МАТЕМАТИКА 2022. Т. 32. Вып. 3. С. 341–360.

УДК 517.988, 517.518.24

© *В. Н. Баранов, В. И. Родионов*

О НЕЛИНЕЙНЫХ МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ ФУНКЦИЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ВАРИАЦИИ

В первой части определено и исследовано нелинейное метрическое пространство $\langle\overline{\mathrm{G}}^{\infty}[a,b],d\rangle$, состоящее из функций, действующих из отрезка $[a,b]$ в расширенную числовую ось $\overline{\mathbb{R}}$. По определению предполагается, что для любых $x\in\overline{\mathrm{G}}^{\infty}[a,b]$ и $t\in(a,b)$ существуют предельные числа $x(t-0),x(t+0)\in\overline{\mathbb{R}}$ (и числа $x(a+0),x(b-0)\in\overline{\mathbb{R}}$). Доказана полнота пространства. Оно является замыканием пространства ступенчатых функций в метрике d. Во второй части работы определено и исследовано нелинейное пространство $\mathrm{RL}[a,b]$. Всякая кусочно-гладкая функция, определенная на $[a,b]$, содержится в $\mathrm{RL}[a,b]$. Всякая функция $x\in\mathrm{RL}[a,b]$ имеет ограниченное изменение. Для нее определены все односторонние производные (со значениями в метрическом пространстве $\langle\overline{\mathbb{R}},\varrho\rangle$). Функция левосторонних производных непрерывна слева, а функция правосторонних производных непрерывна справа. Обе функции, доопределенные на весь отрезок $[a,b]$, принадлежат пространству $\overline{\mathrm{G}}^{\infty}[a,b]$. В заключительной части работы определены и исследованы два подпространства пространства $\mathrm{RL}[a,b]$. В подпространствах сформулированы и обсуждены перспективные постановки для простейших вариационных задач.

Ключевые слова: нелинейный анализ, негладкий анализ, ограниченная вариация, односторонняя производная.

DOI: 10.35634/vm220301

Введение

В работе обобщаются результаты статьи [1], где получен аналог уравнения Эйлера для простейшей вариационной задачи, заданной на элементах банахового пространства, заключенного между пространствами кусочно-гладких и липшицевых функций. В первой (вспомогательной) части определено полное метрическое нелинейное пространство $\langle\overline{\mathrm{G}}^{\infty}[a,b],d\rangle$, состоящее из функций $[a,b]\to\overline{\mathbb{R}}$, где $[a,b]$ — отрезок, $\langle\overline{\mathbb{R}},\varrho\rangle$ — расширенная числовая ось (это пространство содержит в себе пространство из работы [1]). По определению предполагается, что для всех $x\in\overline{\mathrm{G}}^{\infty}[a,b]$ и $t\in(a,b)$ существуют предельные числа $x(t-0)$, $x(t+0)\in\overline{\mathbb{R}}$ (и числа $x(a+0)$, $x(b-0)\in\overline{\mathbb{R}}$). Функции из $\overline{\mathrm{G}}^{\infty}[a,b]$ называем правильными (этот термин предложен в [2, с. 197] как перевод слов «regulated function», в более раннем переводе [3, с. 167] использован термин «простая функция», позднее в [4,5] использован термин «прерывистая функция»). Пространство $\overline{\mathrm{G}}^{\infty}[a,b]$ является замыканием пространства конечно-ступенчатых функций в метрике d.

Нелинейное пространство $\overline{\mathrm{G}}^{\infty}[a,b]$ наследует, в некотором смысле, многие свойства банахова пространства $\langle\mathrm{G}[a,b],\|\cdot\|\rangle$ правильных функций, состоящего из функций $x\colon[a,b]\to X$ (где X — произвольное банахово пространство). В определении x предполагается, что существуют все односторонние пределы, и они принадлежат пространству X (см., например, [4,6,7]). Пространство $\langle\mathrm{G}[a,b],\|\cdot\|\rangle$ изометрически изоморфно некоторому пространству непрерывных функций. Уместно также отметить, что правильные функции $x\in\mathrm{G}[a,b]$ обладают тем свойством, что в каждой точке $t\in(a,b)$ определены три значения $x(t-0)$, $x(t)$ и $x(t+0)$, что позволяет конструировать другие сопутствующие атрибуты функций и получать новые результаты (см., например, [5]).

Правильные функции играют важную роль в переопределении расширительных толкований интеграла Римана–Стилтьеса. Хорошо известно, что интеграл Римана–Стилтьеса $(RS)\int_a^b u\,dv$ существует в случае, когда $u \in \mathrm{C}[a,b]$ — непрерывная функция, а $v \in \mathrm{BV}[a,b]$ — функция ограниченной вариации. Этот интеграл существует (см., например, [4,6]) и в случае, когда $u \in \mathrm{G}[a,b]$, а $v \in \mathrm{CBV}[a,b] \doteq \mathrm{C}[a,b] \cap \mathrm{BV}[a,b]$. Во многих практических и теоретических задачах возникает потребность интегрирования функции $u \in \mathrm{G}[a,b]$ по функции $v \in \in \mathrm{BV}[a,b] \subset \mathrm{G}[a,b]$ (функции, однако, могут иметь общие точки разрыва; в этом случае интеграл заведомо не существует). В работе [4] для пары $(u,v) \in \mathrm{G}[a,b] \times \mathrm{BV}[a,b]$ в терминах правильных функций переопределено понятие интеграла Перрона–Стилтьеса $(PS)\int_a^b u\,dv$. В [8] в этих же терминах переопределены понятия интегралов Юнга–Стилтьеса, Душника–Стилтьеса, Курцвейля–Стилтьеса. Получены соотношения между интегралами. В [9–11] в терминах интеграла Курцвейля–Стилтьеса приведены несложные доказательства ряда известных утверждений. В данном контексте уместно отметить статью [12] о квазиинтегралах (о параметрическом семействе аналогов интеграла Перрона–Стилтьеса, куда входят все выше перечисленные интегралы) и работу [13] о $(*)$-интегралах.

Правильные функции играют важную роль в переопределении расширительных толкований дифференциальных уравнений. Например, в работе [14] показано, что задача Коши для скалярного линейного дифференциального уравнения с коэффициентами, представленными в виде производных от правильных функций, погружается в пространство обобщенных функций Коломбо. Уместно также отметить статью [15] о представлении решений квазиинтегральных уравнений, порожденных дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами.

Во второй части работы определено нелинейное пространство $\mathrm{RL}[a,b]$ такое, что

$$\mathrm{C}^1[a,b] \subset \mathrm{KC}^1[a,b] \subset \mathrm{RL}[a,b] \subset \mathrm{BV}[a,b] \subset \mathrm{G}[a,b], \tag{0.1}$$

где $\mathrm{C}^1[a,b]$ и $\mathrm{KC}^1[a,b]$ — пространства непрерывно дифференцируемых и кусочно-гладких функций соответственно. Всякая функция $x \in \mathrm{RL}[a,b]$ имеет все односторонние производные (со значениями в $\langle \overline{\mathbb{R}}, \varrho \rangle$). Функция левосторонних производных непрерывна слева (в метрике ϱ), а функция правосторонних производных непрерывна справа. Обе функции, доопределенные на весь отрезок $[a,b]$, — правильные (принадлежат $\overline{\mathrm{G}}^{\infty}[a,b]$).

В задачах оптимизации позиция пространства RL в диаграмме (0.1) имеет определенные перспективы. Эволюция задач от классического вариационного исчисления к задачам оптимального управления, в которых фигурирует пространство C^1, предполагает выход за пределы этого пространства (во многих случаях, в пространство KC^1). Основная идея (см., например, [16,17]) состоит в расширении не только множества допустимых решений, но и в доопределении функционала оптимизации так, чтобы минимум существовал, и его можно было бы определить с помощью некоторых расширенных условий оптимальности. Уместно также отметить, что в [1] этот подход реализован в вариационной задаче, в которой $x \in \mathrm{RS}[a,b]$ (в работе осуществлен выход за пределы пространств C^1 и KC^1 в банахово пространство RS регулярно гладких функций такое, что $\mathrm{KC}^1 \subset \mathrm{RS} \subset \mathrm{RL}$; для вариационной задачи получен аналог уравнения Эйлера).

В работах [18, 19] изучается структура решений дифференциальных уравнений с импульсными воздействиями в фиксированные моменты времени. В первой работе используется пространство KC^1, а во второй — пространство кусочно абсолютно непрерывных функций. В [20,21] в этом же пространстве изучаются задачи оптимального управления для функционально-дифференциальных систем. Следует ожидать, что погружение перечисленных задач в пространства RS, RC или RL имеет определенные перспективы (здесь и далее

RC — это определенное в рамках настоящей работы нелинейное пространство регулярно непрерывных функций такое, что $\mathrm{KC}^1 \subset \mathrm{RS} \subset \mathrm{RC} \subset \mathrm{RL}$). Уместно также отметить, что в задачах оптимального управления используются разрывные управляющие функции (измеримые, кусочно-непрерывные и т. д.), а решениями являются кусочно-гладкие функции из KC^1 (в качестве альтернативы этому пространству целесообразно предложить пространства RS, RC или RL).

В рамках работы полагаем, что полное метрическое пространство $\langle \overline{\mathbb{R}}, \varrho\rangle$ состоит из расширенной числовой оси $\overline{\mathbb{R}}$ и метрики $\varrho(\xi,\eta) \doteq |f(\xi) - f(\eta)|$, $\xi,\eta \in \overline{\mathbb{R}}$, где функция $f\colon \overline{\mathbb{R}} \to [-1,1]$ такова, что $f(x) \doteq \dfrac{x}{1+|x|}$ при $x \in \mathbb{R}$, $f(-\infty) \doteq -1$, $f(+\infty) \doteq 1$. Множество $\overline{\mathbb{R}}$ — линейно упорядоченное: полагаем $-\infty < x < +\infty (= \infty)$ для всех $x \in \mathbb{R}$, а для пары $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ отношение порядка — естественное. О необходимых свойствах функции $f(\cdot)$ см. [22, с. 87–88]. В частности, для всех $x, y \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство

$$|f(x) - f(y)| \leqslant |x - y|, \tag{0.2}$$

а если $x, y \in \mathbb{R}$ и $\sigma \in (0,1)$ таковы, что $|f(x)| < 1 - \sigma$ и $|f(y)| < 1 - \sigma$, то

$$|x - y| \leqslant \sigma^{-2}\,|f(x) - f(y)|. \tag{0.3}$$

На множестве функций $[a,b] \to \overline{\mathbb{R}}$, определенных на отрезке $[a,b]$ и имеющих значения в нелинейном метрическом пространстве $\langle \overline{\mathbb{R}}, \varrho\rangle$, определена метрика

$$d\,(x,y) \doteq \sup_{t\,\in\,[a,b]} \varrho\,(x(t), y(t)) \qquad \forall\, x,y\colon [a,b] \to \overline{\mathbb{R}}.$$

§ 1. Метрические пространства правильных функций

Определение 1. Зафиксируем отрезок $K \doteq [a,b] \subset \mathbb{R}$. Через $\overline{\mathrm{G}}^\infty = \overline{\mathrm{G}}^\infty(K) = \overline{\mathrm{G}}^\infty[a,b]$ обозначим совокупность *правильных* функций, — то есть множество, состоящее из всех таких функций $x\colon [a,b] \to \overline{\mathbb{R}}$, что для всех $t \in (a,b]$ существуют предельные числа $x(t-0) \in \overline{\mathbb{R}}$ такие, что $\lim\limits_{\tau\to t-0} \varrho(x(\tau), x(t-0)) = 0$, и для всех $t \in [a,b)$ существуют предельные числа $x(t+0) \in \overline{\mathbb{R}}$ такие, что $\lim\limits_{\tau\to t+0} \varrho(x(\tau), x(t+0)) = 0$.

Существование предельных чисел в определении 1 означает, что

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\colon \big(\tau \in (t-\delta, t) \implies \varrho(x(\tau), x(t-0)) < \varepsilon\big), \tag{1.1}$$

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\colon \big(\tau \in (t, t+\delta) \implies \varrho(x(\tau), x(t+0)) < \varepsilon\big). \tag{1.2}$$

На языке последовательностей определения (1.1), (1.2) имеют вид

$$\big(t_k \to t-0 \implies \varrho\,(x(t_k), x(t-0)) \to 0\big), \qquad \big(t_k \to t+0 \implies \varrho\,(x(t_k), x(t+0)) \to 0\big).$$

Предложение 1. *При* $t \in (a,b]$ *и* $x(t-0) \in \mathbb{R}$ *определение* (1.1) *и определение*

$$\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\,\delta > 0:\ \big(\tau \in (t-\delta, t) \implies x(\tau) \in \mathbb{R} \quad \text{и} \quad |\,x(\tau) - x(t-0)| < \varepsilon\big) \tag{1.3}$$

эквивалентны. При $t \in (a,b]$ *и* $x(t-0) = \infty$ *определение* (1.1) *и определение*

$$\forall\, M \in \mathbb{R}\ \exists\,\delta > 0:\ \big(\tau \in (t-\delta, t) \implies x(\tau) > M\big) \tag{1.4}$$

эквивалентны. При $t \in (a,b]$ *и* $x(t-0) = -\infty$ *определение* (1.1) *и определение*

$$\forall\, M \in \mathbb{R}\ \exists\,\delta > 0:\ \big(\tau \in (t-\delta, t) \implies x(\tau) < M\big) \tag{1.5}$$

эквивалентны. При $t \in [a,b)$ *и* $x(t+0) \in \mathbb{R}$ *определение* (1.2) *и определение*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \ \exists\, \delta > 0: \ \big(\tau\in(t,t+\delta) \implies x(\tau) \in \mathbb{R} \quad \textit{и} \quad |\,x(\tau)-x(t+0)| < \varepsilon\big) \tag{1.6}$$

эквивалентны. При $t \in [a,b)$ *и* $x(t+0) = \infty$ *определение* (1.2) *и определение*

$$\forall\, M \in \mathbb{R} \ \exists\, \delta > 0: \ \big(\tau\in(t,t+\delta) \implies x(\tau) > M\big) \tag{1.7}$$

эквивалентны. При $t \in [a,b)$ *и* $x(t+0) = -\infty$ *определение* (1.2) *и определение*

$$\forall\, M \in \mathbb{R} \ \exists\, \delta > 0: \ \big(\tau\in(t,t+\delta) \implies x(\tau) < M\big) \tag{1.8}$$

эквивалентны.

Доказательство данного утверждения, предложения 2 и теоремы 1 см. в § 5.

Через $\mathrm{G}^\infty = \mathrm{G}^\infty(K) = \mathrm{G}^\infty[a,b]$ обозначим подмножество в $\overline{\mathrm{G}}^\infty$, состоящее из всех таких функций $x \in \overline{\mathrm{G}}^\infty$, что $x(t) \in \mathbb{R}$ при всех $t \in K$. Через $\mathrm{G} = \mathrm{G}(K) = \mathrm{G}[a,b]$ обозначим подмножество в G^∞, состоящее из всех таких функций $x \in \mathrm{G}^\infty$, что $x(t-0) \in \mathbb{R}$ при всех $t \in (a,b]$ и $x(t+0) \in \mathbb{R}$ при всех $t \in [a,b)$.

Метрические пространства $\langle\overline{\mathrm{G}}^\infty[a,b],d\rangle$ и $\langle\mathrm{G}^\infty[a,b],d\rangle$ — нелинейные, а пространство $\langle\mathrm{G}[a,b],d\rangle$ — линейное. На множестве $\mathrm{G}[a,b]$ определена метрика

$$r\,(x,y) \doteq \sup_{t\,\in\,[a,b]} |x(t)-y(t)| \qquad \forall\, x,y \in \mathrm{G}[a,b]$$

и ассоциированная с ней норма

$$\|x\| \doteq \sup_{t\,\in\,[a,b]} |x(t)| \qquad \forall\, x \in \mathrm{G}[a,b].$$

Пара $\langle\mathrm{G}[a,b],\|\cdot\|\rangle$ является банаховой алгеброй.

Пример 1. Пусть функция $x\colon [-1,1] \to \overline{\mathbb{R}}$ такова, что $x(t) \doteq 1/|t|$ при $t \neq 0$ и $x(0) \doteq c \in \overline{\mathbb{R}}$. Тогда $x \in \overline{\mathrm{G}}^\infty[-1,1]$. Если $c = +\infty$, то $x(0-0) = x(0) = x(0+0) = +\infty$, поэтому функция $x\colon [-1,1] \to \langle\overline{\mathbb{R}},\varrho\rangle$ непрерывна. Если же $c \neq +\infty$, то она разрывна.

Предложение 2. *Пространства* $\langle\mathrm{G}[a,b],r\rangle$ *и* $\langle\mathrm{G}[a,b],d\rangle$ *гомеоморфны.*

Определение 2. Функция $x\colon [a,b] \to \overline{\mathbb{R}}$ называется *ступенчатой*, если существует конечное разбиение $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ такое, что на каждом интервале (t_{i-1},t_i), $i = 1,\ldots,n$, функция x тождественно равна константе $c_i \in \overline{\mathbb{R}}$. Если все $c_i \in \mathbb{R}$ и $x(t_i) \in \mathbb{R}$, то x называется *конечно ступенчатой* функцией.

Справедливо легко проверяемое

Предложение 3.

1. *Всякая конечно ступенчатая функция является ступенчатой.*

2. *Если x — ступенчатая функция, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется конечно ступенчатая функция y такая, что $d(x,y) < \varepsilon$.*

3. *Всякая ступенчатая функция является правильной.*

Теорема 1. *Для функции* $x\colon [a,b]\to\overline{\mathbb{R}}$ *следующие утверждения эквивалентны:*

1) $x\in\overline{\mathrm{G}}^{\infty}[a,b]$*;*

2) *для любого* $\varepsilon>0$ *существует разбиение* $a=t_0<t_1<\ldots<t_n=b$ *такое, что*

$$\max_i \sup_{\tau,s\,\in\,(t_{i-1},\,t_i)} \varrho\,(x(\tau),x(s))<\varepsilon;$$

3) *для любого* $\varepsilon>0$ *существует ступенчатая функция* $y\colon [a,b]\to\overline{\mathbb{R}}$ *такая, что* $d\,(x,y)<\varepsilon$*;*

4) *существует последовательность* $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ *ступенчатых функций* $x_k\colon [a,b]\to\overline{\mathbb{R}}$ *такая, что* $d\,(x,x_k)\to 0$*;*

5) *для любого* $\varepsilon>0$ *существует конечно ступенчатая функция* $y\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ *такая, что* $d\,(x,y)<\varepsilon$*;*

6) *существует такая последовательность* $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ *конечно ступенчатых функций* $x_k\colon [a,b]\to\mathbb{R}$*, что* $d\,(x,x_k)\to 0$*.*

Следствие 1. *Если последовательность* $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$*, в которой* $x_k\in\overline{\mathrm{G}}^{\infty}[a,b]$*, и функция* $x\colon [a,b]\to\overline{\mathbb{R}}$ *таковы, что* $d\,(x,x_k)\to 0$*, то* $x\in\overline{\mathrm{G}}^{\infty}[a,b]$*.*

Действительно, для любого $\varepsilon>0$ существует такая функция x_k, что $d(x,x_k)<\varepsilon$, а поскольку $x_k\in\overline{\mathrm{G}}^{\infty}[a,b]$, то существует ступенчатая функция $y\colon K\to\overline{\mathbb{R}}$ такая, что $d(x_k,y)<\varepsilon$, следовательно, $d(x,y)<2\varepsilon$ и $x\in\overline{\mathrm{G}}^{\infty}[a,b]$.

Следствие 2. *Нелинейное метрическое пространство* $\langle\overline{\mathrm{G}}^{\infty}[a,b],\,d\rangle$ *— полное. Оно является замыканием пространства ступенчатых функций* (*и замыканием пространства конечно ступенчатых функций*)*.*

Пусть последовательность $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, $x_k\in\overline{\mathrm{G}}^{\infty}[a,b]$, фундаментальна по метрике d, то есть $d(x_n,x_m)\to 0$. Полагаем $\xi_k(\cdot)\doteq f(x_k(\cdot))$, тогда $|\xi_n(t)-\xi_m(t)|\to 0$ равномерно по $t\in K\doteq[a,b]$. Следовательно, существует предельная функция $\xi\colon K\to\mathbb{R}$ такая, что $|\xi(t)-\xi_k(t)|\to 0$ равномерно по $t\in K$. Так как $\xi_k(t)\in[-1,1]$ для всех $k\in\mathbb{N}$ и $t\in K$, то $\xi(t)\in[-1,1]$ для всех $t\in K$. Следовательно, определена функция $x\colon K\to\overline{\mathbb{R}}$ такая, что $x(t)\doteq f^{-1}(\xi(t))$. Таким образом, $|f(x(t))-f(x_k(t))|\to 0$ равномерно по $t\in K$, поэтому $d(x,x_k)\to 0$. В силу следствия 1 справедливо включение $x\in\overline{\mathrm{G}}^{\infty}[a,b]$. Вторая часть утверждения очевидна.

Следствие 3. *Если* $x\in\overline{\mathrm{G}}^{\infty}[a,b]$ *и* $\varepsilon>0$*, то каждое из множеств*

$$\bigl\{t\in(a,b]\colon \varrho\,(x(t),x(t{-}0))\geqslant\varepsilon\bigr\}\quad \text{и}\quad \bigl\{t\in[a,b)\colon \varrho\,(x(t),x(t{+}0))\geqslant\varepsilon\bigr\}$$

состоит из конечного числа точек.

Существует разбиение $a=t_0<t_1<\ldots<t_n=b$ такое, что для всех $t,\tau\in(t_{i-1},t_i)$ справедливо $\varrho\,(x(t),x(\tau))<\frac{\varepsilon}{2}$. Зафиксируем $t\in(t_{i-1},t_i)$, тогда существует $\delta>0$ такое, что при всех $\tau\in(t{-}\delta,t)\subset(t_{i-1},t_i)$ имеет место оценка $\varrho\,(x(\tau),x(t{-}0))<\frac{\varepsilon}{2}$, поэтому $\varrho\,(x(t),x(t{-}0))<\varepsilon$. Таким образом, неравенство $\varrho\,(x(t),x(t-0))\geqslant\varepsilon$ может иметь место лишь при $t\in\{\,t_1,\ldots,t_n\,\}$. Вторая часть утверждения доказывается аналогично.

Следствие 4. *Множество* $T(x)$*, состоящее из всех точек разрыва* (*в метрике* ϱ) *функции* $x\in\overline{\mathrm{G}}^{\infty}[a,b]$*, не более чем счетно.*

Действительно, точки множества $T(x)$ (это обозначение применяем на протяжении всей работы) поддаются перечислению: в соответствии со следствием 3 параметру ε следует последовательно придать значения $\varepsilon=1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ldots$.

Пример 2. Множество $T(x)$ точек разрыва правильной функции x может быть сколь угодно сложно устроено. Функция Хевисайда $\theta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такая, что $\theta(t) = 0$ при $t < 0$ и $\theta(t) = 1$ при $t \geqslant 0$, порождает следующую последовательность конечно ступенчатых функций $x_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$. Пусть t_1, t_2, $\ldots$ — все рациональные точки отрезка $[0,1]$, пронумерованные некоторым фиксированным способом, и $x_n(t) \doteq \sum\limits_{k=1}^{n} 2^{-k}\theta(t-t_k)$. Легко проверить, что последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна в метрике d, поэтому она сходится к некоторой функции $x \in \overline{\mathrm{G}}^{\infty}[0,1]$. При этом предельная функция x разрывна в каждой рациональной точке отрезка $[0,1]$ и непрерывна в каждой его иррациональной точке (см., например, [23, с. 323]). Уместно также отметить, что предельные функции различаются в зависимости от порядка нумерации рациональных точек отрезка $[0,1]$.

§ 2. Регулярно непрерывные и регулярно гладкие функции

Если I — это отрезок, интервал или полуинтервал, то через I_*^2 будем обозначать множество $\{(\tau,s) \in I^2\colon \tau \neq s\}$, представляющее собой квадрат без «главной» диагонали. Всякая функция $x\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ порождает функцию двух переменных $\Phi_x(\tau,s) \doteq \frac{x(s)-x(\tau)}{s-\tau}$, определенную на множестве $[a,b]_*^2$ (со значениями в $\mathbb{R}$). Очевидно, $\Phi_x(\tau,s) = \Phi_x(s,\tau)$.

Определение 3. Функция $x\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ называется RL-*функцией*, если для всех $t \in (a,b]$ существуют предельные числа $A_x(t) \in \overline{\mathbb{R}}$ такие, что

$$\lim_{(a,t]_*^2 \ni (\tau,s) \to (t,t)} \varrho\,(\Phi_x(\tau,s), A_x(t)) = 0, \tag{2.1}$$

и для всех $t \in [a,b)$ существуют предельные числа $B_x(t) \in \overline{\mathbb{R}}$ такие, что

$$\lim_{[t,b)_*^2 \ni (\tau,s) \to (t,t)} \varrho\,(\Phi_x(\tau,s), B_x(t)) = 0. \tag{2.2}$$

Семейство всех RL-функций, заданных на отрезке $[a,b]$, обозначим через $\mathrm{RL}[a,b]$. Следующие импликации очевидны:

$$x \in \mathrm{RL}[a,b] \implies x\big|_{[\alpha,\beta]} \in \mathrm{RL}[\alpha,\beta] \qquad \forall\,[\alpha,\beta] \subseteq [a,b],$$
$$x\big|_{[a,c]} \in \mathrm{RL}[a,c],\;\; x\big|_{[c,b]} \in \mathrm{RL}[c,b] \implies x\big|_{[a,b]} \in \mathrm{RL}[a,b].$$

Из определения 3 следует, что всякая функция $x \in \mathrm{RL}[a,b]$ порождает функции $A_x\colon (a,b] \to \overline{\mathbb{R}}$ и $B_x\colon [a,b) \to \overline{\mathbb{R}}$ со значениями в $\overline{\mathbb{R}}$. Заметим еще, что пределы (2.1) и (2.2) — это пределы по множествам $(a,t]_*^2$ и $[t,b)_*^2$ соответственно, точка (t,t) — точка прикосновения этих множеств, а существование пределов (2.1) и (2.2) означает, что

$$\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\,\delta > 0:\ \big((\tau,s) \in (t-\delta,t]_*^2 \implies \varrho\,(\Phi_x(\tau,s), A_x(t)) < \varepsilon\big), \tag{2.3}$$
$$\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\,\delta > 0:\ \big((\tau,s) \in [t,t+\delta)_*^2 \implies \varrho\,(\Phi_x(\tau,s), B_x(t)) < \varepsilon\big). \tag{2.4}$$

Предложение 4. *При* $t \in (a,b]$ *и* $A_x(t) \in \mathbb{R}$ *определение* (2.3) *и определение*

$$\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\,\delta > 0:\ \big((\tau,s) \in (t-\delta,t]_*^2 \implies |\Phi_x(\tau,s) - A_x(t)| < \varepsilon\big) \tag{2.5}$$

эквивалентны. При $t \in (a,b]$ *и* $A_x(t) = \infty$ *определение* (2.3) *и определение*

$$\forall\,M \in \mathbb{R}\ \exists\,\delta > 0:\ \big((\tau,s) \in (t-\delta,t]_*^2 \implies \Phi_x(\tau,s) > M\big) \tag{2.6}$$

эквивалентны. При $t \in (a, b]$ *и* $A_x(t) = -\infty$ *определение* (2.3) *и определение*

$$\forall\, M \in \mathbb{R}\ \exists\, \delta > 0:\ \big((\tau, s) \in (\,t-\delta, t\,]^2_* \implies \Phi_x(\tau, s) < M\big) \tag{2.7}$$

эквивалентны. При $t \in [a, b)$ *и* $B_x(t) \in \mathbb{R}$ *определение* (2.4) *и определение*

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0:\ \big((\tau, s) \in [\,t, t+\delta\,)^2_* \implies |\Phi_x(\tau, s) - B_x(t)\,| < \varepsilon\big) \tag{2.8}$$

эквивалентны. При $t \in [a, b)$ *и* $B_x(t) = \infty$ *определение* (2.4) *и определение*

$$\forall\, M \in \mathbb{R}\ \exists\, \delta > 0:\ \big((\tau, s) \in [\,t, t+\delta\,)^2_* \implies \Phi_x(\tau, s) > M\big) \tag{2.9}$$

эквивалентны. При $t \in [a, b)$ *и* $B_x(t) = -\infty$ *определение* (2.4) *и определение*

$$\forall\, M \in \mathbb{R}\ \exists\, \delta > 0:\ \big((\tau, s) \in [\,t, t+\delta\,)^2_* \implies \Phi_x(\tau, s) < M\big) \tag{2.10}$$

эквивалентны.

Доказательство. Пусть $t \in (a, b]$, $A_x(t) \in \mathbb{R}$ и справедливо (2.3). Полагаем $M \doteq |f(A_x(t))|$. Так как $A_x(t) \in \mathbb{R}$, то $M \in [0, 1)$. Пусть, далее, $\sigma \doteq \frac{1}{2}\,(1-M) \in (0, \frac{1}{2}]$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$, и пусть $E \doteq \sigma^2 \min\{\varepsilon, \sigma\}$. В соответствии с (2.3) существует $\delta > 0$ такое, что $|f(\Phi_x(\tau, s)) - f(A_x(t))| < E$ для всех $(\tau, s) \in (\,t-\delta, t\,]^2_*$. Следовательно,

$$|f(\Phi_x(\tau, s))| < |f(A_x(t))| + E = M + E = 1 - 2\,\sigma + E \leqslant 1 - 2\,\sigma + \sigma^3 < 1 - \sigma.$$

Кроме того, $|f(A_x(t))| = M = 1 - 2\,\sigma < 1 - \sigma$. Согласно (0.3) имеет место цепочка

$$|\Phi_x(\tau, s) - A_x(t)| \leqslant \sigma^{-2}\,|f(\Phi_x(\tau, s)) - f(A_x(t))| < \sigma^{-2}E = \min\{\varepsilon, \sigma\} \leqslant \varepsilon,$$

справедливая для всех $(\tau, s) \in (\,t-\delta, t\,]^2_*$, откуда следует (2.5).

Далее полагаем, что $t \in (a, b]$, $A_x(t) \in \mathbb{R}$ и справедливо (2.5), то есть для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что $|\Phi_x(\tau, s) - A_x(t)| < \varepsilon$ для всех $(\tau, s) \in (\,t-\delta, t\,]^2_*$. Согласно (0.2) имеет место цепочка $|f(\Phi_x(\tau, s)) - f(A_x(t))| \leqslant |\Phi_x(\tau, s) - A_x(t)| < \varepsilon$, что доказывает (2.3). Таким образом, определения (2.3) и (2.5) эквивалентны.

Пусть, далее, $t \in (a, b]$, $A_x(t) = \infty$ и справедливо (2.3). Зафиксируем $M \in \mathbb{R}$, и пусть $\varepsilon \doteq 1 - f(M) \in (0, 2)$. В силу (2.3) существует $\delta > 0$ такое, что $|f(\Phi_x(\tau, s)) - f(A_x(t))| < \varepsilon$ для всех $(\tau, s) \in (\,t-\delta, t\,]^2_*$. Значит, $1 - f(\Phi_x(\tau, s)) = |f(\Phi_x(\tau, s)) - f(A_x(t))| < \varepsilon = 1 - f(M)$, поэтому $f(\Phi_x(\tau, s)) > f(M)$, а в силу монотонности функции $f(\cdot)$ имеем $\Phi_x(\tau, s) > M$, что и требуется в определении (2.6).

Далее полагаем, что $t \in (a, b]$, $A_x(t) = \infty$ и справедливо (2.6). Зафиксируем $\varepsilon \in (0, 2)$, и пусть $M \doteq f^{-1}(1-\varepsilon)$. В силу (2.6) существует $\delta > 0$ такое, что $\Phi_x(\tau, s) > M$ для всех $\tau \in (t - \delta, t)$. Другими словами, $\Phi_x(\tau, s) > f^{-1}(1-\varepsilon)$, поэтому $1 - f(\Phi_x(\tau, s)) < \varepsilon$. Следовательно, $|f(\Phi_x(\tau, s)) - f(A_x(t))| = 1 - f(\Phi_x(\tau, s)) < \varepsilon$, что доказывает (2.3). При $\varepsilon \geqslant 2$ в качестве δ можно взять то значение, которое получено, например, при $\varepsilon = 1$.

Мы доказали эквивалентность определений (2.3) и (2.6). Аналогичные выкладки допустимы для доказательства эквивалентности определений (2.3) и (2.7).

Наконец, для определений (2.8), (2.9), (2.10) симметричным образом легко повторить весь процесс, осуществленный для определений (2.5), (2.6), (2.7). □

Точка (τ, s) в пределах (2.1) и (2.2) может приближаться к точке (t, t) по различным подмножествам множеств $(a, t\,]^2_*$ и $[\,t, b)^2_*$. В частности, полагая $\tau = t$ в паре $(\tau, s) \in (a, t\,]^2_*$ и в паре $(\tau, s) \in [\,t, b)^2_*$, получаем формулы

$$\lim_{\substack{\{s<t\}\\ s\to t}} \varrho\,(\Phi_x(t, s), A_x(t)) = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{\substack{\{s>t\}\\ s\to t}} \varrho\,(\Phi_x(t, s), B_x(t)) = 0 \tag{2.11}$$

соответственно, или в эквивалентной записи

$$\lim_{s\to t-0} \varrho\,\Big(\tfrac{x(s)-x(t)}{s-t}, A_x(t)\Big) = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{s\to t+0} \varrho\,\Big(\tfrac{x(s)-x(t)}{s-t}, B_x(t)\Big) = 0\,. \tag{2.12}$$

Замечание 1. Согласно (2.12) всякая RL-функция $x\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ имеет во всех точках отрезка $[a,b]$ односторонние производные (возможно, и бесконечные), причем $A_x\colon (a,b] \to \overline{\mathbb{R}}$ — это левосторонняя, а $B_x\colon [a,b) \to \overline{\mathbb{R}}$ — правосторонняя производные.

Пример 3. Пусть функция $x\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ такова, что $x(t) = c \in \mathbb{R}$ при $t \in [-1,0]$ и $x(t) = \sqrt{t}$ при $t \in (0,1]$. Если $(-1,0]^2_* \ni (\tau,s) \to (0,0)$, то $\Phi_x(\tau,s) = 0$, поэтому $A_x(0) = 0$. Пусть, далее, $[0,1)^2_* \ni (\tau,s) \to (0,0)$ (без ограничения общности считаем, что $\tau < s$). При $0 < \tau < s$ имеем $\Phi_x(\tau,s) = \frac{1}{\sqrt{s}+\sqrt{\tau}}$, а если $0 = \tau < s$, то $\Phi_x(\tau,s) = \frac{\sqrt{s}-c}{s}$. Следовательно, если $c \leqslant 0$, то $\varrho(\Phi_x(\tau,s),+\infty) \to 0$, то есть $B_x(0) = +\infty$, а если $c > 0$, то предел (2.2) в нуле не существует. Существование остальных предельных чисел очевидно. Итак, $x \in \mathrm{RL}[-1,1]$ только при $c \leqslant 0$, причем при $c = 0$ функция непрерывна.

Пример демонстрирует существование разрывных RL-функций, а в следующем примере показано, что существуют непрерывные функции, не являющиеся RL-функциями.

Пример 4. Пусть $x\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ — канторова лестница. Эта функция непрерывна (см., например, [23, с. 341]). Для всех $n \in \mathbb{N}$ и $t \in \left[\frac{1}{3^n}, \frac{2}{3^n}\right]$ справедливо $x(t) = \frac{1}{2^n}$. Введем в рассмотрение две сходящиеся последовательности $(s^1_n, \tau^1_n) \doteq (\frac{1}{3^n}, 0) \to (0,0)$ и $(s^2_n, \tau^2_n) \doteq (\frac{2}{3^n}, \frac{1}{3^n}) \to (0,0)$, расположенные в множестве $[0,1)^2_*$. Тогда

$$\Phi_x(\tau^1_n, s^1_n) = \frac{x(s^1_n)-x(\tau^1_n)}{s^1_n-\tau^1_n} = \left(\frac{3}{2}\right)^n \quad \text{и} \quad \Phi_x(\tau^2_n, s^2_n) = \frac{x(s^2_n)-x(\tau^2_n)}{s^2_n-\tau^2_n} = 0,$$
$$\lim_{n\to\infty} \varrho\left(\Phi_x(\tau^1_n, s^1_n), +\infty\right) = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} \varrho\left(\Phi_x(\tau^2_n, s^2_n), 0\right) = 0.$$

Следовательно, предельное число $B_x(0)$ в формуле (2.2) не определено. Таким образом, канторова лестница не является RL-функцией.

Утверждение 1. *Всякая непрерывно дифференцируемая функция* $x\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *является* RL-*функцией, то есть* $\mathrm{C}^1[a,b] \subset \mathrm{RL}[a,b]$.

Для любых $t \in (a,b]$ и $(\tau,s) \in (a,t]^2_*$ таких, что $(\tau,s) \to (t,t)$, существует точка ξ, лежащая между τ и s (поэтому $\xi \to t$) такая, что $x(s) - x(\tau) = x'(\xi)(s-\tau)$, поэтому

$$\lim_{(a,t]^2_* \ni (\tau,s)\to(t,t)} \varrho\left(\Phi_x(\tau,s), x'(t)\right) = \lim_{(a,t]^2_* \ni (\tau,s)\to(t,t)} \varrho\left(\frac{x(s)-x(\tau)}{s-\tau}, x'(t)\right) = \lim_{\substack{\xi\in(a,t]\\ \xi\to t}} \varrho\left(x'(\xi), x'(t)\right) = 0.$$

Последнее равенство имеет место в силу непрерывности функции x'. Аналогичная цепочка равенств справедлива и для предела (2.2). Таким образом, для односторонних производных имеем $B_x(a) = x'(a) \in \mathbb{R}$, $A_x(t) = B_x(t) = x'(t) \in \mathbb{R}$ для всех $t \in (a,b)$ и $A_x(b) = x'(b) \in \mathbb{R}$.

Утверждение 2. *Если* $x \in \mathrm{RL}[a,b]$, *то функция* x *имеет ограниченное изменение.*

Доказательство. Пусть $t \in (a,b]$, и предположим, что $A_x(t) \in \mathbb{R}$. Существует $\delta_t > 0$ такое, что неравенства $a < t - \delta_t < \tau < s \leqslant t$ влекут за собой $|\Phi_x(\tau,s) - A_x(t)| < 1$ (см. (2.5)), поэтому $|\Phi_x(\tau,s)| < \lambda(t) \doteq |A_x(t)| + 1$ или $|x(s) - x(\tau)| < \lambda(t)\,|s-\tau|$. Тем самым, для любых $\tau, s \in (t-\delta_t, t]$ имеет место неравенство $|x(s) - x(\tau)| \leqslant \lambda(t)\,|s-\tau|$, то есть сужение $x\colon (t-\delta_t, t] \to \mathbb{R}$ — это липшицева функция. Значит, для любого $\xi \in (t-\delta_t, t)$ сужение $x\colon [\xi, t] \to \mathbb{R}$ есть абсолютно непрерывная функция.

Пусть теперь $A_x(t) = \infty$ (или $A_x(t) = -\infty$). Согласно (2.6) (соответственно (2.7)) существует $\delta_t > 0$ такое, что неравенства $a < t - \delta_t < \tau < s \leqslant t$ влекут за собой неравенства $\Phi_x(\tau,s) > 0$ (соответственно $\Phi_x(\tau,s) < 0$). Тем самым, функция-сужение $x\colon (t-\delta_t, t] \to \mathbb{R}$ — это монотонно возрастающая (убывающая) функция, поэтому для любого $\xi \in (t-\delta_t, t)$ сужение $x\colon [\xi, t] \to \mathbb{R}$ имеет ограниченное изменение.

Пусть, далее, $t \in [a,b)$. Легко проверить справедливость аналогичных утверждений: при $B_x(t) \in \mathbb{R}$ существует $\delta'_t > 0$ такое, что $t+\delta'_t < b$ и для всех $\xi \in (t, t+\delta'_t)$ сужение $x\colon [t,\xi] \to \mathbb{R}$ является абсолютно непрерывной функцией, а если $B_x(t) = \pm\infty$, то существует $\delta'_t > 0$ такое, что $t+\delta'_t < b$ и для всех $\xi \in (t, t+\delta'_t)$ сужение $x\colon [t,\xi] \to \mathbb{R}$ имеет ограниченное изменение.

Для любого $t \in (a,b)$ обозначим $\eta_t \doteq \min\{\delta_t, \delta'_t\}$, и пусть $\eta_a \doteq \delta'_a$, $\eta_b \doteq \delta_b$. Совокупность интервалов $\big\{(t-\eta_t, t+\eta_t)\big\}_{t\in[a,b]}$ образует бесконечную систему открытых множеств, покрывающую отрезок $[a,b]$. Из нее можно выделить конечное подпокрытие (в котором $a = s_0 < s_1 < \ldots < s_m = b$)

$$(s_0-\eta_{s_0}, s_0+\eta_{s_0}),\ \ (s_1-\eta_{s_1}, s_1+\eta_{s_1}),\ \ \ldots,\ \ (s_m-\eta_{s_m}, s_m+\eta_{s_m}).$$

Оно, в свою очередь, порождает разбиение $a = \xi_0 < \xi_1 < \ldots < \xi_n = b$ отрезка $[a,b]$ такое, что $n = 2m$, $\xi_{2i} = s_i$ для всех $i = 0,1,\ldots,m$, а точка ξ_{2i-1} при $i = 1,\ldots,m$ — это произвольная точка интервала $(s_i-\eta_{s_i}, s_{i-1}+\eta_{s_{i-1}})$. На каждом отрезке $[\xi_{i-1}, \xi_i]$ функция x имеет ограниченное изменение, поэтому $x \in \mathrm{BV}[a,b]$, то есть является функцией ограниченной вариации.

Утверждение 3. *Если $x \in \mathrm{RL}[a,b]$, то для почти всех $t \in [a,b]$ существует конечная производная $\dot{x}(t)$. Если значение $\dot{x}(t)$ конечно для некоторого $t \in (a,b)$, то $A_x(t) = B_x(t) = \dot{x}(t) \in \mathbb{R}$. Если $\dot{x}(a)$ конечно, то $B_x(a) = \dot{x}(a) \in \mathbb{R}$. Если $\dot{x}(b)$ конечно, то $A_x(b) = \dot{x}(b) \in \mathbb{R}$.*

В силу утверждения 2 справедливо включение $x \in \mathrm{BV}[a,b]$, поэтому первая часть утверждения очевидна. Пусть $t \in (a,b)$ таково, что производная $\dot{x}(t)$ конечна. Тогда

$$\lim_{s\to t-0} \tfrac{x(s)-x(t)}{s-t} = \dot{x}(t) \quad \text{и} \quad \lim_{s\to t-0} \varrho\big(\tfrac{x(s)-x(t)}{s-t}, \dot{x}(t)\big) = 0.$$

С другой стороны, существует $A_x(t) \in \overline{\mathbb{R}}$ такое, что

$$\lim_{(a,t]^2_* \ni (\tau,s)\to(t,t)} \varrho\,(\Phi_x(\tau,s), A_x(t)) = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{s\to t-0} \varrho\big(\tfrac{x(s)-x(t)}{s-t}, A_x(t)\big) = 0$$

(второе равенство следует из первого в силу (2.12)), поэтому $A_x(t) = \dot{x}(t) \in \mathbb{R}$ (в силу единственности предела). Симметричным образом доказывается, что $B_x(t) = \dot{x}(t) \in \mathbb{R}$. Аналогичные рассуждения справедливы и в тех случаях, когда конечны производные $\dot{x}(a)$ или $\dot{x}(b)$. □

Наряду с формулами (2.11) и (2.12) справедливы следующие четыре равенства

$$\lim_{\substack{\{\tau<0,\ s<0\}\\(\tau,s)\to(0,0)}} \varrho\,(\Phi_x(t+\tau, t+\tau+s), A_x(t)) = 0 = \lim_{\substack{\{\tau+s<0,\ s>0\}\\(\tau,s)\to(0,0)}} \varrho\,(\Phi_x(t+\tau, t+\tau+s), A_x(t)),$$

$$\lim_{\substack{\{\tau>0,\ s>0\}\\(\tau,s)\to(0,0)}} \varrho\,(\Phi_x(t+\tau, t+\tau+s), B_x(t)) = 0 = \lim_{\substack{\{\tau+s>0,\ s<0\}\\(\tau,s)\to(0,0)}} \varrho\,(\Phi_x(t+\tau, t+\tau+s), B_x(t)). \tag{2.13}$$

Действительно, множество, по которому вычисляется предел (2.1), можно записать в виде $\{\tau \leqslant t,\ s \leqslant t,\ \tau \neq s\}$, поэтому заменив τ на $t+\tau'$, а s — на $t+\tau'+s'$ (после замены переменных штрих не пишем), получаем, что

$$\lim_{\substack{\{\tau\leqslant0,\ \tau+s\leqslant0,\ s\neq0\}\\(\tau,s)\to(0,0)}} \varrho\,(\Phi_x(t+\tau, t+\tau+s), A_x(t)) = 0. \tag{2.14}$$

Множества, по которым вычисляются первые два предела (2.13), принадлежат множеству, по которому вычисляется предел (2.14), следовательно, оба эти предела существуют и равны нулю. В силу (2.2) справедливо симметричное (по отношению к (2.14)) равенство

$$\lim_{\substack{\{\tau\geqslant 0,\ \tau+s\geqslant 0,\ s\neq 0\}\\ (\tau,s)\to(0,0)}} \varrho\left(\Phi_x(t+\tau,t+\tau+s),B_x(t)\right)=0,$$

что и доказывает два последних равенства в (2.13).

Лемма 1. *Если* $x\in \mathrm{RL}[a,b]$, *то справедливы равенства*

$$\lim_{\tau\to t-0}\varrho\left(A_x(\tau),A_x(t)\right)=0=\lim_{\tau\to t-0}\varrho\left(B_x(\tau),A_x(t)\right)\quad \forall\, t\in(a,b], \tag{2.15}$$

$$\lim_{\tau\to t+0}\varrho\left(A_x(\tau),B_x(t)\right)=0=\lim_{\tau\to t+0}\varrho\left(B_x(\tau),B_x(t)\right)\quad \forall\, t\in[a,b). \tag{2.16}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Мы проведем доказательство формул (2.15) в полном объеме, а доказательство формул (2.16) легко осуществляется симметричным образом. В соответствии с первой формулой (2.13) справедливо

$$\forall\, t\in(a,b]\ \forall\,\varepsilon>0\ \exists\,\delta>0:\ \big((\tau,s)\in U_\delta\implies \varrho\left(\Phi_x(t+\tau,t+\tau+s),A_x(t)\right)<\varepsilon\big),$$

где $U_\delta\doteq\{(\tau,s)\in\mathbb{R}^2:\ -\delta<\tau<0,\ -\delta<s<0\}$ — это квадратная область. Зафиксируем $\tau\in(-\delta,0)$. Подставив в первую формулу (2.11) вместо t и s выражения $t+\tau$ и $t+\tau+s$ соответственно, получаем, что $\lim\limits_{\substack{\{s<0\}\\ s\to 0}}\varrho\left(\Phi_x(t+\tau,t+\tau+s),A_x(t+\tau)\right)=0$. Это означает, что найдется s (зависящее от τ) такое, что $(\tau,s)\in U_\delta$ и $\varrho\left(\Phi_x(t+\tau,t+\tau+s),A_x(t+\tau)\right)<\varepsilon$, следовательно, $\varrho\left(A_x(t+\tau),A_x(t)\right)<2\,\varepsilon$ для всех $\tau\in(-\delta,0)$. Таким образом,

$$\lim_{\substack{\{\tau<0\}\\ \tau\to 0}}\varrho\left(A_x(t+\tau),A_x(t)\right)=0\quad\text{или}\quad \lim_{\tau\to t-0}\varrho\left(A_x(\tau),A_x(t)\right)=0\,.$$

Для произвольного $\delta>0$ треугольную область $\{(\tau,s)\in\mathbb{R}^2:-\delta<\tau<0,\ 0<s<-\tau\}$ обозначим через V_δ. В силу второй формулы (2.13) справедливо

$$\forall\, t\in(a,b]\ \forall\,\varepsilon>0\ \exists\,\delta>0:\ \big((\tau,s)\in V_\delta\implies \varrho\left(\Phi_x(t+\tau,t+\tau+s),A_x(t)\right)<\varepsilon\big).$$

Зафиксируем $\tau\in(-\delta,0)$. Подставив во вторую формулу (2.11) вместо t выражение $t+\tau$, получаем равенства

$$0=\lim_{\substack{\{s>t+\tau\}\\ s\to t+\tau}}\varrho\left(\Phi_x(t+\tau,s),B_x(t+\tau)\right)=\lim_{\substack{\{t>s>t+\tau\}\\ s\to t+\tau}}\varrho\left(\Phi_x(t+\tau,s),B_x(t+\tau)\right)$$

(перешли от множества $\{s>t+\tau\}$ к подмножеству $\{t>s>t+\tau\}$), а подставив вместо s выражение $t+\tau+s$, получаем, что $\lim\limits_{\substack{\{\tau+s<0,\ s>0\}\\ s\to 0}}\varrho\left(\Phi_x(t+\tau,t+\tau+s),B_x(t+\tau)\right)=0$. Значит, найдется s (зависящее от τ) такое, что $(\tau,s)\in V_\delta$ и $\varrho\left(\Phi_x(t+\tau,t+\tau+s),B_x(t+\tau)\right)<\varepsilon$, следовательно, $\varrho\left(B_x(t+\tau),A_x(t)\right)<2\,\varepsilon$ для всех $\tau\in(-\delta,0)$. Таким образом,

$$\lim_{\substack{\{\tau<0\}\\ \tau\to 0}}\varrho\left(B_x(t+\tau),A_x(t)\right)=0\quad\text{или}\quad \lim_{\tau\to t-0}\varrho\left(B_x(\tau),A_x(t)\right)=0\,.$$

Доказательство формул (2.16) опирается на вторую группу равенств (2.13). □

В приводимых ниже утверждениях непрерывность функций со значениями в $\overline{\mathbb{R}}$ следует понимать в метрике ϱ.

Следствие 5. *Если* $x \in \mathrm{RL}[a,b]$, *то функция* $A_x\colon (a,b] \to \langle\overline{\mathbb{R}},\varrho\rangle$ *непрерывна слева, а функция* $B_x\colon [a,b) \to \langle\overline{\mathbb{R}},\varrho\rangle$ *непрерывна справа.*

Следствие 6. *Пусть* $x \in \mathrm{RL}[a,b]$. *Функция* $A_x\colon (a,b] \to \langle\overline{\mathbb{R}},\varrho\rangle$ *непрерывна в точке* $t \in (a,b)$ *тогда и только тогда, когда в этой точке непрерывна функция* $B_x\colon [a,b) \to \langle\overline{\mathbb{R}},\varrho\rangle$. *При этом имеет место равенство* $A_x(t) = B_x(t)$.

Действительно, если, например, функция A_x непрерывна в точке $t \in (a,b)$, то

$$\lim_{\tau\to t-0} \varrho\,(A_x(\tau),A_x(t)) = 0 = \lim_{\tau\to t+0} \varrho\,(A_x(\tau),A_x(t)),$$

и остается лишь сослаться на формулы (2.15), (2.16). □

Замечание 2. Наряду с $A_x(\cdot)$ и $B_x(\cdot)$ функция $x \in \mathrm{RL}[a,b]$ порождает функции

$$\widehat{A}_x(t) \doteq \begin{cases} B_x(a), & t=a, \\ A_x(t), & t\in(a,b] \end{cases} \quad \text{и} \quad \widehat{B}_x(t) \doteq \begin{cases} B_x(t), & t\in[a,b), \\ A_x(b), & t=b, \end{cases} \tag{2.17}$$

определенные на всем отрезке $[a,b]$, причем согласно лемме 1

$$\widehat{A}_x(t-0) = A_x(t-0) = A_x(t) = B_x(t-0) = \widehat{B}_x(t-0) \quad \forall\, t \in (a,b], \tag{2.18}$$

$$\widehat{A}_x(t+0) = A_x(t+0) = B_x(t) = B_x(t+0) = \widehat{B}_x(t+0) \quad \forall\, t \in [a,b). \tag{2.19}$$

Замечание 3. Согласно (2.18) и (2.19) функции (2.17) имеют односторонние пределы, поэтому $\widehat{A}_x, \widehat{B}_x \in \overline{\mathrm{G}}^{\infty}[a,b]$, то есть $\widehat{A}_x$ и $\widehat{B}_x$ — правильные функции. Таким образом, согласно замечанию 1 односторонние производные RL-функций являются правильными функциями. (Вопрос о том, каково семейство всех функций, производные которых являются правильными функциями, требует проведения дополнительных исследований.)

Утверждение 4. *Пусть функция* $x \in \mathrm{RL}[a,b]$ *такова, что* $\dot{x}(t) = 0$ *для почти всех* $t \in [a,b]$ (*то есть* x *— это сумма сингулярной функции и функции скачков*). *Тогда* x *— постоянная функция.*

Доказательство. Обозначим через I множество тех $t \in [a,b]$, в которых $\dot{x}(t) = 0$, и пусть $J \doteq [a,b] \setminus I$ — множество нулевой меры. Пусть, далее, $t \in (a,b] \cap J$, а $\delta > 0$ таково, что $a < t-\delta$. Составим систему вложенных полуинтервалов $(t-\frac{\delta}{n}, t]$, $n \in \mathbb{N}$. Мера каждого из них положительна, следовательно, в каждом полуинтервале найдется точка t_n из множества I. Тогда $\dot{x}(t_n) = 0$ и $t_n \to t-0$. В силу утверждения 3 справедливо равенство $A_x(t_n) = 0$, а в силу следствия 5 имеем $A_x(t) = 0$. Таким образом, $A_x(t) = 0$ для всех $t \in (a,b] \cap J$, поэтому $A_x(t) = 0$ для всех $t \in (a,b]$. Аналогично, $B_x(t) = 0$ для всех $t \in [a,b)$, то есть все односторонние производные равны нулю, поэтому $x(t) \equiv \mathrm{const}$.

Замечание 4. Из утверждения следует, в частности, что пересечение множества $\mathrm{RL}[a,b]$ с каждым из семейств сингулярных функций или функций скачков состоит лишь из функций-констант.

Определение 4. Пересечение $\mathrm{RL}[a,b]$ и множества $\mathrm{AC}[a,b]$ всех абсолютно непрерывных функций, определенных на отрезке $[a,b]$, обозначим через $\mathrm{RC} \doteq \mathrm{RC}[a,b]$, а его подмножество, состоящее из функций, у которых все предельные числа $A_x(t)$ и $B_x(t)$ конечны, обозначим через $\mathrm{RS} \doteq \mathrm{RS}[a,b]$. Функции $x \in \mathrm{RC}[a,b]$ называются *регулярно непрерывными*, а функции $x \in \mathrm{RS}[a,b]$ — *регулярно гладкими*.

Замечание 5. В работе [1] обозначение $\mathrm{RS}[a,b]$ и термин «регулярно гладкая функция» определялись иначе. Покажем эквивалентность определений (множество $\mathrm{RS}[a,b]$ в смысле определения из [1] временно переобозначим через $F[a,b]$). Если $x \in F[a,b]$, то существуют предельные числа $A_x(t) \in \mathbb{R}$, $t\in(a,b]$, и $B_x(t) \in \mathbb{R}$, $t \in [a,b)$, такие, что

$$\lim_{(a,t]^2_* \ni (\tau,s)\to (t,t)} |\Phi_x(\tau,s) - A_x(t)| = 0\,, \qquad \lim_{[t,b)^2_* \ni (\tau,s)\to (t,t)} |\Phi_x(\tau,s) - B_x(t)| = 0\,. \tag{2.20}$$

В сответствии с (0.2) при $(a,t]^2_* \ni (\tau,s) \to (t,t)$ справедлива цепочка

$$\varrho\,(\Phi_x(\tau,s), A_x(t)) = |f(\Phi_x(\tau,s)) - f(A_x(t))| \leqslant |\Phi_x(\tau,s) - A_x(t)| \to 0,$$

аналогичным образом при $[t,b)^2_* \ni (\tau,s) \to (t,t)$ имеем $\varrho\,(\Phi_x(\tau,s), B_x(t)) \to 0$, следовательно, $x \in \mathrm{RL}[a,b]$. Так как $x \in F[a,b]$, то в силу [1] справедливо включение $x \in \mathrm{AC}[a,b]$, поэтому $x \in \mathrm{RC}[a,b]$. Поскольку все числа $A_x(t)$ и $B_x(t)$ конечны, то $x \in \mathrm{RS}[a,b]$.

Обратно. Пусть $x \in \mathrm{RS}[a,b] \subset \mathrm{RL}[a,b]$. Существуют предельные числа $A_x(t) \in \mathbb{R}$, $t\in(a,b]$, и $B_x(t) \in \mathbb{R}$, $t \in [a,b)$, такие, что

$$\lim_{(a,t]^2_* \ni (\tau,s)\to (t,t)} \varrho\,(\Phi_x(\tau,s), A_x(t)) = 0\,, \qquad \lim_{[t,b)^2_* \ni (\tau,s)\to (t,t)} \varrho\,(\Phi_x(\tau,s), B_x(t)) = 0\,. \tag{2.21}$$

Зафиксируем $t \in (a,b]$, и пусть $M \doteq |f(A_x(t))|$. Поскольку $A_x(t) \in \mathbb{R}$, то $M \in [0,1)$. Пусть, далее, $\sigma \doteq \frac{1}{2}(1-M) \in (0,\frac{1}{2}]$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$, и пусть $E \doteq \sigma^2 \min\{\varepsilon,\sigma\}$. В силу (2.21)

$$\exists\,\delta > 0:\ \big((\tau,s)\in(t-\delta,t]^2_* \implies \varrho\,(\Phi_x(\tau,s), A_x(t)) < E\big)\,.$$

Другими словами, $|f(\Phi_x(\tau,s)) - f(A_x(t))| < E$ для всех $(\tau,s)\in(t-\delta,t]^2_*$. Следовательно,

$$|f(\Phi_x(\tau,s))| < |f(A_x(t))| + E = M + E = 1 - 2\sigma + E \leqslant 1 - 2\sigma + \sigma^3 < 1 - \sigma.$$

Кроме того, $|f(A_x(t))| = M = 1 - 2\sigma < 1 - \sigma$. Согласно (0.3) имеет место цепочка

$$|\Phi_x(\tau,s) - A_x(t)| \leqslant \sigma^{-2}\,|f(\Phi_x(\tau,s)) - f(A_x(t))| < \sigma^{-2}E = \min\{\varepsilon,\sigma\} \leqslant \varepsilon,$$

справедливая для всех $(\tau,s) \in (t-\delta,t]^2_*$, что доказывает первое равенство в (2.20). Второе равенство доказывается аналогично. Значит, $x \in F[a,b]$, поэтому $\mathrm{RS}[a,b] = F[a,b]$.

Замечание 6. Имеет место диаграмма

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & & & \mathrm{RC} & \to & \mathrm{RL} & & \\ & & & & & \nearrow & & \searrow & & \searrow & \\ \mathrm{C}^1 & \to & \mathrm{KC}^1 & \to & \mathrm{RS} & \to & \mathrm{Lip} & \to & \mathrm{AC} & \to & \mathrm{BV}, \end{array}$$

где стрелки обозначают отношение включения множеств (пространств). Через KC^1 и Lip обозначены пространства кусочно-гладких и липшицевых функций сответственно. Включения $\mathrm{KC}^1 \to \mathrm{RS} \to \mathrm{Lip}$ доказаны в [1] (понятно, что пространство RS там понимается в смысле (2.20), оно — линейное). Остальные включения комментариев не требуют. Все пространства, кроме RC и RL, — линейные. Функции $x, y \in \mathrm{RC}[a,b]$ будем называть *эквивалентными* ($x \sim y$), если $x - y \in \mathrm{RS}[a,b]$.

Утверждение 5. *Если* $x \in \mathrm{RL}[a,b]$, $y \in \mathrm{RS}[a,b]$, $z \doteq x + y$, *то* $z \in \mathrm{RL}[a,b]$. *В частности, если* $u \in \mathrm{RC}[a,b]$, $v \in \mathrm{RS}[a,b]$, $w \doteq u + v$, *то* $w \in \mathrm{RC}[a,b]$.

Для любого $t \in (a, b]$ имеем $A_y(t) \in \mathbb{R}$. Если $A_x(t) \in \mathbb{R}$, то и $A_z(t) = A_x(t) + A_y(t) \in \mathbb{R}$. Пусть, далее, $A_x(t) = \infty$. Зафиксируем $M \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, и пусть $M_1 \doteq M{+}\varepsilon{-}A_y(t)$. Существует $\delta > 0$ такое, что неравенства $a < t - \delta < \tau < s \leqslant t$ влекут за собой

$$\tfrac{x(s)-x(\tau)}{s-\tau} > M_1, \quad \left|\tfrac{y(s)-y(\tau)}{s-\tau} - A_y(t)\right| < \varepsilon \implies \tfrac{z(s)-z(\tau)}{s-\tau} > M_1 - \varepsilon + A_y(t) = M,$$

поэтому $A_z(t) = \infty$. Наконец, имеет место симметричная импликация $A_x(t) = -\infty \implies A_z(t) = -\infty$. Для чисел $B_z(t)$ выкладки аналогичны.

В соответствии с первой частью утверждения справедливо включение $w \in \mathrm{RL}[a, b]$, причем w — абсолютно непрерывная функция, следовательно, $w \in \mathrm{RC}[a, b]$. В силу замечания 6 функции u и w эквивалентны ($u \sim w$).

§ 3. Топологические свойства пространств липшицевых функций

В пространстве $\mathrm{Lip}[a, b]$ определена норма

$$\|x\|_{\mathrm{Lip}} \doteq |x(a)| + \sup_{(\tau,s)\,\in\,[a,b]^2_*} \big|\Phi_x(\tau, s)\big| \qquad \forall\, x \in \mathrm{Lip}[a, b],$$

причем $\langle \mathrm{Lip}[a, b], \|\cdot\|_{\mathrm{Lip}}\rangle$ — полное пространство (см., например, [24, с. 51], [1]). В работе [1] показано, что пространства $\langle \mathrm{C}^1[a, b], \|\cdot\|_{\mathrm{Lip}}\rangle$ и $\langle \mathrm{RS}[a, b], \|\cdot\|_{\mathrm{Lip}}\rangle$ — тоже полные. В соответствии с этой же работой справедливы утверждения:

- $\mathrm{RS}[a, b]$ является замыканием по норме $\|\cdot\|_{\mathrm{Lip}}$ пространства ломаных, определенных на отрезке $[a, b]$;
- $\mathrm{RS}[a, b]$ является замыканием пространства $\mathrm{KC}^1[a, b]$ по норме $\|\cdot\|_{\mathrm{Lip}}$;
- если $x \in \mathrm{RS}[a, b]$, то существует последовательность ломаных $\{x_n \colon [a, b] \to \mathbb{R}\}_{n=1}^{\infty}$ такая, что $\|x_n - x\|_{\mathrm{BV}} \to 0$ и $\|x_n - x\|_{\mathrm{C}} \to 0$ (то есть последовательность $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к функции $x(t)$ равномерно на $[a, b]$).

В пространстве $\mathrm{RC}[a, b]$ определена метрика

$$\mathfrak{r}\,(x, y) \doteq |x(a) - y(a)| + \sup_{(\tau,s)\,\in\,[a,b]^2_*} \varrho\,(\Phi_x(\tau, s), \Phi_y(\tau, s)) \qquad \forall\, x, y \in \mathrm{RC}[a, b].$$

Предположение 1. Метрическое пространство $\langle\, \mathrm{RC}[a, b], \mathfrak{r}\,\rangle$ — полное.

§ 4. Простейшая вариационная задача в пространствах RS и RC

Пусть непрерывная по совокупности переменных функция $L \doteq L(t, x, y)$ определена на множестве $\Omega \doteq [a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ и имеет там непрерывные по совокупности переменных частные производные $L_x(t, x, y)$ и $L_y(t, x, y)$. Зафиксируем числа $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, и пусть $\mathcal{P}_{\alpha\beta} \doteq \{x \in \mathrm{RS}[a, b] \colon x(a) = \alpha,\ x(b) = \beta\}$. Введенные объекты порождают функционал $J(x(\cdot)) = \displaystyle\int_a^b L(t, x(t), \dot{x}(t))\, dt$, действующий из $\mathcal{P}_{\alpha\beta}$ в $\mathbb{R}$, понятие локального экстремума этого функционала и вариационную задачу

$$J(x(\cdot)) \to \inf, \qquad x \in \mathcal{P}_{\alpha\beta}. \tag{4.1}$$

Мы называем функцию $x_0 \in \mathcal{P}_{\alpha\beta}$ *точкой локального экстремума* задачи (4.1), если существует $\delta > 0$ такое, что для всех $h \in \mathcal{P}_{00}$ таких, что $\|h\|_{\mathrm{Lip}} < \delta$, выполнено неравенство $J(x_0(\cdot){+}h(\cdot)) \geqslant J(x_0(\cdot))$.

Теорема 2 (см. [1]). *Если функция $x_0 \in \mathcal{P}_{\alpha\beta}$ является точкой локального экстремума задачи (4.1), то для почти всех $t \in [a,b]$ справедливо равенство*

$$L_{\dot{x}}(t, x_0(t), \dot{x}_0(t)) - \int_a^t L_x(s, x_0(s), \dot{x}_0(s))\, ds = \mathrm{const}.$$

Теорема 3 (см. [1]). *Пусть J_1, J_2, J_3 — инфимумы функционалов $x(\cdot) \to J(x(\cdot))$ ($x(a) = \alpha$, $x(b) = \beta$) в пространствах* RS, KC^1 *и* C^1 *соответственно. Тогда $J_1 = J_2 = J_3$.*

Замечание 7. Решение $x(t) = t^{1/3}$, $t \in [0,1]$, известного примера Гильберта (см., например, [25, с. 66]), в котором $a = 0$, $b = 1$, $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $L(t,x,y) = t^{2/3} y^2$, то есть

$$J(x(\cdot)) \doteq \int_0^1 t^{2/3}\, \dot{x}^2\, dt \to \inf, \qquad x(0) = 0, \qquad x(1) = 1,$$

принадлежит пространству $\mathrm{RC}[0,1]$. Таким образом, решение задачи существует, но не принадлежит пространству $\mathrm{RS}[0,1]$. Пример Гильберта показывает, что определенные перспективы имеет следующая постановка простейшей вариационной задачи. В пространстве $\mathcal{Q}_{\alpha\beta} \doteq \{x \in \mathrm{RC}[a,b] \colon x(a) = \alpha,\ x(b) = \beta\}$ определена вариационная задача

$$J(x(\cdot)) \to \inf, \qquad x \in \mathcal{Q}_{\alpha\beta}, \tag{4.2}$$

и мы называем функцию $x_0 \in \mathcal{Q}_{\alpha\beta}$ *точкой локального экстремума* задачи (4.2), если существует $\delta > 0$ такое, что для всех $h \in \mathcal{P}_{00}$ таких, что $\|h\|_{\mathrm{AC}} < \delta$, выполнено неравенство $J(x_0(\cdot) + h(\cdot)) \geqslant J(x_0(\cdot))$. (Здесь уместно отметить, что в соответствии с утверждением 5 при $x_0 \in \mathcal{Q}_{\alpha\beta}$ и $h \in \mathcal{P}_{00}$ справедливо включение $x_0 + h \in \mathcal{Q}_{\alpha\beta}$.)

§ 5. Доказательства утверждений, сформулированных в § 1

Доказательство предложения 1. Пусть $t \in (a,b]$, $x(t-0) \in \mathbb{R}$ и справедливо (1.1). Пусть, далее, $e \doteq \min\{1 + f(x(t-0)), 1 - f(x(t-0))\}$. Так как $x(t-0) \in \mathbb{R}$, то $e > 0$. В силу (1.1) существует $\delta_1 > 0$ такое, что $|f(x(\tau)) - f(x(t-0))| < e$ для всех $\tau \in (t-\delta_1, t)$. Допустив, что $x(\tau) = \infty$ или $x(\tau) = -\infty$, получим противоречия:

$$1 - f(x(t-0)) = |f(x(\tau)) - f(x(t-0))| < e \leqslant 1 - f(x(t-0)),$$

$$1 + f(x(t-0)) = |f(x(\tau)) - f(x(t-0))| < e \leqslant 1 + f(x(t-0)).$$

Таким образом, существует $\delta_1 > 0$ такое, что $x(\tau) \in \mathbb{R}$ для всех $\tau \in (t-\delta_1, t)$. Пусть $M \doteq |f(x(t-0)|$. Так как $x(t-0) \in \mathbb{R}$, то $M \in [0,1)$. Пусть, далее, $\sigma \doteq \frac{1}{2}(1-M) \in (0, \frac{1}{2}]$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$, и пусть $E \doteq \sigma^2 \min\{\varepsilon, \sigma\}$. В силу (1.1) существует $\delta_2 > 0$ такое, что $|f(x(\tau)) - f(x(t-0))| < E$ для всех $\tau \in (t-\delta_2, t)$. Следовательно,

$$|f(x(\tau))| < |f(x(t-0))| + E = M + E = 1 - 2\sigma + E \leqslant 1 - 2\sigma + \sigma^3 < 1 - \sigma.$$

Кроме того, $|f(x(t-0))| = M = 1 - 2\sigma < 1 - \sigma$. Согласно (0.3) имеет место цепочка

$$|x(\tau) - x(t-0)| \leqslant \sigma^{-2} |f(x(\tau)) - f(x(t-0))| < \sigma^{-2} E = \min\{\varepsilon, \sigma\} \leqslant \varepsilon,$$

справедливая для всех $\tau \in (t-\delta, t)$, где $\delta \doteq \{\delta_1, \delta_2\}$, откуда следует (1.3).

Далее полагаем, что $t \in (a,b]$, $x(t-0) \in \mathbb{R}$ и справедливо (1.3), то есть для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что $x(\tau) \in \mathbb{R}$ и $|x(\tau) - x(t-0)| < \varepsilon$ для всех $\tau \in (t-\delta, t)$. Согласно (0.2) имеет место цепочка $|f(x(\tau)) - f(x(t-0))| \leqslant |x(\tau) - x(t-0)| < \varepsilon$, что доказывает (1.1). Таким образом, определения (1.1) и (1.3) эквивалентны.

Пусть, далее, $t \in (a, b]$, $x(t-0) = \infty$ и справедливо (1.1). Зафиксируем $M \in \mathbb{R}$, и пусть $\varepsilon \doteq 1 - f(M) \in (0, 2)$. В силу (1.1) существует $\delta > 0$ такое, что $|f(x(\tau)) - f(x(t-0))| < \varepsilon$ для всех $\tau \in (t-\delta, t)$. Следовательно, $1 - f(x(\tau)) = |f(x(\tau)) - f(x(t-0))| < \varepsilon = 1 - f(M)$, поэтому $f(x(\tau)) > f(M)$, а в силу монотонности функции $f(\cdot)$ имеем $x(\tau) > M$, что и требуется в определении (1.4).

Далее полагаем, что $t \in (a, b]$, $x(t-0) = \infty$ и справедливо (1.4). Зафиксируем $\varepsilon \in (0, 2)$, и пусть $M \doteq f^{-1}(1 - \varepsilon)$. В силу (1.4) существует $\delta > 0$ такое, что $x(\tau) > M$ для всех $\tau \in (t-\delta, t)$. Другими словами, $x(\tau) > f^{-1}(1-\varepsilon)$, поэтому $1 - f(x(\tau)) < \varepsilon$. Следовательно, $|f(x(\tau)) - f(x(t-0))| = 1 - f(x(\tau)) < \varepsilon$, что доказывает (1.1). При $\varepsilon \geqslant 2$ в качестве δ можно взять то значение, которое получено, например, при $\varepsilon = 1$.

Мы доказали эквивалентность определений (1.1) и (1.4). Аналогичные выкладки допустимы для доказательства эквивалентности определений (1.1) и (1.5).

Наконец, для определений (1.6), (1.7), (1.8) симметричным образом легко повторить весь процесс, осуществленный для определений (1.3), (1.4), (1.5).

Доказательство предложения 2. Если последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, в которой $x_n \in \mathrm{G}$, и функция $x \in \mathrm{G}$ таковы, что $r(x_n, x) \to 0$, то $|x_n(t) - x(t)| \to 0$ для всех $t \in K$, поэтому

$$\varrho(x_n(t), x(t)) = |f(x_n(t)) - f(x(t))| \leqslant |x_n(t) - x(t)| \leqslant r(x_n, x), \qquad t \in K.$$

(По поводу первого неравенства см. (0.2).) Следовательно, $d(x_n, x) \leqslant r(x_n, x) \to 0$.

Далее полагаем, что последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к x по метрике d, то есть $d(x_n, x) \to 0$. Пусть $M \doteq \sup\limits_{t \in K} |f(x(t))| \in [0, 1]$. Докажем неравенство $M < 1$. Предположим противное (то есть $M = 1$), тогда для любого $m \in \mathbb{N}$ существует $t_m \in K$ такое, что $|f(x(t_m))| > 1 - \frac{1}{m}$. Последовательность $\{t_m\}_{m=1}^{\infty}$ ограничена, следовательно, из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{t_{m_k}\}_{k=1}^{\infty}$, $t_{m_k} \to \widetilde{t} \in K$ (последовательность индексов $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ монотонно возрастает).

Обозначим $\tau_k \doteq t_{m_k}$. Без ограничения общности считаем, что бесконечное число точек последовательности $\{\tau_k\}_{k=1}^{\infty}$ (такой, что $\tau_k \to \widetilde{t}$) расположено левее точки $\widetilde{t}$. Другими словами, определена подпоследовательность $\{\tau_{k_i}\}_{i=1}^{\infty}$ такая, что $\tau_{k_i} \to \widetilde{t}-0$ (последовательность индексов $\{k_i\}_{i=1}^{\infty}$ монотонно возрастает).

Обозначим $s_i \doteq \tau_{k_i}$. Так как $s_i \to \widetilde{t} - 0$, то $t_{m_{k_i}} \to \widetilde{t} - 0$ (последовательность индексов $\{m_{k_i}\}_{i=1}^{\infty}$ монотонно возрастает). Следовательно, если $y \doteq |x|$, то при $s_i \to \widetilde{t} - 0$

$$1 - f(y(s_i)) = 1 - f(|x(s_i)|) = 1 - |f(x(s_i))| = 1 - |f(x(t_{m_{k_i}}))| < 1/m_{k_i} \to 0.$$

Так как $x \in \mathrm{G}$, то $y \in \mathrm{G}$ (для предельных чисел функции y справедливы равенства $y(t-0) = |x(t-0)|$, $t \in (a, b]$, и $y(t+0) = |x(t+0)|$, $t \in [a, b)$). Поскольку

$$|f(y(\widetilde{t}-0)) - f(y(s_i))| = \varrho\,(y(\widetilde{t}-0), y(s_i)) \to 0,$$

то $f(y(\widetilde{t}-0)) = 1$ (в силу единственности предела). Другими словами, $y(\widetilde{t}-0) = +\infty$, что противоречит включению $y \in \mathrm{G}$. Таким образом, $M < 1$, поэтому $M \in [0, 1)$.

Пусть $\sigma \doteq \frac{1}{2}(1 - M) \in (0, \frac{1}{2}]$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$, и пусть $E \doteq \sigma^2 \min\{\varepsilon, \sigma\}$. Так как $d(x_n, x) \to 0$, то существует N такое, что $d(x_n, x) < E$ для всех $n > N$. Другими словами, $|f(x_n(t)) - f(x(t))| < E$ для всех $t \in K$ и $n > N$. Следовательно,

$$|f(x_n(t))| < |f(x(t))| + E \leqslant M + E = 1 - 2\sigma + E \leqslant 1 - 2\sigma + \sigma^3 < 1 - \sigma.$$

Кроме того, $|f(x(t))| \leqslant M = 1 - 2\,\sigma < 1 - \sigma$. Согласно (0.3) имеет место цепочка

$$|x_n(t) - x(t)| \leqslant \sigma^{-2}\,|f(x_n(t)) - f(x(t))| < \sigma^{-2}E = \min\{\varepsilon, \sigma\} \leqslant \varepsilon,$$

справедливая при всех $t \in K$ и $n > N$, поэтому $r\,(x_n, x) \leqslant \varepsilon$ для всех $n > N$. Таким образом, $r\,(x_n, x) \to 0$.

Доказательство теоремы 1. 1) $\Longrightarrow$ 2). Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Поскольку $x \in \overline{\mathrm{G}}^{\infty}[a,b]$, то для произвольной точки $t \in (a,b)$ существует $\delta_t > 0$ такое, что

$$\sup_{\tau,s\,\in\,(t-\delta_t,t)} \varrho\,(x(\tau), x(s)) \leqslant \varepsilon \quad \text{и} \quad \sup_{\tau,s\,\in\,(t,t+\delta_t)} \varrho(x(\tau), x(s)) \leqslant \varepsilon.$$

Другими словами, колебание x на интервалах $(t-\delta_t, t)$ и $(t, t+\delta_t)$ не превосходит ε. Аналогично существуют $\delta_a > 0$ и $\delta_b > 0$ такие, что колебание x на интервалах $(a, a+\delta_a)$ и $(b-\delta_b, b)$ также не превосходит величины ε. Совокупность $\big\{(t-\delta_t, t+\delta_t)\big\}_{t\in[a,b]}$ образует бесконечную систему открытых множеств, покрывающую отрезок $[a,b]$. Из нее можно выделить конечное подпокрытие (в котором $a = s_0 < s_1 < \ldots < s_m = b$):

$$(s_0 - \delta_{s_0}, s_0 + \delta_{s_0}),\;\; (s_1 - \delta_{s_1}, s_1 + \delta_{s_1}),\;\; \ldots,\;\; (s_m - \delta_{s_m}, s_m + \delta_{s_m}).$$

Оно, в свою очередь, порождает разбиение $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ отрезка $[a,b]$ такое, что $n = 2m$, $t_{2i} = s_i$ для всех $i = 0, 1, \ldots, m$, а точка t_{2i-1} при $i = 1, \ldots, m$ — это произвольная точка интервала $(s_i - \delta_{s_i}, s_{i-1} + \delta_{s_{i-1}})$. Колебание функции x на каждом интервале (t_{i-1}, t_i) не превосходит ε, поэтому действительно имеет место оценка

$$\max_i \sup_{\tau,s\,\in\,(t_{i-1},t_i)} \varrho\,(x(\tau), x(s)) \leqslant \varepsilon.$$

2) $\Longrightarrow$ 3). Разбиение $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ (соответствующее фиксированному значению $\varepsilon > 0$) и произвольные точки $\xi_i \in (t_{i-1}, t_i)$ порождают ступенчатую функцию $y : [a,b] \to \overline{\mathbb{R}}$ такую, что $y(t_i) = x(t_i)$ для всех $i = 0, 1, \ldots, n$ и $y(t) = x(\xi_i)$ при $t \in (t_{i-1}, t_i)$. Следовательно,

$$d\,(x,y) = \sup_{t\,\in\,[a,b]} \varrho\,(x(t), y(t)) = \max_i \sup_{t\,\in\,(t_{i-1},t_i)} \varrho\,(x(t), x(\xi_i)) < \varepsilon\,.$$

3) $\Longrightarrow$ 1). Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Существует ступенчатая функция y такая, что для всех $t \in [a,b]$ справедливо $\varrho\,(x(t), y(t)) < \varepsilon$. Пусть, далее, $t \in [a,b)$, а последовательность $\{t_n\}$ такова, что $t_n \to t+0$. Тогда для любых n и m имеет место цепочка неравенств

$$\begin{aligned}\varrho\,(x(t_n), x(t_m)) &\leqslant \\ &\leqslant \varrho\,(x(t_n), y(t_n)) + \varrho\,(y(t_n), y(t+0)) + \varrho\,(y(t+0), y(t_m)) + \varrho\,(y(t_m), x(t_m)) < \\ &< 2\,\varepsilon + \varrho\,(y(t_n), y(t+0)) + \varrho\,(y(t+0), y(t_m)).\end{aligned}$$

Функция y, будучи ступенчатой, является правильной, следовательно, существует N такое, что при $n > N$ справедливо $\varrho\,(y(t_n), y(t+0)) < \varepsilon$, поэтому для всех $n, m > N$ имеет место неравенство $\varrho\,(x(t_n), x(t_m)) < 4\,\varepsilon$, то есть последовательность $\{x(t_n)\}$ фундаментальна в полном метрическом пространстве $\langle \overline{\mathbb{R}}, \varrho \rangle$ и, следовательно, сходится. Тем самым существует предел $x(t+0)$ (для любого $t \in [a,b)$). Аналогично доказывается существование пределов $x(t-0)$, $t \in (a,b]$.

Эквивалентности 4) $\Longleftrightarrow$ 3) $\Longleftrightarrow$ 5) $\Longleftrightarrow$ 6) очевидны (см. предложение 3).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Родионов В. И. О пространстве регулярно гладких функций // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2011. Вып. 1. С. 87–98. https://doi.org/10.20537/vm110109
2. Шварц Л. Анализ. Т. 1. М.: Мир, 1972. https://zbmath.org/?q=an:0252.00001
3. Дьёдонне Ж. Основы современного анализа. М.: Мир, 1964.
4. Tvrdý M. Regulated functions and the Perron–Stieltjes integral // Časopis pro Pěstování Matematiky. 1989. Vol. 114. Issue 2. P. 187–209. https://doi.org/10.21136/CPM.1989.108713
5. Родионов В. И. Об одном семействе подпространств пространства прерывистых функций // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2009. Вып. 4. С. 7–24. https://doi.org/10.20537/vm090402
6. Hönig Ch. S. Volterra–Stieltjes integral equations. Functional analytic methods, linear constraints. Amsterdam: North-Holland, 1975. https://zbmath.org/?q=an:0307.45002
7. Cichoń M., Cichoń K., Satco B. Measure differential inclusions through selection principles in the space of regulated functions // Mediterranean Journal of Mathematics. 2018. Vol. 15. No. 4. Article number: 148. https://doi.org/10.1007/s00009-018-1192-y
8. Hanung U. M., Tvrdý M. On the relationships between Stieltjes type integrals of Young, Dushnik and Kurzweil // Mathematica Bohemica. 2019. Vol. 144. No. 4. P. 357–372. https://doi.org/10.21136/MB.2019.0015-19
9. Federson M., Mesquita J. G., Slavík A. Basic results for functional differential and dynamic equations involving impulses // Mathematische Nachrichten. 2013. Vol. 286. Nos. 2–3. P. 181–204. https://doi.org/10.1002/mana.201200006
10. Monteiro G. A., Slavík A. Extremal solutions of measure differential equations // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2016. Vol. 444. No. 1. P. 568–597. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2016.06.035
11. Monteiro G. A., Hanung U. M., Tvrdý M. Bounded convergence theorem for abstract Kurzweil–Stieltjes integral // Monatshefte für Mathematik. 2016. Vol. 180. No. 3. P. 409–434. https://doi.org/10.1007/s00605-015-0774-z
12. Родионов В. И. Об одном семействе аналогов интеграла Перрона–Стилтьеса // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2011. Вып. 3. С. 95–106. https://doi.org/10.20537/vm110309
13. Дерр В. Я. О расширении интеграла Римана–Стилтьеса // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2019. Т. 29. Вып. 2. С. 135–152. https://doi.org/10.20537/vm190201
14. Дерр В. Я., Ким И. Г. Пространство правильных функций и дифференциальное уравнение с обобщенными функциями в коэффициентах // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2014. Вып. 1. С. 3–18. https://doi.org/10.20537/vm140101
15. Родионов В. И. Аналог матрицы Коши для системы квазиинтегральных уравнений с постоянными коэффициентами // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2012. Вып. 2. С. 44–62. https://doi.org/10.20537/vm120205
16. Иоффе А. Д., Тихомиров В. М. Расширение вариационных задач // Труды Московского математического общества. 1968. Т. 18. С. 187–246. http://mi.mathnet.ru/mmo209
17. Миллер Б. М., Рубинович Е. Я. Разрывные решения в задачах оптимального управления и их представление с помощью сингулярных пространственно-временных преобразований // Автоматика и телемеханика. 2013. Вып. 12. С. 56–103. http://mi.mathnet.ru/at6171
18. Voitushenko E. S. Weakly nonlinear impulsive problems for degenerate differential systems // Journal of Mathematical Sciences. 2017. Vol. 220. No. 4. P. 394–401. https://doi.org/10.1007/s10958-016-3191-5
19. Maksimov V. P. The structure of the Cauchy operator to a linear continuous-discrete functional differential system with aftereffect and some properties of its components // Вестник Удмуртско-

го университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2019. Т. 29. Вып. 1. С. 40–51. https://doi.org/10.20537/vm190104
20. Максимов В. П. Об одном классе задач оптимального управления для функционально-дифференциальных систем // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2018. Т. 24. № 1. С. 131–142. https://doi.org/10.21538/0134-4889-2018-24-1-131-142
21. Максимов В. П. Непрерывно-дискретные динамические модели // Уфимский математический журнал. 2021. Т. 13. Вып. 3. С. 97–106. http://mi.mathnet.ru/ufa579
22. Шилов Г. Е. Математический анализ. Функции одного переменного. Ч. 1–2. М.: Наука, 1969. http://www.ams.org/mathscinet-getitem?mr=281560
23. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1981. https://mathscinet.ams.org/mathscinet-getitem?mr=630899
24. Рудин У. Функциональный анализ. М.: Мир, 1975. https://mathscinet.ams.org/mathscinet-getitem?mr=458106
25. Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В. Оптимальное управление. М.: Наука, 1979. https://mathscinet.ams.org/mathscinet-getitem?mr=566022

Поступила в редакцию 04.02.2022

Принята к публикации 19.07.2022

Баранов Виктор Николаевич, к. ф.-м. н., доцент, кафедра информатики и математики, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: v.n.baranov@gmail.com

Родионов Виталий Иванович, к. ф.-м. н., зав. кафедрой, кафедра информатики и математики, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: rodionov@uni.udm.ru

Цитирование: В. Н. Баранов, В. И. Родионов. О нелинейных метрических пространствах функций ограниченной вариации // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2022. Т. 32. Вып. 3. С. 341–360.

MATHEMATICS 2022. Vol. 32. Issue 3. Pp. 341–360.

V. N. Baranov, V. I. Rodionov

On nonlinear metric spaces of functions of bounded variation

Keywords: non-linear analysis, non-smooth analysis, bounded variation, one-sided derivative.

MSC2020: 49J52, 26A45

DOI: 10.35634/vm220301

In the first part of the paper, the nonlinear metric space $\langle\overline{\mathrm{G}}^{\infty}[a,b],d\rangle$ is defined and studied. It consists of functions defined on the interval $[a,b]$ and taking the values in the extended numeric axis $\overline{\mathbb{R}}$. For any $x\in\overline{\mathrm{G}}^{\infty}[a,b]$ and $t\in(a,b)$ there are limit numbers $x(t-0),x(t+0)\in\overline{\mathbb{R}}$ (and numbers $x(a+0),x(b-0)\in\overline{\mathbb{R}}$). The completeness of the space is proved. It is the closure of the space of step functions in the metric d. In the second part of the work, the nonlinear space $\mathrm{RL}[a,b]$ is defined and studied. Every piecewise smooth function defined on $[a,b]$ is contained in $\mathrm{RL}[a,b]$. Every function $x\in\mathrm{RL}[a,b]$ has bounded variation. All one-sided derivatives (with values in the metric space $\langle\overline{\mathbb{R}},\varrho\rangle$) are defined for it. The function of left-hand derivatives is continuous on the left, and the function of right-hand derivatives is continuous on the right. Both functions extended to the entire interval $[a,b]$ belong to the space $\overline{\mathrm{G}}^{\infty}[a,b]$. In the final part of the paper, two subspaces of the space $\mathrm{RL}[a,b]$ are defined and studied. In subspaces, promising formulations for the simplest variational problems are stated and discussed.

REFERENCES

1. Rodionov V. I. On the space of regular smooth functions, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2011, issue 1, pp. 87–98 (in Russian). https://doi.org/10.20537/vm110109
2. Schwartz L. *Analyse mathématique. I*, Paris: Hermann, 1967.
3. Dieudonné J. *Foundations of modern analysis*, New York–London: Academic Press, 1960. https://zbmath.org/?q=an:0100.04201
4. Tvrdý M. Regulated functions and the Perron–Stieltjes integral, *Časopis pro Pěstování Matematiky*, 1989, vol. 114, issue 2, pp. 187–209. https://doi.org/10.21136/CPM.1989.108713
5. Rodionov V. I. On family of subspaces of the space of regulated functions, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2009, issue 4, pp. 7–24 (in Russian). https://doi.org/10.20537/vm090402
6. Hönig Ch. S. *Volterra–Stieltjes integral equations. Functional analytic methods, linear constraints*, Amsterdam: North-Holland, 1975. https://zbmath.org/?q=an:0307.45002
7. Cichoń M., Cichoń K., Satco B. Measure differential inclusions through selection principles in the space of regulated functions, *Mediterranean Journal of Mathematics*, 2018, vol. 15, no. 4, article number: 148. https://doi.org/10.1007/s00009-018-1192-y
8. Hanung U. M., Tvrdý M. On the relationships between Stieltjes type integrals of Young, Dushnik and Kurzweil, *Mathematica Bohemica*, 2019, vol. 144, no. 4, pp. 357–372. https://doi.org/10.21136/MB.2019.0015-19
9. Federson M., Mesquita J. G., Slavík A. Basic results for functional differential and dynamic equations involving impulses, *Mathematische Nachrichten*, 2013, vol. 286, nos. 2–3, pp. 181–204. https://doi.org/10.1002/mana.201200006
10. Monteiro G. A., Slavík A. Extremal solutions of measure differential equations, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2016, vol. 444, no. 1, pp. 568–597. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2016.06.035
11. Monteiro G. A., Hanung U. M., Tvrdý M. Bounded convergence theorem for abstract Kurzweil–Stieltjes integral, *Monatshefte für Mathematik*, 2016, vol. 180, no. 3, pp. 409–434. https://doi.org/10.1007/s00605-015-0774-z

12. Rodionov V. I. On a family of analogs of the Perron–Stieltjes integral, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2011, issue 3, pp. 95–106 (in Russian). https://doi.org/10.20537/vm110309
13. Derr V. Ya. On the extension of a Rieman–Stieltjes integral, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2019, vol. 29, issue 2, pp. 135–152 (in Russian). https://doi.org/10.20537/vm190201
14. Derr V. Ya., Kim I. G. The spaces of regulated functions and differential equations with generalized functions in coefficients, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2014, issue 1, pp. 3–18 (in Russian). https://doi.org/10.20537/vm140101
15. Rodionov V. I. Analogue of the Cauchy matrix for system of quasi-integral equations with constant coefficients, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2012, issue 2, pp. 44–62 (in Russian). https://doi.org/10.20537/vm120205
16. Ioffe A. D., Tikhomirov V. M. Extension of variational problems, *Trudy Moskovskogo Matematicheskogo Obshchestva*, 1968, vol. 18, pp. 187–246 (in Russian). http://mi.mathnet.ru/eng/mmo209
17. Miller B. M., Rubinovich E. Ya. Discontinuous solutions in the optimal control problems and their representation by singular space-time transformations, *Automation and Remote Control*, 2013, vol. 74, no. 12, pp. 1969–2006. https://doi.org/10.1134/S0005117913120047
18. Voitushenko E. S. Weakly nonlinear impulsive problems for degenerate differential systems, *Journal of Mathematical Sciences*, 2017, vol. 220, no. 4, pp. 394–401. https://doi.org/10.1007/s10958-016-3191-5
19. Maksimov V. P. The structure of the Cauchy operator to a linear continuous-discrete functional differential system with aftereffect and some properties of its components, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2019, vol. 29, issue 1, pp. 40–51. https://doi.org/10.20537/vm190104
20. Maksimov V. P. On a class of optimal control problems for functional differential systems, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2019, vol. 305, suppl. 1, pp. S114–S124. https://doi.org/10.1134/S0081543819040126
21. Maksimov V. P. Continuous-discrete dynamic models, *Ufa Mathematical Journal*, 2021, vol. 13, no. 3, pp. 95–103. https://doi.org/10.13108/2021-13-3-95
22. Shilov G. E. *Matematicheskii analiz. Funktsii odnogo peremennogo. Chasti 1–2* (Mathematical analysis. Functions of one variable. Parts 1–2), Moscow: Nauka, 1969.
23. Kolmogorov A. N., Fomin S. V. *Elementy teorii funktsii i funktsional'nogo analiza* (Elements of the theory of functions and functional analysis), Moscow: Nauka, 1981.
24. Rudin W. *Functional analysis*, New York: McGraw-Hill, 1973.
25. Alekseev V. M., Tikhomirov V. M., Fomin S. V. *Optimal'noe upravlenie* (Optimal control), Moscow: Nauka, 1979.

Received 04.02.2022

Accepted 19.07.2022

Viktor Nikolaevich Baranov, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Informatics and Mathematics, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
E-mail: v.n.baranov@gmail.com

Vitalii Ivanovich Rodionov, Candidate of Physics and Mathematics, Head of Department, Department of Informatics and Mathematics, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
E-mail: rodionov@uni.udm.ru

Citation: V. N. Baranov, V. I. Rodionov. On nonlinear metric spaces of functions of bounded variation, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2022, vol. 32, issue 3, pp. 341–360.