

УДК 532.685

© *Е. А. Микишанина*

## ИССЛЕДОВАНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ФИЛЬТРАЦИИ УПРУГО-ПОРИСТОЙ СРЕДЫ ПРИ ПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ

Величину коэффициента фильтрации принято определять эмпирически в силу обусловленности его физическими и химическими свойствами среды и фильтрующей жидкости. Однако, полученные экспериментальные данные могут существенно варьироваться в зависимости от приложенных нагрузок. В работе выдвигается новая гипотеза о линейной зависимости коэффициента фильтрации среды от первого инварианта тензора напряжений, возникших в области вследствие гидравлического напора на границе. В рамках этой гипотезы исследуется изменение коэффициента фильтрации области при плоской деформации. Возникновение на границе гидравлического напора ведет к возникновению в среде упругих возмущений. Так как скорость последних много больше скорости фильтрации жидкости, то изменение напряженного состояния области приведет к изменению порового пространства, а следовательно, и к изменению коэффициента фильтрации. Таким образом, исходная задача сводится к решению сначала классической задачи теории упругости, а именно к решению краевой задачи для функции Эри, а затем к определению непосредственно коэффициента фильтрации как решения краевой задачи для гармонического уравнения. В работе построен численный алгоритм решения гармонического и бигармонического уравнений, основанный на методе граничных элементов, который, в конечном счете, сводит исходную задачу к системе линейных алгебраических уравнений. Как показали численные результаты исследований, изменение коэффициента фильтрации некоторых материалов при рабочих нагрузках достигает в некоторых точках области 20 процентов. Особенно актуальны эти результаты при использовании труб, шлангов, водонапорных рукавов из различных полимерных материалов, стеклопластика, а также при эксплуатации гидротехнических и очистных сооружений. Изменение фильтрующей способности среды при малых упругих деформациях делает возможной при соответствующих давлениях фильтрацию даже в тех средах, которые обычно считаются для жидкости непроницаемыми. В работе приведены результаты численных экспериментов по исследованию коэффициента фильтрации полиуретана (гибкий поливочный шланг) и бутилкаучука. Построены графики искомых механических параметров. Расчеты выполнялись в программном пакете Maple.

*Ключевые слова:* коэффициент фильтрации, плоская деформация, напряжения, фильтрация, бигармоническое уравнение, гармоническое уравнение, численный алгоритм.

DOI: [10.20537/vm190309](https://doi.org/10.20537/vm190309)

### Введение

В подземной гидродинамике, при глубоководном строительстве, при эксплуатации гидротехнических и водонапорных сооружений, фильтрующих элементов весьма важной проблемой является определение поля давлений, которое возникает вследствие проникания в пористую среду жидкости, то есть решения задачи фильтрации. В трудах Био [15], Г. В. Голубева и Г. Г. Тумашева [2], П. Я. Полубариновой–Кочиной [11], Коззи [27] были предложены математические постановки задач теории фильтрации. Исследование подобных моделей сводится к решению уравнения Лапласа, уравнения диффузии или, например, в двумерном случае к решению краевой задачи для уравнения в частных производных [2]:

$$\nabla \cdot k \nabla p = 0,$$

где  $p = p(x, y)$  — искомая функция давления в области,  $k = k(x, y)$  — коэффициент фильтрации. Граничные условия определяются в зависимости от моделируемого сценария.

В работах авторов [3, 10, 14, 16, 20, 23, 24] предлагаются численные и аналитические методы решения краевых задач фильтрации, в том числе для случаев двух несмешивающихся жидкостей и неоднородного флюида. Отдельные проблемы движения жидкости под фундаментом глубоководных построек и подпочвенного полива рассматриваются в трудах [22, 26]. В последней работе для решения проблем используется аппарат аналитических функций.

Моделирование фильтрации, в том числе и в перечисленных работах, осуществляется как правило в пористых средах типа грунт или пористых средах с наличием трещин [28] (пористо-трещиноватая среда). Однако исследование П. Бриджмена [1] показывает влияние высоких давлений на упругие свойства стекла, что подтверждает гипотезу о том, что вода при соответствующих давлениях способна проникать даже в слабо пористые тела. Потому материалы, кажущиеся на первый взгляд непроницаемыми для жидкости, при определенных условиях могут стать проницаемыми.

Для исследования фильтрации в упруго-пористой среде, как показывает выше приведенное уравнение, необходимо определение коэффициента фильтрации, а последнее требует геометризовать структуру порового пространства.

На самом деле существует множество подходов к определению порового пространства. Это и представление пор в виде совокупности капилляров, трещин, в виде совокупности шаров. Также существуют сеточные модели, которые стали известными благодаря работам И. Фатта [18, 19]. Наиболее полную информацию о строении пористых тел можно получить в работах [6, 12, 13, 21]. Наибольшее распространение получили модели уложенных сфер и капиллярная. Подробное исследование этих моделей можно найти в работах Козени [21], Л. С. Лейбензона [6], Ф. Дуллиена и В. Батра [17] и других авторов.

В работе поровое пространство будем рассматривать как совокупность капиллярных трубочек равного (осредненного) сечения. Очевидно, что поровые каналы искривлены, но на малом расстоянии капилляр можно считать прямолинейным. Именно в рамках капиллярного подхода фильтрацию через пористую среду можно рассматривать как гидродинамический поток через микрокапилляры.

Теоретические исследования Козени, Терцаги и современных ученых, например [25], позволили получить формулу для определения проницаемости в виде

$$k = a^2 f(m, n),$$

где  $a$  — гидравлический радиус поперечного сечения поровой трубки,  $f(m, n)$  — определенная функция от пористости  $m$  и просвета  $n$  (доли площади пор), которая у каждого автора имеет свою форму и согласуется с результатами их опытов. Определяемая проницаемость носит название теоретической проницаемости, является величиной постоянной, не зависящей от приложенных нагрузок. Однако очевидно, что при изменении нагрузки эта величина тоже будет меняться, ввиду деформации пор.

В реальных математических моделях для упрощения расчетов коэффициент фильтрации считают постоянным [7], причем значение его определяют эмпирически. Полученные экспериментальные данные могут существенно варьироваться в зависимости от приложенных нагрузок. В лабораторных условиях, как правило, прилагаемые нагрузки несравнимы с нагрузками, которые возникают, например, при расположении твердого тела на большой глубине. Причем в каждой точке распределенная сила внешнего воздействия разная, следовательно, и проницаемость среды будет разной. Поэтому возникает необходимость восполнить этот пробел и найти объективные закономерности изменения коэффициента фильтрации среды при различных нагрузках, что позволит корректно сформулировать задачу фильтрации и повысить достоверность гидродинамических расчетов.

Так как скорость упругих возмущений в среде при возникновении гидравлического напора на границе выше скорости фильтрации, то следствием изменения напряженного состояния среды будет изменение порового пространства и, следовательно, коэффициента фильтрации. Подобных попыток связать коэффициент фильтрации среды с напряженным состоянием в отечественной и зарубежной научной литературе ранее не предпринималось.

В работе автора [9] уже были исследованы коэффициенты фильтрации бетонных и керамзитобетонных плит при их нагружении. В работе [8] решалась задача фильтрации в гетерогенной среде, представляющей многослойную полосу с кусочно-постоянной проницаемостью. В настоящей работе сформулирована гипотеза о зависимости коэффициента фильтрации от первого инварианта тензора напряжений, и в рамках этой гипотезы проведено исследование коэффициента фильтрации упруго-пористой среды. В трехмерном случае решение задачи теории упругости для определения первого инварианта тензора напряжений проблематично в силу сложности постановки граничных условий, а в случае цилиндрических тел задача упрощается. Поэтому в работе будет построен численный алгоритм, основанный на методе граничных элементов, исследования коэффициента фильтрации среды в случае плоской деформации.

## § 1. Одномерная фильтрация жидкости в пористой среде

Для выяснения некоторых особенностей фильтрации в пористой среде рассмотрим одномерную фильтрацию, и на примере случая одномерной фильтрации определим зависимость коэффициента фильтрации от некоторых механических параметров пористой среды и фильтрующейся жидкости. Представляя поровое пространство в виде совокупности капиллярных трубочек осредненного сечения и пренебрегая инерционными силами в уравнениях Навье–Стокса в силу малых скоростей и ускорений фильтрации и считая, что массовая сила (в данном случае сила тяжести) направлена по оси  $z$ , уравнение Навье–Стокса можно записать в виде

$$\frac{dp}{dz} + \rho g = \mu \Delta w. \quad (1)$$

где  $\mu$  — коэффициент динамической вязкости,  $w = w(x, y)$  — продольная скорость,  $F_z = g$  — массовая сила.

Решение задачи (1) для трубы круглого сечения дано Пуазейлем [5]. Левая часть зависит только от  $z$ , а правая — наоборот, только от координат  $x$  и  $y$ , значит, обе части должны быть постоянными  $\frac{dp}{dz} + \rho g = C$  и  $\mu \Delta w = C$ . Решение последнего будет иметь вид

$$w = \frac{1}{4\mu} \left( \frac{dp}{dz} + \rho g \right) (x^2 + y^2 - a^2), \quad (2)$$

где  $a$  — радиус капилляра. Из уравнения (2) можно найти максимальную скорость в произвольном сечении

$$w_{\max} = -\frac{a^2}{4\mu} \left( \frac{dp}{dz} + \rho g \right), \quad (3)$$

и расход жидкости, протекающей через сечение трубы,

$$Q = \iint_S w \, dx \, dy = w_{\max} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a (r^2 - a^2) r \, dr = \frac{w_{\max}}{2} \pi a^2, \quad (4)$$

Введем среднюю скорость течения  $w_c = w_{\max}/2$ .

С другой стороны, скорость фильтрации определяется из уравнения Дарси [5] как

$$\mathbf{v} = w_c = -\frac{k}{\rho g} \left( \frac{dp}{dz} + \rho g \right), \quad (5)$$

где  $k$  — коэффициент фильтрации. Сравнивая (3) и (5), найдем радиус капилляра

$$a^2 = \frac{8\mu k}{\rho g}. \quad (6)$$

При воздействии на среду внешней силой радиус пор будет меняться, что приведет к изменению коэффициента фильтрации в силу (6). Ниже будут получены закономерности изменения коэффициента фильтрации от возникающих в среде вследствие приложенной нагрузки напряжений.

## § 2. Определение коэффициента фильтрации деформированной среды

Первый инвариант тензора деформаций упругого тела  $J_1(\varepsilon) = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$  ( $\varepsilon_{ii}$  — главные деформации) с заданными модулем Юнга  $E$  и коэффициентом Пуассона  $\nu$  связан с тензором напряжений  $J_1(\sigma) = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$  ( $\sigma_{ii}$  — главные напряжения) соотношением

$$J_1(\varepsilon) = \frac{1 - 2\nu}{E} J_1(\sigma). \quad (7)$$

В случае возникновения гидравлического напора на границе упруго-пористой области, ввиду того, что скорость упругих возмущений выше скорости фильтрации, изменение радиуса пор повлечет за собой в силу равенства (6) изменение коэффициента фильтрации. Относительное изменение поперечного сечения капиллярной трубки при сохранении их количества определяется формулой

$$\frac{a^2 - a_0^2}{a_0^2} = \frac{1 - 2\nu}{E} J_1(\sigma). \quad (8)$$

Коэффициент фильтрации также изменится

$$k = k_0 \left( 1 + \frac{1 - 2\nu}{E} J_1(\sigma) \right). \quad (9)$$

Следовательно, вычисление коэффициента фильтрации упруго-пористой среды сводится к определению напряженного состояния среды и только затем к вычислению самого коэффициента фильтрации.

В случае плоской деформации возникающие в области напряжения выражаются через функцию Эри по правилу [11]

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}, \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \quad \sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}). \quad (10)$$

Тогда коэффициент фильтрации определится равенством

$$k = k_0(1 + \varepsilon \Delta \Phi). \quad (11)$$

где  $\varepsilon = \frac{(1 - 2\nu)(1 + \nu)}{E}$ , а функция Эри удовлетворяет бигармоническому уравнению

$$\Delta^2 \Phi = 0. \quad (12)$$

Из уравнения (11) видно, что упругие свойства материала задают только масштаб для коэффициента фильтрации.

Таким образом, коэффициент фильтрации  $k$  является функцией гармонической, то есть

$$\Delta k = 0. \quad (13)$$

Решение будет осуществляться следующим образом. Сначала определим значение лапласиана функции Эри на границе области из уравнения (12). Затем решим гармоническое уравнение для коэффициента фильтрации с заданными условиями на границе.

### § 3. Численный алгоритм

На границе  $\partial T = (x(s), y(s))$  упруго-пористой области задано давление  $p_0(s)$ , направленное противоположно нормали. Тогда функция Эри удовлетворяет уравнению (12) с условиями на границе [7]

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = p_0(s) \left[ \frac{dx}{ds} y(s) - \frac{dy}{ds} x(s) \right] + C_1 \frac{dy}{ds} - C_2 \frac{dx}{ds}, \quad (14)$$

$$\Phi = -p_0(s) \left( \frac{x^2(s) + y^2(s)}{2} \right) + C_1 x(s) + C_2 y(s) + C_3. \quad (15)$$

Таким образом, задача определения функции Эри сводится к классической задаче определения бигармонической функции по заданному значению самой функции и нормальной производной на границе. При решении этой задачи возможно определение лапласиана функции Эри на границе, что позволит поставить граничные условия для коэффициента фильтрации.

Ограничимся рассмотрением двусвязной области. В соответствии с методом граничных элементов внутреннюю границу области аппроксимируем вписанным  $N_1$ -угольником, а внешнюю — вписанным  $N_2$ -угольником с вершинами (узлами) в точках  $(x_k, y_k)$ ,  $k = \overline{0, N}$ ,  $N_1 + N_2 = N$ . Граничные условия выполняются в средних точках сегментов (контрольных точках)  $(X_k, Y_k)$ . Методом граничных элементов краевую задачу для бигармонического уравнения можно свести на границе к системе матричных уравнений [7]

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\Phi - \mathbf{G}\Psi + \hat{\mathbf{H}}\hat{\Phi} - \hat{\mathbf{G}}\hat{\Psi} &= 0, \\ \mathbf{A}\hat{\Phi} - \mathbf{G}\hat{\Psi} &= 0, \end{aligned} \quad (16)$$

где  $\mathbf{A} = 0.5\mathbf{E} + \mathbf{H}$ ,  $\mathbf{E}$  — единичная матрица. Элементы вектор-столбцов  $\Phi$ ,  $\Psi$ ,  $\hat{\Phi}$ ,  $\hat{\Psi}$  определяются по формулам

$$\Phi_j = \Phi^0(X_j, Y_j), \quad \Psi_j = \Psi^0(X_j, Y_j), \quad \hat{\Phi}_j = \hat{\Phi}^0(X_j, Y_j), \quad \hat{\Psi}_j = \hat{\Psi}^0(X_j, Y_j),$$

где  $\Delta\Phi = \hat{\Phi}$ ,  $\partial\Phi/\partial n = \Psi$ ,  $\partial\Delta\Phi/\partial n = \hat{\Psi}$ . Верхним индексом 0 обозначено значение соответствующей функции на границе. Элементы матриц  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{G}$ ,  $\hat{\mathbf{H}}$ ,  $\hat{\mathbf{G}}$  находятся интегрированием по граничным сегментам:

$$\begin{aligned} H_{j,k} &= \int_{s_{j-1}}^{s_j} H(s, X_k, Y_k) ds, & G_{j,k} &= \int_{s_{j-1}}^{s_j} G(s, X_k, Y_k) ds, \\ \hat{H}_{j,k} &= \int_{s_{j-1}}^{s_j} \hat{H}(s, X_k, Y_k) ds, & \hat{G}_{j,k} &= \int_{s_{j-1}}^{s_j} \hat{G}(s, X_k, Y_k) ds, \end{aligned}$$

где  $G(r) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r}$ ,  $\hat{G}(r) = \frac{r^2}{8\pi} \left( 1 + \ln \frac{1}{r} \right)$ ,  $H(r) = \frac{\partial G(r)}{\partial n}$ ,  $\hat{H}(r) = \frac{\partial \hat{G}(r)}{\partial n}$ ,  $r$  — расстояние от фиксированной точки  $z$  до переменной точки на гладкой границе. Граничные

условия (14), (15) содержат три константы, которые входят линейно в правую часть. На одном контуре их можно принять равными нулю, на другом контуре они будут определяться из трех линейных уравнений [4, 7], которые дополнительно войдут в систему (16). Решение системы (16) позволит определить значение функции  $\Delta\Phi = \hat{\Phi}$  на границе и поставить граничные условия для коэффициента фильтрации согласно (11).

Далее для определения коэффициента фильтрации в каждой точке области методом граничных элементов решим краевую задачу для гармонического уравнения (13), которое можно свести на границе к матричному уравнению

$$AK - GL = 0. \tag{17}$$

Элементы вектор-столбцов  $K, L$  определяются формулами

$$K_j = k^0(X_j, Y_j), L_j = l^0(X_j, Y_j),$$

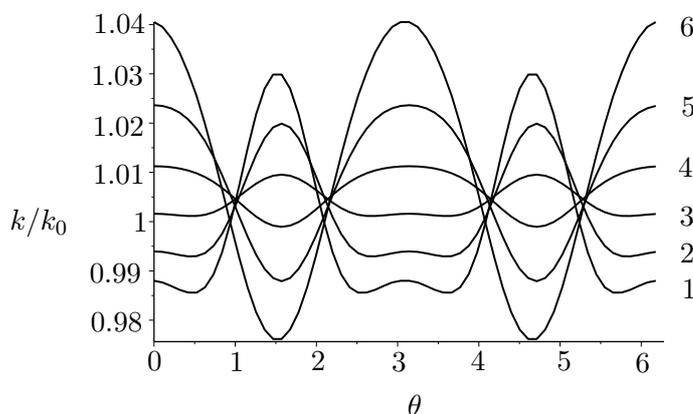
где  $l = \frac{\partial k}{\partial n}$ .

Значение коэффициента фильтрации  $k(x, y)$  в каждой внутренней точке  $(X, Y)$  области  $T$  будут определяться из соотношения

$$k(X, Y) = \sum_{j=1}^N \left( L_j \int_{s_{j-1}}^{s_j} G(s, X, Y) ds - K_j \int_{s_{j-1}}^{s_j} H(s, X, Y) ds \right). \tag{18}$$

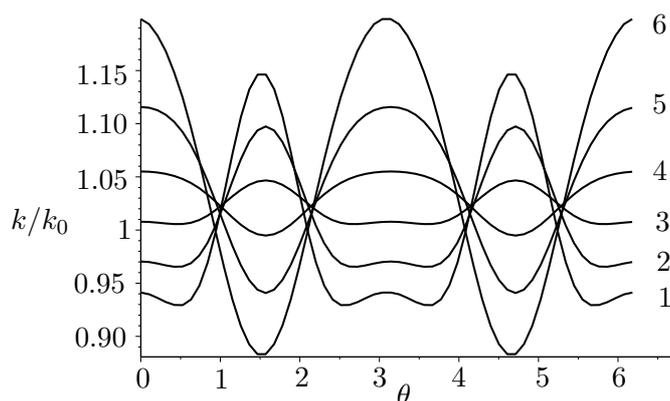
#### § 4. Численные эксперименты

Проведем эксперимент для цилиндра эллиптической формы, изготовленного из полиуретана ( $E = 1 \cdot 10^7$  МПа,  $\nu = 0.49$ ) (гибкий шланг, водонапорный рукав) с заданным коэффициентом фильтрации  $k_0$ . Рабочее давление для полиуретанового цилиндра (Рукава напорные ГОСТ 18698-79) составляет 1 МПа. Заданы полуоси внутреннего эллипса  $a_1 = 0.05$  м,  $b_1 = 0.03$  м, и внешнего:  $a_2 = 0.075$  м,  $b_1 = 0.045$  м. Давление воды на внутреннем и внешнем контурах составляет  $p_1 = 1$  МПа и  $p_2 = 0$  МПа. Графики относительного изменения коэффициента фильтрации, приведенные на рис. 1, построены на эллипсах с малыми и большими полуосями соответственно  $b_i = 0.03 + 0.003(i - 1)$ ,  $a_i = \frac{5}{3}b_i$ ,  $i = \overline{1, 6}$ .



**Рис. 1.** Изменение коэффициента фильтрации стенок эллиптического цилиндра из полиуретана при давлении 1 МПа на внутреннем контуре

Аналогичный эксперимент для бутилкаучука ( $E = 8 \cdot 10^6$  МПа,  $\nu = 0.46$ ) даст результаты, изображенные на рис. 2.



**Рис. 2.** Изменение коэффициента фильтрации стенок эллиптического цилиндра из бутылкачука при давлении 1МПа на внутреннем контуре

По рисункам еще раз очевидно, что при одинаковом распределении нагрузки упругие свойства материалов определяют только масштаб коэффициента фильтрации.

### Заключение

Предложена новая гипотеза о зависимости коэффициента фильтрации среды от первого инварианта тензора напряжений. Определение коэффициента фильтрации деформированной среды предполагает предварительное решение задачи теории упругости. Таким образом, математически задача сводится к решению сначала бигармонического уравнения для функции Эри, затем гармонического для коэффициента фильтрации. Построенный численный алгоритм основан на методе граничных элементов. В современной научной практике для решения подобных задач чаще методами выбора являются метод конечных элементов, конечно-разностные схемы, которые предполагают использование дискретных точек всей области, что приводит к накоплению ошибок. В этом контексте построенные в работе численные алгоритмы, основанные на методе граничных элементов, являются более предпочтительными, потому что учитывают только точки на границе, что повышает точность расчетов. Применяемые в работе численные алгоритмы могут представлять теоретический интерес для научных коллективов и быть общими для целого класса задач механики сплошной среды.

Проведены численные эксперименты для труб эллиптического сечения из полиуретана и бутылкачука. Значительное увеличение коэффициента фильтрации (до 4% в одном случае и 20% в другом) в направлении  $\theta = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$  повлечет за собой образование трещин. Таким образом, можно спрогнозировать, в каких направлениях будет просачиваться жидкость и начнется процесс разрушения.

Возникающие нагрузки при использовании разного рода фильтрующих элементов (эксплуатация очистных сооружений), глубоководных построек, водонапорных рукавов (нефтепромышленность, мелиорация) приводят к изменению их водопроницаемости. Использование полученных в работе результатов позволяет скорректировать математические модели фильтрации, повысить точность гидродинамических расчетов при решении различных проблем. Исследование упруго-пористой среды с точки зрения ее фильтрующей способности, которая непосредственным образом влияет на прочностные свойства, позволит контролировать процесс разрушения материалов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бриджмен П. Новейшие работы в области высоких давлений // УФН. 1947. Т. 31. Вып. 2. С. 210–263. <https://doi.org/10.3367/UFNr.0031.194702c.0210>
2. Голубев Г.В., Тумашев Г.Г. Фильтрация несжимаемой жидкости в неоднородной пористой среде. Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1972.
3. Кадыров Ф.М., Костерин А.В. Фильтрационная консолидация в пористой упругой среде с разрывными начальными условиями // Ученые записки Казанского университета. Серия Физико-математические науки. 2016. Т. 158. Кн. 2. С. 262–275. <http://mi.mathnet.ru/uzku1367>
4. Казакова А.О., Терентьев А.Г. Численное моделирование плоской задачи о напряженном состоянии трубы, погруженной в жидкость // Прикладная математика и механика. 2014. Т. 78. № 5. С. 721–727. <http://elibrary.ru/item.asp?id=22565773>
5. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.–Л.: Гостехиздат, 1950.
6. Лейбензон Л.С. Движение природных жидкостей и газов в пористой среде. М.–Л.: Гостехтеориздат, 1947.
7. Микишанина Е.А., Терентьев А.Г. Об определении напряженного состояния упруго-пористой среды // Ученые записки Казанского университета. Серия Физико-математические науки. 2017. Т. 159. Кн. 2. С. 204–215. <http://mi.mathnet.ru/uzku1402>
8. Микишанина Е.А. Компьютерное моделирование решений плоской краевой задачи теории фильтрации // Вестник Чувашикого университета. 2016. № 1. С. 145–152. <https://elibrary.ru/item.asp?id=25681886>
9. Микишанина Е.А. Исследование коэффициента фильтрации упруго-пористой плиты при нагружении // Вестник Чувашикого государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния. 2017. № 2 (32). С. 65–70. <https://elibrary.ru/item.asp?id=30069321>
10. Невмержицкий Я.В. Применение метода линий тока для ускорения расчетов неизоотермической нелинейной фильтрации // Компьютерные исследования и моделирование. 2018. Т. 10. № 5. С. 709–728. <https://doi.org/10.20537/2076-7633-2018-10-5-709-728>
11. Полубаринова–Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977.
12. Энгельгардт В. Поровое пространство осадочных пород. М.: Недра, 1964.
13. Шейдеггер А.Э. Физика течения жидкостей через пористые среды. М.: Гостоптехиздат, 1960.
14. Akhmetzyanov A.V., Kushner A.G., Lychagin V.V. Control of displacement front in a model of immiscible two-phase flow in porous media // Doklady Mathematics. 2016. Vol. 94. No. 1. P. 378–381. <https://doi.org/10.1134/S1064562416040074>
15. Biot M.A. General solutions of the equations of elasticity and consolidation for a porous materials // J. Appl. Mech. 1956. Vol. 23. No. 1. P. 91–96.
16. Boronin S.A., Osiptsov A.A., Tolmacheva K.I. Multy-fluid model of suspension filtration in a porous medium // Fluid Dynamics. 2015. Vol. 50. No. 6. P. 759–768. <https://doi.org/10.1134/S0015462815060058>
17. Dullien F.A.L., Batra V.K. Determination of the structure of porous media // Industrial and Engineering Chemistry. 1970. Vol. 62. No. 10. P. 25–53. <https://doi.org/10.1021/ie50730a004>
18. Fatt I. The network model of porous media. I. Cappillary pressure characteristics // Transactions of the American Institute of Mining, Metallurgical, and Petroleum Engineers. 1956. Vol. 207. P. 144–159.
19. Fatt I. The network model of porous media. II. Dynamic properties of a single size tube network // Transactions of the American Institute of Mining, Metallurgical, and Petroleum Engineers. 1956. Vol. 207. P. 160–177.
20. Fusi L., Farina A., Rosso F. Mathematical models for fluids with pressure-dependent viscosity flowing in porous media // International Journal of Engineering Science. 2015. Vol. 87. P. 110–118. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2014.11.007>
21. Kozeny J. Grundwasserbewegung bei freiem Spiegel, Fluss und Kanalversickerung // Wasserkraft und Wasserwirtschaft. 1931. Vol. 26. No. 3. P. 28–31.

22. Terentiev A.G., Kirschner I.N., Uhlman J.S. The hydrodynamics of cavitating flows. Hoboken, New Jersey: Backbone, 2011.
23. You Z., Osipov Y., Bedrikovetsky P., Kuzmina L. Asymptotic model for deep bed filtration // Chemical Engineering Journal. 2014. Vol. 258. P. 374–385.  
<https://doi.org/10.1016/j.cej.2014.07.051>
24. Zhang J., Sinha N., Ross M., Tejada-Martínez A.E. Computational fluid dynamics analysis of the hydraulic (filtration) efficiency of a residential swimming pool // Journal of Water and Health. 2018. Vol. 16. No. 5. P. 750–761. <https://doi.org/10.2166/wh.2018.110>
25. Tang T., McDonough J.M. A theoretical model for the porosity-permeability relationship // International Journal of Heat and Mass Transfer. 2016. Vol. 103. P. 984–996.  
<https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2016.07.095>
26. Verruijt A. An introduction to soil dynamics. Dordrecht: Springer, 2010.  
<https://doi.org/10.1007/978-90-481-3441-0>
27. Coussy O. Poromechanics. New York: John Wiley and Sons, 2004.
28. Dietrich P., Helmig R., Sauter M., Hötzl H., Köngeter J., Teutsch G. Flow and transport in fractured porous media. Berlin: Springer, 2005. <https://doi.org/10.1007/b138453>

Поступила в редакцию 04.07.2019

Микишанина Евгения Арифжановна, к. ф.-м. н., доцент, кафедра актуарной и финансовой математики, Чувашский государственный университет имени И. Н. Ульянова, 428015, Россия, г. Чебоксары, пр. Московский, 15.

E-mail: [evaeva\\_84@mail.ru](mailto:evaeva_84@mail.ru)

**Цитирование:** Е. А. Микишанина. Исследование коэффициента фильтрации упруго-пористой среды при плоской деформации // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2019. Т. 29. Вып. 3. С. 396–407.

**E. A. Mikishanina**

**Investigation of the filtration coefficient of elastic-porous medium at plane deformation**

*Keywords:* filter coefficient, plane strain, stresses, filtration, harmonic equation, biharmonic equation, numerical algorithm.

MSC2010: 76S05, 65R20

DOI: [10.20537/vm190309](https://doi.org/10.20537/vm190309)

The value of the filtration coefficient is determined empirically due to its physical and chemical properties of the medium and the filtered liquid. However, the experimental data obtained can vary significantly depending on the applied loads. The paper proposes a new hypothesis about the linear dependence of the medium filtration coefficient on the first invariant of the stress tensor arising in the region due to the hydraulic head at the boundary. Within the framework of this hypothesis, the change of the region filtration coefficient under plane deformation is investigated. The appearance of hydraulic head on the border leads to the appearance of elastic perturbations in the environment. Since the velocity of the latter is much higher than the velocity of the liquid filtration, the change in the stress state of the region will lead to a change in the pore space, and, consequently, to a change in the filtration coefficient. Thus, the initial problem is reduced to the solution of the classical problem of elasticity theory, namely, to the solution of the boundary value problem for the Erie function, and then to the definition of the filtration coefficient as the solution of the boundary value problem for the harmonic equation. A numerical algorithm for solving harmonic and biharmonic equations based on the boundary element method is constructed, which ultimately reduces the original problem to a system of linear algebraic equations. As shown by the numerical results of studies, the change in the filtration coefficient of some materials under operating loads reaches 20 percent at some points of the region. These results are especially relevant when using pipes, hoses, water hoses made of various polymeric materials, fiberglass, as well as in the operation of hydraulic engineering and treatment facilities. The change in the filtering capacity of the medium at low elastic deformations makes it possible at the appropriate pressures to filter even in those environments that are usually considered impervious to the liquid. The paper presents the results of numerical experiments to study the filtration coefficient of polyurethane (flexible irrigation hose) and butyl rubber. Graphs of the required mechanical parameters are constructed. Calculations were performed in the Maple software package.

#### REFERENCES

1. Bridgman P.W. Recent work in the field of high pressures, *Reviews of Modern Physics*, 1946, vol. 18, issue 1, pp. 1–93. <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.18.1>
2. Golubev G.V., Tumashev G.G. *Fil'tratsiya neszhimaemoi zhidkosti v neodnorodnoi poristoi srede* (Filtration of incompressible fluid in a heterogeneous porous medium), Kazan: Kazan State University, 1972.
3. Kadyrov F.M., Kosterin A.V. The filtration consolidation of an elastic porous medium with discontinuous initial conditions, *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2016, vol. 158, book 2, pp. 262–275 (in Russian). <http://mi.mathnet.ru/eng/uzku1367>
4. Kazakova A.O., Terent'ev A.G. Numerical modelling of the plane problem of the stress state of a tube immersed in a liquid, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2014, vol. 78, no. 5, pp. 518–523. <https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2015.03.011>
5. Loitsyanskii L.G. *Mekhanika zhidkosti i gaza* (Fluid mechanics), Moscow–Leningrad: Gostekhizdat, 1950.
6. Leibenzon L.S. *Dvizhenie prirodnykh zhidkosti i gazov v poristoi srede* (Movement of natural liquids and gases in a porous medium), Moscow–Leningrad: Gostekhizdat, 1947.

7. Mikishanina E.A., Terentiev A.G. On determination of the stress state of an elastic-porous medium, *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2017, vol. 159, no. 2, pp. 204–215 (in Russian). <http://mi.mathnet.ru/eng/uzku1402>
8. Mikishanina E.A. Computer simulation of planar solutions of the boundary value problem of filtration theory, *Vestnik Chuvashskogo Universiteta*, 2016, no. 1, pp. 145–152 (in Russian). <https://elibrary.ru/item.asp?id=25681886>
9. Mikishanina E.A. Research of filtration coefficient of elastic-porous plate under loading, *Vestnik Chuvashskogo Gosudarstvennogo Pedagogicheskogo Universiteta imeni I.Ya. Yakovleva. Ser. Mekhanika Predel'nogo Sostoyaniya*, 2017, no. 2 (32), pp. 65–70 (in Russian). <https://elibrary.ru/item.asp?id=30069321>
10. Nevmerzhitskii Ya.V. Application of the streamline method for nonlinear filtration problems acceleration, *Computer Research and Modeling*, 2018, vol. 10, no. 5, pp. 709–728 (in Russian). <https://doi.org/10.20537/2076-7633-2018-10-5-709-728>
11. Polubarinova-Kochina P.Ya. *Teoriya dvizheniya gruntovykh vod* (Theory of ground water movement), Moscow: Nauka, 1977.
12. Engel'gardt V. *Porovoe prostranstvo osadochnykh porod* (Pore space of sedimentary rocks). Moscow: Nedra, 1964.
13. Sheidegger A.E. *Fizika techeniya zhidkosti cherez poristyie sredy* (Physics of fluid flow through porous media), Moscow: Gostoptekhizdat, 1960.
14. Akhmetzyanov A.V., Kushner A.G., Lychagin V.V. Control of displacement front in a model of immiscible two-phase flow in porous media, *Doklady Mathematics*, 2016, vol. 94, no. 1, pp. 378–381. <https://doi.org/10.1134/S1064562416040074>
15. Biot M.A. General solutions of the equations of elasticity and consolidation for a porous materials, *J. Appl. Mech.*, 1956, vol. 23, no. 1, pp. 91–96.
16. Boronin S.A., Osiptsov A.A., Tolmacheva K.I. Multy-fluid model of suspension filtration in a porous medium, *Fluid Dynamics*, 2015, vol. 50, no. 6, pp. 759–768. <https://doi.org/10.1134/S0015462815060058>
17. Dullien F.A.L., Batra V.K. Determination of the structure of porous media, *Industrial and Engineering Chemistry*, 1970, vol. 62, no. 10, pp. 25–53. <https://doi.org/10.1021/ie50730a004>
18. Fatt I. The network model of porous media. I. Cappillary pressure characteristics, *Transactions of the American Institute of Mining, Metallurgical, and Petroleum Engineers*, 1956, vol. 207. P. 144–159.
19. Fatt I. The network model of porous media. II. Dynamic properties of a single size tube network, *Transactions of the American Institute of Mining, Metallurgical, and Petroleum Engineers*, 1956, vol. 207, pp. 160–177.
20. Fusi L., Farina A., Rosso F. Mathematical models for fluids with pressure-dependent viscosity flowing in porous media, *International Journal of Engineering Science*, 2015, vol. 87, pp. 110–118. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2014.11.007>
21. Kozeny J. Grundwasserbewegung bei freiem Spiegel, Fluss und Kanalversickerung, *Wasserkraft und Wasserwirtschaft*, 1931, vol. 26, no. 3, pp. 28–31.
22. Terentiev A.G., Kirschner I.N., Uhlman J.S. *The hydrodynamics of cavitating flows*, Hoboken, New Jersey: Backbone, 2011.
23. You Zh., Osipov Yu., Bedrikovetsky P., Kuzmina L. Asymptotic model for deep bed filtration, *Chemical Engineering Journal*, 2014, vol. 258, pp. 374–385. <https://doi.org/10.1016/j.cej.2014.07.051>
24. Zhang J., Sinha N., Ross M., Tejada-Martínez A.E. Computational fluid dynamics analysis of the hydraulic (filtration) efficiency of a residential swimming pool, *Journal of Water and Health*, 2018, vol. 16, no. 5, pp. 750–761. <https://doi.org/10.2166/wh.2018.110>
25. Tang T., McDonough J.M. A theoretical model for the porosity–permeability relationship, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2016, vol. 103, pp. 984–996. <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2016.07.095>
26. Verruijt A. *An introduction to soil dynamics*, Dordrecht: Springer, 2010. <https://doi.org/10.1007/978-90-481-3441-0>

- 
27. Coussy O. *Poromechanics*, New York: John Wiley and Sons, 2004.
28. Dietrich P., Helmig R., Sauter M., Hötzl H., Köngeter J., Teutsch G. *Flow and transport in fractured porous media*, Berlin: Springer, 2005. <https://doi.org/10.1007/b138453>

Received 04.07.2019

Mikishanina Evgeniya Arifzhanovna, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Chuvash State University, pr. Moskovskii, 15, Cheboksary, 428015, Russia.

E-mail: [evaeva\\_84@mail.ru](mailto:evaeva_84@mail.ru)

**Citation:** E. A. Mikishanina. Investigation of the filtration coefficient of elastic-porous medium at plane deformation, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2019, vol. 29, issue 3, pp. 396–407.