ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ
МАТЕМАТИКА 2022. Т. 32. Вып. 3. С. 383–402.

УДК 517.958

© *Д. К. Дурдиев, Ж. Ш. Сафаров*

ЗАДАЧА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАМЯТИ СРЕДЫ СО СЛАБО ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ НЕОДНОРОДНОСТЬЮ

В ограниченной по переменной z области, имеющей слабо горизонтальную неоднородность, исследуется задача определения сверточного ядра $k(t,x)$, $t>0$, $x\in\mathbb{R}$, входящего в гиперболическое интегро-дифференциальное уравнение второго порядка. Предполагается, что это ядро слабо зависит от переменной x и разлагается в степенной ряд по степеням малого параметра ε. Построен метод нахождения первых двух коэффициентов $k_0(t)$, $k_1(t)$ этого разложения по заданным первым двум моментам по переменной x решения прямой задачи при $z=0$.

Ключевые слова: интегро-дифференциальное уравнение, обратная задача, дельта-функция Дирака, ядро интеграла, норма.

DOI: 10.35634/vm220303

§ 1. Введение и постановка задачи

Рассмотрим интегро-дифференциальное уравнение

$$u_{tt}=u_{zz}+u_{xx}+\int_0^t k(x,\theta)u(x,z,t-\theta)\,d\theta,\qquad z\in(0,l),\quad (x,t)\in\Omega, \tag{1.1}$$

с начальными

$$u|_{t=0}=0,\qquad u_t|_{t=0}=0, \tag{1.2}$$

и граничными условиями

$$u_z|_{z=0}=\delta(x)\delta'(t),\qquad u_z|_{z=l}=0. \tag{1.3}$$

Здесь $\Omega:=\{(x,t)\colon x\in\mathbb{R},\ t\in(0,\infty)\}$, $\delta(\cdot)$ и $\delta'(\cdot)$ — дельта-функция Дирака и ее производная соответственно, $l>0$ — фиксированное число.

Предметом данной работы является задача определения неизвестного ядра $k(x,t)$ интеграла, входящего в уравнение (1.1), если известно решение начально–краевой задачи (1.1)–(1.3) (прямая задача) при $z=0$:

$$u(x,0,t)=f(x,t),\ (x,t)\in\Omega. \tag{1.4}$$

Задача (1.1)–(1.4) относится к числу многомерных обратных задач для гиперболических уравнений. С современным состоянием теории многомерных обратных задач для таких уравнений можно ознакомиться в работах [1–4] (см. также библиографию в этих монографиях). К настоящему времени наиболее хорошо изученными являются одномерные обратные задачи. Среди одномерных обратных задач восстановления ядер в интегро-дифференциальных уравнениях, использующих как сосредоточенные, так и распределенные данные, отметим работы [5–13]. В них получены локальные и глобальные теоремы разрешимости задач. Численные решения подобных задач можно найти в [14–16].

Существует несколько подходов к решению многомерных обратных задач. В работе [26] разработан метод по исследованию глобальной разрешимости многомерной обратной задачи определения ядра свертки в интегро-дифференциальном уравнении гиперболического типа. Разрешимость получена в классе функций, непрерывных по временной и аналитических по пространственной переменной. Разработанный подход основан на комбинации известных методов исследования — шкал банаховых пространств аналитических функций и норм с экспоненциальным весом. С другими методами определения многомерных коэффициентов гиперболических уравнений второго порядка можно ознакомиться в [17, 18]. В работах [19–22] предложен новый метод, в которых рассматриваются обратные задачи для дифференциальных уравнений, где решение прямой задачи является комплекснозначной функцией, а для отыскания коэффициентов дифференциальных уравнений задается в качестве информации только модуль решения прямой задачи на некоторых специальных множествах, фаза решения считается неизвестной. В [20] дан обзор последних исследований, посвященных бесфазовым обратным задачам для некоторых дифференциальных уравнений.

Одним из подходов к решению многомерных обратных задач также является метод сведения задачи к серии одномерных задач. В работах [23, 24] исследовались задачи нахождения двумерных коэффициентов гиперболических уравнений в предположении, что искомые коэффициенты от одной из переменных зависят слабо. При этом в искомую функцию вводится малый параметр, и он разлагается в степенной ряд по произведению этого параметра с переменной. Коэффициенты разложения (одномерные функции) определяются как решения последовательности одномерных задач. В работах [25–30] такая методика с некоторыми модификациями была применена к обратным задачам нахождения двумерного сверточного ядра интегрального члена некоторых модельных интегро–дифференциальных уравнений и уравнения вязкоупругости. В этих работах пространственную область (где рассматриваются основные уравнения) представляет полуплоскость $z > 0$, $x \in \mathbb{R}$. Данная статья логически продолжает работы [23–30], и в отличии от них обратная задача для уравнения (1.1) исследуется в ограниченной по z области.

Развивая методы решения обратных задач, использованные в вышеупомянутых работах, мы в настоящей статье исследуем задачу восстановления ядра уравнения (1.3), когда задано дополнительное условие (1.4), относительно решения прямой задачи (1.1)–(1.3). При этом предполагается, что ядро $k(x,t)$ слабо зависит от горизонтальной переменной x:

$$k(x,t) = k_0(t) + \varepsilon x k_1(t) + \dots, \tag{1.5}$$

где ε — малый параметр.

Основной результат данной работы состоит в том, что удалось построить метод последовательного нахождения $k_0(t)$ и $k_1(t)$ с точностью до величины порядка $O(\varepsilon^2)$ для $t \in [0,T]$, где $T > 0$ — любое фиксированное число. Для этого, как мы увидим далее (условие (4) является избыточным), достаточно задать первых двух моментов функции $f(x,t)$ по x для $t \in [0,T]$. Задача нахождения $k_0(t)$ сводится к решению системы нелинейных интегральных уравнений вольтерровского типа, а $k_1(t)$ — линейных интегральных уравнений.

§ 2. Предварительные построения

Решение прямой задачи (1.1)–(1.3) будем искать в виде ряда по степеням ε, т. е.

$$u(x,z,t) = u_0(x,z,t) + \varepsilon u_1(x,z,t) + \dots. \tag{2.1}$$

Тогда, учитывая формулу (1.5), нетрудно заметить, что функция $f(x,t)$ будет иметь такую же структуру:

$$f(x,t) = f_0(x,t) + \varepsilon f_1(x,t) + \dots. \tag{2.2}$$

Оказывается, что функции $u_n(x,z,t)$ (а, следовательно, и $f_n(x,t)$) — четные функции по x при четных n и нечетные — при нечетных n. Этот факт можно заметить из нижеприведенных прямых задач: u_n с четным n (нечетным n) — решение задачи с четными (нечетными) по x данными. Ясно, что функция $f(x,t)$ не может быть задана как степенной ряд относительно ε. Однако, используя тот факт, что $f_0(x,t)$ является четной, а $f_1(x,t)$ — нечетной, мы можем найти $f_0(x,t)$ и $f_1(x,t)$ по известной функции $f(x,t)$ с точностью до $O(\varepsilon^2)$.

Используя разложение функции u по формуле (2.1), функции k по формуле (1.5) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, находим, что обратная задача (1.1)–(1.4) распадается на следующие задачи последовательного определения $k_0, k_1, \dots$:

$$u_{0tt} = \Delta u_0 + \int_0^t k_0(\theta) u_0(x,z,t-\theta)\,d\theta, \qquad z \in (0,l), \quad (x,t)\in\Omega; \tag{2.3}$$

$$u_0|_{t=0} = 0, \qquad u_{0t}|_{t=0} = 0; \tag{2.4}$$

$$u_{0z}|_{z=0} = \delta(x)\delta'(t), \qquad u_{0z}|_{z=l} = 0; \tag{2.5}$$

$$u_0|_{z=0} = f_0(x,t), \qquad (x,t)\in\Omega; \tag{2.6}$$

$$u_{ntt} = \Delta u_n + \int_0^t \sum_{j=0}^n x^j k_j(\theta) u_{n-j}(x,z,t-\theta)\,d\theta, \qquad z \in (0,l), \quad (x,t)\in\Omega; \tag{2.7}$$

$$u_n|_{t=0} = 0, \qquad u_{nt}|_{t=0} = 0; \tag{2.8}$$

$$u_{nz}|_{z=0} = 0, \qquad u_{nz}|_{z=l} = 0; \tag{2.9}$$

$$u_n|_{z=0} = f_n(x,t), \qquad (x,t)\in\Omega, \quad n = 1,2,\dots. \tag{2.10}$$

Далее, умножая обе части уравнений (2.3)–(2.10) на x^m и интегрируя по x в пределах от минус бесконечности до плюс бесконечности, получим

$$\begin{gathered} u_{nmtt} - u_{nmzz} = m(m-1)u_{n(m-2)} + \\ + \int_0^t \sum_{j=0}^n k_j(\theta)\left[u_{(n-j)(m+j)}(z,t-\theta)\right]d\theta, \qquad t\in\mathbb{R}, \quad z\in(0,l). \end{gathered} \tag{2.11}$$

В этом уравнении через u_{nm} обозначен m-й момент функции u_n:

$$u_{nm}(z,t) := \int_{-\infty}^{\infty} u_n(x,z,t)x^m\,dx.$$

При получении уравнения (2.11) использован тот факт, что при любом конечном t, каждая функция u_n, $n=0,1,2,\dots$, представляет собой сумму некоторой сингулярной обобщенной функции конечного порядка и регулярной функции, причем носители функций u_n ограничены. Очевидно, что все $u_{n,m}$ удовлетворяют условиям

$$u_{nm}|_{t=0} = 0, \qquad u_{nmt}|_{t=0} = 0, \qquad u_{nmz}|_{z=0} = \delta_{n0}\delta_{m0}\delta'(t), \qquad u_{nmz}|_{z=l} = 0, \tag{2.12}$$

$$u_{nm|_{z=0}} = \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x,t)x^m\,dx =: f_{nm}(t), \qquad n = 0,1,2,\dots, \quad m = 1,2, \tag{2.13}$$

где δ_{n0} — символ Кронекера, $f_{nm}(t)$ — заданные функции.

В следующих параграфах мы исследуем обратные задачи (2.11)–(2.13) при $n=0$ и при $n=1$, в которых через $\widetilde{f}_0(t)$, $\widetilde{f}_1(t)$ обозначены $f_{00}(t)$ и $f_{11}(t)$ соответственно.

§ 3. Задача определения функций k_0, u_{00}

Положим $n = m = 0$. Тогда (2.11)–(2.13) приводится к задаче определения функций k_0 и u_{00} из следующих равенств:

$$u_{00tt} - u_{00zz} = \int_0^t k_0(\theta) u_{00}(z, t-\theta)\, d\theta, \qquad z \in (0, l), \quad t > 0, \tag{3.1}$$

$$u_{00}|_{t=0} = 0, \qquad u_{00t}|_{t=0} = 0, \qquad u_{00z}|_{z=0} = \delta'(t), \qquad u_{00z}|_{z=l} = 0, \tag{3.2}$$

$$u_{00}|_{z=0} = \widetilde{f}_0(t). \tag{3.3}$$

Отметим, что (3.1) и (3.2) — обобщенная начально-краевая задача (прямая задача) для определения $u_{00}(z,t)$ при известной функции $k_0(t)$. В обратной задаче функция $k_0(t)$ предполагается неизвестной, и для ее определения задается дополнительное условие (3.3).

Вначале изучим прямую задачу (3.1)–(3.2), имея в виду, в частности, получение необходимых свойств функции $\widetilde{f}_0(t) = u_{00}(0,t)$. При этом $k_0(t)$ предполагается известной функцией.

Рассмотрим задачу (3.1)–(3.2) в области $D = D_1 \cup D_2$:

$$D_1 = \{(z,t)\colon 0 < z < l,\ 0 < t < z\}, \qquad D_2 = \{(z,t)\colon 0 < z < l,\ z < t < 2l - z\}.$$

Лемма 1. *Пусть $k_0(t) \in C[0,\ \infty)$. Тогда в области D_1*

$$u_{00}(z,t) \equiv 0, \tag{3.4}$$

в области D_2 удовлетворяет $u_{00}(z,t)$ интегральному уравнению

$$\begin{aligned} u_{00}(z,t) = -\delta(t-z) - \int_0^{t-z} \int_0^{\frac{\tau}{2}} \int_0^{\tau - 2\xi} k_0(\theta) u_{00}(\xi, \tau - \xi - \theta)\, d\theta\, d\xi\, d\tau - \\ - \int_{t-z}^{t} \int_{\tau - t + z}^{\frac{2\tau - t + z}{2}} \int_0^{2\tau - t + z - 2\xi} k_0(\theta) u_{00}(\xi, 2\tau - t + z - \xi - \theta)\, d\theta\, d\xi\, d\tau. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В области D_1 волновой оператор представляем в виде

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

и интегрируем равенство (3.1) вдоль характеристики $dz/dt = 1$, от точки $(z-t, 0)$ до точки (z,t); воспользовавшись данными (3.2), получим

$$(u_{00t} - u_{00z})|_{z=l} = \int_0^t \int_0^\tau k_0(\tau - \theta) u_{00}(\tau - t + l, \theta)\, d\theta\, d\tau, \qquad t \in (0, l).$$

С учетом граничного условия при $z = l$, отсюда находим

$$u_{00}(l,t) = \int_0^t \int_0^\tau \int_0^\beta k_0(\tau_1 - \theta) u_{00}(\tau_1 - \tau + l, \theta)\, d\theta\, d\tau_1\, d\tau, \quad t \in (0, l).$$

Произведя замену переменной τ_1 на ξ по формуле $\tau_1 - \tau + l = \xi$ во втором интеграле, перепишем последнее уравнение в виде

$$u_{00}(l,t) = \int_0^t \int_{l-\tau}^{l} \int_0^{\xi + \tau - l} k_0(\xi - l + \tau - \theta) u_{00}(\xi, \theta)\, d\theta\, d\xi\, d\tau. \tag{3.6}$$

Возвращаемся в уравнение (3.1) и интегрируем его сначала по переменной ξ (на плоскости переменных (ξ,τ)) вдоль характеристики $dz/dt = 1$, от точки $(z-t,0)$ до точки (z,t), а потом по переменной τ вдоль характеристики $dz/dt=-1$, от точки (z,t) до точки $(l,t+z-l)$; используя формулу (3.6), находим уравнение для $u(z,t)$ в области D_1:

$$u_{00}(z,t)=\int_0^{z+t-l}\int_{l-\tau}^{l}\int_0^{\xi+\tau-l}k_0(\xi-l+\tau-\theta)u_{00}(\xi,\theta)\,d\theta\,d\xi\,d\tau+$$
$$+\int_{t+z-l}^{t}\int_{x+t-2\tau}^{-\tau+z+l}\int_0^{\xi+2\tau-z-t}k_0(\xi+2\tau-z-t-\theta)u_{00}(\xi,\theta)\,d\theta\,d\xi\,d\tau,\qquad (z,t)\in D_1.$$

Это уравнение является однородным уравнением вольтерровского типа. Отсюда

$$u_{00}(z,t)\equiv 0,\qquad (z,t)\in D_1.$$

Рассмотрим область

$$D_2:=\{(z,t)\colon 0<z<l,\ z<t<2l-z\}.$$

Интегрируя (3.1) вдоль соответствующей характеристики, находим

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial z}\right)u_{00}|_{z=0}=-\int_0^{\frac{t}{2}}\int_0^{t-2\xi}k_0(\theta)u_{00}(\xi,t-\xi-\theta)\,d\theta\,d\xi,\qquad t\in(0,2l).$$

В сочетании с граничным условием при $z=0$ это равенство позволяет вычислить $u(z,t)$ при $z=0$:

$$u_{00}(0,t)=-\delta(t)-\int_0^{t}\int_0^{\frac{\tau}{2}}\int_0^{\tau-2\xi}k_0(\theta)u_{00}(\xi,\tau-\xi-\theta)\,d\theta\,d\xi\,d\tau,\qquad t\in(0,2l).$$

Используя последнее равенство, условия (3.2), интегрируем уравнение (3.1) последовательно по характеристикам $dz/dt=-1$ и $dz/dt=1$. Тогда приходим к интегральному уравнению (3.5). Лемма 1 доказана. □

Введем в рассмотрение новую функцию $\widetilde{u}(z,t)$, определив ее равенством $\widetilde{u}(z,t)= u_{00}(z,t)+\delta(t-z)$. Уравнение (3.5) относительно новой функции записывается следующим образом:

$$\widetilde{u}(z,t)=\int_0^{t-z}\int_0^{\frac{\tau}{2}}\left[k_0(\tau-2\xi)-\int_0^{\tau-2\xi}k_0(\theta)\widetilde{u}(\xi,\tau-\xi-\theta)\,d\theta\right]d\xi\,d\tau+$$
$$+\int_{t-z}^{t}\int_{\tau-t+z}^{\frac{2\tau-t+z}{2}}\left[k_0(2\tau-t+z-2\xi)-\int_0^{2\tau-t+z-2\xi}k_0(\theta)\widetilde{u}(\xi,2\tau-t+z-\xi-\theta)\,d\theta\right]d\xi\,d\tau. \tag{3.7}$$

Для разрешимости обратной задачи функция $f_0(t)$ должна иметь структуру $\widetilde{f}_0(t)= -\delta(t)+H(t)\widetilde{f}(t)$, где $H(t)$ — функция Хевисайда, $\widetilde{f}(t)$ — известная регулярная функция. Перепишем дополнительное условие (3.3) относительно функции $\widetilde{u}(z,t)$:

$$\widetilde{u}(z,t)|_{z=0}=\widetilde{f}(t),\qquad t>0.$$

Полагая в уравнении (3.7) $z=0$, получим

$$\widetilde{f}(t)=\int_0^{t}\int_0^{\tau}k_0(\xi)\,d\xi\,d\tau-\int_0^{t}\int_0^{\frac{\tau}{2}}\int_0^{\tau-2\xi}k_0(\theta)\widetilde{u}(\xi,-\xi+\tau-\theta)\,d\theta\,d\xi\,d\tau. \tag{3.8}$$

Следовательно, $\widetilde{f}(+0) = 0$. Дифференцируя по t уравнение (3.8), имеем

$$\widetilde{f}'(t) = \int_0^t k_0(\xi)\,d\xi - \int_0^{\frac{t}{2}} \int_0^{t-2\xi} k_0(\theta)\widetilde{u}(\xi, -\xi + t - \theta)\,d\theta\,d\xi. \tag{3.9}$$

Отсюда следует, что $\widetilde{f}'(+0) = 0$. Дифференцируя уравнение (3.9) еще раз по t и разрешая полученное уравнение относительно $k_0(t)$, находим

$$k_0(t) = 2\widetilde{f}''(t) + 2\int_0^{\frac{t}{2}} \int_0^{t-2\xi} k_0(\theta)\widetilde{u}_t(\xi, -\xi + t - \theta)\,d\theta\,d\xi. \tag{3.10}$$

Для получения уравнения относительно функции $\widetilde{u}_t$ продифференцируем уравнение (3.7) по переменной t. При этом предварительно сделаем замену переменных сначала во внешнем интеграле второго слагаемого τ на β по формуле $t - \tau = \beta$, а потом во внутреннем интеграле того же слагаемого ξ на η по формуле $2\tau - t + z - 2\xi = \eta$. В итоге получим

$$\begin{aligned} \widetilde{u}_t(z,t) = \frac{z}{2}k_0(t-z) + \int_0^{\frac{t-z}{2}} k_0(t-z-2\xi)\,d\xi - \\ - \int_0^{\frac{t-z}{2}} \int_0^{t-z-2\xi} k_0(\theta)\widetilde{u}(\xi, t-z-\xi-\theta)\,d\theta\,d\xi - \\ - \frac{1}{2}\int_0^z \int_0^{t-z} k_0(\theta)\widetilde{u}(z-\tau, t-\tau-\theta)\,d\theta\,d\tau - \\ - \frac{1}{4}\int_0^z \int_0^{t-z} \int_0^{\xi} k(\theta)\widetilde{u}_t\left(\frac{t-2\tau+z-\xi}{2}, \frac{t-2\tau+z+\xi}{2} - \theta\right)d\theta\,d\xi\,d\tau. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Теорема 1. *Пусть выполнены условия*

$$\widetilde{f}(t) \in C^2(0,l), \qquad \widetilde{f}(+0) = 0, \qquad \widetilde{f}'(+0) = 0.$$

Тогда для любого фиксированного $l > 0$ *существует единственное решение обратной задачи* (3.1)–(3.3) *и* $k_0(t) \in C(0, 2l)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что уравнения (3.7), (3.10), (3.11) составляют замкнутую систему нелинейных интегральных уравнений. Представим эту систему в виде операторного уравнения

$$Ag = g, \tag{3.12}$$

где $g = \{g_1, g_2, g_3\} = \{\widetilde{u}(z,t), \widetilde{u}_t(z,t) - \frac{1}{2}k_0(t-z)z, k_0(t)\}$ и

$$\begin{aligned} A_1 g = g_{01} + \int_0^{t-z}\int_0^{\frac{\tau}{2}} \left[g_3(\tau-2\xi) - \int_0^{\tau-2\xi} g_3(\theta)g_1(\xi, \tau-\xi-\theta)\,d\theta\right]d\xi\,d\tau + \\ + \int_{t-z}^{t}\int_{\tau-t+z}^{\frac{2\tau-t+z}{2}} \left[g_3(2\tau-t+z-2\xi) - \int_0^{2\tau-t+z-2\xi} g_3(\theta)g_1(\xi, 2\tau-t+z-\xi-\theta)\,d\theta\right]d\xi\,d\tau, \end{aligned} \tag{3.13}$$

$$\begin{aligned} A_2 g = g_{02} + \int_0^{\frac{t-z}{2}} g_3(t-z-2\xi)\,d\xi - \int_0^{\frac{t-z}{2}}\int_0^{t-z-2\xi} g_3(\theta)g_1(\xi, t-z-\xi-\theta)\,d\theta\,d\xi - \\ - \frac{1}{2}\int_0^z\int_0^{t-z} g_3(\theta)g_1(x-\tau, t-\tau-\theta)\,d\theta\,d\tau - \\ - \frac{1}{4}\int_0^z\int_0^{t-z}\int_0^{\xi} g_3(\theta)\left(g_2\left(\frac{t-2\tau+z-\xi}{2}, \frac{t-2\tau+z+\xi}{2} - \theta\right) + g_3(\xi-\theta)\xi\right)d\theta\,d\xi\,d\tau, \end{aligned} \tag{3.14}$$

$$A_3 g = g_{03} + \int_0^{\frac{t}{2}}\int_0^{t-2\xi} g_3(\theta)\left[g_2(\xi, -\xi+t-\theta) + \frac{1}{2}g_3(-2\xi+t-\theta)\xi\right]d\theta\,d\xi. \tag{3.15}$$

Пусть $g_0(z,t) = (g_{01}, g_{02}, g_{03})$, где $g_{01} = 0$, $g_{02} = 0$, $g_{03} = 2\widetilde{f}''(t)$. Обозначим через C_σ банахово пространство непрерывных функций, порожденных семейством весовых норм

$$||g||_\sigma = \max\left\{ \sup_{(z,t)\in D_2} |g_i(z,t)e^{-\sigma t}|,\ i=1,2, \quad \sup_{t\in[0,2l]} |g_3(t)e^{-\sigma t}| \right\}, \qquad \sigma \geqslant 0.$$

Очевидно, что при $\sigma = 0$ это пространство является пространством непрерывных функций с обычной нормой. Эту норму будем обозначать далее $\|g\|$. В силу неравенства

$$e^{-\sigma t}\|g\| \leqslant \|g\|_\sigma \leqslant \|g\|,$$

нормы $\|g\|_\sigma$ и $\|g\|$ эквивалентны для любого фиксированного $l \in (0,\infty)$. Число σ будем выбирать позже. Пусть $Q_\sigma(g_0, \|g_0\|) := \{g\colon \|g - g_0\| \leqslant \|g_0\|\}$ — шар радиуса $\|g_0\|$ с центром в точке g_0 некоторого весового пространства $C_\sigma(\sigma \geqslant 0)$, в котором

$$\|g_0\| = \max\left(\|g_{01}\|, \|g_{02}\|, \|g_{03}\|\right).$$

Нетрудно заметить, что для $Q_\sigma(g_0, \|g_0\|)$ имеет место оценка

$$\|g\|_\sigma \leqslant \|g_0\|_\sigma + \|g_0\| \leqslant 2\|g_0\|.$$

Пусть $g(z,t) \in Q_\sigma(g_0, \|g_0\|)$. Покажем, что при подходящем выборе $\sigma > 0$ оператор A переводит шар в шар, т. е. $A \in Q_\sigma(g_0, \|g_0\|)$. Напомним, что оператор называется сжимающим на множестве $B(g_0)$, если выполнены следующие два условия:

(1) если $g \in B(g_0)$, то $Ag \in B(g_0)$;

(2) если g^1, g^2 — произвольные элементы $B(g_0)$, то $||Ag^1 - Ag^2||_T \leqslant \rho||g^1 - g^2||_T$, где $\rho < 1$.

Проверим выполнение первого из этих условий. Из формул (3.13)–(3.15) следует, что для $(z,t) \in D_2$ имеют место оценки

$$\|A_1 g - g_{01}\| = \sup_{(x,t)\in D_2} \left|(A_1 g - g_{01})e^{-\sigma t}\right| =$$

$$= \sup_{(x,t)\in D_2} \left| \int_0^{t-x} \int_0^{\frac{\tau}{2}} g_3(\tau - 2\xi) e^{-\sigma(\tau-2\xi)} e^{-\sigma(t-\tau+2\xi)}\, d\xi\, d\tau - \right.$$

$$- \int_0^{t-x} \int_0^{\frac{\tau}{2}} \int_0^{\tau-2\xi} g_3(\theta) e^{-\sigma\theta} g_1(\xi, \tau-\xi-\theta) e^{-\sigma(\tau-\theta)} e^{-\sigma(\xi+t-\tau)}\, d\theta\, d\xi\, d\tau +$$

$$+ \int_{t-x}^{t} \int_{\tau-t+x}^{\frac{2\tau-t+x}{2}} g_3(2\tau - t + x - 2\xi) e^{-\sigma(2\tau-t+x-2\xi)} e^{-\sigma(2t-2\tau+\xi-x)}\, d\xi\, d\tau -$$

$$\left. - \int_{t-x}^{t} \int_{\tau-t+x}^{\frac{2\tau-t+x}{2}} \int_0^{-2\xi+2\tau-t+x} g_3(\theta) e^{-\sigma\theta} g_1(\xi, -\xi+2\tau-t+x-\theta) e^{-\sigma(x+2\tau-t-\theta)} e^{-\sigma(2t-2\tau-x)}\, d\theta\, d\xi\, d\tau \right| \leqslant$$

$$\leqslant 3l\left[1 + 8l\|g_0\|\right] \frac{\|g_0\|}{\sigma} =: \frac{\|g_0\|}{\sigma}\alpha_1,$$

$$\|A_2 g - g_{02}\| = \sup_{(x,t)\in D_2} \left|(A_2 g - g_{02})e^{-\sigma t}\right| \leqslant \left[\|g_0 l(12 + l + l^2) + 2\right] \frac{\|g_0\|}{\sigma} := \frac{\|g_0\|}{\sigma}\alpha_2,$$

$$\|A_3 g - g_{03}\| = \sup_{t\in[0,2l]} \left|(A_3 g - g_{03})e^{-\sigma t}\right| \leqslant 4\|g_0\| l(2 + l) \frac{\|g_0\|}{\sigma} := \frac{\|g_0\|}{\sigma}\alpha_3.$$

Выбирая

$$\sigma \geqslant \alpha_0 := \max(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \tag{3.16}$$

получим, что A переводит шар $Q_\sigma(g_0, \|g_0\|)$ в шар $Q_\sigma(g_0, \|g_0\|)$.

Теперь проверим выполнение второго условия. Пусть $g^k := (g_1^k, g_2^k, g_3^k)$ и $g^k \in B(g_0)$, $k = 1, 2$. Используя очевидные неравенства

$$|g_k^1 g_s^1 - g_k^2 g_s^2| e^{-\sigma t} \leqslant |g_k^1 - g_k^2||g_s^1| e^{-\sigma t} + |g_k^2||g_s^1 - g_s^2| e^{-\sigma t},$$

получим

$$\|(Ag^1 - Ag^2)_1\|_\sigma = \sup_{(z,t)\in D_2} \left|(Ag^1 - Ag^2)_1 e^{-\sigma t}\right| \leqslant \frac{3}{2} l \big[1 + 16 l \|g_0\|\big] \frac{\|g^1 - g^2\|_\sigma}{\sigma} =: \beta_1 \frac{\|g^1 - g^2\|_\sigma}{\sigma},$$

$$\|(Ag^1 - Ag^2)_2\|_\sigma = \sup_{(x,t)\in D_2} |(Ag^1 - Ag^2)_2 e^{-\sigma t}| \leqslant$$

$$\leqslant \Big[\|g_0\| l (12 + l + l^2) + 1\Big] \frac{\|g^1 - g^2\|_\sigma}{\sigma} =: \beta_2 \frac{\|g^1 - g^2\|_\sigma}{\sigma},$$

$$\|(Ag^1 - Ag^2)_3\|_\sigma = \sup_{t\in[0,2l]} \left|(Ag^1 - Ag^2)_3 e^{-\sigma t}\right| \leqslant 4\|g_0\| l (2 + l) \frac{\|g^1 - g^2\|_\sigma}{\sigma} =: \beta_3 \frac{\|g^1 - g^2\|_\sigma}{\sigma}.$$

Следовательно, $\|Ag^1 - Ag^2\| \leqslant \rho \|g^1 - g^2\|$, где $\rho < 1$, если $l > 0$ удовлетворяет условию

$$\max_i \beta_i \leqslant \rho < 1, \quad i = 1, 2, 3. \tag{3.17}$$

Пусть $\beta_0 := \max(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$.

Как следует из проделанных оценок (3.16), (3.17), если число σ выбрано из условия $\sigma > \max(\alpha_0, \beta_0)$, то оператор A является сжимающим на $Q_\sigma(g_0, \|g_0\|)$. Тогда, согласно принципу Банаха [26], уравнение (3.12) имеет решение, и притом единственное, в $Q_\sigma(g_0, \|g_0\|)$ при любом фиксированном $l > 0$. Теорема доказана. □

Сделаем следующее важное утверждение с точки зрения дальнейших исследований.

Лемма 2. *Пусть $\widetilde{f}(t) \in C^3(0, l)$, $\widetilde{f}(+0) = 0$, $\widetilde{f}'(+0) = 0$. Тогда для любого фиксированного $l > 0$ существует единственное решение обратной задачи* (3.1)–(3.3)*, такое, что $k_0(t) \in C^1(0, 2l)$, $\widetilde{u}(z, t) \in C^2(D_2)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что в уравнениях (3.7), (3.10), (3.11) для определения неизвестных функций $\widetilde{u}$, k_0, $\widetilde{u}_t$ входит заданная функция $\widetilde{f}(t) \in C^2(0, 2l)$. Предполагая, что $\widetilde{f}(t) \in C^3(0, 2l)$, мы можем из этих уравнений (дифференцированием) получить интегральные уравнения для функций k_{0t}, $\widetilde{u}_{tt}$, $\widetilde{u}_{tz}$, $\widetilde{u}_{zz}$. Далее, рассматривая эти интегральные уравнения в совокупности с (3.7), (3.10), (3.11) и применяя к этой системе метод, использованный в доказательстве теоремы 1, доказывается существование и единственность решения $k_0(t) \in C^1(0, 2l)$, $\widetilde{u}(z, t) \in C^2(D_2)$. □

Этим фактом мы воспользуемся в следующем параграфе.

§ 4. Задача определения функций k_1, u_{11}

В дальнейшем, функции k_0 и u_{00} будем считать известными. Заметим, что неизвестная функция $k_1(t)$ в уравнение (2.6) входит для $n = m = 1$. В целом, учитывая дополнительное условие (2.13) при $n = 1$ и прямую задачу (2.11) и (2.12) при $n = m = 1$, сформулируем основную задачу этого раздела как задачу определения пару функций $u_{11}(z,t)$, $k_1(t)$ из следующих равенств:

$$u_{11tt} - u_{11zz} = \int_0^t \left\{k_0(t-\theta)u_{11}(z,\theta) + k_1(t-\theta)u_{02}(z,\theta)\right\} d\theta, \qquad z \in (0,l), \quad t > 0 \tag{4.1}$$

$$, u_{11}|_{t=0} = 0, \qquad u_{11t}|_{t=0} = 0, \qquad u_{11z}|_{z=0} = 0, \qquad u_{11z}|_{z=l} = 0. \tag{4.2}$$

$$u_{11}\Big|_{z=0} = \widetilde{f}_1(t). \tag{4.3}$$

Относительно решения этой задачи справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия леммы 2, кроме того,* $\widetilde{f}_1(t) \in C^{IV}[0,2l]$ *и* $\widetilde{f}_1(0) = \widetilde{f}_1'(0) = \widetilde{f}_1''(0) = \widetilde{f}_1'''(0) = 0$. *Тогда для любого фиксированного* $l > 0$ *обратная задача* (4.1)–(4.3) *имеет единственное решение* $k_1(t) \in C[0,2l]$, $u_{11}(z,t) \in C^2(D_2)$.

Доказательство. В уравнение (4.1) входит функция u_{02}, которая, как следует из (2.11) и (2.12), при $n = 0$, $m = 2$ является решением следующей начально-краевой задачи:

$$u_{02tt} - v_{02zz} = 2u_{00}(z,t) + 2\int_0^t k_0(t-\theta)u_{02}(z,\theta)\, d\theta, \qquad z \in (0,l), \quad t > 0, \tag{4.4}$$

$$u_{02}|_{t=0} = 0, \qquad u_{02t}|_{t=0} = 0, \qquad u_{02z}|_{z=0} = 0, \qquad u_{02z}|_{z=l} = 0. \tag{4.5}$$

Имеет место следующая лемма.

Лемма 3. *Пусть* $k_0(t) \in C[0,2l)$. *Тогда в области* D_1:

$$u_{02}(z,t) \equiv 0; \tag{4.6}$$

в области D_2 *функция* u_{02} *удовлетворяет интегральному уравнению*

$$u_{02}(z,t) = t - 2z - 2\int_0^{t-z}\int_0^{\frac{\tau}{2}} \left[\widetilde{u}(\xi,\tau-\xi) + \int_0^{\tau-2\xi} k_0(\theta)u_{02}(\xi,\tau-\xi-\theta)\, d\theta\right] d\xi\, d\tau +$$
$$+ 2\int_0^z \int_{\frac{2\xi+t-z}{2}}^{\xi+t-z} \left[\widetilde{u}(2\xi-z+t-\eta,\eta) + \int_0^{2\eta-t+z-2\xi} k_0(\theta)u_{02}(2\xi+t-z-\eta,\eta-\theta)\, d\theta\right] d\eta\, d\xi. \tag{4.7}$$

Доказательство. В уравнение (4.4) входит функция u_{00}, определяемая формулой

$$u_{00} = \widetilde{u}(z,t) - \delta(t-z), \tag{4.8}$$

и носитель $\delta(t-z)$ не пересекается с характеристическим треугольником лежащим в D_0, данные Коши также равны нулю в этой области. Следовательно, в D_0 $u_{02}(z,t) \equiv 0$. В третьем параграфе было доказано,что $\widetilde{u}(z,t) \equiv 0$ для всех $(z,t) \in D_1 \backslash D_0$. Таким образом, в области $D_1 \backslash D_0$ уравнение превращается в однородное уравнение. Так как начальные и граничные условия при $z = l$ равны нулю, то $u_{02} \equiv 0$ в области $D_1 \backslash D_0$.

В области D_2 воспользуемся следующим разложением волнового оператора: $\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2}{\partial z^2} = \left(\dfrac{\partial}{\partial t} - \dfrac{\partial}{\partial z}\right)\left(\dfrac{\partial}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial z}\right)$ и введем обозначение

$$w(z,t) := \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}\right) u_{02}(z,t). \tag{4.9}$$

Перепишем уравнение (4.4) с учетом (4.8) и (4.9):

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial z}\right)w(z,t)=-2\delta(t-z)+2\widetilde{u}(z,t)+2\int_0^t k_0(t-\theta)u_{02}(z,\theta)\,d\theta,\quad z\in(0,l),\quad t>0. \tag{4.10}$$

Возьмем произвольную точку $(z,t)\in D_2$ и проинтегрируем уравнение (4.10) по переменной t вдоль характеристики $dz/dt=-1$:

$$w(z,t)-w(z+t,0)=-2\int_0^t \delta(2\tau-t-z)\,d\tau+$$
$$+2\int_0^t\left[\widetilde{u}(z+t-\tau,\tau)+\int_0^{2\tau-z-t}k_0(\theta)u_{02}(z+t-\tau,\tau-\theta)\,d\theta\right]d\tau.$$

С учетом начальных условий (4.5), $w(z+t,0)=0$, а $\int_0^t\delta(2\tau-t-z)d\tau=1$. Следовательно,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial z}\right)u_{02}(z,t)=-1+2\int_{\frac{z+t}{2}}^t\left[\widetilde{u}(z+t-\tau,\tau)+\int_0^{2\tau-z-t}k_0(\theta)u_{02}(z+t-\tau,\tau-\theta)\,d\theta\right]d\tau.$$

Интегрируя полученное уравнение по переменной z, от точки $(0,t-z)$ до точки (z,t) вдоль характеристики $dz/dt=1$, получим

$$\begin{aligned}u_{02}(z,t)=u_{02}(0,t-z)-z+2\int\limits_0^z\int_{\frac{2\xi-z+t}{2}}^{\xi+t-z}\Big[\widetilde{u}(2\xi-z+t-\eta,\eta)+\\+\int_0^{2\eta-2\xi+z-t}k_0(\theta)u_{02}(2\xi-z+t-\eta,\eta-\theta)\,d\theta\Big]\,d\eta\,d\xi.\end{aligned} \tag{4.11}$$

Далее, для определения $u_{02}(0,t-z)$ проинтегрируем уравнение (4.10) по переменной z, от точки $(0,t+z)$ до точки $(t+z,0)$, вдоль характеристики $dz/dt=-1$; с учетом условий (4.5) имеем:

$$\frac{\partial}{\partial t}u_{02}(0,t+z)=1-2\int_0^{\frac{z+t}{2}}\left[\widetilde{u}(\xi,z+t-\xi)+\int_0^{t-z-2\xi}k_0(\theta)u_{02}(\xi,z+t-\xi-\theta)\,d\theta\right]d\xi.$$

Переходя к пределу при $z\to 0$ и интегрируя по t полученное уравнение, находим

$$u_{02}(0,t)=t-2\int_0^t\int_0^{\frac{\tau}{2}}\left[\widetilde{u}(\xi,\tau-\xi)+\int_0^{\tau-2\xi}k_0(\theta)u_{02}(\xi,\tau-\xi-\theta)\,d\theta\right]d\xi\,d\tau,\qquad t\in(0,2l). \tag{4.12}$$

Подставляя (4.12) в (4.11), получим уравнение (4.7). Лемма 3 доказана. □

Следствие 1. *Решение задачи* (4.1), (4.2) *удовлетворяет условию* $u_{11}(z,t)=0$ *для всех* $(z,t)\in D_1$.

В силу $u_{02}(z,t)=0$ для $(z,t)\in D_1$, уравнение (4.1) в области D_1 превращается в однородное уравнение. Тогда ясно, что такое уравнение с нулевыми начальными и граничными данными (4.2) имеет только нулевое решение. Таким образом, основная задача (4.1)–(4.3) в области D_2 сводится к задаче нахождения функций $u_{11}(z,t)$, $k_1(t)$ из следующих уравнений:

$$u_{11tt}-u_{11zz}=\int_0^{t-z}\left\{k_0(\theta)u_{11}(z,t-\theta)+k_1(\theta)u_{02}(z,t-\theta)\right\}d\theta,\qquad (z,t)\in D_2, \tag{4.13}$$

$$u_{11}\Big|_{z=0}=\widetilde{f}_1(t),\qquad u_{11z}|_{z=0}=0, \tag{4.14}$$

$$u_{11}|_{t=z+0}=0. \tag{4.15}$$

Лемма 4. *Пусть* $\widetilde{f}(t) \in C^3(0,2l)$ *и* $\widetilde{f}(+0) = \widetilde{f}'(+0) = 0$. *Тогда* $u_{02}(z,t) \in C^3\left(D_2\right)$.

Для доказательства этой леммы заметим, что уравнение (4.7) в области D_2 является линейным интегральным уравнением второго рода вольтеровского типа относительно u_{02}. Согласно лемме 3 для $\widetilde{f}(t) \in C^3(0,2l)$ имеем включения $k_0(t) \in C^1(0,2l)$, $\widetilde{u}(z,t) \in C^2\left(D_2\right)$. В силу этого интегральное уравнение (4.7) в D_2 имеет трижды непрерывно-дифференцируемый свободный член и непрерывно-дифференцируемое ядро. Тогда, как следует из теории линейных дифференциальных уравнений, это уравнение имеет единственное решение такое, что $u_{02}(z,t) \in C^3\left(D_2\right)$. Лемма 4 доказана. □

Нетрудно заметить, что из (4.7) следует соотношение

$$u_{02}(z,t)\mid_{t=z+0}= -z. \tag{4.16}$$

Обратимся теперь к задаче (4.13), (4.14) для определения функции $u_{11}(z,t)$. Используя формулу Даламбера, получим

$$\begin{aligned} u_{11} &= \frac{1}{2}[\widetilde{f}_1(t+z) + \widetilde{f}_1(t-z)] + \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^z \int_{t-z+\xi}^{t+z-\xi} \int_0^{\tau-\xi} \big\{k_0(\alpha)u_{11}(\xi,\tau-\alpha) + k_1(\alpha)u_{02}(\xi,\tau-\alpha)\big\}\, d\alpha\, d\tau\, d\xi. \end{aligned} \tag{4.17}$$

Переходим в этом уравнении к пределу при $t \to z+0$, и учитывая условие (4.15) и $\widetilde{f}_1(0) = 0$, находим

$$\widetilde{f}_1(2z) = -\int_0^z \int_{\xi}^{2z-\xi} \int_0^{\tau-\xi} \big\{k_0(\theta)u_{11}(\xi,\tau-\theta) + k_1(\theta)u_{02}(\xi,\tau-\theta)\big\}\, d\theta\, d\tau\, d\xi.$$

Введем обозначение $t = 2z$ и продифференцируем последнее уравнение по t:

$$\widetilde{f}_1'(t) = -\int_0^{\frac{t}{2}} \int_0^{t-2\xi} \big\{k_0(\theta)u_{11}(\xi,t-\xi-\theta) + k_1(\theta)u_{02}(\xi,t-\xi-\theta)\big\}\, d\theta d\xi. \tag{4.18}$$

Отсюда следует, что

$$\widetilde{f}_1'(+0) = 0.$$

Продифференцировав еще (4.18) по t, с учетом условий (4.15), (4.16) получим

$$\widetilde{f}_1''(t) = \int_0^{\frac{t}{2}} \xi k_1(t-2\xi)\, d\xi - \int_0^{\frac{t}{2}} \int_0^{t-2\xi} \big\{k_0(\theta)u_{11t}(\xi,t-\xi-\theta) + k_1(\theta)u_{02t}(\xi,t-\xi-\theta)\big\} d\theta\, d\xi.$$

Сделаем замену переменных по формуле $\alpha = t-2\xi$ в первом интеграле этого уравнения и продифференцируем его еще раз по t:

$$\begin{aligned} f_1'''(t) = \frac{1}{4}\int_0^t k_1(\alpha)\, d\alpha - \int_0^{\frac{t}{2}} \big\{k_0(t-2\xi)u_{11t}(\xi,\xi) + k_1(t-2\xi)u_{02t}(\xi,\xi)\big\}\, d\xi - \\ - \int_0^{\frac{t}{2}} \int_0^{t-2\xi} \big\{k_0(\theta)u_{11tt}(\xi,t-\xi-\theta) + k_1(\theta)u_{02tt}(\xi,t-\xi-\theta)\big\}\, d\theta\, d\xi. \end{aligned}$$

Дифференцируя последнее равенство по t и решая его относительно $k_1(t)$, находим искомое уравнение:

$$k_1(t) = 4\widetilde{f}_1^{(IV)}(t) + 4\int_0^{\frac{t}{2}} k_0'(t-2\xi)u_{11t}(\xi,\xi)d\xi + 4\int_0^{\frac{t}{2}}\int_\xi^{t-\xi} k_0'(t-\xi-\theta)u_{11tt}(\xi,\theta)\,d\theta\,d\xi +$$
$$+ 4\int_0^{\frac{t}{2}}\int_0^{t-2\xi} k_1(\theta)u_{02ttt}(\xi,t-\xi-\theta)\,d\theta\,d\xi. \qquad (4.19)$$

В промежуточных вычислениях было использовано равенство (4.16), а также соотношения $\widetilde{u}|_{t=z} = 0$, $\widetilde{u}_t|_{t=z} = 0$, $u_{02t}|_{t=z} = 1$, $u_{02tt}|_{t=z} = 0$, вытекающие из уравнений (3.7) и (4.7).

Для получения уравнения относительно функций $u_{11t}(z,t)$ и $u_{11tt}(z,t)$, продифференцируем уравнение (4.17) два раз по t:

$$u_{11t} = \frac{1}{2}[\widetilde{f}_1'(t+z) + \widetilde{f}_1'(t-z)] +$$
$$+ \frac{1}{2}\int_0^z \Bigg[\int_0^{t+z-2\xi} \big\{k_0(\theta)u_{11}(\xi,t+z-\xi-\theta) + k_1(\theta)u_{02}(\xi,t+z-\xi-\theta)\big\}\,d\theta -$$
$$- \int_0^{t-z} \big\{k_0(\theta)u_{11}(\xi,t-z+\xi-\theta) + k_1(\theta)u_{02}(\xi,t-z+\xi-\theta)\big\}\,d\theta\Bigg]\,d\xi, \qquad (4.20)$$

$$u_{11tt} = \frac{1}{2}[\widetilde{f}_1''(t+z) + \widetilde{f}_1''(t-z)] + \frac{1}{2}\int_0^z \Bigg[k_1(t+z-2\xi)\xi +$$
$$+ \int_0^{t+z-2\xi} \big\{k_0(\alpha)u_{11t}(\xi,t+z-\xi-\theta) + k_1(\theta)u_{02t}(\xi,t+z-\xi-\theta)\big\}d\theta + k_1(t-z)\xi -$$
$$- \int_0^{t-z} \big\{k_0(\theta)u_{11t}(\xi,t-z+\xi-\theta) + k_1(\theta)u_{02t}(\xi,t-z+\xi-\theta)\big\}\,d\theta\Bigg]\,d\xi. \qquad (4.21)$$

Система уравнений (4.17), (4.19)–(4.21) образует в области D_2 замкнутую систему линейных интегральных уравнений относительно неизвестных u_{11}, $k_1(t)$, u_{11t}, u_{11tt}. Согласно лемме 3 эта система обладает непрерывным свободным членом и ядром.

Запишем (4.17), (4.19)–(4.21) в виде операторного уравнения

$$\varphi = F\varphi, \qquad (4.22)$$

где $\varphi = [\varphi_1(z,t), \varphi_2(z,t), \varphi_3(z,t), \varphi_4(t)] = [u_{11}(z,t), u_{11t}(z,t), u_{11tt}(z,t), k_1(t)]$ — вектор-ная функция с компонентами φ_i, $i = \overline{1,4}$, а оператор F определен на множестве функций $\varphi \in C[D_2]$ и в соответствии с равенствами (4.17), (4.19)–(4.21) имеет вид $F = (F_1, F_2, F_3, F_4)$:

$$F_1\varphi = \varphi_{01} + \frac{1}{2}\int_0^z \int_{t-z+\xi}^{t+z-\xi}\int_0^{\tau-\xi} \big\{k_0(\theta)\varphi_1(\xi,\tau-\theta) + \varphi_4(\theta)u_{02}(\xi,\tau-\theta)\big\}\,d\theta\,d\tau\,d\xi, \qquad (4.23)$$

$$F_2\varphi = \varphi_{02} + \frac{1}{2}\int_0^z \Bigg[\int_0^{t+z-2\xi} \big\{k_0(\theta)\varphi_1(\xi,t+z-\xi-\theta) + \varphi_4(\theta)u_{02}(\xi,t+z-\xi-\theta)\big\}\,d\theta -$$
$$- \int_0^{t-z} \big\{k_0(\theta)\varphi_1(\xi,t-z+\xi-\theta) + \varphi_4(\theta)u_{02}(\xi,t-z+\xi-\theta)\big\}\,d\theta\Bigg]\,d\xi, \qquad (4.24)$$

$$F_3\varphi = \varphi_{03} + \frac{1}{2}\int_0^z \Bigg[\varphi_4(t+z-2\xi)\xi +$$

$$+ \int\limits_0^{t+z-2\xi} \left\{k_0(\theta)\varphi_2(\xi, t+z-\xi-\theta) + \varphi_4(\theta)u_{02t}(\xi, t+z-\xi-\theta)\right\} d\theta - \tag{4.25}$$

$$- \int_0^{t-z} \left\{k_0(\theta)\varphi_2(\xi, t-z+\xi-\theta) + \varphi_4(\theta)u_{02t}(\xi, t-z+\xi-\theta)\right\} d\theta\Bigg]\, d\xi,$$

$$F_4\varphi = \varphi_{04} + 4\int_0^{\frac{t}{2}} k_0'(t-2\xi)\varphi_2(\xi,\xi)d\xi +$$

$$+ 4\int_0^{\frac{t}{2}}\int_\xi^{t-\xi} k_0'(t-\xi-\theta)\left[\varphi_3(\xi,\theta) + \frac{\xi^2}{4}\varphi_4(\theta-\xi)\right] d\theta\, d\xi + \tag{4.26}$$

$$+ 4\int_0^{\frac{t}{2}}\int_0^{t-2\xi} \varphi_4(\theta)u_{02ttt}(\xi, t-\xi-\theta)\, d\theta\, d\xi.$$

где введено обозначение:

$$\varphi_0(x,t) = (\varphi_{01}, \varphi_{02}, \varphi_{03}, \varphi_{04}) :=$$

$$\left[\frac{1}{2}\left[\widetilde{f}_1(t+z) + \widetilde{f}_1(t-z)\right], \frac{1}{2}\left[\widetilde{f}_1'(t+z) + \widetilde{f}_1'(t-z)\right], \frac{1}{2}\left[\widetilde{f}_1''(t+z) + \widetilde{f}_1''(t-z)\right], 4f_1^{(IV)}(t)\right].$$

Докажем, что некоторая степень n ($n \in \mathbb{N}$) линейного отображения $F\varphi$ является сжатием. Пусть

$$\|\varphi\| = \max\left\{\max_{(z,t)\in D_2}|\varphi_j(z,t)|, \quad j = \overline{1,3}, \quad \max_{t\in[0,2l]}|\varphi_4(t)|\right\}.$$

Предположим, что φ^1, φ^2 — непрерывные вектор-функции в D_2, которые удовлетворяют линейной системе интегральных уравнений (4.23)–(4.26). Положим

$$\triangle(z,t) = \{(\xi,\tau)\colon 0 \leqslant \xi \leqslant z,\ t-z+\xi \leqslant \tau \leqslant t+z-\xi\}, \quad \Lambda(z,t,\xi) = \{\tau\colon (\xi,\tau) \in \triangle(z,t)\}.$$

Тогда для всех $(z,t) \in D_2$ имеем следующие оценки:

$$|F_1\varphi^{(1)} - F_1\varphi^{(2)}|(z,t) \leqslant \gamma_1\int_0^z \max\left\{\max_{(z,t)\in\Lambda(z,t,\xi)}|\varphi_1^{(1)} - \varphi_1^{(2)}|(\xi,\tau), |\varphi_4^{(1)} - \varphi_4^{(2)}|(2\xi)\right\} d\xi \leqslant$$

$$\leqslant \gamma_1\int_0^z \max\left\{\max_{(\xi,\tau)\in D_2}|\varphi_1^{(1)} - \varphi_1^{(2)}|(\xi,\tau), \max_{\xi\in[0,l]}|\varphi_4^{(1)} - \varphi_4^{(2)}|(2\xi)\right\} d\xi \leqslant \gamma_1 z\|\varphi^{(1)} - \varphi^{(2)}\|,$$

$$|F_2\varphi^{(1)} - F_2\varphi^{(2)}|(z,t) \leqslant$$

$$\leqslant \gamma_2\int_0^z \max\left\{\max_{(\xi,\tau)\in D_2}|\varphi_1^{(1)} - \varphi_1^{(2)}|(\tau,\xi), \max_{\xi\in[0,l]}|\varphi_4^{(1)} - \varphi_4^{(2)}|(2\xi)\right\} d\xi \leqslant \gamma_2 z\|\varphi^{(1)} - \varphi^{(2)}\|,$$

$$|F_3\varphi^{(1)} - F_3\varphi^{(2)}|(z,t) \leqslant$$

$$\leqslant \gamma_3\int_0^z \max\left\{\max_{(\xi,\tau)\in D_2}|\varphi_i^{(1)} - \varphi_i^{(2)}|(\tau,\xi), i = 1,2,\ \max_{\xi\in[0,l]}|\varphi_4^{(1)} - \varphi_4^{(2)}|(2\xi)\right\} d\xi \leqslant$$

$$\leqslant \gamma_3 z\|\varphi^{(1)} - \varphi^{(2)}\|, |F_4\varphi^{(1)} - F_4\varphi^{(2)}|(2z) \leqslant$$

$$\leqslant \gamma_4\int_0^z \max\left\{\max_{(\xi\in[0,l]}|\varphi_i^{(1)} - \varphi_i^{(2)}|(2l-\xi,\xi), i = 2,3,\ \max_{\xi\in[0,l]}|\varphi_4^{(1)} - \varphi_4^{(2)}|(2\xi)\right\} d\xi \leqslant$$

$$\leqslant \gamma_4 z\|\varphi^{(1)} - \varphi^{(2)}\|,$$

где $\gamma_j = \gamma_j(l, \lambda_1, \lambda_2)$ — положительные постоянные, $j = 1, 2, 3, 4$,

$$\lambda_1 = \|k_0(t)\|_{C^1[0,2l]}, \qquad \lambda_2 = \max\{\|u_{02}(z,t)\|_{C(D_2)}, \|u_{02t}(z,t)\|_{C(D_2)}, \|u_{02ttt}(z,t)\|_{C(D_2)}\}.$$

Полагая $M = \max\{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4\}$ получаем, что

$$\max_{1\leqslant j\leqslant 4} |F_j\varphi^{(1)} - F_j\varphi^{(2)}|(t,z) \leqslant Mz\|\varphi^{(1)} - \varphi^{(2)}\|.$$

Далее,

$$|F_1^2\varphi^{(1)} - F_1^2\varphi^{(2)}|(z,t) \leqslant$$
$$\leqslant \gamma_1 \int_0^z \max\left\{\max_{(z,t)\in\Delta} |F_1\varphi_1^{(1)} - F_1\varphi_1^{(2)}|(\xi,\tau), |F_1\varphi_4^{(1)} - F_1\varphi_4^{(2)}|(2\xi)\right\} d\xi \leqslant$$
$$\leqslant \gamma_1 M \int_0^z \xi\|\varphi^{(1)} - \varphi^{(2)}\|\, d\xi \leqslant \gamma_1 M\frac{z^2}{2!}\|\varphi^{(1)} - \varphi^{(2)}\|,$$
$$|F_2^2\varphi^{(1)} - F_2^2\varphi^{(2)}|(z,t) \leqslant$$
$$\leqslant \gamma_2 \int_0^z \max\left\{\max_{(z,t)\in\Delta} |F_2\varphi_2^{(1)} - F_2\varphi_2^{(2)}|(\xi,\tau),\ |F_2\varphi_4^{(1)} - F_2\varphi_4^{(2)}|(2\xi)\right\} d\xi \leqslant$$
$$\leqslant \gamma_2 M \int_0^z \xi\|\varphi^{(1)} - \varphi^{(2)}\|\, d\xi \leqslant \gamma_2 M\frac{z^2}{2!}\|\varphi^{(1)} - \varphi^{(2)}\|,$$
$$|F_3^2\varphi^{(1)} - F_3^2\varphi^{(2)}|(z,t) \leqslant$$
$$\leqslant \gamma_3 \int_0^z \max\left\{\max_{(z,t)\in\Delta} |F_3\varphi_i^{(1)} - F_3\varphi_i^{(2)}|(\xi,\tau), i=1,2,\ |F_3\varphi_4^{(1)} - F_3\varphi_4^{(2)}|(2\xi)\right\} d\xi \leqslant$$
$$\leqslant \gamma_3 M \int_0^z \xi\|\varphi^{(1)} - \varphi^{(2)}\| d\xi \leqslant \gamma_3 M\frac{z^2}{2!}\|\varphi^{(1)} - \varphi^{(2)}\|,$$
$$|F_4^2\varphi^{(1)} - F_4^2\varphi^{(2)}|(2z) \leqslant$$
$$\leqslant \gamma_4 \int_0^z \max\left\{\max_{(\tau\in[\xi,2z-\xi]} |F_4\varphi_i^{(1)} - F_4\varphi_i^{(2)}|(2l-\xi,\xi), i=2,3,\ |F_4\varphi_4^{(1)} - F_4\varphi_4^{(2)}|(2\xi)\right\} d\xi \leqslant$$
$$\leqslant \gamma_4 M\frac{z^2}{2!}\|\varphi^{(1)} - \varphi^{(2)}\|.$$

Отсюда

$$\max_{1\leqslant j\leqslant 4} |F_j^2\varphi^{(1)} - F_j^2\varphi^{(2)}|(z,t) \leqslant M^2\frac{z^2}{2!}\|\varphi^{(1)} - \varphi^{(2)}\|, \qquad (z,t)\in D_2.$$

Далее, продолжая вычисления аналогичным образом для некоторой степени n линейного отображения $F\varphi$, получим

$$\max_{1\leqslant j\leqslant 4} |F_j^n\varphi^{(1)} - F_j^n\varphi^{(2)}|(z,t) \leqslant M^n\frac{z^n}{n!}\|\varphi^{(1)} - \varphi^{(2)}\|, \qquad (z,t)\in D_2,$$
$$|F^n\varphi^{(1)} - F^n\varphi^{(2)}|(z,t) \leqslant M^n\frac{l^n}{n!}\|\varphi^{(1)} - \varphi^{(2)}\|.$$

Так как l — конечное фиксированное число, то число n можно выбрать настолько большим, что

$$M^n\frac{l^n}{n!} < 1.$$

Таким образом, отображение F^n является сжимающим. Тогда, согласно обобщению принципа сжимающих отображений, уравнение (4.22) имеет единственное решение, принадлежащее $C(D_2)$. Данное решение может быть найдено методом последовательных приближений. Лемма 4 доказана. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Романов В. Г. Устойчивость в обратных задачах. М.: Научный мир, 2005.
2. Романов В. Г. Обратные задачи математической физики. М.: Наука, 1984.
3. Кабанихин С. И. Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009.
4. Дурдиев Д. К. Обратные задачи для сред с последействиями. Ташкент: Турон-Икбол, 2014.
5. Тотиева Ж. Д. Одномерные обратные коэффициентные задачи анизотропной вязкоупругости // Сибирские электронные математические известия. 2019. Т. 16. С. 786–811. https://doi.org/10.33048/semi.2019.16.053
6. Сафаров Ж. Ш., Дурдиев Д. К. Обратная задача для интегро-дифференциального уравнения акустики // Дифференциальные уравнения. 2018. Т. 54. № 1. С. 136–144. https://doi.org/10.1134/S0374064118010119
7. Safarov J. Sh. Global solvability of the one-dimensional inverse problem for the integro-differential equation of acoustics // Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics. 2018. Vol. 11. No. 6. P. 753–763. https://doi.org/10.17516/1997-1397-2018-11-6-753-763
8. Дурдиев У. Д. Обратная задача для системы уравнений вязкоупругости в однородных анизотропных средах // Сибирский журнал индустриальной математики. 2019. Т. 22. № 4. С. 26–32. https://doi.org/10.33048/sibjim.2019.22.403
9. Дурдиев Д. К., Рахмонов А. А. Обратная задача для системы интегро-дифференциальных уравнений SH-волн в вязкоупругой пористой среде: глобальная разрешимость // Теоретическая и математическая физика. 2018. Т. 195. № 3. С. 491–506. https://doi.org/10.4213/tmf9480
10. Дурдиев Д. К., Тотиева Ж. Д. Задача об определении одномерного ядра уравнения электровязкоупругости // Сибирский математический журнал. 2017. Т. 58. № 3. С. 553–572. https://doi.org/10.17377/smzh.2017.58.307
11. Сафаров Ж. Ш. Оценки устойчивости решений некоторых обратных задач для интегро-дифференциальных уравнений // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2014. Вып. 3. С. 75–82. https://doi.org/10.20537/vm140307
12. Durdiev D. K., Nuriddinov Zh. Z. On investigation of the inverse problem for a parabolic integro-differential equation with a variable coefficient of thermal conductivity // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2020. Т. 30. Вып. 4. С. 572–584. https://doi.org/10.35634/vm200403
13. Дурдиев Д. К., Сафаров Ж. Ш. Обратная задача об определении одномерного ядра уравнения вязкоупругости в ограниченной области // Математические заметки. 2015. Т. 97. Вып. 6. С. 855–867. https://doi.org/10.4213/mzm10659
14. Karchevsky A. L., Turganbayev Y. M., Rakhmetullina S. G., Beldeubayeva Zh. T. Numerical solution of an inverse problem of determining the parameters of a source of groundwater pollution // Eurasian Journal of Mathematical and Computer Applications. 2017. Vol. 5. Issue 1. P. 53–73. https://doi.org/10.32523/2306-3172-2017-5-1-53-73
15. Дурдиев У. Д. Численное определение зависимости диэлектрической проницаемости слоистой среды от временной частоты // Сибирские электронные математические известия. 2020. Т. 17. С. 179–189. https://doi.org/10.33048/semi.2020.17.013
16. Bozorov Z. R. Numerical determining a memory function of a horizontally-stratified elastic medium with aftereffect // Eurasian Journal of Mathematical and Computer Applications. 2020. Vol. 8. Issue 2. P. 28–40. https://doi.org/10.32523/2306-6172-2020-8-2-28-40

17. Дурдиев Д. К., Тотиева Ж. Д. О глобальной разрешимости одной многомерной обратной задачи для уравнения с памятью // Сибирский математический журнал. 2021. Т. 62. № 2. С. 269–285. https://doi.org/10.33048/smzh.2021.62.203
18. Романов В. Г. Об определении коэффициентов в уравнениях вязкоупругости // Сибирский математический журнал. 2014. Т. 55. № 3. С. 617–626. http://mi.mathnet.ru/smj2558
19. Романов В. Г. К вопросу обоснования метода Гельфанда–Левитана–Крейна для двумерной обратной задачи // Сибирский математический журнал. 2021. Т. 62. № 5. С. 1124–1142. https://doi.org/10.33048/smzh.2021.62.513
20. Romanov V. G. Phaseless inverse problems for Schrödinger, Helmholtz, and Maxwell equations // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2020. Vol. 60. Issue 6. P. 1045–1062. https://doi.org/10.1134/s0965542520060093
21. Klibanov M. V., Romanov V. G. Uniqueness of a 3-D coefficient inverse scattering problem without the phase information // Inverse Problems. 2017. Vol. 33. No. 9. 095007. https://doi.org/10.1088/1361-6420/aa7a18
22. Klibanov M. V., Romanov V. G. Two reconstruction procedures for a 3D phaseless inverse scattering problem for the generalized Helmholtz equation // Inverse Problems. 2016. Vol. 32. No. 1. 015005. https://doi.org/10.1088/0266-5611/32/1/015005
23. Благовещенский А. С., Федоренко Д. А. Обратная задача для уравнения акустики в слабо горизонтально-неоднородной среде // Записки научных семинаров ПОМИ. 2008. Т. 354. С. 81–99. http://mi.mathnet.ru/znsl1645
24. Благовещенский А. С. О квазидвумерной обратной задаче для волнового уравнения // Тр. МИАН СССР. 1971. Т. 115. С. 57–69. http://mi.mathnet.ru/tm3065
25. Тотиева Ж. Д. Определение ядра уравнения вязкоупругости в слабо горизонтально-неоднородной среде // Сибирский математический журнал. 2020. Т. 61. № 2. С. 453–475. https://doi.org/10.33048/smzh.2020.61.217
26. Дурдиев Д. К., Сафаров Ж. Ш. Задача об определении двумерного ядра уравнения вязкоупругости со слабо горизонтальной неоднородностью // Сибирский журнал индустриальной математики. 2022. Т. 25. № 1. С. 14–38. https://doi.org/10.33048/SIBJIM.2022.25.102
27. Дурдиев Д. К., Бозоров З. Р. Задача определения ядра интегродифференциального волнового уравнения со слабо горизонтальной однородностью // Дальневосточный математический журнал. 2013. Т. 13. № 2. С. 209–221. http://mi.mathnet.ru/dvmg264
28. Durdiev D. K., Rahmonov A. A. A 2D kernel determination problem in a visco-elastic porous medium with a weakly horizontally inhomogeneity // Mathematical Methods in the Applied Sciences. 2020. Vol. 43. Issue 15. P. 8776–8796. https://doi.org/10.1002/mma.6544
29. Ахматов З. А., Тотиева Ж. Д. Квазидвумерная коэффициентная обратная задача для волнового уравнения в слабо горизонтально-неоднородной среде с памятью // Владикавказский математический журнал. 2021. Т. 23. Вып. 4. С. 15–27. https://doi.org/10.46698/l4464-6098-4749-m
30. Дурдиев Д. К., Бозоров З. Р. Квазидвумерная обратная задача определения ядра интегрального члена в уравнении вязкоупругости // Научный вестник БухГУ. 2020. Т. 3. № 79. С. 10–21.

Поступила в редакцию 13.04.2022

Принята к публикации 03.08.2022

Дурдиев Дурдимурод Каландарович, д. ф.-м. н., профессор, заведующий Бухарским отделением института математики им. В. И. Романовского АН Республики Узбекистан, Институт математики имени В. И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан, 100174, Узбекистан, г. Ташкент, ул. Университетская, 46;
профессор, Бухарский государственный университет, 200118, Узбекистан, г. Бухара, ул. Мухаммад Икбол, 11.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-6054-2827
E-mail: durdiev65@mail.ru

Сафаров Журабек Шакарович, докторант института математики им. В. И. Романовского АН Республики Узбекистан, 100174, Узбекистан, г. Ташкент, ул. Университетская, 46;
доцент кафедры «Высшая математика», Ташкентский университет информационных технологий имени Мухаммада аль-Хорезми, 100200, Узбекистан, г. Ташкент, ул. Амира Темура, 108.
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-9249-835X
E-mail: j.safarov65@mail.ru

Цитирование: Д. К. Дурдиев, Ж. Ш. Сафаров. Задача определения памяти среды со слабо горизонтальной неоднородностью // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2022. Т. 32. Вып. 3. С. 383–402.

VESTNIK UDMURTSKOGO UNIVERSITETA. MATEMATIKA. MEKHANIKA. KOMP'UTERNYE NAUKI
MATHEMATICS 2022. Vol. 32. Issue 3. Pp. 383–402.

D. K. Durdiev, Zh. Sh. Safarov

The problem of determining the memory of an environment with weak horizontal heterogeneity

Keywords: integro-differential equation, inverse problem, the Dirac delta function, the kernel of the integral, the norm.

MSC2020: 35L70, 45Q05

DOI: 10.35634/vm220303

The problem of determining the convolutional kernel $k(t, x)$, $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$, included in a hyperbolic integro-differential equation of the second order, is investigated in a domain bounded by a variable z and having weakly horizontal heterogeneity. It is assumed that this kernel weakly depends on the variable x and decomposes into a power series by degrees of a small parameter ε. A method for finding the first two coefficients $k_0(t)$, $k_1(t)$ of this expansion is constructed according to the given first two moments in the variable x of the solution of the direct problem at $z = 0$.

REFERENCES

1. Romanov V. G. *Ustoichivost' v obratnykh zadachakh* (Stability in inverse problems), Moscow: Nauchnyi Mir, 2005.
2. Romanov V. G. *Obratnye zadachi matematicheskoi fiziki* (Inverse problems of mathematical physics), Moscow: Nauka, 1984.
3. Kabanikhin S. V. *Obratnye i nekorrektnye zadachi* (Inverse and incorrect problems), Novosibirsk: Sibirskoe Nauchnoe Izdatel'stvo, 2009.
4. Durdiev D. K. *Obratnye zadachi dlya sred s posledeistviyami* (Inverse problems for environments with aftereffects), Tashkent: Turon-Iqbol, 2014.
5. Totieva Zh. D. One-dimensional inverse coefficient problems of anisotropic viscoelasticity, *Sibirskie Èlektronnye Matematicheskie Izvestiya*, 2019, vol. 16, pp. 786–811 (in Russian). https://doi.org/10.33048/semi.2019.16.053
6. Safarov Zh. Sh., Durdiev D. K. Inverse problem for an integro-differential equation of acoustics, *Differential Equations*, 2018, vol. 54, no. 1, pp. 134–142. https://doi.org/10.1134/S0012266118010111
7. Safarov J. Sh. Global solvability of the one-dimensional inverse problem for the integro-differential equation of acoustics, *Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics*, 2018, vol. 11, no. 6, pp. 753–763. https://doi.org/10.17516/1997-1397-2018-11-6-753-763
8. Durdiev U. D. An inverse problem for the system of viscoelasticity equations in homogeneous anisotropic media, *Journal of Applied and Industrial Mathematics*, 2019, vol. 13, pp. 623–628. https://doi.org/10.1134/S1990478919040057
9. Durdiev D. K., Rakhmonov A. A. Inverse problem for a system of integro-differential equations for SH waves in a visco-elastic porous medium: global solvability, *Theoretical and Mathematical Physics*, 2018, vol. 195, no. 6, pp. 923–937. https://doi.org/10.1134/S0040577918060090
10. Durdiev D. K., Totieva Zh. D. The problem of determining the one-dimensional kernel of the electroviscoelasticity equation, *Siberian Mathematical Journal*, 2017, vol. 58, no. 3, pp. 427–444. https://doi.org/10.1134/S0037446617030077
11. Safarov Zh. Sh. Evaluation of the stability of some inverse problems solutions for integro-differential equations, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2014, issue 3, pp. 75–82 (in Russian). https://doi.org/10.20537/vm140307
12. Durdiev D. K., Nuriddinov Zh. Z. On investigation of the inverse problem for a parabolic integro-differential equation with a variable coefficient of thermal conductivity, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2020, vol. 30, issue 4, pp. 572–584. https://doi.org/10.35634/vm200403

13. Durdiev D. K., Safarov Zh. Sh. Inverse problem of determining the one-dimensional kernel of the viscoelasticity equation in a bounded domain, *Mathematical Notes*, 2015, vol. 97, no. 6, pp. 867–877. https://doi.org//10.1134/S0001434615050223
14. Karchevsky A. L., Turganbayev Y. M., Rakhmetullina S. G., Beldeubayeva Zh. T. Numerical solution of an inverse problem of determining the parameters of a source of groundwater pollution, *Eurasian Journal of Mathematical and Computer Applications*, vol. 5, issue 1, pp. 53–73. https://doi.org/10.32523/2306-3172-2017-5-1-53-73
15. Durdiev U. D. Numerical method for determining the dependence of the dielectric permittivity on the frequency in the equation of electrodynamics with memory, *Sibirskie Èlektronnye Matematicheskie Izvestiya*, 2020, vol. 17, pp. 179–189 (in Russian). https://doi.org/10.33048/semi.2020.17.013
16. Bozorov Z. R. Numerical determining a memory function of a horizontally-stratified elastic medium with aftereffect, *Eurasian Journal of Mathematical and Computer Applications*, 2020, vol. 8, issue 2, pp. 28–40. https://doi.org/10.32523/2306-6172-2020-8-2-28-40
17. Durdiev D. K., Totieva Zh. D. About global solvability of a multidimensional inverse problem for an equation with memory, *Siberian Mathematical Journal*, 2021, vol. 62, no. 2, pp. 215–229. https://doi.org/10.1134/S0037446621020038
18. Romanov V. G. On the determination of the coefficients in the viscoelasticity equations, *Siberian Mathematical Journal*, 2014, vol. 55, no. 3, pp. 503–510. https://doi.org/10.1134/S0037446614030124
19. Romanov V. G. On justification of the Gelfand–Levitan–Krein method for a two-dimensional inverse problem, *Siberian Mathematical Journal*, 2021, vol. 62, no. 2, pp. 908–924. https://doi.org/10.1134/S003744662105013X
20. Romanov V. G. Phaseless inverse problems for Schrödinger, Helmholtz, and Maxwell equations, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2020, vol. 60, issue 6, pp. 1045–1062. https://doi.org/10.1134/s0965542520060093
21. Klibanov M. V., Romanov V. G. Uniqueness of a 3-D coefficient inverse scattering problem without the phase information, *Inverse Problems*, 2017, vol. 33, no. 9, 095007. https://doi.org/10.1088/1361-6420/aa7a18
22. Klibanov M. V., Romanov V. G. Two reconstruction procedures for a 3D phaseless inverse scattering problem for the generalized Helmholtz equation, *Inverse Problems*, 2016, vol. 32, no. 1, 015005. https://doi.org/10.1088/0266-5611/32/1/015005
23. Blagoveshchenskii A. S., Fedorenko D. A. The inverse problem for an acoustic equation in a weakly horizontally inhomogeneous medium, *Journal of Mathematical Sciences*, 2008, vol. 155, issue 3, pp. 379–389. https://doi.org/10.1007/s10958-008-9221-1
24. Blagoveshchenskii A. S. The quasi-two-dimensional inverse problem for the wave equation, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 1971, vol. 115, pp. 63–76.
25. Totieva Zh. D. Determining the kernel of the viscoelasticity equation in a medium with slightly horizontal homogeneity, *Siberian Mathematical Journal*, 2020, vol. 61, issue 2, pp. 359–378. https://doi.org/10.1134/S0037446620020172
26. Durdiev D. K., Safarov J. Sh. 2D kernel identification problem in viscoelasticity equation with a weakly horizontal homogeneity, *Sibirskii Zhurnal Industrial'noi Matematiki*, 2022, vol. 25, no. 1, pp. 14–38. https://doi.org/10.33048/SIBJIM.2022.25.102
27. Durdiev D. K., Bozorov Z. R. A problem of determining the kernel of integrodifferential wave equation with weak horizontal properties, *Dal'nevostochnyi Matematicheskii Zhurnal*, 2013, vol. 13, no. 2, pp. 209–221 (in Russian). http://mi.mathnet.ru/eng/dvmg264
28. Durdiev D. K., Rahmonov A. A. A 2D kernel determination problem in a visco-elastic porous medium with a weakly horizontally inhomogeneity, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2020, vol. 43, isue 15, pp. 8776–8796. https://doi.org/10.1002/mma.6544
29. Akhmatov Z. A., Totieva Zh. D. Quasi-two-dimensional coefficient inverse problem for the wave equation in a weakly horizontally inhomogeneous medium with memory, *Vladikavkazskii Matematicheskii Zhurnal*, 2021, vol. 23, no. 4, pp. 15–27 (in Russian). https://doi.org/10.46698/l4464-6098-4749-m

30. Durdiev D. K., Bozorov Z. R. Quasi-two-dimensional inverse problem of determining the kernel of an integral term in the viscoelasticity equation, *Nauchnyi Vestnik Bukharskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2020, vol. 3, no. 79, pp. 10–21 (in Russian).

Received 13.04.2022

Accepted 03.08.2022

Durdimurod Kalandarovich Durdiev, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Head of the Bukhara Department of the Institute of Mathematics named after V. I. Romanovsky AS of the Republic of Uzbekistan;
Professor, Bukhara State University, 11, Muhammad Igbol st., Bukhara, 200118, Uzbekistan.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-6054-2827
E-mail: durdiev65@mail.ru

Jurabek Shakarovich Safarov, Doctoral Student, Institute of Mathematics named after V. I. Romanovsky, the AS of the Republic of Uzbekistan, 46, ul. Universitetskaya, Tashkent, 100174, Uzbekistan;
Associate Professor, Department of Higher Mathematics, Tashkent University of Information Technologies named after Muhammad al-Khwarizmi, 108, Amir Timur Ave., Tashkent, Uzbekistan, 100200.
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-9249-835X
E-mail: j.safarov65@mail.ru

Citation: D. K. Durdiev, Zh. Sh. Safarov. The problem of determining the memory of an environment with weak horizontal heterogeneity, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2022, vol. 32, issue 3, pp. 383–402.