МАТЕМАТИКА 2019. Т. 29. Вып. 3. С. 301–311.

УДК 517.962.22, 517.977

© *И. Н. Банщикова, Е. К. Макаров, С. Н. Попова*

ОБ УСЛОВИЯХ ПРОПОРЦИОНАЛЬНОЙ ЛОКАЛЬНОЙ УПРАВЛЯЕМОСТИ СПЕКТРА ПОКАЗАТЕЛЕЙ ЛЯПУНОВА ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ

Рассматривается задача о назначении спектра показателей Ляпунова линейной управляемой системы с дискретным временем

$$x(m+1)=A(m)x(m)+B(m)u(m),\quad m\in\mathbb{N},\ x\in\mathbb{R}^n,\ u\in\mathbb{R}^k, \tag{1}$$

посредством линейной по фазовым переменным обратной связи $u(m)=U(m)x(m)$ в малой окрестности спектра показателей свободной системы

$$x(m+1)=A(m)x(m),\quad m\in\mathbb{N},\ x\in\mathbb{R}^n. \tag{2}$$

Дополнительно требуется, чтобы норма матрицы обратной связи $U(\cdot)$ удовлетворяла липшицевой оценке по отношению к требуемому смещению показателей. Это свойство называется пропорциональной локальной управляемостью полного спектра показателей Ляпунова замкнутой системы

$$x(m+1)=\bigl(A(m)+B(m)U(m)\bigr)x(m),\quad m\in\mathbb{N},\ x\in\mathbb{R}^n. \tag{3}$$

Построен пример, показывающий, что найденные ранее достаточные условия пропорциональной локальной управляемости полного спектра показателей Ляпунова системы (3) (равномерная полная управляемость системы (1) и устойчивость показателей Ляпунова свободной системы (2)) не являются необходимыми.

Ключевые слова: дискретная линейная система, показатели Ляпунова, управляемость, стабилизируемость.

DOI: 10.20537/vm190301

Пусть $\mathbb{R}^n$ — евклидово пространство размерности n с фиксированным ортонормированным базисом $e_1,\ldots,e_n$ и стандартной нормой $\|\cdot\|$. Через $\mathbb{R}^{n\times k}$ будем обозначать пространство вещественных матриц размерности $n\times k$ со спектральной нормой, т. е. операторной нормой, индуцируемой в $\mathbb{R}^{n\times k}$ евклидовыми нормами в $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^k$; $E\in\mathbb{R}^{n\times n}$ — единичная матрица. Для всякой функции $F\colon\mathbb{N}\to\mathbb{R}^{n\times k}$ обозначим $\|F\|_\infty=\sup\limits_{m\in\mathbb{N}}\|F(m)\|$. Множество всех упорядоченных по возрастанию наборов из n вещественных чисел будем обозначать $\mathbb{R}^n_\leqslant$. Для фиксированного набора $\nu=\bigl(\nu_1,\ldots,\nu_n\bigr)\in\mathbb{R}^n_\leqslant$ и произвольного $\delta>0$ через $\mathcal{O}_\delta(\nu)$ обозначим совокупность всех таких наборов $\mu=\bigl(\mu_1,\ldots,\mu_n\bigr)\in\mathbb{R}^n_\leqslant$, что $\max\limits_{j=1,\ldots,n}|\nu_j-\mu_j|<\delta$. Таким образом, $\mathcal{O}_\delta(\nu)$ — это δ-окрестность набора ν во множестве $\mathbb{R}^n_\leqslant$. Наконец, для произвольной ненулевой функции $f\colon\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ определим ее верхнее логарифмическое среднее значение равенством $\overline{f}\doteq\varlimsup\limits_{m\to\infty}\dfrac{1}{m}\sum\limits_{j=1}^{m-1}\ln|f(j)|$. Если здесь существует точный предел, то будем говорить, что функция $f(\cdot)$ обладает точным логарифмическим средним значением.

Основным объектом исследований является линейная управляемая система с дискретным временем

$$x(m+1)=A(m)x(m)+B(m)u(m),\quad m\in\mathbb{N},\ x\in\mathbb{R}^n,\ u\in\mathbb{R}^k. \tag{1}$$

Будем предполагать, что матрица $B\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}^{n\times k}$ ограничена, а матрица $A\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ вполне ограничена [1], т. е. $A(m)$ обратима при каждом $m \in \mathbb{N}$ и $\|A\|_\infty \leqslant a$, $\|A^{-1}\|_\infty \leqslant a$, где $a < \infty$.

Рассмотрим также свободную систему

$$x(m+1) = A(m)x(m), \quad m \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}^n, \tag{2}$$

отвечающую управлению $u(m) \equiv 0$ в системе (1).

Для произвольного нетривиального решения $x(\cdot)$ системы (2) определим его *показатель Ляпунова* равенством

$$\lambda[x] \doteq \varlimsup_{m\to\infty} m^{-1} \ln \|x(m)\|$$

и обозначим через Λ *спектр показателей Ляпунова* системы (2), то есть множество всех $\lambda \in \mathbb{R}$, для каждого из которых существует нетривиальное решение $x(\cdot)$ системы (2) с показателем λ. Известно [2, с. 51–52], что множество Λ состоит не более, чем из n различных чисел и расположено на отрезке $[-\ln a, \ln a]$. Пусть $\Lambda = \{\Lambda_1, \ldots, \Lambda_p\}$, где $\Lambda_1 < \ldots < \Lambda_p$, $p \leqslant n$. Показатель Ляпунова тривиального решения системы (2) полагаем равным $-\infty$.

Для каждого $j \in \{1, \ldots, p\}$ рассмотрим множество $\mathcal{E}_j$ всех решений системы (2), показатели которых не превосходят Λ_j. Множество $\mathcal{E}_0$ считаем состоящим из тривиального решения системы (2). Тогда [2, с. 54] каждое из множеств $\mathcal{E}_j$ является линейным подпространством, имеют место строгие вложения $\mathcal{E}_0 \subset \mathcal{E}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{E}_p$ и неравенства

$$0 = \dim \mathcal{E}_0 < \dim \mathcal{E}_1 < \ldots < \dim \mathcal{E}_p = n.$$

Положим

$$n_j = \dim \mathcal{E}_j - \dim \mathcal{E}_{j-1}, \quad j = 1, \ldots, p.$$

Назовем n_j *кратностью* показателя Λ_j. Заметим, что $n_1 + \ldots + n_p = n$. Набор n чисел $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_1, \ldots, \Lambda_p, \ldots, \Lambda_p$, где каждое Λ_j повторяется n_j раз, называется *полным спектром показателей Ляпунова* системы (2). В дальнейшем будем обозначать его

$$\lambda(A) = \bigl(\lambda_1(A), \ldots, \lambda_n(A)\bigr),$$

считая при этом, что $\lambda_1(A) \leqslant \lambda_2(A) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n(A)$. Таким образом, $\lambda(A) \in \mathbb{R}^n_{\leqslant}$.

Выберем управление $u(\cdot)$ в системе (1) в виде линейной обратной связи $u(m) = U(m)x(m)$, получим замкнутую систему вида

$$x(m+1) = \bigl(A(m) + B(m)U(m)\bigr)x(m), \quad m \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}^n. \tag{3}$$

Будем называть $U(\cdot)$ *матричным управлением* для системы (3). Будем говорить, что матричное управление $U(\cdot)$ *допустимо* для системы (3), если матрица $A(\cdot) + B(\cdot)U(\cdot)$ вполне ограничена на $\mathbb{N}$.

Пусть зафиксировано некоторое допустимое для системы (3) матричное управление $U(\cdot)$. Тогда для этой системы с выбранным управлением $U(\cdot)$ определен полный спектр показателей Ляпунова $\lambda(A + BU) = \bigl(\lambda_1(A + BU), \ldots, \lambda_n(A + BU)\bigr) \in \mathbb{R}^n_{\leqslant}$, поэтому можно поставить вопрос об управлении полным спектром системы (3) под действием допустимых матричных управлений.

Задачи управления спектром показателей Ляпунова линейных систем с дискретным временем были рассмотрены в работах [3–7]. В частности, в [4] и [5] решается задача о глобальном управлении показателями Ляпунова системы (3), то есть о возможности построения допустимого для этой системы матричного управления $U(\cdot)$, которое бы обеспечивало выполнение равенства

$$\lambda(A + BU) = \mu \tag{4}$$

для произвольного наперед заданного набора чисел $\mu \in \mathbb{R}^n_{\leqslant}$. В этих работах получены как необходимые, так и достаточные условия глобальной управляемости спектра показателей Ляпунова. В работах [3, 6, 7] решается вопрос о локальном (в малой окрестности спектра показателей свободной системы) управлении показателями Ляпунова. В [7] получены достаточные условия пропорциональной локальной управляемости показателей Ляпунова. Они выражены в терминах свойств систем (1) и (2). Дадим соответствующие определения и сформулируем эти достаточные условия.

Определение 1 (см. [7]). Будем говорить, что система (3) обладает свойством *пропорциональной локальной управляемости* полного спектра показателей Ляпунова, если найдутся такие $\ell > 0$ и $\delta > 0$, что для любого набора $\mu = \big(\mu_1, \ldots, \mu_n\big) \in \mathcal{O}_\delta\big(\lambda(A)\big)$ существует допустимое для системы (3) матричное управление $U(\cdot)$, удовлетворяющее оценке $\|U\|_\infty \leqslant \ell \max\limits_{i=1,\ldots,n} |\mu_i - \lambda_i(A)|$ и обеспечивающее выполнение равенства (4).

Определение 2 (см. [8]). Система (1) называется *равномерно вполне управляемой*, если существуют такие $\alpha > 0$ и $K \in \mathbb{N}$, что при всех $m \in \mathbb{N}$ и $\xi \in \mathbb{R}^n$ матрица Калмана

$$W(m, m+K) \doteq \sum_{j=m}^{m+K-1} X(m, j+1)B(j)B^T(j)X^T(m, j+1)$$

системы (1) удовлетворяет неравенству $\xi^T W(m, m+K)\xi \geqslant \alpha\|\xi\|^2$; здесь $X(m, s)$ — матрица Коши [2, с. 13] свободной системы (2).

Определение 3 (см. [9]). Полный спектр показателей Ляпунова системы (2) называется *устойчивым*, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всякой вполне ограниченной функции $R\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}^{n\times n}$, удовлетворяющей условию $\|R - E\|_\infty < \delta$, выполнено неравенство

$$\max_{i=1,\ldots,n} |\lambda_i(A) - \lambda_i(AR)| < \varepsilon;$$

здесь $\lambda(AR) = \big(\lambda_1(AR), \ldots, \lambda_n(AR)\big) \in \mathbb{R}^n_{\leqslant}$ — полный спектр показателей Ляпунова мультипликативно возмущенной по отношению к (2) системы $y(m+1) = A(m)R(m)y(m)$.

Теорема 1 (см. [7]). *Если система* (1) *равномерно вполне управляема, а показатели Ляпунова системы* (2) *устойчивы, то полный спектр показателей Ляпунова системы* (3) *пропорционально локально управляем.*

Здесь мы покажем на примере, что эти достаточные условия пропорциональной локальной управляемости полного спектра показателей Ляпунова системы (3) не являются необходимыми. Для построения этого примера введем в рассмотрение скалярную функцию натурального аргумента

$$b(m) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad m = 1, \\ 1 & \text{при} \quad m \in [m_{2j-1}, m_{2j} - 1], \\ 0 & \text{при} \quad m \in [m_{2j}, m_{2j+1} - 1], \end{cases} \tag{5}$$

где последовательность $\big(m_j\big)_{j\in\mathbb{N}}$ определяется рекуррентно равенствами $m_1 = 1$,

$$\begin{aligned} m_{2j} &= j m_{2j-1}, \\ m_{2j+1} &= j + m_{2j} \end{aligned} \quad \text{для } j \in \mathbb{N}.$$

Кроме того, для произвольного $\alpha \in \mathbb{R}$ рассмотрим функцию

$$f_\alpha(m) = 1 + b(m)\big(e^\alpha - 1\big), \quad m \in \mathbb{N}.$$

Лемма 1. *При каждом $\alpha \in \mathbb{R}$ функция $f_\alpha(\cdot)$ имеет точное логарифмическое среднее значение, равное α.*

Для доказательства этой леммы нам понадобится одно утверждение. Аналогичное утверждение для функций непрерывного аргумента приведено в [10, с. 148–149].

Утверждение 1. *Пусть $\big(s_l\big)_{l\in\mathbb{N}}$ — произвольная строго возрастающая последовательность натуральных чисел. Если функция $g\colon \mathbb{N}\to\mathbb{R}$ постоянна на отрезках $[s_l, s_{l+1}-1]\cap\mathbb{N}$, то выполняется равенство*

$$\varlimsup_{m\to\infty}\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m-1} g(j) = \varlimsup_{l\to\infty}\frac{1}{s_l}\sum_{j=1}^{s_l-1} g(j).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $g(m) = g_l$ при всех $m \in [s_l, s_{l+1}-1]\cap\mathbb{N}$. Обозначим

$$\psi(m) = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m-1} g(j).$$

Докажем, что функция $\psi(\cdot)$ монотонна на каждом из отрезков $J_l \doteq [s_l, s_{l+1}]\cap\mathbb{N}$. Для этого вычислим ее в явном виде.

Возьмем любое натуральное $m \in J_l$. Положим $C_l = \sum\limits_{j=1}^{s_l-1} g(j)$. Если $m > s_l$, то

$$\psi(m) = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m-1} g(j) = \frac{1}{m}\Big(\sum_{j=1}^{s_l-1} g(j) + \sum_{j=s_l}^{m-1} g(j)\Big) = \frac{1}{m}\big(C_l + (m-s_l)g_l\big) = \frac{1}{m}\big(C_l - s_l g_l\big) + g_l.$$

При $m = s_l$ получаем равенство

$$\psi(m) = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m-1} g(j) = \frac{1}{m}C_l = \frac{1}{m}\big(C_l - s_l g_l\big) + g_l.$$

Видим, что $\psi(\cdot)$ монотонна на J_l. Это означает, что $\max\limits_{m\in J_l}\psi(m)$ достигается на концах отрезка J_l.

Пусть $\big(t_i\big)_{i\in\mathbb{N}}$ — последовательность натуральных чисел, на которой реализуется $\varlimsup\limits_{m\to\infty}\psi(m)$. Существует единственное натуральное число l_i такое, что $t_i \in [s_{l_i}, s_{l_i+1}-1]$. Тогда

$$\psi(t_i) \leqslant \max\{\psi(s_{l_i}), \psi(s_{l_i+1})\}$$

для всех $i \in \mathbb{N}$, следовательно,

$$\varlimsup_{m\to\infty}\psi(m) = \lim_{i\to\infty}\psi(t_i) \leqslant \varlimsup_{i\to\infty}\psi(s_{l_i}) \leqslant \varlimsup_{l\to\infty}\psi(s_l).$$

Выполнено также противоположное неравенство

$$\varlimsup_{m\to\infty}\psi(m) \geqslant \varlimsup_{l\to\infty}\psi(s_l),$$

поэтому

$$\varlimsup_{m\to\infty}\psi(m) = \varlimsup_{l\to\infty}\psi(s_l).$$

Утверждение доказано. □

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы 1. Возьмем произвольное значение $\alpha \in \mathbb{R}$ и обозначим $\beta = e^{\alpha} - 1$. Докажем, что предел $\lim\limits_{m\to\infty} m^{-1}\sum\limits_{j=1}^{m-1}\ln\bigl(1+\beta b(j)\bigr)$ существует и равен α. Так как находящаяся под знаком суммы функция постоянна на отрезках $j \in [m_l, m_{l+1}-1]$, то, в силу утверждения 1, для вычисления этого предела достаточно найти лишь пределы по подпоследовательностям $\bigl(m_{2l+1}\bigr)_{l\in\mathbb{N}}$ и $\bigl(m_{2l}\bigr)_{l\in\mathbb{N}}$.

Заметим, что $|\ln\bigl(1+\beta b(m)\bigr)| \leqslant |\alpha|$, поэтому

$$0 \leqslant \frac{1}{m_{2l}-m_{2l-1}}\Bigl|\sum_{j=1}^{m_{2l-1}-1}\ln\bigl(1+\beta b(j)\bigr)\Bigr| \leqslant \frac{m_{2l-1}|\alpha|}{m_{2l}-m_{2l-1}} = \frac{m_{2l-1}|\alpha|}{(l-1)m_{2l-1}} = \frac{|\alpha|}{l-1},$$

следовательно,

$$\lim_{l\to\infty}\frac{1}{m_{2l}-m_{2l-1}}\sum_{j=1}^{m_{2l-1}-1}\ln\bigl(1+\beta b(j)\bigr) = 0.$$

Тогда

$$\lim_{l\to\infty}\frac{1}{m_{2l}}\sum_{j=1}^{m_{2l}-1}\ln\bigl(1+\beta b(j)\bigr) =$$

$$= \lim_{l\to\infty}\frac{1}{m_{2l}-m_{2l-1}}\cdot\frac{m_{2l}-m_{2l-1}}{m_{2l}}\cdot\left(\sum_{j=1}^{m_{2l-1}-1}\ln\bigl(1+\beta b(j)\bigr) + \sum_{j=m_{2l-1}}^{m_{2l}-1}\ln(1+\beta)\right) =$$

$$= \lim_{l\to\infty}\frac{1}{m_{2l}-m_{2k-1}}\sum_{j=1}^{m_{2l-1}-1}\ln\bigl(1+\beta b(j)\bigr) + \ln(1+\beta) = \ln(1+\beta) = \alpha,$$

и

$$\lim_{l\to\infty}\frac{1}{m_{2l+1}}\sum_{j=1}^{m_{2l+1}-1}\ln\bigl(1+\beta b(j)\bigr) = \lim_{l\to\infty}\frac{1}{l+m_{2l}}\sum_{j=1}^{m_{2l+1}-1}\ln\bigl(1+\beta b(j)\bigr) =$$

$$= \lim_{l\to\infty}\frac{1}{1+l/m_{2l}}\cdot\frac{1}{m_{2l}}\sum_{j=1}^{m_{2l+1}-1}\ln\bigl(1+\beta b(j)\bigr) =$$

$$= \lim_{l\to\infty}\frac{1}{m_{2l}}\sum_{j=1}^{m_{2l}-1}\ln\bigl(1+\beta b(j)\bigr) + \lim_{l\to\infty}\frac{1}{m_{2l}}\sum_{j=m_{2l}}^{m_{2l+1}-1}\ln\bigl(1+\beta b(j)\bigr) =$$

$$= \lim_{l\to\infty}\frac{1}{m_{2l}}\sum_{j=1}^{m_{2l}-1}\ln\bigl(1+\beta b(j)\bigr) = \alpha.$$

Итак, существует точный предел $\lim\limits_{m\to\infty} m^{-1}\sum\limits_{j=1}^{m-1}\ln\bigl(1+\beta b(j)\bigr) = \alpha$. Лемма доказана. $\square$

Пример 1. Рассмотрим скалярную функцию натурального аргумента $\varphi(m) = e^{m\sin\ln m}$ и линейную управляемую систему

$$x(m+1) = A(m)x(m) + B(m)u(m), \quad m\in\mathbb{N},\ x\in\mathbb{R}^2,\ u\in\mathbb{R}^2, \tag{6}$$

где

$$A(m) = \begin{pmatrix} e^{-1/2} & 0 \\ 0 & \dfrac{\varphi(m+1)}{\varphi(m)e}\end{pmatrix}, \quad B(m) = \begin{pmatrix} b(m) & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

функция $b(\cdot)$ определена равенством (5).

Ограниченность матрицы $B(\cdot)$ на $\mathbb{N}$ очевидна. Проверим, что матрица $A(\cdot)$ вполне ограничена на $\mathbb{N}$. Заметим, что

$$A^{-1}(m) = \begin{pmatrix} e^{1/2} & 0 \\ 0 & \dfrac{\varphi(m)e}{\varphi(m+1)} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим функцию $f(t) = t\sin\ln t$, $t \geqslant 1$. Так как

$$|f'(t)| = |\sin\ln t + \cos\ln t| = \left|\sqrt{2}\sin\bigl(\ln t + \pi/4\bigr)\right| \leqslant \sqrt{2}, \quad t \geqslant 1,$$

то для каждого $m \in \mathbb{N}$ выполнены неравенства

$$|f(m+1) - f(m)| \leqslant \max_{t\in[m,m+1]} |f'(t)| \leqslant \sqrt{2}.$$

Следовательно,

$$\left|\frac{\varphi(m+1)}{\varphi(m)e}\right| = e^{f(m+1)-f(m)-1} \leqslant e^{|f(m+1)-f(m)|-1} \leqslant e^{\sqrt{2}-1}, \tag{7}$$

$$\left|\frac{\varphi(m)e}{\varphi(m+1)}\right| = e^{f(m)-f(m+1)+1} \leqslant e^{|f(m+1)-f(m)|+1} \leqslant e^{\sqrt{2}+1},$$

откуда вытекает полная ограниченность матрицы $A(\cdot)$.

В работе [11] установлено, что полный спектр показателей Ляпунова свободной системы $x(m+1) = A(m)x(m)$ неустойчив и состоит из чисел $\lambda_1(A) = -1/2$, $\lambda_2(A) = 0$.

Легко проверить, что при каждом $K \in \mathbb{N}$ для матрицы Калмана системы (6) имеет место равенство

$$W(m_{2K}, m_{2K} + K) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \gamma_K \end{pmatrix},$$

где $\gamma_K > 0$. Это означает, что система (6) не является равномерно вполне управляемой.

Итак, ни первое, ни второе условия теоремы 1 не выполнены. Но оказывается, что полный спектр показателей Ляпунова замкнутой системы

$$x(m+1) = \bigl(A(m) + B(m)U(m)\bigr)x(m), \quad m \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}^2,$$

пропорционально локально управляем. Действительно, возьмем $\delta = 1/4$ и для произвольных чисел $\mu_1 \in (-3/4, -1/4)$ и $\mu_2 \in (-1/4, 1/4)$ положим

$$\alpha_1 = e^{\mu_1} - e^{-1/2}, \quad \alpha_2 = \alpha_2(m) = \frac{\varphi(m+1)}{\varphi(m)e}(e^{\mu_2} - 1).$$

Построим матричное управление

$$U(m) = \operatorname{diag}\bigl(\alpha_1, \alpha_2(m)\bigr), \quad m \in \mathbb{N}.$$

Тогда

$$A(m) + B(m)U(m) = \begin{pmatrix} e^{-1/2} & 0 \\ 0 & \dfrac{\varphi(m+1)}{\varphi(m)e} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b(m) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2(m) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-1/2} + b(m)(e^{\mu_1} - e^{-1/2}) & 0 \\ 0 & \dfrac{\varphi(m+1)}{\varphi(m)} e^{\mu_2 - 1} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, замкнутая система

$$x(m+1) = \big(A(m) + B(m)U(m)\big)x(m), \quad m \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}^2, \tag{8}$$

диагональна, поэтому ее полный спектр показателей Ляпунова состоит из верхних логарифмических средних значений диагональных элементов, т. е. из чисел

$$\lambda_1(A+BU) = \varlimsup_{m\to\infty} \frac{1}{m}\sum_{l=1}^{m-1} \ln\big(e^{-1/2} + b(l)(e^{\mu_1} - e^{-1/2})\big) =$$

$$= \varlimsup_{m\to\infty} \frac{1}{m}\sum_{l=1}^{m-1} \ln\Big(e^{-1/2}\big(1 + b(l)(e^{\mu_1+1/2} - 1)\big)\Big) =$$

$$= -\frac{1}{2} + \varlimsup_{m\to\infty} \frac{1}{m}\sum_{l=1}^{m-1} \ln\big(1 + b(l)(e^{\mu_1+1/2} - 1)\big),$$

$$\lambda_2(A+BU) = \varlimsup_{m\to\infty} \frac{1}{m}\sum_{l=1}^{m-1} \ln \frac{\varphi(l+1)}{\varphi(l)} e^{\mu_2 - 1} =$$

$$= \varlimsup_{m\to\infty} \frac{1}{m} \ln \prod_{l=1}^{m-1} \frac{\varphi(l+1)}{\varphi(l)} e^{\mu_2-1} = \varlimsup_{m\to\infty} \frac{1}{m} \ln\Big(\frac{\varphi(m)}{\varphi(1)} e^{(m-1)(\mu_2-1)}\Big) =$$

$$= \varlimsup_{m\to\infty} \frac{m \sin\ln m}{m} + \lim_{m\to\infty} \frac{(m-1)(\mu_2-1)}{m} = \varlimsup_{m\to\infty} \sin\ln m + \mu_2 - 1.$$

Из леммы 1 получаем, что $\lambda_1(A+BU) = \mu_1$. Далее, в [11] доказано, что $\varlimsup\limits_{m\to\infty} \sin\ln m = 1$, поэтому $\lambda_2(A+BU) = \mu_2$. Итак, построенное управление $U(\cdot)$ обеспечивает выполнение равенств $\lambda_i(A+BU) = \mu_i$, $i = 1, 2$. Проверим, что оно удовлетворяет требуемой липшицевой оценке $\|U\|_\infty \leqslant \ell \max\limits_{i=1,2} |\mu_i - \lambda_i(A)|$. Для этого докажем следующее утверждение.

Утверждение 2. *Пусть $\Delta > 0$ — фиксировано. Тогда для каждого $t \in [-\Delta, \Delta]$ выполнено неравенство*

$$|e^t - 1| \leqslant \frac{e^\Delta - 1}{\Delta}|t|. \tag{9}$$

Доказательство. Очевидно, что $|e^t - 1| \leqslant e^{|t|} - 1$. Далее, функция $h(t) \doteq (e^t - 1)/t$ строго возрастает при $t > 0$, поэтому при $0 < |t| \leqslant \Delta$ выполнено неравенство $(e^{|t|} - 1)/|t| \leqslant (e^\Delta - 1)/\Delta$, которое влечет (9). При $t = 0$ неравенство (9) тоже выполнено. Утверждение доказано. □

Используя оценки (7) и (9), получим

$$|\alpha_1| = |e^{\mu_1} - e^{-1/2}| = e^{-1/2}|e^{\mu_1+1/2} - 1| \leqslant e^{-1/2}\frac{e^{1/4}-1}{1/4}|\mu_1 + 1/2| = 4e^{-1/2}(e^{1/4}-1)|\mu_1 - \lambda_1(A)|,$$

$$|\alpha_2(m)| = \frac{\varphi(m+1)}{\varphi(m)e}|e^{\mu_2} - 1| \leqslant e^{\sqrt{2}-1}\frac{e^{1/4}-1}{1/4}|\mu_2| = 4e^{\sqrt{2}-1}(e^{1/4}-1)|\mu_2 - \lambda_2(A)|.$$

Полагая $\ell = 4e^{\sqrt{2}-1}(e^{1/4} - 1)$, получим

$$\|U\|_\infty \leqslant \max\big\{|\alpha_1|, \sup_{m\in\mathbb{N}} |\alpha_2(m)|\big\} \leqslant \ell \max_{i=1,2} |\mu_i - \lambda_i(A)|.$$

Таким образом, система (8) обладает свойством пропорциональной локальной управляемости полного спектра показателей Ляпунова, несмотря на то, что для нее не выполнены условия теоремы 1. Следовательно, условия этой теоремы достаточны, но не необходимы для пропорциональной локальной управляемости показателей. □

Финансирование. Исследования первого и третьего авторов выполнены при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта 18–51–41005.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Демидович В.Б. Об одном признаке устойчивости разностных уравнений // Дифференциальные уравнения. 1969. Т. 5. № 7. С. 1247–1255.
2. Гайшун И.В. Системы с дискретным временем. Минск: Институт математики НАН Беларуси, 2001. 400 с.
3. Babiarz A., Banshchikova I., Czornik A., Makarov E., Niezabitowski M., Popova S. On assignability of Lyapunov spectrum of discrete linear time-varying system with control // 2016 21st International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics (MMAR). IEEE, 2016. P. 697–701. https://doi.org/10.1109/MMAR.2016.7575221
4. Babiarz A., Czornik A., Makarov E., Niezabitowski M., Popova S. Pole placement theorem for discrete time-varying linear systems // SIAM Journal on Control and Optimization. 2017. Vol. 55. No. 2. P. 671–692. https://doi.org/10.1137/15M1033666
5. Babiarz A., Banshchikova I., Czornik A., Makarov E., Niezabitowski M., Popova S. Necessary and sufficient conditions for assignability of the Lyapunov spectrum of discrete linear time-varying systems // IEEE Transactions on Automatic Control. 2018. Vol. 63. Issue 11. P. 3825–3837. https://doi.org/10.1109/TAC.2018.2823086
6. Popova S.N. Assignability of certain Lyapunov invariants for linear discrete-time systems // IFAC-PapersOnLine. 2018. Vol. 51. Issue 32. P. 40–45. https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2018.11.350
7. Babiarz A., Banshchikova I., Czornik A., Makarov E., Niezabitowski M., Popova S. Proportional local assignability of Lyapunov spectrum of linear discrete time-varying systems // SIAM Journal on Control and Optimization. 2019. Vol. 57. No. 2. P. 1355–1377. https://doi.org/10.1137/17M1141734
8. Halanay A., Ionescu V. Time-varying discrete linear systems: input-output operators, Riccati equations, disturbance attenuation. Basel: Springer, 1994. 230 p. https://doi.org/10.1007/978-3-0348-8499-0
9. Банщикова И.Н., Попова С.Н. О спектральном множестве линейной дискретной системы с устойчивыми показателями // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2016. Т. 26. Вып. 1. С. 15–26. https://doi.org/10.20537/vm160102
10. Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В. Теория показателей Ляпунова. М.: Наука, 1966. 576 с.
11. Банщикова И.Н. Пример линейной дискретной системы с неустойчивыми показателями Ляпунова // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2016. Т. 26. Вып. 2. С. 169–176. https://doi.org/10.20537/vm160203

Поступила в редакцию 22.07.2019

Банщикова Ирина Николаевна, старший преподаватель, кафедра дифференциальных уравнений, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: banshhikova.irina@mail.ru

Макаров Евгений Константинович, д. ф.-м. н., зав. отделом дифференциальных уравнений, Институт математики НАН Беларуси, 220072, Беларусь, г. Минск, ул. Сурганова, 11.
E-mail: jcm@im.bas-net.by

Попова Светлана Николаевна, д. ф.-м. н., зав. кафедрой дифференциальных уравнений, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: udsu.popova.sn@gmail.com

Цитирование: И. Н. Банщикова, Е. К. Макаров, С. Н. Попова. Об условиях пропорциональной локальной управляемости спектра показателей Ляпунова линейной системы с дискретным временем // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2019. Т. 29. Вып. 3. С. 301–311.

VESTNIK UDMURTSKOGO UNIVERSITETA. MATEMATIKA. MEKHANIKA. KOMP'UTERNYE NAUKI
MATHEMATICS 2019. Vol. 29. Issue 3. Pp. 301–311.

I. N. Banshchikova, E. K. Makarov, S. N. Popova

On the conditions of proportional local assignability of the Lyapunov spectrum of a linear discrete-time system

Keywords: linear discrete-time system, Lyapunov exponents, controllability, stabilizability.

MSC2010: 93B55, 39A06, 39A22

DOI: 10.20537/vm190301

We consider a problem of assigning the Lyapunov spectrum for a linear control discrete-time system

$$x(m+1) = A(m)x(m) + B(m)u(m), \quad m \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R}^k, \tag{1}$$

in a small neighborhood of the Lyapunov spectrum of the free system

$$x(m+1) = A(m)x(m), \quad m \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}^n, \tag{2}$$

by means of linear feedback $u(m) = U(m)x(m)$. We assume that the norm of the feedback matrix $U(\cdot)$ satisfies the Lipschitz estimate with respect to the required shift of the Lyapunov spectrum. This property is called proportional local assignability of the Lyapunov spectrum of the closed-loop system

$$x(m+1) = \big(A(m) + B(m)U(m)\big)x(m), \quad m \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}^n. \tag{3}$$

We previously proved that uniform complete controllability of system (1) and stability of the Lyapunov spectrum of free system (2) are sufficient conditions for proportional local assignability of the Lyapunov spectrum of closed-loop system (3). In this paper we give an example demonstrating that these conditions are not necessary.

Funding. The studies of the first and third authors was funded by RFBR, project number 18–51–41005.

REFERENCES

1. Demidovich V.B. A certain criterion for the stability of difference equations, *Differ. Uravn.*, 1969, vol. 5, no. 7, pp. 1247–1255 (in Russian).
2. Gaishun I.V. *Sistemy s diskretnym vremenem* (Discrete-time systems), Minsk: Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, 2001, 400 p.
3. Babiarz A., Banshchikova I., Czornik A., Makarov E., Niezabitowski M., Popova S. On assignability of Lyapunov spectrum of discrete linear time-varying system with control, *2016 21st International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics (MMAR)*, IEEE, 2016, pp. 697–701. https://doi.org/10.1109/MMAR.2016.7575221
4. Babiarz A., Czornik A., Makarov E., Niezabitowski M., Popova S. Pole placement theorem for discrete time-varying linear systems, *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2017, vol. 55, no. 2, pp. 671–692. https://doi.org/10.1137/15M1033666
5. Babiarz A., Banshchikova I., Czornik A., Makarov E., Niezabitowski M., Popova S. Necessary and sufficient conditions for assignability of the Lyapunov spectrum of discrete linear time-varying systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2018, vol. 63, issue 11, pp. 3825–3837. https://doi.org/10.1109/TAC.2018.2823086
6. Popova S.N. Assignability of certain Lyapunov invariants for linear discrete-time systems, *IFAC-PapersOnLine*, 2018, vol. 51, issue 32, pp. 40–45. https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2018.11.350
7. Babiarz A., Banshchikova I., Czornik A., Makarov E., Niezabitowski M., Popova S. Proportional local assignability of Lyapunov spectrum of linear discrete time-varying systems, *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2019, vol. 57, no. 2, pp. 1355–1377. https://doi.org/10.1137/17M1141734

8. Halanay A., Ionescu V. *Time-varying discrete linear systems: input-output operators, Riccati equations, disturbance attenuation*, Basel: Springer, 1994, 230 p. https://doi.org/10.1007/978-3-0348-8499-0
9. Banshchikova I.N., Popova S.N. On the spectral set of a linear discrete system with stable Lyapunov exponents, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2016, vol. 26, issue 1, pp. 15–26 (in Russian). https://doi.org/10.20537/vm160102
10. Bylov B.F., Vinograd R.E., Grobman D.M., Nemytskii V.V. *Teoriya pokazatelei Lyapunova i ee prilozheniya k voprosam ustoichivosti* (Theory of Lyapunov exponents and its application to problems of stability), Moscow: Nauka, 1966, 576 p.
11. Banshchikova I.N. An example of a linear discrete system with unstable Lyapunov exponents, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2016, vol. 26, issue 2, pp. 169–176 (in Russian). https://doi.org/10.20537/vm160203

Received 22.07.2019

Banshchikova Irina Nikolaevna, Senior Lecturer, Department of Differential Equations, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
E-mail: banshhikova.irina@mail.ru

Makarov Evgenii Konstantinovich, Doctor of Physics and Mathematics, Head of the Department of Differential Equations, Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Belarus, ul. Surganova, 11, Minsk, 220072, Belarus.
E-mail: jcm@im.bas-net.by

Popova Svetlana Nikolaevna, Doctor of Physics and Mathematics, Head of the Department of Differential Equations, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
E-mail: udsu.popova.sn@gmail.com

Citation: I. N. Banshchikova, E. K. Makarov, S. N. Popova. On the conditions of proportional local assignability of the Lyapunov spectrum of a linear discrete-time system, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2019, vol. 29, issue 3, pp. 301–311.