

УДК 519.6

© А. Г. Ченцов, А. А. Ченцов

К ВОПРОСУ О МАРШРУТИЗАЦИИ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В ЗАДАЧЕ С ДИНАМИЧЕСКИМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Рассматривается «аддитивная» задача последовательного обхода мегаполисов (непустых конечных множеств), при посещении которых выполняются некоторые работы; перемещения и выполняемые работы оцениваются функциями стоимости, допускающими зависимость от списка заданий. Имеются ограничения различных типов, среди которых выделяются условия предшествования, используемые «в положительном направлении» (в интересах снижения сложности вычислений). Кроме того, в постановке присутствуют динамические ограничения, формирующиеся по мере выполнения заданий. Исследуемая постановка ориентирована на инженерные приложения, связанные с листовой резкой на машинах с ЧПУ. Исследуется подход к построению оптимальных решений на основе нестандартной версии динамического программирования (ДП). В рамках данного подхода учитываются ограничения различных типов, включая динамические ограничения, естественно возникающие при листовой резке деталей (в частности учитываются тепловые допуски, связанные с надежным отводом тепла из окрестностей точек врезки). При этом допускается комбинация «прямых» запретов на перемещения и выполнение врезки, а также системы штрафов. В последнем случае типично возникают функции стоимости с зависимостью от списка заданий. Применяемый вариант ДП позволяет оптимизировать точку старта, маршрут, отождествляемый с перестановкой индексов, и трассу (траекторию), согласованную с данным маршрутом. На этапе построения функции Беллмана используется экономичный вариант ДП, при котором весь массив значений этой функции не насчитывается, а определяется только система ее слоев (при условиях предшествования, типичных для задачи, связанной с листовой резкой, это приводит к существенному снижению вычислительных затрат). На основе ДП построен оптимальный алгоритм, реализованный на ПЭВМ; приведены результаты вычислительного эксперимента.

Ключевые слова: маршрут, трасса, условия предшествования.

DOI: [10.20537/vm190307](https://doi.org/10.20537/vm190307)

Введение

Настоящая работа продолжает исследования [1, 2]. Рассматривается задача последовательного обхода мегаполисов с условиями предшествования, функциями стоимости, зависящими от списка заданий, и ограничениями, которые также зависят от списка выполненных на текущий момент заданий. Ситуация такого рода может, в частности, возникать в задаче, связанной с листовой резкой деталей на машинах с ЧПУ. В этом случае условия предшествования могут быть связаны, с одной стороны, с требованием предваряющей резки внутренних контуров деталей по отношению к внешним, а с другой — с условиями технологического характера; таким, например, может быть требование более ранней резки крупных или каких-то заранее выделенных деталей. Появление в функциях стоимости зависимости от списка заданий может быть связано [3] с введением штрафов за нарушение некоторых ограничений, связанных с тепловыми допусками. Наконец, появление «прямых» запретов на перемещения может касаться требований по избежанию ситуаций, когда врезка в металл осуществляется возле тонких перемычек, возникающих в результате уже проделанной работы (см. [1, раздел 1]). В настоящей работе мы дополняем [1, 2] в части, касающейся оптимизации точки старта.

Из сказанного выше видно, что рассматриваемая ниже задача существенно отличается от своего естественного прототипа — задачи коммивояжера (TSP — в англоязычной литературе), причем эти отличия касаются не только количественных моментов, но и обстоятельств качественного характера. Представляется, что упомянутая более сложная задача может рассматриваться в рамках теории управления с известными особенностями, которые будут отражены на этапе формализации (трудности вычислительного характера, возникающие в TSP, здесь, конечно, сохраняются и, более того, усугубляются). Данное направление касается, в частности, работ [1–4]. Так, в [1–4] мы используем множества, связанные с развивающимися траекториями и подобные областям достижимости в задачах теории управления [5, 6]. Существенно и то, что в качестве основного метода используется вариант динамического программирования (ДП), являющийся развитием схемы Беллмана в [7], которая в идейном отношении соответствует конструкциям ДП, применяемым в теории управления; в дискретной оптимизации более широко распространен вариант Хелда и Карпа (см. [8]). В связи с методами решения задачи TSP отметим монографии [9–11], а также работу [12], посвященную использованию метода ветвей и границ для решения TSP. Имеется большое число других публикаций, касающихся решения TSP и TSP-PC (задача коммивояжера с условиями предшествования); существенно меньше публикаций, относящихся к задаче GTSP-PC (обобщенная задача коммивояжера с условиями предшествования), отметим работу [13], касающуюся применения метода ветвей и границ для решения инженерной задачи, связанной с металлообработкой.

§ 1. Сводка обозначений и определений общего характера

Используется стандартная теоретико-множественная символика (кванторы, связки и др.), \emptyset обозначает пустое множество, \triangleq — равенство по определению. Если x и y — объекты, то через $\{x; y\}$ обозначаем единственное множество, содержащее x , y и не содержащее никаких других элементов. Каждому объекту z сопоставляется синглетон $\{z\} \triangleq \{z; z\}$, содержащий z : $z \in \{z\}$. Следуя [14, с. 67], любым двум объектам p и q сопоставляем упорядоченную пару (УП) $(p, q) \triangleq \{\{p\}; \{p; q\}\}$ с первым элементом p и вторым элементом q . Если же z есть какая-либо УП, то через $\text{pr}_1(z)$ и $\text{pr}_2(z)$ обозначаем соответственно первый и второй элементы z , однозначно определяемые (как объекты) условием $z = (\text{pr}_1(z); \text{pr}_2(z))$. Для любых трех объектов a , b и c полагаем, как обычно (см. [15, с. 17]), что $(a, b, c) = ((a, b), c)$, получая триплет с первым элементом a , вторым элементом b и третьим элементом c . С этим связывается соглашение [15, с. 17]: для произвольных непустых множеств A , B и C полагается, что $A \times B \times C \triangleq (A \times B) \times C$.

Для всякого множества H через $\mathcal{P}(H)$ обозначаем семейство всех подмножеств (п/м) H , $\mathcal{P}'(H) \triangleq \mathcal{P}(H) \setminus \{\emptyset\}$ есть семейство всех непустых п/м H , а $\text{Fin}(H)$ — семейство всех конечных множеств из $\mathcal{P}'(H)$, т. е. семейство всех непустых конечных п/м H .

Если A и B — непустые множества, то, следуя [14, гл. II, § 6], через B^A обозначаем множество всех отображений из A в B (при $f \in B^A$ и $a \in A$ в виде $f(a) \in B$ имеем образ точки a при действии f). Если $f \in B^A$ и $C \in \mathcal{P}(A)$, то [14, гл. II, § 7] $f^1(C) \triangleq \{f(x) : x \in C\}$ есть образ множества C при действии f . Для всяких четырех непустых множеств A , B , C , D функции $\varphi \in D^{A \times B \times C}$, УП $x \in A \times B$ и точки $y \in C$ в силу свойства $(x, y) \in A \times B \times C$ определено значение $\varphi(x, y) \in D$, обозначаемое также через $\varphi(x_1, x_2, y)$, где $x_1 \triangleq \text{pr}_1(x)$ и $x_2 \triangleq \text{pr}_2(x)$; здесь мы учли представление $A \times B \times C = (A \times B) \times C$.

В дальнейшем \mathbb{R} — вещественная прямая, $\mathbb{R}_+ \triangleq \{\xi \in \mathbb{R} \mid 0 \leq \xi\} = [0, \infty[$, $\mathbb{N} \triangleq \{1; 2; \dots\}$,

$\mathbb{N}_0 \triangleq \{0\} \cup \mathbb{N} = \{0; 1; 2; \dots\}$ и

$$\overline{p, q} \triangleq \{k \in \mathbb{N}_0 \mid (p \leq k) \& (k \leq q)\} \quad \forall p \in \mathbb{N}_0 \quad \forall q \in \mathbb{N}_0.$$

Для непустого множества T в виде $\mathcal{R}_+[T] \triangleq (\mathbb{R}_+)^T$ имеем множество всех неотрицательных вещественнозначных функций на T . Непустому конечному множеству K сопоставляем его мощность $|K| \in \mathbb{N}$ (количество элементов); через $(\text{bi})[K]$ обозначим множество всех биекций [16, с. 87] «промежутка» $\overline{1, |K|}$ на K . Биекция непустого множества A на себя называется [16, с. 87] перестановкой A . Ясно, что при $m \in \mathbb{N}$ в виде $(\text{bi})[\overline{1, m}]$ имеем множество всех перестановок «промежутка» $\overline{1, m}$.

§ 2. Постановка задачи

Пусть X — непустое множество, $X^0 \in \text{Fin}(X)$, $N \in \mathbb{N}$ и при этом $N \geq 2$, заданы (непустые конечные) множества

$$M_1 \in \text{Fin}(X), \dots, M_N \in \text{Fin}(X), \tag{2.1}$$

именуемые мегаполисами; полагаем, что

$$(X^0 \cap M_j = \emptyset \quad \forall j \in \overline{1, N}) \& (M_p \cap M_q = \emptyset \quad \forall p \in \overline{1, N} \quad \forall q \in \overline{1, N} \setminus \{p\}).$$

Здесь X^0 — множество возможных начальных состояний, а мегаполисы (2.1) — объекты посещения из состояний $x \in X^0$. Посещения осуществляются с целью выполнения работ, именуемых внутренними. С целью последующего определения возможных вариантов упомянутых работ введем (непустые) отношения

$$\mathbb{M}_1 \in \mathcal{P}'(M_1 \times M_1), \dots, \mathbb{M}_N \in \mathcal{P}'(M_N \times M_N). \tag{2.2}$$

Элементами отношений (2.2) являются УП, «составленные» каждая из точки прибытия (в мегаполис) и связанной с ней точки отправления.

Пологаем при $j \in \overline{1, N}$, что $\mathcal{M}_j \triangleq \{\text{pr}_1(z) : z \in \mathbb{M}_j\}$ и $\mathbf{M}_j \triangleq \{\text{pr}_2(z) : z \in \mathbb{M}_j\}$. В терминах этих множеств определяем

$$\mathbb{X} \triangleq X^0 \cup \left(\bigcup_{i=1}^N \mathcal{M}_i \right), \quad \mathbf{X} \triangleq X^0 \cup \left(\bigcup_{i=1}^N \mathbf{M}_i \right); \tag{2.3}$$

произведение $\mathbb{X} \times \mathbf{X}$ рассматриваем в качестве фазового пространства рассматриваемых далее процессов. Кроме того, введем $\tilde{\mathbb{X}} \triangleq \mathbb{X} \cup \mathbf{X}$. Разумеется

$$\mathbb{X} \in \text{Fin}(X), \quad \mathbf{X} \in \text{Fin}(X), \quad \tilde{\mathbb{X}} \in \text{Fin}(X), \quad \tilde{\mathbb{X}} \times \mathbf{X} \in \text{Fin}(X \times X).$$

Пологаем $\mathbb{P} \triangleq (\text{bi})[\overline{1, N}]$ и $\mathfrak{N} \triangleq \mathcal{P}'(\overline{1, N})$. Фиксируем N отображений

$$A_1 : \mathbf{X} \times \mathfrak{N} \rightarrow \mathcal{P}'(\mathcal{M}_1), \dots, A_N : \mathbf{X} \times \mathfrak{N} \rightarrow \mathcal{P}'(\mathcal{M}_N). \tag{2.4}$$

Пологаем, что при $j \in \overline{1, N}$, $x \in \mathbf{X}$ и $K \in \mathfrak{N}$ множество $A_j(x, K) \in \mathcal{P}'(\mathcal{M}_j)$ исчерпывает возможности перемещения из x в мегаполис \mathcal{M}_j при наличии списка K невыполненных (на момент перемещения) заданий.

Замечание 1. В задачах, связанных с листовой резкой на машинах с ЧПУ, типичной является зависимость (множества возможных перемещений) от списка выполненных заданий. Однако, переходя к дополнению до $\overline{1, N}$, данную зависимость можно легко свести к виду (2.4) в интерпретации, отмеченной перед настоящим замечанием.

Мы рассматриваем следующий процесс перемещений и внутренних работ

$$\begin{aligned} (x \in X^0) \rightarrow (x_{1,1} \in A_{\alpha(1)}(x, \overline{1, N}) \rightsquigarrow x_{1,2} \in \mathbf{M}_{\alpha(1)}) \rightarrow \dots \rightarrow \\ \rightarrow (x_{N,1} \in A_{\alpha(N)}(x_{N-1,2}, \{\alpha(N)\}) \rightsquigarrow x_{N,2} \in \mathbf{M}_{\alpha(N)}), \end{aligned} \quad (2.5)$$

где $\alpha \in \mathbb{P}$, $(x_{j,1}, x_{j,2}) \in \mathbb{M}_{\alpha(j)}$ при $j \in \overline{1, N}$. Выбор перестановки α , именуемой далее маршрутом, может быть стеснен условиями предшествования, для введения которых фиксируем множество $\mathbf{K} \in \mathcal{P}(\overline{1, N} \times \overline{1, N})$; элементы этого множества (а это — УП) называем адресными парами. Если $\alpha \in \mathbb{P}$, то через α^{-1} условимся обозначать перестановку $\overline{1, N}$, обратную к α ; $\alpha^{-1} \in \mathbb{P}$. Полагаем, что выполнено следующее (неограничительное) условие:

$$\forall \mathbf{K}_0 \in \mathcal{P}'(\mathbf{K}) \quad \exists z_0 \in \mathbf{K}_0: \quad \text{pr}_1(z_0) \neq \text{pr}_2(z) \quad \forall z \in \mathbf{K}_0; \quad (2.6)$$

обсуждение (2.6) см. в [17, часть 2]. Тогда в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \triangleq \left\{ \alpha \in \mathbb{P} \mid \forall t_1 \in \overline{1, N} \quad \forall t_2 \in \overline{1, N} \quad ((\alpha(t_1), \alpha(t_2)) \in \mathbf{K}) \Rightarrow (t_1 < t_2) \right\} = \\ = \left\{ \alpha \in \mathbb{P} \mid \alpha^{-1}(\text{pr}_1(z)) < \alpha^{-1}(\text{pr}_2(z)) \quad \forall z \in \mathbf{K} \right\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{P}) \end{aligned}$$

имеем [17, часть 2] (непустое) множество всех допустимых (по предшествованию) маршрутов полной задачи. Из (2.5) следует, что выбор маршрута, т. е. перестановки индексов, не определяет еще однозначно течение процесса (в этом — существенное отличие от TSP). Важную роль играет конкретная траектория (трасса) перемещений в соответствии с выбранным маршрутом: имеется в виду система УП $(x_{1,1}, x_{1,2}), (x_{2,1}, x_{2,2}), \dots, (x_{N,1}, x_{N,2})$. Мы введем при $x \in X^0$ и $\alpha \in \mathbb{P}$ пучок траекторий, согласованных с маршрутом $\alpha \in \mathbb{P}$ и стартующих из $(x, x) \in X^0 \times X^0$:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_\alpha[x] \triangleq \left\{ z \in \mathbb{Z} \mid (z(0) = (x, x)) \ \& \ (z(t) \in \mathbb{M}_{\alpha(t)} \quad \forall t \in \overline{1, N}) \ \& \right. \\ \left. \ \& \ (\text{pr}_1(z(s)) \in A_{\alpha(s)}(\text{pr}_2(z(s-1)), \alpha^{-1}(s, N)) \quad \forall s \in \overline{1, N}) \right\}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

где \mathbb{Z} — множество всех отображений из $\overline{0, N}$ в $\mathbb{X} \times \mathbb{X}$. Из (2.3) и (2.7) вытекает, что $\mathcal{Z}_\alpha[x]$ совпадает с $\mathcal{Z}(x, \overline{1, N}, \alpha)$ [1, (2)], а потому [1, раздел 3] $\mathcal{Z}_\alpha[x] \neq \emptyset$. С учетом же (2.1), (2.2) и (2.7) получаем теперь, что

$$\mathcal{Z}_\alpha[x] \in \text{Fin}(\mathbb{Z}) \quad \forall x \in X^0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{P}. \quad (2.8)$$

Как следствие имеем (см. (2.7), (2.8)) следующее свойство

$$D[x] \triangleq \{(\alpha, z) \in \mathbf{A} \times \mathbb{Z} \mid z \in \mathcal{Z}_\alpha[x]\} \in \text{Fin}(\mathbf{A} \times \mathbb{Z}) \quad \forall x \in X^0. \quad (2.9)$$

В (2.9) определено множество всех допустимых решений (ДР) при фиксированной точке старта. Соответственно,

$$\mathbf{D} \triangleq \{(\alpha, z, x) \in \mathbf{A} \times \mathbb{Z} \times X^0 \mid (\alpha, z) \in D[x]\} \in \text{Fin}(\mathbf{A} \times \mathbb{Z} \times X^0)$$

есть множество всех ДР рассматриваемой ниже полной экстремальной задачи.

Функции стоимости. Фиксируем функции

$$c \in \mathcal{R}_+[\mathbf{X} \times \mathbb{X} \times \mathfrak{N}], \quad c_1 \in \mathcal{R}_+[\mathbb{X} \times \mathbf{X} \times \mathfrak{N}], \quad \dots, \quad c_N \in \mathcal{R}_+[\mathbb{X} \times \mathbf{X} \times \mathfrak{N}], \quad f \in \mathcal{R}_+[\mathbf{X}]. \quad (2.10)$$

При этом значения c будут использоваться для оценивания внешних перемещений (см. цепочку (2.5)). Значения функций c_1, \dots, c_N будут оценивать качество выполнения внутренних работ, связанных с посещением мегаполисов, а значения f используются для оценивания терминального состояния ($x_{N,2}$ в (2.5)). Используем аддитивный вариант агрегирования затрат. При $\alpha \in \mathbb{P}$ и $z \in \mathbb{Z}$ полагаем (см. [1, (3)]), что

$$\mathfrak{C}_\alpha[z] \triangleq \sum_{s=1}^N [c(\text{pr}_2(z(s-1)), \text{pr}_1(z(s)), \alpha^1(\overline{s, N})) + c_{\alpha(s)}(z(s), \alpha^1(\overline{s, N}))] + f(\text{pr}_2(z(N))). \quad (2.11)$$

Для наших целей существенны значения (2.11) при $(\alpha, z) \in D[x]$, где $x \in X^0$. В качестве основной рассматриваем при этом следующую (полную) задачу:

$$\mathfrak{C}_\alpha[z] \rightarrow \min, \quad (\alpha, z, x) \in \mathbf{D}. \quad (2.12)$$

Для целей решения задачи (2.12) вводим также при $x \in X^0$ задачу

$$\mathfrak{C}_\alpha[z] \rightarrow \min, \quad (\alpha, z) \in D[x], \quad (2.13)$$

которой сопоставляет значение (экстремум)

$$V[x] \triangleq \min_{(\alpha, z) \in D[x]} \mathfrak{C}_\alpha[z] \in \mathbb{R}_+ \quad (2.14)$$

и (непустое) множество $(\text{sol})[x] \triangleq \{(\alpha_0, z_0) \in D[x] \mid \mathfrak{C}_{\alpha_0}[z_0] = V[x]\} \in \mathcal{P}'(D[x])$ всех оптимальных решений упомянутой задачи (2.13). В связи с (2.12)–(2.14) имеет смысл ввести задачу

$$V[x] \rightarrow \min, \quad x \in X^0;$$

при этом, конечно, в виде

$$\mathbb{V} \triangleq \min_{x \in X^0} V[x] \in \mathbb{R}_+ \quad (2.15)$$

имеем значение задачи (2.12) (т. е. глобальный экстремум), а в виде

$$\mathbf{SOL} \triangleq \{(\alpha_0, z_0, x_0) \in \mathbf{D} \mid \mathfrak{C}_{\alpha_0}[z_0] = \mathbb{V}\} \in \text{Fin}(\mathbf{D}) \quad (2.16)$$

получаем множество всех ее оптимальных решений. Мы рассматриваем (2.12) как задачу управления с дискретным временем, понимая множества, являющиеся значениями отображений (2.4), как области достижимости «системы» за один такт перемещений.

§ 3. Динамическое программирование, 1

Рассмотрим совсем кратко детализацию построений [1–4, 17] в части определения частичных или укороченных задач. Здесь прежде всего мы используем прием [17, часть 2], связанный с заменой допустимости маршрутов по предшествованию их допустимостью по

вычеркиванию. В этой связи напомним, что оператор \mathbf{I} [1–4, 17], действующий в \mathfrak{N} , определяется правилом: при $K \in \mathfrak{N}$

$$\mathbf{I}(K) \triangleq K \setminus \{\text{pr}_2(z) : z \in \Xi[K]\}, \quad (3.1)$$

где $\Xi[K] \triangleq \{h \in \mathbf{K} \mid (\text{pr}_1(h) \in K) \ \& \ (\text{pr}_2(h) \in K)\}$. В терминах оператора \mathbf{I} (3.1) определяем допустимость (по вычеркиванию) локальных маршрутов: при $K \in \mathfrak{N}$ в виде

$$(\mathbf{I}\text{-bi})[K] \triangleq \{\alpha \in (\text{bi})[K] \mid \alpha(t) \in \mathbf{I}(\alpha^1(\overline{t, |K|})) \ \forall t \in \overline{1, |K|}\} \in \mathcal{P}'((\text{bi})[K]) \quad (3.2)$$

имеем [1] множество всех локальных (отвечающих посещению мегаполисов M_k , $k \in K$) допустимых (по вычеркиванию) маршрутов.

Кроме того, при $K \in \mathfrak{N}$ через \mathbb{Z}_K обозначим множество всех кортежей

$$(z_t)_{t \in \overline{0, |K|}} : \overline{0, |K|} \rightarrow \tilde{\mathbb{X}} \times \mathbf{X}.$$

Если же $x \in \mathbf{X}$, $K \in \mathfrak{N}$ и $\alpha \in (\text{bi})[K]$, то в виде

$$\begin{aligned} Z(x, K, \alpha) \triangleq \left\{ z \in \mathbb{Z}_K \mid (z(0) = (x, x)) \ \& \ (z(t) \in \mathbb{M}_{\alpha(t)} \ \forall t \in \overline{1, |K|}) \ \& \right. \\ \left. \ \& \ (\text{pr}_1(z(t)) \in A_{\alpha(t)}(\text{pr}_2(z(t-1)), \alpha^1(\overline{t, |K|})) \ \forall t \in \overline{1, |K|}) \right\} \end{aligned} \quad (3.3)$$

имеем, как легко видеть, множество [1, (2)]. Последнее означает, в частности, что

$$Z(x, K, \alpha) \in \text{Fin}(\mathbb{Z}_K) \ \forall x \in \mathbf{X} \ \forall K \in \mathfrak{N} \ \forall \alpha \in (\text{bi})[K].$$

Наряду с (3.2), (3.3) введем в рассмотрение при $K \in \mathfrak{N}$ и $x \in \mathbf{X}$ множество

$$\mathbf{D}_K(x) \triangleq \{(\alpha, z) \in (\mathbf{I}\text{-bi})[K] \times \mathbb{Z}_K \mid z \in Z(x, K, \alpha)\} \in \text{Fin}((\mathbf{I}\text{-bi})[K] \times \mathbb{Z}_K) \quad (3.4)$$

локальных допустимых решений, соответствующих [1, раздел 4]. Заметим, что в (3.2) возможен случай $K = \overline{1, N}$. При этом [17, часть 2]

$$\mathbf{A} = (\mathbf{I}\text{-bi})[\overline{1, N}]. \quad (3.5)$$

Далее, отметим, что (см. [1, раздел 3]), как легко проверить (см. (2.7), (3.3)),

$$\mathcal{Z}_\alpha[x] = Z(x, \overline{1, N}, \alpha) \ \forall x \in X^0 \ \forall \alpha \in \mathbf{A} \quad (3.6)$$

(учитываем, что $N = |\overline{1, N}|$). Наконец, из (2.9), (3.5) и (3.6) вытекает, что

$$D[x] = \mathbf{D}_{\overline{1, N}}(x) \ \forall x \in X^0 \quad (3.7)$$

(в связи с (3.7) отметим, что $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}_{\overline{1, N}}$; однако, согласно (3.6) $Z(x, \overline{1, N}, \alpha) \subset \mathbb{Z}$ при $x \in X^0$ и $\alpha \in \mathbf{A}$).

Введем «укороченные» критерии качества (критерии качества в частичных задачах). Если $x \in \mathbf{X}$, $K \in \mathfrak{N}$, $\alpha \in (\text{bi})[K]$ и $z \in Z(x, K, \alpha)$, то полагаем, что

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\alpha(z|K) \triangleq \sum_{t=1}^{|K|} [c(\text{pr}_2(z(t-1)), \text{pr}_1(z(t)), \alpha^1(\overline{t, |K|})) + c_{\alpha(t)}(z(t), \alpha^1(\overline{t, |K|}))] + \\ + f(\text{pr}_2(z(|K|))). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Здесь мы учитываем, что в (3.3) $z(0) = (x, x) \in \mathbf{X} \times \mathbf{X}$ и $z(t) \in \mathbb{M}_{\alpha(t)}$ при $t \in \overline{1, |K|}$; тогда, в частности, имеем, что $\text{pr}_1(z(t)) \in \mathbb{X}$ и $\text{pr}_2(z(t)) \in \mathbf{X}$ в силу (2.3). Поэтому (см. (2.10)) определены значения

$$c(\text{pr}_2(z(0)), \text{pr}_1(z(1)), \alpha^1(\overline{1, |K|})) = c(x, \text{pr}_1(z(1)), K) \in \mathbb{R}_+$$

и $c_{\alpha(t)}(z(t), \alpha^1(t, |K|)) \in \mathbb{R}_+$ при $t \in \overline{1, |K|}$; имеем также $f(\text{pr}_2(z(|K|))) \in \mathbb{R}_+$. С учетом (3.8) введем при $x \in \mathbf{X}$ и $K \in \mathfrak{N}$ задачу

$$\mathcal{D}_\alpha(z|K) \rightarrow \min, \quad (\alpha, z) \in \mathbf{D}_K(x); \tag{3.9}$$

данной задаче сопоставляем (см. (3.4)) экстремум $v(x, K) \in \mathbb{R}_+$ в виде наименьшего из чисел $\mathcal{D}_\alpha(z|K)$, $(\alpha, z) \in \mathbf{D}_K(x)$, а также непустое множество оптимальных решений из множества $\mathbf{D}_K(x)$. Таким образом (см. (3.9)), определены значения $v(x, K)$ при $x \in \mathbf{X}$ и $K \in \mathfrak{N}$. Полагаем, кроме того, что $v(x, \emptyset) \triangleq f(x) \quad \forall x \in \mathbf{X}$. Теперь определена функция Беллмана на множестве $\mathbf{X} \times \mathcal{P}(\overline{1, N})$, т. е.

$$v \in \mathcal{R}_+[\mathbf{X} \times \mathcal{P}(\overline{1, N})]. \tag{3.10}$$

В частности, определены значения $v(x, \overline{1, N})$, $x \in X^0$. Отметим в этой связи наряду с (3.7), что (см. (3.6)) при $x \in X^0$, $\alpha \in \mathbb{P}$ и $z \in \mathcal{Z}_\alpha[x]$

$$\mathcal{D}_\alpha(z|\overline{1, N}) = \mathfrak{C}_\alpha[z], \tag{3.11}$$

что непосредственно следует из (2.3) и (3.8) с учетом (3.6). В этом случае (см. (2.14), (3.7), (3.11)) при $x \in X^0$

$$V[x] = v(x, \overline{1, N}). \tag{3.12}$$

Таким образом, в виде системы задач (3.9) построено естественное расширение соответствующей задачи (2.13) (имеется в виду случай фиксированного $x \in X^0$). Введем несущественную модификацию каждого из отображений A_1, \dots, A_N , следуя [1, раздел 4].

Итак, если $j \in \overline{1, N}$, то полагаем, что оператор

$$\mathbb{A}_j: \mathbf{X} \times \mathfrak{N} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{M}_j)$$

определяется следующим правилом: при $x \in \mathbf{X}$ и $K \in \mathfrak{N}$

$$\mathbb{A}_j(x, K) \triangleq \{z \in \mathbb{M}_j \mid \text{pr}_1(z) \in A_j(x, K)\}. \tag{3.13}$$

Поскольку отображения A_1, \dots, A_N непустозначны, то из определения множеств $\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_N$ вытекает (см. (3.13)), что

$$\mathbb{A}_j(x, K) \in \mathcal{P}'(\mathbb{M}_j) \quad \forall j \in \overline{1, N} \quad \forall x \in \mathbf{X} \quad \forall K \in \mathfrak{N}.$$

Итак, у нас $\mathbb{A}_1, \dots, \mathbb{A}_N$ — суть непустозначные мультифункции; их определение согласуется с [1, раздел 4]. С учетом этого из [1, теорема 1] вытекает, что $\forall x \in \mathbf{X} \quad \forall K \in \mathfrak{N}$

$$v(x, K) = \min_{j \in \mathbf{I}(K)} \min_{z \in \mathbb{A}_j(x, K)} [c(x, \text{pr}_1(z), K) + c_j(z, K) + v(\text{pr}_2(z), K \setminus \{j\})]. \tag{3.14}$$

В свою очередь, из (3.14) и [1, следствие 1] получаем (см. (3.12)), что при $x \in X^0$

$$V[x] = \min_{j \in \mathbf{I}(\overline{1, N})} \min_{z \in \mathbb{A}_j(x, \overline{1, N})} [c(x, \text{pr}_1(z), \overline{1, N}) + c_j(z, \overline{1, N}) + v(\text{pr}_2(z), \overline{1, N} \setminus \{j\})]. \tag{3.15}$$

Замечание 2. Различие (3.14), (3.15) с [1, теорема 1, следствие 1] проявляется только в одном отношении: x^0 в [1] «заменяется» множеством X^0 . Если же в (3.14) $x \in \mathbf{X} \setminus X^0$, то [1, теорема 1] определяет $v(x, K)$, где $K \in \mathfrak{N}$, и в нашей «новой» задаче. Посредством (3.14) определено уравнение Беллмана, которое будет использоваться для построения слов функции Беллмана.

§ 4. Динамическое программирование, 2 (слои функции Беллмана)

В настоящем параграфе на основе (3.14) конструируется [1, раздел 5] алгоритм на функциональном уровне, доставляющий слои функции Беллмана, достаточные для нахождения глобального экстремума и оптимальных решений. Пусть

$$\mathcal{G} \triangleq \{K \in \mathfrak{N} \mid \forall z \in \mathbf{K} \ (\text{pr}_1(z) \in K) \Rightarrow (\text{pr}_2(z) \in K)\}; \quad (4.1)$$

элементы (4.1) — существенные списки заданий — ранжируем по мощности: вводим

$$\mathcal{G}_s \triangleq \{K \in \mathcal{G} \mid s = |K|\} \quad \forall s \in \overline{1, N}.$$

В виде $\{\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_N\}$ получаем разбиение \mathcal{G} (4.1). Ясно, что $\mathcal{G}_N = \{\overline{1, N}\}$ и $\mathcal{G}_1 = \{\{t\} : t \in \overline{1, N} \setminus \mathbf{K}_1\}$, где $\mathbf{K}_1 = \{\text{pr}_1(z) : z \in \mathbf{K}\}$. Известно [1–4], что

$$\mathcal{G}_{s-1} = \{K \setminus \{t\} : K \in \mathcal{G}_s, t \in \mathbf{I}(K)\} \quad \forall s \in \overline{2, N}. \quad (4.2)$$

Получили (см. (4.2)) рекуррентную процедуру $\mathcal{G}_N \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{G}_1$. Далее конструируем слои D_0, D_1, \dots, D_N пространства позиций $\mathbf{X} \times \mathcal{P}(\overline{1, N})$. При этом $D_N \triangleq \{(x, \overline{1, N}) : x \in X^0\}$, $D_0 \triangleq \{(x, \emptyset) : x \in \widetilde{\mathcal{M}}\}$, где $\widetilde{\mathcal{M}}$ есть по определению объединение всех множеств \mathbf{M}_j , $j \in \overline{1, N} \setminus \{\mathbf{K}_1\}$. Для построения D_s , $s \in \overline{1, N-1}$, используем специальную процедуру (подробное изложение см. в [18, § 6]). Если $s \in \overline{1, N-1}$ и $K \in \mathcal{G}_s$, то

$$J_s(K) \triangleq \{j \in \overline{1, N} \setminus K \mid \{j\} \cup K \in \mathcal{G}_{s+1}\}, \quad \mathcal{M}_s[K] \triangleq \bigcup_{j \in J_s(K)} \mathbf{M}_j,$$

$$\mathbb{D}_s[K] \triangleq \{(x, K) : x \in \mathcal{M}_s[K]\} \in \mathcal{P}'(\mathbf{X} \times \mathcal{G}_s).$$

Полагаем при $s \in \overline{1, N-1}$, что D_s есть объединение всех множеств $\mathbb{D}_s[K]$, $K \in \mathcal{G}_s$. При этом $D_0 \neq \emptyset$, $D_1 \neq \emptyset$, \dots , $D_N \neq \emptyset$. Напомним, что [1, (8)]

$$(\text{pr}_2(z), K \setminus \{j\}) \in D_{s-1} \quad \forall s \in \overline{1, N} \quad \forall (x, K) \in D_s \quad \forall j \in \mathbf{I}(K) \quad \forall z \in \mathbb{A}_j(x, K). \quad (4.3)$$

Введем сужения функции (3.10) на слои D_0, D_1, \dots, D_N . Итак, при $s \in \overline{0, N}$ полагаем, что $v_s \in \mathcal{R}_+[D_s]$ определяется условием

$$v_s(x, K) \triangleq v(x, K) \quad \forall (x, K) \in D_s. \quad (4.4)$$

Тогда $v_0(x, \emptyset) = f(x) \quad \forall x \in \widetilde{\mathcal{M}}$. Итак, функция v_0 известна. Далее (см. (3.12))

$$V[x] = v_N(x, \overline{1, N}) \quad \forall x \in X^0. \quad (4.5)$$

Теперь учитываем (4.3) и (4.4). Получаем следующее вытекающее из (3.14) предложение.

Предложение 1. При $s \in \overline{1, N}$ и $(x, K) \in D_s$

$$v_s(x, K) = \min_{j \in \mathbf{I}(K)} \min_{z \in \mathbb{A}_j(x, K)} [c(x, \text{pr}_1(z), K) + c_j(z, K) + v_{s-1}(\text{pr}_2(z), K \setminus \{j\})].$$

Предложение 1 (см. также [1, предложение 1]) определяет в совокупности с (4.3) преобразование $v_{s-1} \rightarrow v_s$ при $s \in \overline{1, N}$. Получили рекуррентную процедуру

$$v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow \dots \rightarrow v_N, \quad (4.6)$$

позволяющую (см. (4.6)) по известной функции f построить $V[\cdot]$ и найти глобальный экстремум (2.15). При этом алгоритм, реализующий (4.6), можно организовать так, чтобы в памяти компьютера всякий раз находился только один слой функции Беллмана. А именно: по функции f определяем v_0 . Пусть $s \in \overline{1, N}$ и функция v_{s-1} уже найдена. Тогда осуществляем построение $v_s \in \mathcal{R}_+[D_s]$ по правилу, определяемому в предложении 1. Если при этом $s = N$, то в силу (4.5) построение функции $V[\cdot]$ завершено.

Если же $s \neq N$ (т. е. $s \in \overline{1, N-1}$), то слой v_{s-1} заменяется слоем v_s . При этом v_{s-1} может уничтожаться, если нас интересует только построение $V[\cdot]$ и нахождение глобального экстремума, либо (в случае, когда требуется построить оптимальное решение) сохраняться в памяти компьютера. Повторяя вышеупомянутую процедуру на основе предложения 1 N раз, мы получим искомую функцию $V[\cdot]$, а, стало быть, и значение \mathbb{V} (см. (2.15), (4.5)).

В заключении параграфа рассмотрим построение оптимального решения задачи (2.12), т. е. элемента множества (2.16). Прежде всего напомним, что, как уже отмечалось, на этом этапе мы располагаем всеми функциями v_0, v_1, \dots, v_N . Кроме того, мы имеем (см. (2.15), (4.5))

$$\mathbb{V} = \min_{x \in X^0} v_N(x, \overline{1, N}). \quad (4.7)$$

Выбираем теперь (см. (4.7)) $x^0 \in X^0$ так, что

$$\mathbb{V} = v_N(x^0, \overline{1, N}) \quad (4.8)$$

(легко видеть, что в силу (4.7) и (4.8) x^0 есть оптимальная точка старта). Полагаем $\mathbf{z}_0 \triangleq (x^0, x^0)$; тогда $\mathbf{z}_0 \in \mathbb{X} \times \mathbf{X}$. Из (4.8) и предложения 1 имеем,

$$\mathbb{V} = \min_{j \in \mathbf{I}(\overline{1, N})} \min_{z \in \mathbb{A}_j(x^0, \overline{1, N})} [\mathbf{c}(x^0, \text{pr}_1(z), \overline{1, N}) + c_j(z, \overline{1, N}) + v_{N-1}(\text{pr}_2(z), \overline{1, N} \setminus \{j\})]; \quad (4.9)$$

при этом по выбору x^0 имеем свойство $(x^0, \overline{1, N}) \in D_N$, а тогда (см. (4.3))

$$(\text{pr}_2(z), \overline{1, N} \setminus \{j\}) \in D_{N-1} \quad \forall j \in \mathbf{I}(\overline{1, N}) \quad \forall z \in \mathbb{A}_j(x^0, \overline{1, N}). \quad (4.10)$$

С учетом (4.9) выбираем $\eta_1 \in \mathbf{I}(\overline{1, N})$ и $\mathbf{z}_1 \in \mathbb{A}_{\eta_1}(x^0, \overline{1, N})$ так, что

$$\mathbb{V} = \mathbf{c}(x^0, \text{pr}_1(\mathbf{z}_1), \overline{1, N}) + c_{\eta_1}(\mathbf{z}_1, \overline{1, N}) + v_{N-1}(\text{pr}_2(\mathbf{z}_1), \overline{1, N} \setminus \{\eta_1\}). \quad (4.11)$$

Из (4.10) следует, в частности, что $(\text{pr}_2(\mathbf{z}_1), \overline{1, N} \setminus \{\eta_1\}) \in D_{N-1}$, а тогда в силу предложения 1

$$\begin{aligned} v_{N-1}(\text{pr}_2(\mathbf{z}_1), \overline{1, N} \setminus \{\eta_1\}) &= \min_{j \in \mathbf{I}(\overline{1, N} \setminus \{\eta_1\})} \min_{z \in \mathbb{A}_j(\text{pr}_2(\mathbf{z}_1), \overline{1, N} \setminus \{\eta_1\})} [\mathbf{c}(\text{pr}_2(\mathbf{z}_1), \text{pr}_1(z), \overline{1, N} \setminus \{\eta_1\}) + \\ &+ c_j(z, \overline{1, N} \setminus \{\eta_1\}) + v_{N-2}(\text{pr}_2(z), \overline{1, N} \setminus \{\eta_1; j\})] \end{aligned}$$

и при этом $(\text{pr}_2(h), \overline{1, N} \setminus \{\eta_1; t\}) \in D_{N-2} \quad \forall t \in \mathbf{I}(\overline{1, N} \setminus \{\eta_1\}) \quad \forall h \in \mathbb{A}_t(\text{pr}_2(\mathbf{z}_1), \overline{1, N} \setminus \{\eta_1\})$; см. (4.3). С учетом этого выбираем $\eta_2 \in \mathbf{I}(\overline{1, N} \setminus \{\eta_1\})$ и $\mathbf{z}_2 \in \mathbb{A}_{\eta_2}(\text{pr}_2(\mathbf{z}_1), \overline{1, N} \setminus \{\eta_1\})$, для которых

$$\begin{aligned} v_{N-1}(\text{pr}_2(\mathbf{z}_1), \overline{1, N} \setminus \{\eta_1\}) &= \mathbf{c}(\text{pr}_2(\mathbf{z}_1), \text{pr}_1(\mathbf{z}_2), \overline{1, N} \setminus \{\eta_1\}) + \\ &+ c_{\eta_2}(\mathbf{z}_2, \overline{1, N} \setminus \{\eta_1\}) + v_{N-2}(\text{pr}_2(\mathbf{z}_2), \overline{1, N} \setminus \{\eta_1; \eta_2\}); \end{aligned} \quad (4.12)$$

в силу (4.3) $(\text{pr}_2(\mathbf{z}_2), \overline{1, N} \setminus \{\eta_1; \eta_2\}) = (\text{pr}_2(\mathbf{z}_2), (\overline{1, N} \setminus \{\eta_1\}) \setminus \{\eta_2\}) \in D_{N-2}$.

Теперь из (4.11) и (4.12) получаем, что

$$\mathbb{V} = \mathbf{c}(\text{pr}_2(\mathbf{z}_0), \text{pr}_1(\mathbf{z}_1), \overline{1, N}) + \mathbf{c}(\text{pr}_2(\mathbf{z}_1), \text{pr}_1(\mathbf{z}_2), \overline{1, N} \setminus \{\eta_1\}) + \\ + c_{\eta_1}(\mathbf{z}_1, \overline{1, N}) + c_{\eta_2}(\mathbf{z}_2, \overline{1, N} \setminus \{\eta_1\}) + v_{N-2}(\text{pr}_2(\mathbf{z}_2), \overline{1, N} \setminus \{\eta_1; \eta_2\}).$$

Далее процесс выбора, подобный (4.11) и (4.12), следует продолжать вплоть до исчерпания множества индексов (см. подобное построение в [18, § 7]). В результате будут построены $\eta = (\eta_j)_{j \in \overline{1, N}} \in \mathbf{A}$ и $(\mathbf{z}_j)_{j \in \overline{0, N}} \in \mathcal{Z}_\eta[x^0]$ со свойством

$$(\eta, (\mathbf{z}_j)_{j \in \overline{0, N}}, x^0) \in \mathbf{SOL}.$$

§ 5. Вычислительный эксперимент

Для практического применения (вычислительного эксперимента) алгоритмических конструкций, рассматриваемых в настоящей работе, будем рассматривать следующую упрощенную модель реального процесса резки заготовок на машинах с ЧПУ. Пусть множество X (см. начало параграфа 2) представляет собой прямоугольную область на плоскости, соответствующую листу материала, для которого должен быть произведен раскрой на некоторое множество заготовок (деталей), т. е. $X \triangleq [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$, где $x_1 \in \mathbb{R}$, $x_2 \in \mathbb{R}$, $y_1 \in \mathbb{R}$ и $y_2 \in \mathbb{R}$, при этом $x_1 < x_2$, $y_1 < y_2$; числа x_1, x_2, y_1, y_2 зафиксированы. Пусть N — количество вырезаемых контуров деталей. Процесс реза начинается из исходного положения режущего инструмента, такие точки образуют множество X^0 (см. начало параграфа 2), после этого резак перемещается к первому (по порядку реализации раскройного плана) контуру. При выполнении реза по контуру детали включение резака и его выключение после окончания реза производится в некоторых точках, расположенных вблизи данного контура, при этом после начала реза (врезки) резак перемещается на контур, затем производится движение включенного резака по замкнутому контуру, и, по завершении, отвод его в точку выключения (она расположена вблизи соответствующей точки включения резака); поскольку затраты на движение по замкнутому контуру одинаковы для любой точки врезки, мы будем пренебрегать данной постоянной составляющей в процессе подсчета затрат при реализации раскройного плана. После выключения режущего инструмента осуществляется его перемещение к точке включения (врезки) следующего вырезаемого контура или, если все контуры вырезаны, в точку парковки резака (в нашей модели она совпадает с точкой старта раскроя листа). Реализуется система перемещений (2.5). Таким образом каждому контуру соответствуют основная и вспомогательная эквидистанты: вспомогательная эквидистанта есть множество точек врезки и связанных с ними точек выключения инструмента, а основной эквидистантой является замкнутая траектория движения резака при вырезании контура детали; обе эквидистанты расположены в непосредственной близости друг от друга и, для простоты вычислительной реализации, дискретизированы. Мегаполисы (2.1) отождествляются с вспомогательной дискретизированной эквидистантой. Таким образом, отношения $(\mathbb{M}_i)_{i \in \overline{1, N}}$ (2.2) в нашей модели — множества УП, у которых первый элемент — это точка врезки, а второй — точка выключения инструмента. При этом точки врезки образуют множества $(\mathcal{M}_i)_{i \in \overline{1, N}}$, а точки выключения инструмента — множества $(\mathbf{M}_i)_{i \in \overline{1, N}}$ (см. начало параграфа 2); сами вырезаемые контуры (основные эквидистанты) обозначим через $(\widetilde{M}_i)_{i \in \overline{1, N}}$.

В данной задаче ограничения на порядок резки контуров, образующие множество \mathbf{K} , носят технологический характер, а именно, вырезание внутренних контуров всегда должно предшествовать резке внешних контуров, при этом одни детали допустимо располагать внутри других, но запрещено пересечение эквидистант вырезаемых контуров.

Функции (2.10) определим следующим образом:

- 1) функция c задается посредством евклидова расстояния и оценивает затраты на перемещение инструмента с выключенным резаком из исходного положения (некоторый элемент множества X^0) или точки выключения инструмента в следующую по порядку реализации раскройного плана точку врезки;
- 2) функции c_1, \dots, c_N оценивают сумму затрат на перемещение инструмента с включенным резаком из точки врезки x_1 (находится на вспомогательной эквидистанте) в точку x_2 на вырезаемом контуре (расположена на основной эквидистанте) и затрат на отвод инструмента после завершения вырезания контура в точку выключения резака x_3 (расположена также на вспомогательной эквидистанте); пусть данные функции имеют вид выражения $3 * \rho(x_1, x_2) + \rho(x_2, x_3)$, где ρ — это евклидово расстояние, а множитель 3 служит для учета дополнительных затрат на пробивку материала в процессе врезки и движения к основной эквидистанте; при этом напомним, что движение инструмента от финальной точки на контуре к точке выключения инструмента осуществляется также с включенным резаком, но в данном случае не производится прорезаний «перемычки» между основной и вспомогательной эквидистантами;
- 3) функция f — это евклидово расстояние от точки выключения резака на последнем по порядку реализации раскройного плана контуре до позиции парковки резака (она не обязательно совпадает с точкой старта раскроя, т. е. с элементом множества X^0).

Рассмотрим теперь способ задания отображений (2.4), используемый в настоящей работе. Пусть в данный момент времени режущий инструмент находится в позиции y и не выполняет рез; это может быть либо точка начала движения (база, элемент множества X^0), либо точка выключения инструмента на некотором уже вырезанном контуре. При этом пусть не вырезаны контуры, индексы которых образуют множество K , $K \subset \overline{1, N}$; иными словами, $y \in X^0$ или $y \in M_i$, $i \in \overline{1, N} \setminus K$. Нас будет интересовать множество точек врезки для контура j , $j \in K$, в которые допустим переход из точки y ; данное множество всякий раз является результатом применения соответствующего отображения (2.4) $A_j(y, K)$.

Будем использовать два критерия допустимости точек врезки:

- 1) обеспечение рассеивания тепла в материале (соблюдение тепловых допусков);
- 2) отбрасывание наиболее удаленных точек врезки (минимизация холостого хода резака).

Условие 1) доминирует, а критерий 2) применяется к точкам врезки, которые удовлетворяют 1). Подробно рассмотрим механизм ограничений 1) и 2).

1) Для исключения коробления материала в зоне врезки необходимо наличие некоторой не вырезанной области возле нее (избыточное тепло рассеивается в этой части материала): задана величина теплового допуска $\delta \in \mathbb{R}_+$, $\delta > 0$. Точка врезки $z \in M_j$ является допустимой (с точки зрения рассеивания тепла), если в ее δ -окрестности нет точек врезки и точек уже вырезанных контуров:

$$(\rho(z, z_1) > \delta \quad \forall z_1 \in M_k \quad \forall k \in \overline{1, N} \setminus K) \ \& \ (\rho(z, z_2) > \delta \quad \forall z_2 \in \widetilde{M}_k \quad \forall k \in \overline{1, N} \setminus K),$$

где ρ — евклидово расстояние. Обозначим множество выбранных (согласно 1)) точек врезки через $M_i^{(1)}$. Если не найдено ни одной допустимой точки врезки, то разрешается переход в любую точку соответствующего мегаполиса, а сам мегаполис помечается как проблемный. Совершенно понятно, что при движении из базы все точки всех мегаполисов доступны с точки зрения 1), поскольку ни один контур еще не вырезался.

2) Находим среди точек врезки z , $z \in M_j^{(1)}$, то есть удовлетворяющих 1), элемент z' , ближайший к y : $c(y, z') = \min_{z \in M_j^{(1)}} c(y, z)$, где $y \in M_i$, $i \in \overline{1, N} \setminus K$. Точка z' признается

допустимой согласно критерию 2). Зададимся для каждого контура k , $k \in \overline{1, N}$, величиной допуска $\varepsilon_k \in \mathbb{R}_+$. Будем считать, что точка врезки z , $z \in M_j^{(1)}$, удовлетворяет критерию 2), если $\rho(y, z) - \rho(y, z') \leq \varepsilon_j$.

В случае отсутствия допустимых для перехода точек врезки с точки зрения критерия 1) (проблемный мегаполис), разрешается переход в любую точку врезки контура, удовлетворяющую 2), но накладывается штраф в виде очень большого значения затрат, характеризующих такой переход. Тем самым конкретизируется функция c . В итоге появляется зависимость функций стоимости от списка заданий.

Таким образом мы задали отображения $A_i(y, K)$, при этом компонента 1) соответствует зависимости от списка еще не выполненных заданий, а в виде 2) реализуется зависимость от точки перехода.

В процессе реализации схемы на основе ДП (4.6), мы получаем глобальный экстремум (2.15), маршрут и трассу его доставляющие; также оптимизируется выбор начальной точки (базы) — элемента множества X^0 .

Рассматриваемые в данной статье концепции были реализованы в виде программы для ПЭВМ, написанной на языке программирования C++, работающей под управлением 64-хразрядной операционной системы семейства Windows (начиная с версии Windows 7). Вычислительная часть программы реализована в отдельном от интерфейса пользователя потоке; имеется возможность графического представления траектории движения инструмента, также возможно увеличение отдельных участков графика и сохранение изображения в файл графического формата bmp. Исходные данные и результаты счета программы хранятся в текстовом файле специальной структуры. В программе реализована возможность выбора метода отбора точек врезки: либо только вариант 1) (тепловые допуски $(\delta_i)_{i \in \overline{1, N}}$ являются параметрами), либо вариант 1) и вариант 2) (допуски $(\varepsilon_i)_{i \in \overline{1, N}}$ также задаются в виде параметров задачи). Рассмотрим пример действия критериев отбора точек врезки 1) и 2).

Вычислительный эксперимент проводился на ПЭВМ с процессором Intel Core i7, объемом ОЗУ 64 ГБ с установленной операционной системой Windows 7 Максимальная SP1. Пусть $N = 33$, количество адресных пар в ограничениях на порядок посещения мегаполисов $|K| = 33$, множество X^0 представлено 52 точками, выбранная точка старта является точкой парковки резака после последнего реза, при этом $\delta_k = 5$, $\forall k \in \overline{1, N}$. Ниже приведем результаты решения задачи на ПЭВМ; на графиках значками \triangleleft помечены точки врезки, а \triangleright — точки выключения инструмента; символом \diamond отмечены элементы множества X^0 .

Пусть $\varepsilon_i = 5$, $\forall i \in \overline{1, N}$. В данном случае мы имеем весьма ограниченный набор доступных для перехода точек врезки. Получены следующие результаты.

Величина совокупных затрат $\mathbb{V} = 1012.147$.

Выбран начальный пункт движения: $(-50, -45)$.

Последняя пара точек врезки/выключения резака: $(-20, 9; -19, 6)$.

Время счета составило 24 час. 42 мин. 43 сек.

График маршрута и трассы приведен на рис. 1.

Пусть теперь $\varepsilon_i = 25$, $\forall i \in \overline{1, N}$. В данном случае мы существенно расширили возможности по выбору доступных для перехода точек врезки. Получены следующие результаты.

Величина совокупных затрат $\mathbb{V} = 975.534$.

Выбран начальный пункт движения: $(-50, -45)$.

Последняя пара точек врезки/выключения резака: $(-20, 9; -19, 6)$.

Время счета составило 25 час. 8 мин. 54 сек.

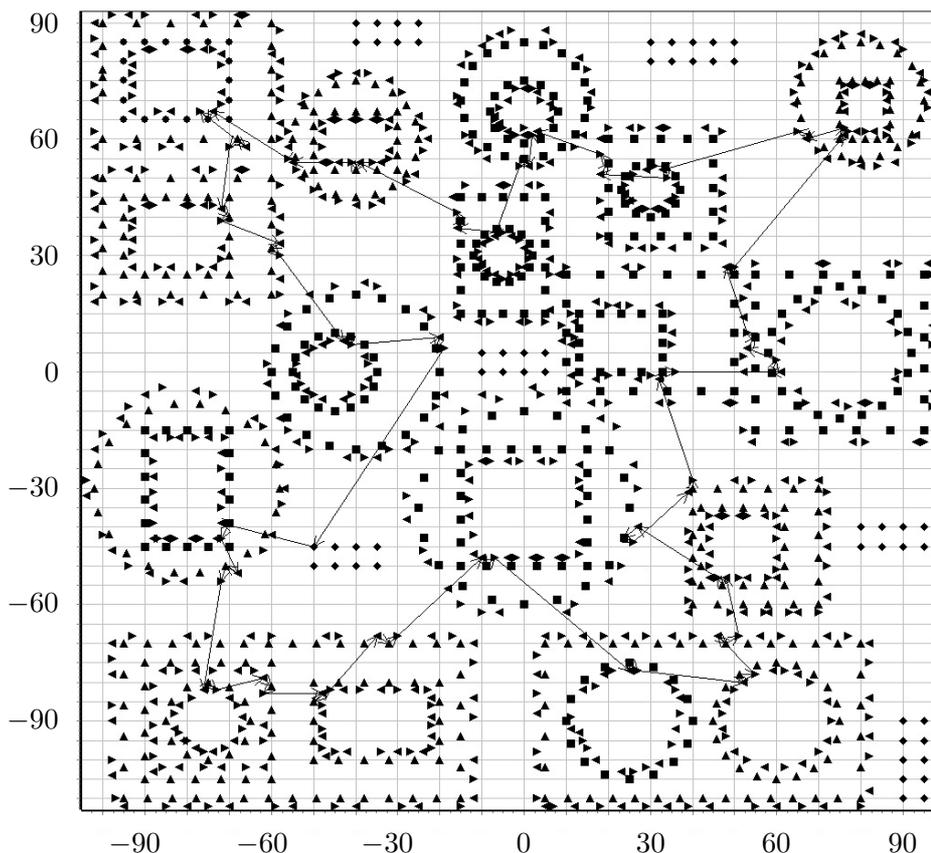


Рис. 1. Маршрут и трасса при значении $\varepsilon_i = 5$

График маршрута и трассы приведен на рис. 2.

В случае, если $\varepsilon_i = 50$, $\forall i \in \overline{1, N}$, результаты совпали с вариантом $\varepsilon_i = 25$, $\forall i \in \overline{1, N}$, время счета составило 25 час. 9 мин. 6 сек. Данный результат также совпал с полученным в случае, когда используется только вариант 1) (не применялись допуски $(\varepsilon_i)_{i \in \overline{1, N}}$).

Рассматривая результаты счета для приведенных примеров, можно отметить, что уменьшение значений параметров $(\varepsilon_i)_{i \in \overline{1, N}}$ позволяет уменьшить объем перебора при поиске решения, что сказалось на времени счета, при этом проигрыш по результату составил менее 4 процентов, а радикальной перестройки траектории движения не наблюдается.

Заключение

Настоящая работа продолжает цикл исследований в области задач маршрутизации, ориентированных на инженерные приложения (см. [19–28] и др.). В статье исследуются вопросы, возникающие в задаче управления инструментом при листовой резке на машинах с ЧПУ, но целый ряд положений имеет очень общий характер и, в частности, касается применения аппарата ДП в редакции, развивающей подход [7]. Представляется, что роль ДП при решении задачи упомянутого типа, осложненных разнообразными ограничениями, весьма значительна. Построения настоящей статьи объективно сближают ее постановку с задачами управления с дискретным временем, а используемый вариант ДП соответствует данным задачам (попятная процедура; в дискретной оптимизации более широкое распространение получила схема [8]).

Отметим, что рассматриваемые в работе методы использовались авторами и при исследовании другой инженерной задачи, а именно: задачи минимизации дозовой нагрузки

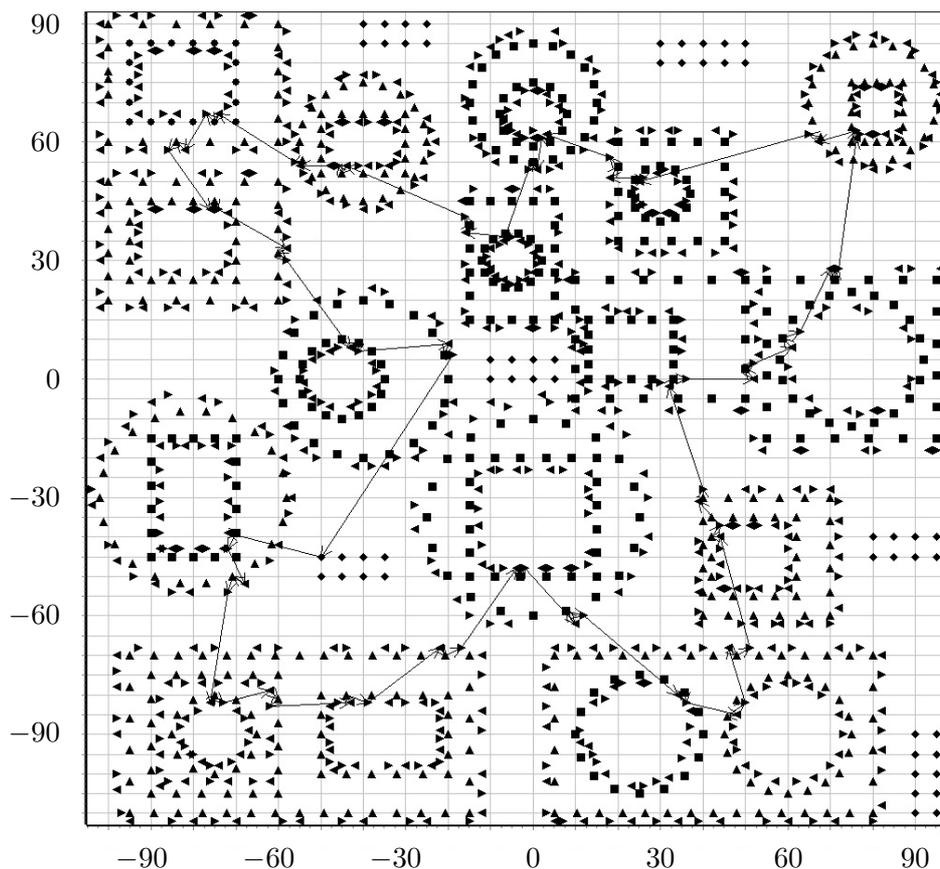


Рис. 2. Маршрут и трасса при значении $\varepsilon_i = 25$

при выполнении работ, связанных с последовательным демонтажом радиационно опасных элементов при аварийных ситуациях на АЭС; см. [23–25]. В упомянутой задаче естественным образом возникают функции стоимости с зависимостью от списка заданий: «светят» те и только те источники, которые не были демонтированы на текущий момент времени (в задачах, связанных с листовой резкой на машинах с ЧПУ, такая зависимость обычно создается искусственно за счет введения штрафов за нарушение ограничений; это относится и к построениям настоящей работы). Отметим, что обе упомянутые прикладные задачи приводят к постановке, многократно более сложной в сравнении с TSP. Соответственно, требуются и более сложные теоретические конструкции, опирающиеся на адекватную формализацию. В частности, представляется естественным представление решений в иерархической форме: маршрут (перестановка индексов) определяет возможность выбора трасс или траекторий процесса.

В связи с использованием ДП при решении задачи большой размерности см. [26–28].

Финансирование. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 18–01–00410).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ченцов А.Г., Ченцов А.А. Задача маршрутизации с ограничениями, зависящими от списка заданий // Доклады Академии наук. 2015. Т. 465. № 2. С. 154–158.
<https://doi.org/10.7868/S0869565215320043>

2. Кошелева М.С., Ченцов А.А., Ченцов А.Г. О задаче маршрутизации с ограничениями, включающими зависимость от списка заданий // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21. № 4. С. 178–195. <http://mi.mathnet.ru/timm1240>
3. Ченцов А.Г., Ченцов П.А. Маршрутизация в условиях ограничений: задача о посещении мегаполисов // Автоматика и телемеханика. 2016. № 11. С. 96–117. <http://mi.mathnet.ru/at14599>
4. Ченцов А.Г., Ченцов А.А. Динамическое программирование в задаче маршрутизации с ограничениями и стоимостями, зависящими от списка заданий // Доклады Академии наук. 2013. Т. 453. № 1. С. 20–23. <https://doi.org/10.7868/S0869565213230047>
5. Красовский Н.Н. Игровые задачи о встрече движений. М.: Физматлит, 1970. 420 с.
6. Панасюк А.И., Панасюк В.И. Асимптотическая магистральная оптимизация управляемых систем. Минск: Наука и техника, 1986.
7. Беллман Р. Применение динамического программирования к задаче о коммивояжере // Кибернетический сборник. М.: Мир, 1964. Вып. 9. С. 219–228.
8. Хелд М., Карп Р.М. Применение динамического программирования к задачам упорядочения // Кибернетический сборник. М.: Мир, 1964. Вып. 9. С. 202–218.
9. Gutin G., Punnen A.P. (Eds.) The traveling salesman problem and its variations. Springer US, 2007. XVIII+830 p. <https://doi.org/10.1007/b101971>
10. Cook W.J. In pursuit of traveling salesman. Mathematics at the limits of computation. New Jersey: Princeton University Press, 2012.
11. Гимади Э.Х., Хачай М.Ю. Экстремальные задачи на множествах перестановок. Екатеринбург: УМЦ УПИ, 2016.
12. Литл Дж., Мурти К., Суини Д., Кэрел К. Алгоритм для решения задачи о коммивояжере // Экономика и математические методы. 1965. Т. 1. Вып. 1. С. 94–107.
13. Lokin F.C.J. Procedures for travelling salesman problems with additional constraints // European Journal of Operational Research. 1979. Vol. 3. No. 2. P. 135–141. [https://doi.org/10.1016/0377-2217\(79\)90099-7](https://doi.org/10.1016/0377-2217(79)90099-7)
14. Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств. М.: Мир, 1970.
15. Дьедонне Ж. Основы современного анализа. М.: Мир, 1964.
16. Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р. Алгоритмы: построение и анализ. М.: МЦНМО, 2000.
17. Ченцов А.Г. Экстремальные задачи маршрутизации и распределения заданий: вопросы теории. М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2008.
18. Ченцов А.Г. К вопросу о маршрутизации комплексов работ // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2013. Вып. 1. С. 59–82. <https://doi.org/10.20537/vm130107>
19. Петунин А.А. О некоторых стратегиях формирования маршрута инструмента при разработке управляющих программ для машин термической резки материала // Вестник УГАТУ. Сер. Управление, вычислительная техника и информатика. 2009. Т. 13. № 2 (35). С. 280–286.
20. Петунин А.А., Ченцов А.Г., Ченцов П.А. К вопросу о маршрутизации движения инструмента в машинах листовой резки с числовым программным управлением // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Информатика. Телекоммуникации. Управление. 2013. Вып. 2 (169). С. 103–111.
21. Петунин А.А., Ченцов А.Г., Ченцов П.А. Локальные вставки на основе динамического программирования в задаче маршрутизации с ограничениями // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2014. Вып. 2. С. 56–75. <https://doi.org/10.20537/vm140204>
22. Ченцов А.Г., Ченцов А.А. Маршрутизация перемещений при динамических ограничениях: задача «на узкие места» // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2016. Т. 26. Вып. 1. С. 121–140. <https://doi.org/10.20537/vm160110>
23. Ченцов А.Г., Ченцов А.А. Модельный вариант задачи о последовательной утилизации источников излучения (итерации на основе оптимизирующих вставок) // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2017. Т. 50. С. 83–109. <https://doi.org/10.20537/2226-3594-2017-50-08>

24. Ченцов А.Г., Ченцов А.А., Сесекин А.Н. Динамическое программирование в обобщенной задаче «на узкие места» и оптимизация точки старта // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2018. Т. 28. Вып. 3. С. 348–363.
<https://doi.org/10.20537/vm180306>
25. Коробкин В.В., Сесекин А.Н., Ташлыков О.Л., Ченцов А.Г. Методы маршрутизации и их приложения в задачах повышения безопасности и эффективности эксплуатации атомных станций. М.: Новые технологии, 2012.
26. Ченцов А.Г. Беллмановские вставки в задаче маршрутизации с ограничениями и усложненными функциями стоимости // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2014. Вып. 4. С. 122–141. <https://doi.org/10.20537/vm140410>
27. Ченцов А.Г. Оптимизирующие вставки в задачах маршрутизации и их реализация на основе динамического программирования // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2016. Т. 26. Вып. 4. С. 565–578.
<https://doi.org/10.20537/vm160410>
28. Ченцов А.Г., Григорьев А.М. Оптимизирующие мультивставки в задачах маршрутизации с ограничениями // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2018. Т. 28. Вып. 4. С. 513–530. <https://doi.org/10.20537/vm180406>

Поступила в редакцию 28.06.2019

Ченцов Александр Георгиевич, д. ф.-м. н., член-корреспондент РАН, главный научный сотрудник, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, 620219, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16;
профессор, Уральский федеральный университет, 620002, Россия, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19.
E-mail: chentsov@imm.uran.ru

Ченцов Алексей Александрович, к. ф.-м. н., научный сотрудник, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, 620219, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.
E-mail: chentsov.a@binsys.ru

Цитирование: А. Г. Ченцов, А. А. Ченцов. К вопросу о маршрутизации перемещений в задаче с динамическими ограничениями // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2019. Т. 29. Вып. 3. С. 363–381.

A. G. Chentsov, A. A. Chentsov

On the question of the optimization of permutations in the problem with dynamic constraints

Keywords: route, path, precedence conditions.

MSC2010: 05A05, 97N70, 97N80

DOI: [10.20537/vm190307](https://doi.org/10.20537/vm190307)

The “additive” problem of sequentially visiting megalopolises (nonempty finite sets) is considered; some tasks are executed as the megalopolises are visited. Permutations and operations are evaluated by cost functions that admit a dependence on the list of tasks. There are restrictions of different types, which include precedence conditions used in the “positive direction” (to reduce the complexity of calculations). In addition, this conception involves dynamical restrictions that are formed in the process of task execution. This conception is oriented to engineering applications associated with sheet cutting on CNC machines. An approach to constructing optimal solutions based on a nonstandard version of dynamic programming (DP) is investigated. This approach takes into account restrictions of different types, including dynamic constraints which naturally arise in sheet cutting applications (in particular, it takes into account heat tolerances related to diffusion of heat in the vicinities of tie-in points). In this regard, a combination of “direct” interdictions of movements and cutting and a system of penalties is allowed; in the latter case, cost functions with a dependence on the list of tasks arise. The variant of DP that is used allows one to optimize the selection of a starting point, the route, which is identified with a permutation of the indexes, and the trajectory corresponding to the above-mentioned route. An economical variant of DP is used at the stage of construction of the Bellman function. This conception allows avoiding calculation of the whole array of values of this function; instead, only the system of its layers is defined (in the case of using the precedence conditions, which are typical of the problem of sheet cutting, this conception results in a considerable reduction of calculation costs). An optimal DP-based algorithm is constructed and realized on PC, and the results of the computational experiment are presented.

Funding. The research was funded by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 18–01–00410).

REFERENCES

1. Chentsov A.G., Chentsov A.A. Route problem with constraints depending on a list of tasks, *Doklady Mathematics*, 2015, vol. 92, no. 3, pp. 685–688. <https://doi.org/10.1134/S1064562415060083>
2. Kosheleva M.S., Chentsov A.A., Chentsov A.G. On a routing problem with constraints that include dependence on a task list, *Tr. Inst. Mat. Mekh. Ural. Otd. Ross. Akad. Nauk*, 2015, vol. 21, no. 4, pp. 178–195 (in Russian). <http://mi.mathnet.ru/eng/timm1240>
3. Chentsov A.G., Chentsov P.A. Routing under constraints: Problem of visit to megalopolises, *Automation and Remote Control*, 2016, vol. 77, no. 11, pp. 1957–1974. <https://doi.org/10.1134/S0005117916110060>
4. Chentsov A.G., Chentsov A.A. Dynamic programming in the routing problem with constraints and costs depending on a list of tasks, *Doklady Mathematics*, 2013, vol. 88, no. 3, pp. 637–640. <https://doi.org/10.1134/S1064562413060021>
5. Krasovskii N.N. *Igrovye zadachi o vstreche dvizhenii* (Game problems about meeting motions), Moscow: Fizmatlit, 1970.
6. Panasyuk A.I., Panasyuk V.I. *Asimptoticheskaya magistral'naya optimizatsiya upravlyaemykh sistem* (The asymptotic magistral optimization of the controllable systems), Minsk: Nauka i tekhnika, 1986.
7. Bellman R. Dynamic programming treatment of the travelling salesman problem, *Journal of the ACM*, 1962, vol. 9, issue 1, pp. 61–63. <https://doi.org/10.1145/321105.321111>

8. Held M., Karp R.M. A dynamic programming approach to sequencing problems, *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, 1962, vol. 10, no. 1, pp. 196–210.
<https://doi.org/10.1137/0110015>
9. Gutin G., Punnen A.P. (Eds.) *The traveling salesman problem and its variations*, Springer US, 2007, XVIII+830 p. <https://doi.org/10.1007/b101971>
10. Cook W.J. *In pursuit of traveling salesman. Mathematics at the limits of computation*, New Jersey: Princeton University Press, 2012.
11. Gimadi E.Kh., Khachay M.Yu. *Ekstremal'nye zadachi na mnozhestvakh perestanovok* (Extreme problems on sets of permutations), Yekaterinburg: UMC UPI, 2016, 220 p.
12. Little G.D.C., Murty K.G., Sweeney D.W., Karel C. An algorithm for the traveling salesman problem, *Operations Research*, 1963, vol. 11, issue 6, pp. 972–989.
<https://doi.org/10.1287/opre.11.6.972>
13. Lokin F.C.J. Procedures for travelling salesman problems with additional constraints, *European Journal of Operational Research*, 1979, vol. 3, no. 2, pp. 135–141.
[https://doi.org/10.1016/0377-2217\(79\)90099-7](https://doi.org/10.1016/0377-2217(79)90099-7)
14. Kuratowski K., Mostowski A. *Set theory*, Amsterdam: North-Holland, 1967.
Translated under the title *Teoriya mnozhestv*, Moscow: Mir, 1970.
15. Dieudonné J. *Foundations of modern analysis*, New York: Academic Press Inc., 1960.
Translated under the title *Osnovy sovremennogo analiza*, Moscow: Mir, 1964.
16. Cormen T.H., Leizerson C.E., Rivest R.L. *Introduction to algorithms*, Cambridge: MIT Press, 1990.
Translated under the title *Algoritmy: postroenie i analiz*, Moscow: Moscow Center for Continuous Mathematical Education, 2000.
17. Chentsov A.G. *Ekstremal'nye zadachi marshrutizatsii i raspredeleniya zadaniy: voprosy teorii* (Extreme problems of routing and assignment of tasks: questions of theory), Moscow–Izhevsk: Regular and Chaotic Dynamics, Institute of Computer Science, 2008.
18. Chentsov A.G. To question of routing of works complexes, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2013, issue 1, pp. 59–82 (in Russian).
<https://doi.org/10.20537/vm130107>
19. Petunin A.A. About some strategies of the programming of tool route by developing of control programs for thermal cutting machines, *Vestnik Ufimskogo Gosudarstvennogo Aviatsionnogo Tekhnicheskogo Universiteta. Seriya: Upravlenie, Vychislitel'naya Tekhnika i Informatika*, 2009, vol. 13, no. 2 (35), pp. 280–286 (in Russian).
20. Petunin A.A., Chentsov A.G., Chentsov P.A. On routing tool motion on the sheet cutting NPC machines, *St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Computer Science. Telecommunication and Control Systems*, 2013, issue 2 (169), pp. 103–111 (in Russian).
21. Petunin A.A., Chentsov A.G., Chentsov P.A. Local dynamic programming incuts in routing problems with restrictions, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2014, issue 2, pp. 56–75 (in Russian). <https://doi.org/10.20537/vm140204>
22. Chentsov A.G., Chentsov A.A. Routing of displacements with dynamic constraints: “bottleneck problem”, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2016, vol. 26, issue 1, pp. 121–140. <https://doi.org/10.20537/vm160110>
23. Chentsov A.G., Chentsov A.A. A model variant of the problem about radiation sources utilization (iterations based on optimization insertions), *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2017, vol. 50, pp. 83–109 (in Russian).
<https://doi.org/10.20537/2226-3594-2017-50-08>
24. Chentsov A.G., Chentsov A.A., Sesekin A.N. Dynamic programming in the generalized bottleneck problem and the start point optimization, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2018, vol. 28, issue 3, pp. 348–363 (in Russian).
<https://doi.org/10.20537/vm180306>
25. Korobkin V.V., Sesekin A.N., Tashlykov O.L., Chentsov A.G. *Metody marshrutizatsii i ikh prilozheniya v zadachakh povysheniya bezopasnosti i effektivnosti ekspluatatsii atomnykh stantsii* (Routing methods

and their applications in problems of improving the safety and efficiency of operation of nuclear power plants), Moscow: Novye Tekhnologii, 2012.

26. Chentsov A.G. The Bellmann insertions in the route problem with constraints and complicated cost functions, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2014, issue 4, pp. 122–141 (in Russian). <https://doi.org/10.20537/vm140410>
27. Chentsov A.G. The Bellmann insertions in route problems with constraints and complicated cost functions. II, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2016, vol. 26, issue 4, pp. 565–578 (in Russian). <https://doi.org/10.20537/vm160410>
28. Chentsov A.G., Grigoryev A.M. Optimizing multi-inserts in routing problems with constraints, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2018, vol. 28, issue 4, pp. 513–530 (in Russian). <https://doi.org/10.20537/vm180406>

Received 28.06.2019

Chentsov Aleksandr Georgievich, Doctor of Physics and Mathematics, Corresponding Member, Russian Academy of Science, Chief Researcher, N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620219, Russia; Professor, Ural Federal University, ul. Mira, 19, Yekaterinburg, 620002, Russia.
E-mail: chentsov@imm.uran.ru

Chentsov Aleksei Aleksandrovich, Candidate of Physics and Mathematics, Researcher, N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620219, Russia.
E-mail: chentsov.a@binsys.ru

Citation: A.G. Chentsov, A.A. Chentsov. On the question of the optimization of permutations in the problem with dynamic constraints, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2019, vol. 29, issue 3, pp. 363–381.