МАТЕМАТИКА 2019. Т. 29. Вып. 3. С. 312–318.

УДК 515.122.22, 515.122.252

© *А. А. Грызлов, Р. А. Головастов*

ТЕСНОТА И ПСЕВДОХАРАКТЕР КОМПАКТНЫХ T_1-ПРОСТРАНСТВ

Рассматриваются кардинально-значные характеристики T_1-пространств и их взаимосвязи. Доказано, что для самосопряженных T_1-пространств, то есть пространств, в которых множество замкнуто тогда и только тогда, когда оно компактно, выполняется неравенство $t(X) \leqslant \psi(X)$, где $t(X)$ — теснота, $\psi(X)$ — псевдохарактер пространства X. Показано, что в общем случае в компактных T_1-пространствах связь между теснотой и псевдохарактером не существует. Приведен пример компактного T_1-пространства X такого, что $t(X) > \omega$ и $\psi(X) = \omega$, и приведен пример T_1-пространства X такого, что $t(X) = \omega$ и $\psi(X) > \omega$.

Ключевые слова: T_1-пространство, компакт, теснота, псевдохарактер.

DOI: 10.20537/vm190302

Введение

Исследование кардинально-значных характеристик топологических пространств, прежде всего близких к компактным, является одним из приоритетов общей топологии. Хорошо известные оценки таких кардинальных инвариантов как мощность, характер, теснота, псевдохарактер, число Суслина, полученные А. В. Архангельским, И. Юхасом, А. Хайнелом (см. [3, 5]) определили направление исследований в этой области.

В последние годы большой интерес вызывают поиски оценок кардинальных инвариантов топологических пространств, близких к компактным и обладающих отделимостью более слабой, чем хаусдорфовость. Отметим здесь работы [9, 11–14], отражающие современные направления исследований. В числе этих направлений значительный интерес представляют свойства T_1-пространств (см. [6–8, 10]).

Компактные T_1-пространства обладают некоторыми свойствами хаусдорфовых компактных пространств. Так, для них справедливо неравенство $|X| \leqslant 2^{\psi(X)}$ [6], обобщающее общеизвестную оценку А. В. Архангельского для хаусдорфовых компактных пространств. Однако связь между другими кардинальными инвариантами для T_1-пространств сложнее. Так, если для хаусдорфовых компактных пространств выполнено соотношение $\psi(X) = \chi(X) \geqslant t(X)$ (здесь $\psi(X)$, $\chi(X)$, $t(X)$ — это псевдохарактер, характер и теснота пространства, соответственно), то для компактного T_1-пространства справедливо неравенство $\psi(X) \leqslant \chi(X)$, а связь между псевдохарактером $\psi(X)$) и теснотой $t(X)$ отсутствует (примеры 1, 2).

Среди компактных T_1-пространств особое место занимают так называемые самосопряженные пространства [4], в которых множества замкнуты тогда и только тогда, когда они компактны. Самосопряженные T_1-пространства обладают рядом свойств хаусдорфовых компактных пространств, однако у самосопряженного T_1-пространства де Гроота (см. [4]) псевдохарактер и теснота счетны, а характер несчетен.

В настоящей работе доказано, что для самосопряженного T_1-пространства выполняется неравенство $t(X) \leqslant \psi(X)$ (теорема 1), то есть справедливо неравенство такое же, как и для хаусдорфова компактного пространства.

Показано также, что в общем случае для компактных T_1-пространств связи между теснотой и псевдохарактером не существует. Так, у компактного T_1-пространства X из примера 1 $t(X) > \omega$ и $\psi(X) = \omega$, а у компактного T_1-пространства X из примера 2 $t(X) = \omega$ и $\psi(X) > \omega$.

§ 1. Предварительные сведения

Терминология и обозначения, используемые в работе, стандартны, их можно найти в [2, 3, 5]. Напомним некоторые понятия.

Пространство X называется *T_1-пространством*, если всякая точка в X есть замкнутое множество.

T_1-пространство X называется *самосопряженным* [4], если подмножество из X замкнуто тогда и только тогда, когда оно бикомпактно.

Псевдохарактер точки $x \in X$ — это $\psi(x, X) = \min\{|B|\colon \cap\{O\colon O \in B\} = \{x\}\}$.

Псевдохарактер пространства $\psi(X) = \sup\{\psi(x, X)\colon x \in X\}$.

Теснота пространства:

$$t(X) = \min\{\tau\colon \text{для всякого } A \subseteq X\ [A] = \cup\{[A']\colon A' \subset A,\ |A'| \leqslant \tau\}\}.$$

Пространство X называется *инициально компактным вплоть до мощности* τ, если из всякого открытого покрытия γ пространства X мощности не выше τ можно выделить конечное подпокрытие [1].

Пространство X инициально компактно вплоть до мощности τ, если всякое множество $A \subseteq X$, $|A| \leqslant \tau$, имеет точку полного накопления [1].

§ 2. Основные результаты

Лемма 1 (см. [6, с. 780]). *Пусть X — компактное T_1-пространство, $\psi(X)$ — его псевдохарактер, $A \subseteq X$ — подпространство, инициально компактное вплоть до мощности $\psi(X)$. Тогда A компактно.*

Лемма 2. *Пусть X — компактное T_1-пространство, $\psi(X) = \tau$, $A \subseteq X$. Тогда существует подмножество $\widetilde{A} \subseteq X$ такое, что*

(1) *$A \subseteq \widetilde{A}$;*

(2) *$\widetilde{A}$ инициально компактно вплоть до мощности τ;*

(3) *для всякой точки $x \in \widetilde{A}$ существует подмножество $A_x \subseteq A$ такое, что $|A_x| \leqslant \tau$ и $x \in [A_x]$.*

Доказательство. Построим последовательность множеств $\{A_\alpha\colon \alpha \in \omega_{\tau^+}\}$, обладающую следующими свойствами:

(i) для всякой $x \in A_\alpha$ существует подмножество $A_\alpha(x) \subseteq A$ такое, что

$$|A_\alpha(x)| \leqslant \tau \text{ и } x \in [A_\alpha(x)];$$

(ii) $A_\alpha \subseteq A_\beta$, если $\alpha \leqslant \beta$;

(iii) $A \subseteq A_\alpha$ для всякого $\alpha \in \omega_{\tau^+}$.

Построим последовательность $\{A_\alpha\colon \alpha \in \omega_{\tau^+}\}$ по индукции.

I. Положим $A_0 = A$.

II. Пусть $\alpha = \beta + 1$. Рассмотрим множество A_β и пусть $\Gamma_\beta = \{D \subseteq A_\beta\colon |D| \leqslant \tau\}$. Для всякого $D \in \Gamma_\beta$ пусть $x_D \in X$ — точка полного накопления для D. Покажем, что для A_α

выполняется условие (i). Поскольку условие (i) выполняется по предположению индукции для A_β и $|D| \leqslant \tau$, то множество $\cup\{A_\beta(x) \colon x \in D\}$ удовлетворяет условиям:

$$\cup\{A_\beta(x) \colon x \in D\} \subseteq A, \quad |\cup\{A_\beta(x) \colon x \in D\}| \leqslant \tau, \quad \text{и} \quad x_D \in [\cup\{A_\beta(x) \colon x \in D\}].$$

III. Пусть α — предельное. Положим $A_\alpha = \cup\{A_\beta \colon \beta < \alpha\}$. Положим $\widetilde{A} = \cup\{A_\alpha \colon \alpha \in \omega_{\tau^+}\}$. Из построения следует, что $\widetilde{A}$ инициально компактно вплоть до мощности τ. Таким образом, $\widetilde{A}$ удовлетворяет условиям (i)–(iii).

В силу леммы 1 $\widetilde{A}$ является бикомпактом подмножества X.

Множество $\widetilde{A}$, построенное для A, удовлетворяющее условиям (1)–(3), будем называть C-оболочкой множества A. □

Теорема 1. *Для самосопряженного T_1-пространства X выполняется неравенство $t(X) \leqslant \psi(X)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\psi(X) = \tau$. Предположим противное.

(*) Пусть существует множество $C \subseteq X$ и точка $z \in X$ такие, что $z \in [C] \setminus C$, но для всякого подмножества $E \subseteq C$, $|E| \leqslant \tau$, выполняется $z \notin [E]$.

Для всякой точки $x \in X$ положим, что B_x — это псевдобаза в точке x такая, что $|B_x| \leqslant \tau$.

Построим последовательность множеств $\{F_\alpha \colon \alpha \in \omega_{\tau^+}\}$, удовлетворяющих следующим условиям:

(a) F_α компактно;

(b) для всякой точки $y \in F_\alpha$ существует множество $E \subseteq C$ такое, что $|E| \leqslant \tau$, $y \in [E]$;

(c) $z \notin F_\alpha$.

Строить последовательность $\{F_\alpha \colon \alpha \in \omega_{\tau^+}\}$ будем по индукции.

(I) Положим $F_0 = \{x\}$, где $x \in A$ — некоторая точка из множества A.

(II) Пусть $\alpha = \beta + 1$. Рассмотрим множество F_β. По предположению индукции F_β удовлетворяет условиям (a)–(c).

В силу самосопряженности X множество F_β замкнуто, отсюда множество $X \setminus F_\beta$ открыто, $z \notin F_\beta$, и, следовательно, $X \setminus F_\beta$ является окрестностью точки z.

Так как $z \in [C] \setminus F_\beta$, имеем $(C \cap (X \setminus F_\beta)) = C \setminus F_\beta \neq \varnothing$.

Рассмотрим семейство $B_\beta = \cup\{B_x \colon x \in F_\beta\}$. Для всякого конечного покрытия γ множества F_β такого, что $\gamma \subseteq B_\beta$ и $(C \setminus F_\beta) \setminus \cup\gamma \neq \varnothing$, где $\cup\gamma$ есть объединение элементов покрытия γ, выберем точку $x_\gamma \in (C \setminus F_\beta) \setminus \cup\gamma$. Обозначим $\{x_\gamma \colon \gamma \subseteq B_\beta\} = F'_\beta$.

Пусть F^+_β это C-оболочка множества $F'_\beta = \{x_\gamma \colon \gamma \subseteq B_\beta\}$. Положим $F_\alpha = F_\beta \cup F^+_\beta$. Покажем выполнение условий (a), (b) и (c). Множество F_β удовлетворяет условиям (a)–(c), а множество F^+_β есть C-оболочка множества $F'_\beta \subseteq C$ и по свойству C-оболочки F^+_β является инициально компактным вплоть до мощности τ. В силу леммы 1, F^+_β компактно. Так как F^+_β есть C-оболочка множества $F'_\beta \subseteq C$, то F^+_β удовлетворяет условию (b).

Для F^+_β выполняется условие (c), поскольку если $z \in F^+_\beta$, то, в силу выполнения условия (b) для F^+_β, нарушается наше предположение **(*)** о точке z и множестве C.

(III) Пусть α — предельное число.

Обозначим $F'_\alpha = \cup\{F_\beta \colon \beta < \alpha\}$ и положим, что F_α — это C-оболочка множества F'_α. Условие (a) для F_α выполнено. Покажем, что для F_α выполнено условие (b).

Пусть $y \in F_\alpha$. Так как F_α есть C-оболочка множества F'_α, по свойству C-оболочки найдется множество $G \subseteq F'_\alpha$, $|G| \leqslant \tau$ такое, что $[G] \ni y$. Для всякой точки $t \in G$ найдется $F_{\beta(t)}$ ($\beta(t) < \alpha$) такое, что $t \in F_{\beta(t)}$. По индукционному предположению $F_{\beta(t)}$ удовлетворяет условию (b), следовательно найдется $E_t \subseteq C$ такое, что $|E_t| \leqslant \tau$ и $t \in [E_t]$. Имеем $\cup\{E_t \colon t \in G\} \subseteq C$ и $y \in [\cup\{E_t \colon t \in G\}]$.

Покажем выполнение условия (c). Предположим, что $z \in F_\alpha$. Множество F_α есть C-оболочка множества $F'_\alpha = \cup\{C_\beta \colon \beta < \alpha\}$. По свойству C-оболочки существует $G \subseteq F'_\alpha$, $|G| \leqslant \tau$, и $z \in [G]$. Так как для F_α выполнено условие (b), как было доказано выше, то для всякой точки $t \in G$ найдется $E_t \subseteq C$, $|E_t| \leqslant \tau$, такое, что $t \in [E_t]$. Но тогда $z \in [\cup\{E_t \colon t \in G\}]$ и $| \cup \{E_t \colon t \in G\}| \leqslant \tau$. Это противоречит нашему предположению **(*)** о точке z и множестве C. Следовательно наше предположение о том, что $z \in F_\alpha$ не верно.

Положим $\widetilde{F} = \cup\{F_\alpha \colon \alpha \in \omega_{\tau^+}\}$.

Множество $\widetilde{F}$ инициально компактно вплоть до мощности τ. По лемме 1 тогда $\widetilde{F}$ является компактным пространством. В силу самосопряженности пространства X, $\widetilde{F}$ замкнуто. Тогда $X \setminus \widetilde{F}$ открыто. По построению $z \notin \widetilde{F}$, поэтому множество $X \setminus \widetilde{F}$ является окрестностью z. Так как $z \in [C] \setminus C$, имеем $(X \setminus \widetilde{F}) \cap C \neq \varnothing$. Пусть $y \in (X \setminus \widetilde{F}) \cap C$. Для всякой точки $x \in \widetilde{F}$ пусть $O_x \in B_x$ есть окрестность точки x такая, что $y \notin O_x$. Рассмотрим конечное покрытие γ множества $\widetilde{F}$, состоящее из этих окрестностей. Имеем $\cup\gamma \supseteq \widetilde{F}$.

Найдется $\beta \in \omega_{\tau^+}$ такое, что $\gamma \subseteq B_\beta$. Поскольку $(X \setminus \widetilde{F}) \setminus \cup\gamma \neq \varnothing$, по построению существует точка $x_\gamma \in F_{\beta+1}$, следовательно $x_\gamma \in \widetilde{F}$. Но с другой стороны, $x_\gamma \notin \widetilde{F}$, так как $\cup\gamma \supseteq \widetilde{F}$.

Это противоречие доказывает, что наше предположение **(*)** о существовании множества C и точки z не верно. $\square$

Следующие примеры показывают, что для бикомпактных T_1-пространств, которые не являются самосопряженными, взаимосвязи между теснотой и псевдохарактером нет.

Пример 1. Пусть $X = [-1,1] \cup \{a\}$, где $a \in \mathbb{R}^1 \setminus [-1,1]$. Топологию на пространстве X определим следующим образом.

Окрестности всех точек на $[-1,1] \setminus \{0\}$ обычные.

Окрестностями точки 0 являются множества $U(0) = O(0,\epsilon) \setminus E$, где $|E| = \omega$, $0 \notin E$, $O(0,\epsilon)$ — обычная ϵ-окрестность точки 0.

Окрестностями точки a являются множества $U(a) = \{a\} \cup O(0,\epsilon) \setminus \{0\}$.

Пространство X является компактным T_1-пространством. Счетность псевдохарактера в точках пространства X очевидна. Однако теснота в точке 0 несчетна.

Пример 2. Пусть X, $|X| > \omega$, — T_1-минимальное пространство, то есть открытыми множествами в X являются дополнения до конечных множеств.

Пространство X — компактное T_1-пространство со счетной теснотой, но псевдохарактер в любой точке X несчетен.

Финансирование. Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках базовой части госзадания в сфере науки (проект № 1.5211.2017/8.9).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров П.С., Урысон П.С. Мемуар о компактных топологических пространствах. М.: Наука, 1971. 144 с.
2. Александров П.С. Введение в теорию множеств и общую топологию. М.: Наука, 1977. 368 с.
3. Энгелькинг Р. Общая топология. М.: Мир, 1986. 750 с.
4. Архангельский А.В. Отображения и пространства // Успехи математических наук. 1966. Т. 21. Вып. 4 (130). С. 133–184. http://mi.mathnet.ru/umn5901
5. Архангельский А.В. Строение и классификация топологических пространств и кардинальные инварианты // Успехи математических наук. 1978. Т. 33. Вып. 6 (204). С. 29–84. http://mi.mathnet.ru/umn3584

6. Грызлов А.А. Две теоремы о мощности топологических пространств // Доклады АН СССР. 1980. Т. 251. № 4. С. 780–783. http://mi.mathnet.ru/rus/dan/v251/i4/p780
7. Воронов М.Е. О компактных T_1-пространствах // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2013. Вып. 3. С. 20–27. https://doi.org/10.20537/vm130302
8. Грызлов А.А., Цигвинцева К.Н. Сходящиеся последовательности и свойства пространств // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2018. Т. 28. Вып. 3. С. 277–283. https://doi.org/10.20537/vm180301
9. Gryzlov A.A. On the properties of subsets of Tychonoff products // Topology and its Applications. 2016. Vol. 201. P. 13–17. https://doi.org/10.1016/j.topol.2015.12.023
10. Gryzlov A.A. On dense subsets of Tychonoff products of T_1-spaces // Topology and its Applications. 2018. Vol. 248. P. 164–175. https://doi.org/10.1016/j.topol.2018.09.003
11. Gotchev I.S. Generalizations of two cardinal inequalities of Hajnal and Juhász // Topology and its Applications. 2017. Vol. 221. P. 425–431. https://doi.org/10.1016/j.topol.2017.02.026
12. Juhász I., Soukupa L., Szentmiklóssy Z. First countable almost discretely Lindelöf T_3 spaces have cardinality at most continuum // Topology and its Applications. 2018. Vol. 241. P. 145–149. https://doi.org/10.1016/j.topol.2018.03.026
13. Carlson N.A., Porter J.R. On the cardinality of Hausdorff spaces and H-closed spaces // Topology and its Applications. 2018. Vol. 241. P. 377–395. https://doi.org/10.1016/j.topol.2017.01.027
14. Bonanzinga M., Stavrova D., Staynova P. Separation and cardinality – Some new results and old questions // Topology and its Applications. 2017. Vol. 221. P. 556–569. https://doi.org/10.1016/j.topol.2017.02.007

Поступила в редакцию 15.07.2019

Грызлов Анатолий Александрович, д. ф.-м. н., профессор, зав. кафедрой алгебры и топологии, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: gryzlov@udsu.ru

Головастов Роман Александрович, к. ф.-м. н., доцент кафедры алгебры и топологии, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: rpa4@bk.ru

Цитирование: А. А. Грызлов, Р. А. Головастов. Теснота и псевдохарактер компактных T_1-пространств // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2019. Т. 29. Вып. 3. С. 312–318.

VESTNIK UDMURTSKOGO UNIVERSITETA. MATEMATIKA. MEKHANIKA. KOMP'UTERNYE NAUKI

MATHEMATICS 2019. Vol. 29. Issue 3. Pp. 312–318.

A. A. Gryzlov, R. A. Golovastov

On tightness and pseudocharacter of compact T_1-spaces

Keywords: T_1-space, compact, tightness, pseudocharacter.

MSC2010: 54D10, 54D30

DOI: 10.20537/vm190302

We consider the relationship between the pseudocharacter $\psi(X)$ and the tightness $t(X)$ of compact T_1-spaces X. We prove that $t(X) \leqslant \psi(X)$ for self-adjoined T_1-spaces, i.e., the spaces where a subset is closed if and only if it is compact. We also show that in general for compact T_1-spaces there is no relationship between these cardinal invariants. We give an example of a compact T_1-space such that the tightness of this space is uncountable, but its pseudocharacter is countable. Another example shows the space X whose tightness is countable, but its pseudocharacter is uncountable.

Funding. The research was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation in the framework of the basic part (project no. 1.5211.2017/8.9).

REFERENCES

1. Aleksandrov P.S., Uryson P.S. *Memuar o kompaktnykh topologicheskikh prostranstvakh* (A memoir on compact topological spaces), Moscow: Nauka, 1971, 144 p.
2. Aleksandrov P.S. *Vvedenie v teoriyu mnozhestv i obshchuyu topologiyu* (Introduction to set theory and general topology), Moscow: Nauka, 1977, 368 p.
3. Engelking R. *General topology*, Warszawa: PWN — Polish Scientific Publishers, 1977, 626 p. Translated under the title *Obshchayua topologiya*, Moscow: Nauka, 1986, 752 p.
4. Arkhangelskii A.V. Mappings and spaces, *Russian Mathematical Surveys*, 1966, vol. 21, no. 4, pp. 115–162. https://doi.org/10.1070/RM1966v021n04ABEH004169
5. Arkhangelskii A.V. Structure and classification of topological spaces and cardinal invariants, *Russian Mathematical Surveys*, 1978, vol. 33, no. 6, pp. 33–96. https://doi.org/10.1070/RM1978v033n06ABEH003884
6. Gryzlov A.A. Two theorems on the cardinality of topological spaces, *Soviet Math. Dokl.*, 1980, vol. 21, pp. 506–509.
7. Voronov M.E. On compact T_1-spaces, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2013, issue 3, pp. 20–27 (in Russian). https://doi.org/10.20537/vm130302
8. Gryzlov A.A., Tsigvintseva K.N. On convergent sequences and properties of spaces, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2018, vol. 28, issue 3, pp. 277–283 (in Russian). https://doi.org/10.20537/vm180301
9. Gryzlov A.A. On the properties of subsets of Tychonoff products, *Topology and its Applications*, 2016, vol. 201, pp. 13–17. https://doi.org/10.1016/j.topol.2015.12.023
10. Gryzlov A.A On dense subsets of Tychonoff products of T_1-spaces, *Topology and its Applications*, 2018, vol. 248, pp. 164–175. https://doi.org/10.1016/j.topol.2018.09.003
11. Gotchev I.S. Generalizations of two cardinal inequalities of Hajnal and Juhász, *Topology and its Applications*, 2017, vol. 221, pp. 425–431. https://doi.org/10.1016/j.topol.2017.02.026
12. Juhász I., Soukup L., Szentmiklóssy Z. First countable almost discretely Lindelöf T_3 spaces have cardinality at most continuum, *Topology and its Applications*, 2018, vol. 241, pp. 145–149. https://doi.org/10.1016/j.topol.2018.03.026
13. Carlson N.A., Porter J.R. On the cardinality of Hausdorff spaces and H-closed spaces, *Topology and its Applications*, 2018, vol. 241, pp. 377–395. https://doi.org/10.1016/j.topol.2017.01.027

14. Bonanzinga M., Stavrova D., Staynova P. Separation and cardinality – Some new results and old questions, *Topology and its Applications*, 2017, vol. 221, pp. 556–569. https://doi.org/10.1016/j.topol.2017.02.007

Received 15.07.2019

Gryzlov Anatolii Aleksandrovich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Head of Department of Algebra and Topology, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
E-mail: gryzlov@udsu.ru

Golovastov Roman Aleksandrovich, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Algebra and Topology, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
E-mail: rpa4@bk.ru

Citation: A. A. Gryzlov, R. A. Golovastov. On tightness and pseudocharacter of compact T_1-spaces, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2019, vol. 29, issue 3, pp. 312–318.