ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ
МАТЕМАТИКА 2019. Т. 29. Вып. 3. С. 351–362.

УДК 517.958, 530.145.6

© *Т. С. Тинюкова, Ю. П. Чубурин*

СУЩЕСТВОВАНИЕ МАЙОРАНОВСКИХ ЛОКАЛИЗОВАННЫХ СОСТОЯНИЙ В ПРОСТОЙ МОДЕЛИ ПЕРЕХОДА ДЖОЗЕФСОНА

Последние 15 лет в физической литературе активно изучаются майорановские локализованные состояния (МЛС) и сопутствующие их возникновению явления, такие, как изменение кондактанса и эффект Джозефсона, что обусловлено вероятным применением МЛС при создании квантового компьютера. В статье изучены собственные функции одномерного оператора Боголюбова–де Жена с дельтаобразным потенциалом в нуле, описывающие локализованные состояния с энергией в лакуне спектра (сверхпроводящей щели). Найдены вероятности прохождения в задаче рассеяния для этого оператора, когда энергии близки к границе сверхпроводящей щели. Эти задачи исследовались как для единого на всей прямой сверхпроводящего порядка, определяемого вещественной константой Δ, так и для сверхпроводящего порядка, определяемого функцией $\Delta\theta(-x)+\Delta e^{i\varphi}\theta(x)$ для $\varphi=0,\pi$ (т. е. для нулевого сверхпроводящего тока и тока, близкого к критическому). Используемый гамильтониан можно рассматривать как простейшую модель перехода Джозефсона. Доказано, что в обоих случаях существуют два МЛС, но лишь при определенных значениях параметров, т. е. МЛС неустойчивы. При этом вероятность прохождения равна нулю в обоих случаях.

Ключевые слова: гамильтониан Боголюбова–де Жена, функция Грина, спектр, собственное значение, задача рассеяния, вероятность прохождения, майорановские локализованные состояния, эффект Джозефсона.

DOI: 10.20537/vm190306

Введение

В настоящее время продолжается активная исследовательская работа по созданию квантового компьютера. При этом одно из основных направлений такого исследования — это создание такого компьютера на базе майорановских локализованных состояний (МЛС), т. е. устойчивых квазичастиц с нулевой энергией вида «электрон плюс дырка», при определенных условиях возникающих в сверхпроводящих структурах (см., например, обзоры [1–3]). Важнейшей особенностью МЛС, позволяющих в перспективе применять их в квантовых вычислениях, является их подчиненность неабелевой квантовой статистике, что означает возникновение множества новых состояний при перестановках МЛС [2–4]. Теоретически МЛС появляются в сверхпроводящих структурах при наличии топологической фазы (которая порождается определенными соотношениями между параметрами системы) на границе между сверхпроводящей структурой и другим материалом без сверхпроводящего порядка. Это может произойти, например, при протекании сверхпроводящего тока Джозефсона. Однако, несмотря на то, что теоретически существование МЛС доказано неоднократно (см., например, [5–9]), общепризнанного экспериментального доказательства до сих пор не получено [1, 3].

Исследование МЛС вызвало новый интерес к эффекту Джозефсона [10–13], который является одним из основных в теории сверхпроводимости [14]. Он был открыт Б. Джозефсоном в 1962 году и заключается в том, что если два сверхпроводника разделены, например, небольшим слоем изолятора, то через такую структуру при температуре около абсолютного нуля может протекать сверхпроводящий ток, в простейшем случае описываемый формулой

$I_s(\varphi) = I_0 \sin\varphi$, где $I_0 > 0$ — максимальный (критический) ток, φ — разность фаз сверхпроводящего потенциала двух сверхпроводников (см. [14], а также обзор [15]). Оказалось, что в структурах сверхпроводник–изолятор–сверхпроводник, в которых существует этот эффект, могут появляться как андреевские локализованные состояния (АЛС, квазичастицы с энергией в сверхпроводящей щели), так и, в частности, майорановские локализованные состояния. Это в перспективе позволит не только создавать майорановские состояния, но и управлять ими.

При математическом исследовании МЛС используется одночастичный оператор Боголюбова–де Жена (БдЖ), являющийся аналогом оператора Шрёдингера для сверхпроводящей структуры; МЛС и АЛС описываются собственными функциями данного оператора, отвечающими нулевому и ненулевому собственному значению соответственно. Собственные значения оператора БдЖ означают энергии квазичастиц. При этом важную роль играет вероятность прохождения квазичастицы через потенциальный барьер (данная вероятность пропорциональна экспериментально измеряемому кондактансу), зависящая, вообще говоря, от существования МЛС. Таким образом, исследование задачи рассеяния может способствовать экспериментальному доказательству присутствия МЛС.

В статье изучены собственные функции одномерного оператора БдЖ с потенциалом нулевого радиуса действия, описывающие локализованные состояния в лакуне спектра. Кроме того, найдены вероятности прохождения в задаче рассеяния для этого оператора, когда энергии близки к границе сверхпроводящей щели. Эти задачи исследовались как для единого на всей прямой сверхпроводящего порядка, определяемого вещественной константой Δ, так и для сверхпроводящего порядка, определяемого функцией $\Delta\theta(-x) + \Delta e^{i\varphi}\theta(x)$ для $\varphi = 0, \pi$ (т. е. для нулевого сверхпроводящего тока и тока, близкого к критическому). Используемый гамильтониан можно рассматривать как простейшую модель перехода Джозефсона (ср. [10–13]). Доказано, что в обоих случаях существуют два МЛС, но лишь при определенных значениях параметров, т. е. МЛС неустойчивы. При этом вероятность прохождения равна нулю в обоих случаях.

§ 1. Майорановские локализованные состояния

Рассмотрим гамильтониан БдЖ вида $H + V$, описывающий границу двумерного топологического изолятора со сверхпроводимостью, порожденной эффектом близости, где

$$H = \begin{pmatrix} M & -i\partial_x & 0 & \Delta \\ -i\partial_x & -M & -\Delta & 0 \\ 0 & -\Delta & -M & -i\partial_x \\ \Delta & 0 & -i\partial_x & M \end{pmatrix}, \qquad V = Z \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \delta(x); \tag{1}$$

здесь M — поле Зеемана, Z — вещественная константа, Δ — вещественный параметр сверхпроводящего спаривания, $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака. Оператор H действует на вектор-функции вида $(\psi_1^{\uparrow}, \psi_1^{\downarrow}, \psi_2^{\uparrow}, \psi_2^{\downarrow})^T = (\psi_1, \psi_1', \psi_2, \psi_2')^T$, где стрелка указывает направление спина квазичастицы, индекс 1 отвечает электрону, индекс 2 — дырке, T означает транспонирование. После преобразования Фурье $\widehat{\psi}(p) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-ipx} \psi(x)\, dx$, т. е. в импульсном представлении, имеем

$$\widehat{H}(p) - E = \begin{pmatrix} M - E & p & 0 & \Delta \\ p & -M - E & -\Delta & 0 \\ 0 & -\Delta & -M - E & p \\ \Delta & 0 & p & M - E \end{pmatrix},$$

где E — спектральный параметр (энергия). Найдем определитель

$$d = d(p) = \det(\widehat{H}(p) - E) = E^4 - 2E^2(M^2 + \Delta^2 + p^2) + (M^2 - \Delta^2)^2 + p^4 + 2p^2(M^2 + \Delta^2).$$

Отсюда $d = 0$, если

$$E^2 = (M \pm \Delta)^2 + p^2. \tag{2}$$

В силу (2) спектр H состоит из E таких, что $|E| \geqslant ||M| - |\Delta||$.

При $E = 0$ из (2) получаем

$$p = \pm i|M \pm \Delta|. \tag{3}$$

В дальнейшем предполагаем, что $M, \Delta > 0$, $M \approx \Delta$, т. е. лакуна в спектре (сверхпроводящая щель) мала.

Волновые функции МЛС с математической точки зрения представляют собой собственные функции оператора БдЖ, отвечающие собственному значению (энергии МЛС) $E = 0$, удовлетворяющие условиям комплексного сопряжения вида [1]

$$\psi_1^* = -\psi_2', \quad \psi_1'^* = \psi_2. \tag{4}$$

Для нахождения волновых функций будем «склеивать» (согласовывать) решения уравнения $(H + V)\psi = 0$ при $x > 0$ ($H\psi = H_+\psi = 0$) и $x < 0$ ($H\psi = H_-\psi = 0$). Пусть вначале $x > 0$; для $p_1 = i|M - \Delta| \approx 0$ (см. (3); выбираем убывающие решения) получим

$$\widehat{H}(p_1) \approx \Delta \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

решения уравнения $\widehat{H}\widehat{\psi} = 0$ имеют вид $\widehat{\psi} = (1, 0, 0, -1)^T$ или $\widehat{\psi} = (0, 1, -1, 0)^T$. Для $p_2 = i|M + \Delta|$ имеем

$$\widehat{H}(p_2) \approx \Delta \begin{pmatrix} 1 & 2i & 0 & 1 \\ 2i & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2i \\ 1 & 0 & 2i & 1 \end{pmatrix},$$

$\widehat{\psi}_+ = (1, i, i, 1)^T$. Отсюда

$$\psi_+(x) = A_+ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-|M-\Delta|x} + B_+ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-|M-\Delta|x} + C_+ \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ i \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2\Delta x}, \quad x > 0. \tag{5}$$

При $x < 0$ значение p меняет знак, для $p_1 = -i|M - \Delta|$ функции $\widehat{\psi}$ те же, а для $p_2 = -i|M + \Delta| \approx -2i\Delta$ имеем $\widehat{\psi} = (-1, i, i, -1)^T$ и, следовательно,

$$\psi_-(x) = A_- \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{|M-\Delta|x} + B_- \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{|M-\Delta|x} + C_- \begin{pmatrix} -1 \\ i \\ i \\ -1 \end{pmatrix} e^{2\Delta x}, \quad x < 0. \tag{6}$$

Пусть $\psi(x) = (\psi_1(x), \psi_1'(x), \psi_2(x), \psi_2'(x))^T$. Условия согласования, ввиду (1) (дельта-функция, полученная при дифференцировании скачка $\psi(x)$ в нуле, должна компенсироваться дельта-функцией в составе V), имеют вид

$$\begin{aligned} &-i\left(\psi_1'(+0) - \psi_1'(-0)\right) + Z\left(\psi_1(+0) + \psi_1(-0)\right)/2 = 0, \\ &-i\left(\psi_1(+0) - \psi_1(-0)\right) + Z\left(\psi_1'(+0) + \psi_1'(-0)\right)/2 = 0, \\ &-i\left(\psi_2'(+0) - \psi_2'(-0)\right) - Z\left(\psi_2(+0) + \psi_2(-0)\right)/2 = 0, \\ &-i\left(\psi_2(+0) - \psi_2(-0)\right) - Z\left(\psi_2'(+0) + \psi_2'(-0)\right)/2 = 0 \end{aligned} \tag{7}$$

(деление на два означает, что берется симметричное распределение потенциала V относительно нуля, т. е. гладкие δ-образные функции $\delta_n(x)$, аппроксимирующие $\delta(x)$, выбираются четными). Из (5)–(7) получаем систему

$$\begin{pmatrix} Z & -2i & 2+Z & Z & 2i & -2-Z \\ -2i & Z & -2i+Zi & 2i & Z & -2i+Zi \\ 2i & Z & -2i-Zi & -2i & Z & -2i-Zi \\ Z & 2i & 2-Z & Z & -2i & -2+Z \end{pmatrix} (A_+, B_+, C_+, A_-, B_-, C_-)^T = 0. \tag{8}$$

После линейных операций со строками система (8) примет вид

$$\begin{pmatrix} Z & -2i & 2+Z & Z & 2i & -2-Z \\ 0 & 4+Z^2 & i(4+Z^2) & 4iZ & Z^2-4 & i(Z^2-4Z-4) \\ 0 & Z & -2i & 0 & Z & -2i \\ 0 & 0 & 4+Z^2 & 0 & 4iZ & 4-Z^2 \end{pmatrix} (A_+, B_+, C_+, A_-, B_-, C_-)^T = 0. \tag{9}$$

Выберем в качестве свободных констант C_+ и C_-, тогда из (9) получаем

$$\begin{aligned} B_- &= -\frac{4+Z^2}{4iZ}C_+ - \frac{4-Z^2}{4iZ}C_-, \quad B_+ = \frac{Z^2-4}{4iZ}C_+ - \frac{4+Z^2}{4iZ}C_-, \\ A_- &= -\frac{4+Z^2}{4Z}C_+ + \frac{4-Z^2}{4Z}C_-, \quad A_+ = \frac{Z^2-4}{4Z}C_+ + \frac{Z^2+4}{4Z}C_-. \end{aligned} \tag{10}$$

Выпишем, пользуясь (5), (6), (10), общий вид волновой функции:

$$\psi_+(x) = \frac{1}{4Z}\begin{pmatrix} (Z^2-4)C_+ + (Z^2+4)C_- \\ -i(Z^2-4)C_+ + i(4+Z^2)C_- \\ i(Z^2-4)C_+ - i(4+Z^2)C_- \\ -(Z^2-4)C_+ - (Z^2+4)C_- \end{pmatrix} e^{-|M-\Delta|x} + C_+ \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ i \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2\Delta x}, \quad x > 0,$$

$$\psi_-(x) = \frac{1}{4Z}\begin{pmatrix} -(4+Z^2)C_+ + (4-Z^2)C_- \\ i(4+Z^2)C_+ + i(4-Z^2)C_- \\ -i(4+Z^2)C_+ - i(4-Z^2)C_- \\ (4+Z^2)C_+ - (4-Z^2)C_- \end{pmatrix} e^{|M-\Delta|x} + C_- \begin{pmatrix} -1 \\ i \\ i \\ -1 \end{pmatrix} e^{2\Delta x}, \quad x < 0.$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Для гамильтониана $H + V$ при $Z = \pm 2$ имеются два МЛС, описываемые двумя линейно независимыми собственными вектор–функциями $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ вида*

$$\begin{aligned} &\psi_1(x) = (-1, i, i, -1)^T e^{2\Delta x}, && x < 0; && \psi_1(x) = \pm(1, i, -i, -1)^T e^{-|M-\Delta|x}, && x > 0; \\ &\psi_2(x) = \pm(-1, i, -i, 1)^T e^{|M-\Delta|x}, && x < 0; && \psi_2(x) = (1, i, i, 1)^T e^{-2\Delta x}, && x > 0; \end{aligned}$$

знак «±» у вектор–функций соответствует знаку величины Z.

Заметим, что для выполнения условия (4) при $x < 0$ для $\psi_1(x)$ и при $x > 0$ для $\psi_2(x)$ эти функции необходимо умножить на i, что не меняет физического смысла волновой функции.

Данные МЛС не являются «стандартными», т. к. они неустойчивы (исчезают при $Z \neq \pm 2$). Соотношение $Z = \pm 2$ означает связь величины потенциала и скорости граничных состояний топологического изолятора, в этом легко убедиться, явно вводя скорость в состав гамильтониана.

Далее исследуем задачу рассеяния вблизи границы сверхпроводящей щели. Пусть $M > \Delta$ и $E = M - \Delta + \gamma(M-\Delta)^2$, где $\gamma > 0$, т. е. E находится вблизи граничной точки щели. Найдем решение $\psi_0(x)$ уравнения $(H-E)\psi_0(x) = 0$, описывающее налетающую на препятствие (потенциальный барьер) квазичастицу, в виде $\psi_0(x) = \widehat{\psi}e^{ipx}$, где $\widehat{\psi} = (\widehat{\psi}_1, \widehat{\psi}'_1, \widehat{\psi}_2, \widehat{\psi}'_2)^T$ удовлетворяет уравнению $(\widehat{H}-E)\widehat{\psi} = 0$, а p равенству $d(p) = 0$. Из (2) имеем $(M-\Delta+\gamma(M-\Delta)^2)^2 = (M\pm\Delta)^2 + p^2$. В случае знака «+» в скобках справа, получим $p = i\sigma$, $\sigma > 0$; рассеивающихся состояний, отвечающих осциллирующим функциям, нет. Рассмотрим теперь знак «$-$». Имеем $p^2 = \gamma^2(\Delta - M)^4 + 2(\Delta - M)^3\gamma > 0$, в этом случае есть рассеивающие состояния. Заметим, что $p \ll M, \Delta$. Тогда уравнение $(\widehat{H}-E)\widehat{\psi} = 0$ примет вид

$$\begin{pmatrix} \Delta & 0 & 0 & \Delta \\ 0 & -\Delta & -\Delta & 0 \\ 0 & -\Delta & -\Delta & 0 \\ \Delta & 0 & 0 & \Delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{\psi}_1 \\ \widehat{\psi}'_1 \\ \widehat{\psi}_2 \\ \widehat{\psi}'_2 \end{pmatrix} = 0,$$

и, следовательно,

$$\psi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{i\alpha x},$$

где $\alpha = \sqrt{2(\Delta - M)^3\gamma} \approx 0$.

Выпишем волновую функцию рассеивающегося состояния:

$$\psi_-(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{i\alpha x} + A_- \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-i\alpha x} + B_- \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\alpha x}, \quad x < 0, \tag{11}$$

$$\psi_+(x) = A_+ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{i\alpha x} + B_+ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{i\alpha x}, \quad x > 0. \tag{12}$$

Коэффициенты в (11), (12) ищем таким образом, чтобы выполнялись условия согласования (7), откуда

$$\begin{pmatrix} Z & 2i & Z & -2i \\ 2i & Z & -2i & Z \\ -2i & Z & 2i & Z \\ Z & -2i & Z & 2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_- \\ B_- \\ A_+ \\ B_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -Z/\sqrt{2} \\ -\sqrt{2}i \\ \sqrt{2}i \\ -Z/\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

или

$$\begin{pmatrix} Z & 2i & Z & -2i \\ 2i & Z & -2i & Z \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_- \\ B_- \\ A_+ \\ B_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -Z/\sqrt{2} \\ -\sqrt{2}i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда $B_- = B_+ = A_+ = 0$, $A_- = -\sqrt{2}/2$. Таким образом, налетающая квазичастица, представляющая собой с равными вероятностями электрон или дырку, полностью отражается с сохранением вероятностей.

§ 2. Существование МЛС при максимальном сверхпроводящем токе Джозефсона

Результаты предыдущего параграфа рассмотрим в рамках простейшей модели эффекта Джозефсона, заменяя структуру сверхпроводник–изолятор–сверхпроводник структурой сверхпроводник–примесь (описываемая потенциалом V) — сверхпроводник, где сверхпроводник в области положительных x имеет спаривающий потенциал, пропорциональный $\Delta e^{i\varphi}$, где φ — разность фаз двух сверхпроводников. При этом считаем, что $|M-\Delta| \ll M(\Delta)$, т. е. сверхпроводящая щель очень мала по сравнению с $M(\Delta)$ (иначе число собственных значений в щели велико, и их аналитическое исследование неосуществимо). Волновые функции не зависят от энергии, и найти зависимость тока Джозефсона от φ невозможно. Однако, можно исследовать локализованные состояния для наиболее интересных случаев минимального ($\varphi = 0$) и приближенно максимального ($\varphi = \pi$ [12]) сверхпроводящего тока Джозефсона. Случай $\varphi = 0$ рассмотрен в предыдущем параграфе; случаю $\varphi = \pi$ отвечает потенциал спаривания с $\Delta e^{i\varphi} = -\Delta$. Справа от нуля действует оператор, имеющий в импульсном представлении вид

$$\widehat{H}_+(p) = \begin{pmatrix} M & p & 0 & -\Delta \\ p & -M & \Delta & 0 \\ 0 & \Delta & -M & p \\ -\Delta & 0 & p & M \end{pmatrix}.$$

Видоизмененный оператор на всей числовой оси будем обозначать через H'. Легко видеть, что $\det(\widehat{H}_+(p) - E) = 0$ при $E = 0$, если

$$p = \pm i|M \pm \Delta|.$$

Значению $p_1 = i|M-\Delta|$ соответствует

$$\widehat{H}_+(p_1) = \Delta \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и $\widehat{\psi} = (1,0,0,1)^T$, $\widehat{\psi} = (0,1,1,0)^T$. Для $p_2 = i|M+\Delta|$ имеем

$$\widehat{H}_+(p_2) = \Delta \begin{pmatrix} 1 & 2i & 0 & -1 \\ 2i & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2i \\ -1 & 0 & 2i & 1 \end{pmatrix},$$

$\widehat{\psi} = (i,-1,1,-i)^T$. Тогда волновая функция примет вид

$$\psi_+(x) = A_+ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-|M-\Delta|x} + B_+ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-|M-\Delta|x} + C_+ \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{-2\Delta x}, \quad x > 0.$$

Для $x < 0$ волновая функция определена равенством (6). Условия (7) выполняются для функций $\psi_-(x)$ и $\psi_+(x)$, если

$$\begin{pmatrix} Z & -2i & i(2+Z) & Z & 2i & -2-Z \\ -2i & Z & 2-Z & 2i & Z & i(-2+Z) \\ -2i & -Z & -2-Z & -2i & Z & i(-2-Z) \\ -Z & -2i & i(-2+Z) & Z & -2i & -2+Z \end{pmatrix} (A_+, B_+, C_+, A_-, B_-, C_-)^T = 0, \quad (13)$$

откуда

$$\begin{pmatrix} Z & -2i & i(2+Z) & Z & 2i & -2-Z \\ 0 & Z^2+4 & -Z^2-4 & 4iZ & Z^2-4 & i(Z^2-4Z-4) \\ 0 & Z & 2 & 2i & 0 & iZ \\ 0 & 0 & i(Z^2+4) & Z^2-4 & 0 & -4Z \end{pmatrix} (A_+, B_+, C_+, A_-, B_-, C_-)^T = 0.$$

Предполагая, что $Z \neq 0$, $Z \neq \pm 2$, получаем

$$C_- = \frac{i(Z^2+4)}{4Z} C_+ + \frac{Z^2-4}{4Z} A_-, \quad B_+ = \frac{Z^2-4}{4Z} C_+ - \frac{i(Z^2+4)}{4Z} A_-,$$
$$B_- = iA_-, \quad A_+ = \frac{i(Z^2-4)}{4Z} C_+ + \frac{Z^2+4}{4Z} A_-;$$

A_- и C_+ являются произвольными константами. Выпишем волновые функции, соответствующие максимальному сверхтоку:

$$\psi_+(x) = \frac{1}{4Z} \begin{pmatrix} i(Z^2-4)C_+ + (Z^2+4)A_- \\ (Z^2-4)C_+ - i(Z^2+4)A_- \\ (Z^2-4)C_+ - i(Z^2+4)A_- \\ i(Z^2-4)C_+ + (Z^2+4)A_- \end{pmatrix} e^{-|M-\Delta|x} + C_+ \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{-2\Delta x}, \quad x > 0,$$

$$\psi_-(x) = A_- \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -i \\ -1 \end{pmatrix} e^{|M-\Delta|x} + \frac{1}{4Z} \big(i(Z^2+4)C_+ + (Z^2-4)A_- \big) \begin{pmatrix} -1 \\ i \\ i \\ -1 \end{pmatrix} e^{2\Delta x}, \quad x < 0,$$

Очевидно, что эти функции при $Z \neq \pm 2$ не являются МЛС, т. к. не удовлетворяют условиям сопряжения (4).

Перепишем теперь (13) в эквивалентном виде для $Z = 2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -i & 2i & 1 & i & -2 \\ 0 & 1 & -1 & i & 0 & -i \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix} (A_+, B_+, C_+, A_-, B_-, C_-)^T = 0.$$

Приняв A_-, B_-, C_- за свободные константы получим $A_+ = -iB_-$, $B_+ = -iA_-$, $C_+ = -iC_-$. Выпишем соответствующие волновые функции, являющиеся МЛС,

$$\psi_+(x) = -iB_- \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-|M-\Delta|x} - iA_- \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-|M-\Delta|x} - iC_- \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{-2\Delta x}, \quad x > 0,$$

$$\psi_-(x) = A_- \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{|M-\Delta|x} + B_- \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{|M-\Delta|x} + C_- \begin{pmatrix} -1 \\ i \\ i \\ -1 \end{pmatrix} e^{2\Delta x}, \quad x < 0. \tag{14}$$

В случае $Z = -2$ имеем

$$\begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 1 & -i & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -i & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} (A_+, B_+, C_+, A_-, B_-, C_-)^T = 0.$$

Тогда $A_+ = iB_-$, $B_+ = iA_-$, $C_+ = iC_-$ и для $x < 0$ получаем волновую функцию (14), а для $x > 0$ функция $\psi_+(x)$ поменяет знак. Полученные волновые функции также определяют МЛС.

Теорема 2. *Для гамильтониана $H' + V$ при $Z = \pm 2$ имеются три МЛС, описываемые линейно независимыми собственными вектор–функциями $\psi_j(x)$, $j = 1, 2, 3$, вида*

$$\begin{aligned}
&\psi_1(x) = (0, 1, -1, 0)^T e^{|M-\Delta|x}, \quad x < 0; && \psi_1(x) = \pm(1, 0, 0, 1)^T e^{-|M-\Delta|x}, \quad x > 0;\\
&\psi_2(x) = (1, 0, 0, -1)^T e^{|M-\Delta|x}, \quad x < 0; && \psi_2(x) = \pm(0, 1, 1, 0)^T e^{-|M-\Delta|x}, \quad x > 0;\\
&\psi_3(x) = (-1, i, i, -1)^T e^{2\Delta x}, \quad x < 0; && \psi_3(x) = \pm(i, -1, 1, -i)^T e^{-2\Delta x}, \quad x > 0;
\end{aligned}$$

знак «$\pm$» у вектор–функций соответствует знаку величины Z.

Рассмотрим задачу рассеяния в случае максимального сверхтока Джозефсона вблизи верхней границы щели. Как и выше, предполагаем, что $M > \Delta$ и $E = M - \Delta + \gamma(M-\Delta)^2$, где $\gamma > 0$, тогда уравнение $(\widehat{H} - E)\widehat{\psi} = 0$ $(x > 0)$ примет вид

$$\begin{pmatrix} \Delta & 0 & 0 & -\Delta \\ 0 & -\Delta & \Delta & 0 \\ 0 & \Delta & -\Delta & 0 \\ -\Delta & 0 & 0 & \Delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{\psi}_1 \\ \widehat{\psi}'_1 \\ \widehat{\psi}_2 \\ \widehat{\psi}'_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Волновая функция рассеивающегося состояния для $x < 0$ определена равенством (11), но в отличие от (12),

$$\psi_+(x) = A_+ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\alpha x} + B_+ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{i\alpha x}, \quad x > 0. \tag{15}$$

Коэффициенты согласно (7), (11), (15) удовлетворяют уравнению

$$\begin{pmatrix} Z & 2i & Z & -2i \\ 2i & Z & -2i & Z \\ -2i & Z & -2i & -Z \\ Z & -2i & -Z & -2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_- \\ B_- \\ A_+ \\ B_+ \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -Z \\ -2i \\ 2i \\ -Z \end{pmatrix},$$

или

$$\begin{pmatrix} Z & 0 & 0 & -2i \\ 2i & 0 & 0 & Z \\ 0 & Z & -2i & 0 \\ 0 & 2i & Z & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_- \\ B_- \\ A_+ \\ B_+ \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -Z \\ -2i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

которое при $Z \neq \pm 2$ имеет решение $B_- = A_+ = B_+ = 0$, $A_- = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Таким образом, налетающая квазичастица, являющаяся с равными вероятностями электроном или дыркой, полностью отражается с сохранением вероятностей.

Финансирование. Работа выполнена при финансовой поддержке ФГБОУ ВО «Удмуртский государственный университет» в рамках конкурса на предоставление грантов УдГУ на поддержку молодых ученых «Научный потенциал»-2018, проект № 2018–03–02.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Elliot S.R., Franz M. Colloquium: Majorana fermions in nuclear, particle, and solid-state physics // Reviews of Modern Physics. 2015. Vol. 87. Issue 1. P. 137–163. https://doi.org/10.1103/RevModPhys.87.137
2. Alicea J. New directions in the pursuit of Majorana fermions in solid state systems // Reports on Progress in Physics. 2012. Vol. 75. No. 7. 076501. https://doi.org/10.1088/0034-4885/75/7/076501
3. Sato M., Fujimoto S. Majorana fermions and topology in superconductors // Journal of the Physical Society of Japan. 2016. Vol. 85. No. 7. 072001. https://doi.org/10.7566/JPSJ.85.072001
4. Sarma S.D., Nag A., Sau J.D. How to infer non-Abelian statistics and topological visibility from tunneling conductance properties of realistic Majorana nanowires // Physical Review B. 2016. Vol. 94. Issue 3. 035143. https://doi.org/10.1103/PhysRevB.94.035143
5. Chuburin Yu.P. Existence of Majorana bound states near impurities in the case of a small superconducting gap // Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures. 2017. Vol. 89. P. 130–133. https://doi.org/10.1016/j.physe.2017.02.017
6. Kitaev A.Yu. Unpaired Majorana fermions in quantum wires // Physics-Uspekhi. 2001. Vol. 44. No. 10S. P. 131–136. https://doi.org/10.1070/1063-7869/44/10S/S29
7. Karzig T., Refael G., von Oppen F. Boosting Majorana zero modes // Physical Review X. 2013. Vol. 3. Issue 4. 041017. https://doi.org/10.1103/PhysRevX.3.041017
8. Sarma S.D., Sau J.D., Stanescu T.D. Splitting of the zero-bias conductance peak as smoking gun evidence for the existence of the Majorana mode in a superconductor-semiconductor nanowire // Physical Review B. 2012. Vol. 86. Issue 22. 220506. https://doi.org/10.1103/PhysRevB.86.220506
9. Тинюкова Т.С. Майорановские состояния вблизи примеси в p-волновой сверхпроводящей нанопроволоке // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2018. Т. 28. Вып. 2. С. 222–230. https://doi.org/10.20537/vm180208
10. Cayao J., San-Jose P., Black-Schaffer A.M., Aguado R., Prada E. Majorana splitting from critical currents in Josephson junctions // Physical Review B. 2017. Vol. 96. Issue 20. 205425. https://doi.org/10.1103/PhysRevB.96.205425
11. Cayao J., Black-Schaffer A.M., Prada E., Aguado R. Andreev spectrum and supercurrents in nanowire-based SNS junctions containing Majorana bound states // arXiv: 1712.08127v2 [cond-mat.mes-hall]. 2018. https://arxiv.org/abs/1712.08127
12. Olund C.T., Zhao E. Current-phase relation for Josephson effect through helical metal // Physical Review B. 2012. Vol. 86. Issue 21. 214515. https://doi.org/10.1103/PhysRevB.86.214515
13. Peng Y., Pientka F., Berg E., Oreg Y., von Oppen F. Signatures of topological Josephson junctions // Physical Review B. 2016. Vol. 94. Issue 8. 085409. https://doi.org/10.1103/PhysRevB.94.085409
14. Шмидт В.В. Введение в физику сверхпроводников. М.: МЦНМО, 2000. 402 с.
15. Golubov A.A., Kupriyanov M.Yu., Il'ichev E. The current-phase relation in Josephson junctions // Reviews of Modern Physics. 2004. Vol. 76. Issue 2. P. 411–469. https://doi.org/10.1103/RevModPhys.76.411

Поступила в редакцию 12.06.2019

Тинюкова Татьяна Сергеевна, к. ф.-м. н., доцент, кафедра математического анализа, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: Ttinyukova@mail.ru

Чубурин Юрий Павлович, д. ф.-м. н., ведущий научный сотрудник, УдмФИЦ УрО РАН, 426067, Россия, г. Ижевск, ул. Т. Барамзиной, 34.
E-mail: chuburin@ftiudm.ru

Цитирование: Т. С. Тинюкова, Ю. П. Чубурин. Существование майорановских локализованных состояний в простой модели перехода Джозефсона // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2019. Т. 29. Вып. 3. С. 351–362.

VESTNIK UDMURTSKOGO UNIVERSITETA. MATEMATIKA. MEKHANIKA. KOMP'UTERNYE NAUKI

MATHEMATICS 2019. Vol. 29. Issue 3. Pp. 351–362.

T. S. Tinyukova, Yu. P. Chuburin

Existence of Majorana bounded states in a simple Josephson transition model

Keywords: Bogolyubov–de Gennes Hamiltonian, Green's function, spectrum, eigenvalue, scattering problem, transmission probability, Majorana bounded states.

MSC2010: 81Q10, 81Q15

DOI: 10.20537/vm190306

For the last 15 years, Majorana bounded states (MBSs) and associated phenomena, such as variation of conductance and the Josephson effect, have been actively studied in the physical literature. Research in this direction is motivated by a highly probable use of MBSs in quantum computing. The article studies the eigenfunctions of the one-dimensional Bogolyubov–de Gennes operator with a delta-shaped potential at zero, describing localized states with energy in the spectral gap (superconducting gap). The transmission probabilities are found in the scattering problem for this operator, when the energies are close to the boundary of the superconducting gap. These problems are studied both for a superconducting order that is the only one on the whole straight line and is defined by the real constant Δ, and for a superconducting order defined by the function $\Delta\theta(-x) + \Delta e^{i\varphi}\theta(x)$ for $\varphi = 0, \pi$ (i.e., for zero superconducting current and for current close to critical). The Hamiltonian used can be considered as the simplest model of the Josephson junction. It is proved that in both cases there are two MBSs, but with certain values of the parameters, i.e., MBSs are unstable. Moreover, the probability of passage is zero in both cases.

Funding. The research was funded by Udmurt State University in the framework of the grant support program for young researchers "Scientific potential–2018", project number 2018–03–02.

REFERENCES

1. Elliot S.R., Franz M. Colloquium: Majorana fermions in nuclear, particle, and solid-state physics, *Reviews of Modern Physics*, 2015, vol. 87, issue 1, pp. 137–163. https://doi.org/10.1103/RevModPhys.87.137
2. Alicea J. New directions in the pursuit of Majorana fermions in solid state systems, *Reports on Progress in Physics*, 2012, vol. 75, no. 7, 076501. https://doi.org/10.1088/0034-4885/75/7/076501
3. Sato M., Fujimoto S. Majorana fermions and topology in superconductors, *Journal of the Physical Society of Japan*, 2016, vol. 85, no. 7, 072001. https://doi.org/10.7566/JPSJ.85.072001
4. Sarma S.D., Nag A., Sau J.D. How to infer non-Abelian statistics and topological visibility from tunneling conductance properties of realistic Majorana nanowires, *Physical Review B*, 2016, vol. 94, issue 3, 035143. https://doi.org/10.1103/PhysRevB.94.035143
5. Chuburin Yu.P. Existence of Majorana bound states near impurities in the case of a small superconducting gap, *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, 2017, vol. 89, pp. 130–133. https://doi.org/10.1016/j.physe.2017.02.017
6. Kitaev A.Yu. Unpaired Majorana fermions in quantum wires, *Physics-Uspekhi*, 2001, vol. 44, no. 10S, pp. 131–136. https://doi.org/10.1070/1063-7869/44/10S/S29
7. Karzig T., Refael G., von Oppen F. Boosting Majorana zero modes, *Physical Review X*, 2013, vol. 3, issue 4, 041017. https://doi.org/10.1103/PhysRevX.3.041017
8. Sarma S.D., Sau J.D., Stanescu T.D. Splitting of the zero-bias conductance peak as smoking gun evidence for the existence of the Majorana mode in a superconductor-semiconductor nanowire, *Physical Review B*, 2012, vol. 86, issue 22, 220506. https://doi.org/10.1103/PhysRevB.86.220506
9. Tinyukova T.S. Majorana states in a p-wave superconducting nanowire, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2018, vol. 28, issue 2, pp. 222–230 (in Russian). https://doi.org/10.20537/vm180208

10. Cayao J., San-Jose P., Black-Schaffer A.M., Aguado R., Prada E. Majorana splitting from critical currents in Josephson junctions, *Physical Review B*, 2017, vol. 96, issue 20, 205425. https://doi.org/10.1103/PhysRevB.96.205425
11. Cayao J., Black-Schaffer A.M., Prada E., Aguado R. Andreev spectrum and supercurrents in nanowire-based SNS junctions containing Majorana bound states, 2018, arXiv: 1712.08127v2 [cond-mat.mes-hall]. https://arxiv.org/abs/1712.08127
12. Olund C.T., Zhao E. Current-phase relation for Josephson effect through helical metal, *Physical Review B*, 2012, vol. 86, issue 21, 214515. https://doi.org/10.1103/PhysRevB.86.214515
13. Peng Y., Pientka F., Berg E., Oreg Y., von Oppen F. Signatures of topological Josephson junctions, *Physical Review B*, 2016, vol. 94, issue 8, 085409. https://doi.org/10.1103/PhysRevB.94.085409
14. Schmidt V.V. *Vvedenie v fiziku sverkhprovodnikov* (Introduction to the physics of superconductors), Moscow, 2000, 402 p.
15. Golubov A.A., Kupriyanov M.Yu., Il'ichev E. The current-phase relation in Josephson junctions, *Reviews of Modern Physics*, 2004, vol. 76, issue 2, pp. 411–469. https://doi.org/10.1103/RevModPhys.76.411

Received 12.06.2019

Tinyukova Tat'yana Sergeevna, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Mathematical Analysis, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
E-mail: Ttinyukova@mail.ru

Chuburin Yurii Pavlovich, Doctor of Physics and Mathematics, Leading Researcher, Udmurt Federal Research Center of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. T. Baramzinoi, 34, Izhevsk, 426067, Russia.
E-mail: chuburin@udman.ru

Citation: T. S. Tinyukova, Yu. P. Chuburin. Existence of Majorana bounded states in a simple Josephson transition model, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2019, vol. 29, issue 3, pp. 351–362.