya, 16, bld. 37, Moscow, 129626, Russia.
E-mail: lexafonov@mail.ru

Kholostova Ol'ga Vladimirovna, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Department of Mechatronics and Theoretical Mechanics, Moscow Aviation Institute (National Research University), Volokolamskoe shosse, 4, Moscow, 125993, Russia;
Professor, Department of Theoretical Mechanics, Moscow Institute of Physics and Technology (State University), Institutskii per., 9, Dolgoprudnyi, Moscow oblast, 141700, Russia.
E-mail: kholostova_o@mail.ru