ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ
МАТЕМАТИКА 2022. Т. 32. Вып. 3. С. 415–432.

УДК 517.927.4

© *Г. Г. Петросян*

О КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ КЛАССА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДРОБНОГО ПОРЯДКА ТИПА ЛАНЖЕВЕНА В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В настоящей статье рассматривается краевая задача для дифференциальных уравнений типа Ланжевена с дробной производной Капуто в банаховом пространстве. Предполагается, что нелинейная часть уравнения представляет из себя отображение, подчиняющееся условиям типа Каратеодори. Уравнения такого типа обобщают уравнения движения в различного рода средах, например вязкоупругих, или в средах, где сила сопротивления выражается с помощью дробной производной. Для разрешения поставленной задачи будет использоваться теория дробного математического анализа, свойства функции Миттаг–Леффлера, а также теория мер некомпактности и уплотняющих операторов. Идея решения состоит в следующем: исходная задача сводится к задаче о существовании неподвижных точек соответствующего разрешающего интегрального оператора в пространстве непрерывных функций. Для доказательства существования неподвижных точек разрешающего оператора используется теорема типа Б. Н. Садовского о неподвижной точке. Для этого мы показываем, что разрешающий интегральный оператор является уплотняющим относительно векторной меры некомпактности в пространстве непрерывных функций и преобразует замкнутый шар в этом пространстве в себя.

Ключевые слова: дробная производная Капуто, дифференциальное уравнение типа Ланжевена, краевая задача, неподвижная точка, уплотняющее отображение, мера некомпактности, функция Миттаг–Леффлера.

DOI: 10.35634/vm220305

Введение

В течение последних десятилетий теория дробного интегро–дифференцирования стала одним из наиболее популярных и важных направлений математической науки. Интерес к этой тематике усилился не случайно, многочисленные современные проблемы науки и техники находят достаточно адекватное описание в терминах дифференциальных уравнений и включений с дробными производными. Многие физические, экономические, биологические и инженерные задачи, в первую очередь связанные с протеканиями процессов в динамических системах, приводят к необходимости исследований краевых задач для дифференциальных уравнений и включений дробного порядка (см. монографии [7, 12, 17, 20], статью [13]). В последние годы исследование целого комплекса задач, связанных с уравнениями и включениями дробного порядка, очень интенсивно ведется в России и за рубежом (см. статьи [1–3, 5, 10, 11, 16]).

Большой интерес представляют дифференциальные уравнения дробного порядка типа Ланжевена (см., например, статьи [4, 14, 18, 19, 21] и ссылки в них). Уравнения такого типа обобщают уравнения движения в различного рода средах, например вязкоупругих или в средах, где сила сопротивления выражается с помощью дробной производной. Еще одним известным частным случаем уравнения Ланжевена является формальная запись второго закона Ньютона. Опишем кратко некоторые уже полученные результаты в этом направлении исследований. В работе [18] авторы, с помощью теоремы Красносельского–Крейна о неподвижной точке, доказывают существование решений краевой задачи для уравнения Ланжевена следующего вида:

$$
{}^C D_0^\beta({}^C D_0^\alpha + \lambda)u(t) = f(t, u(t)), \quad t \in [0,1],
$$
$$
u(0) = 0, \quad u(1) = 0, \quad {}^C D_0^\alpha u(0) + {}^C D_0^\alpha u(1) = \mu \int_0^\eta u(s)\,ds,
$$

где ${}^C D_0^\alpha$ и ${}^C D_0^\beta$ — дробные производные Капуто порядков $\alpha \in (0,1)$, $\beta \in (1,2)$, числа $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\eta \in (0,1)$, функция $f\colon [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — непрерывная и дифференцируемая.

В статье [19] авторы также на основе теоремы Красносельского–Крейна о неподвижной точке разрешили следующую краевую задачу

$$
{}^C D_0^\beta({}^C D_0^\alpha + \lambda)u(t) = f(t, u(t)), \quad t \in [0,1],
$$
$$
u(0) = 0 = u(1), \quad {}^C D_0^\alpha u(0) = 0, \quad \sum_{i=1}^m a_i u(\zeta_i) = \mu \int_0^\eta \frac{(\eta - s)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} u(s)\,ds,
$$

для случая дробных порядков $\alpha \in (0,1)$, $\beta \in (1,2)$, чисел λ, μ, $\gamma \in \mathbb{R}$, $0 < \eta < < \zeta_1 < \ldots < \zeta_m < 1$, $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, m$, и непрерывно дифференцируемой функции $f\colon [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

В работе [14] на основе теории степени Лере–Шаудера исследовалась разрешимость краевой задачи для дифференциального уравнения Ланжевена смешанного типа:

$$
{}^{RL} D_0^q({}^C D_0^r u(t)) = f(t, u(t)), \quad t \in [0,T], \quad r \in (0,1),
$$
$$
u'(\xi) = \lambda {}^C D_0^\nu u(\eta), \quad u(T) = \mu I^p u(\zeta), \quad \xi, \eta, \zeta \in (0,T),
$$

здесь ${}^{RL} D_0^q$ — дробная производная Римана–Лиувилля порядка $q \in (0,1)$, числа λ, $\mu \in \mathbb{R}$, $r \in (0,1)$, $0 < \nu < q + r$, I^p — дробный интеграл порядка $p > 0$ и $f\colon [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — нелинейное отображение.

В настоящей статье исследуется разрешимость в сепарабельном банаховом пространстве E краевой задачи для дифференциальных уравнений дробного порядка типа Ланжевена следующего вида

$$
{}^C D_0^\beta({}^C D_0^\alpha - \lambda)x(t) = f(t, x(t)), \quad t \in [0,T], \tag{0.1}
$$
$$
x(0) = x(T), \quad x'(0) = x'(T), \quad x(a) = \xi, \tag{0.2}
$$

где ${}^C D_0^\alpha$ и ${}^C D_0^\beta$ — дробные производные Капуто порядков $\alpha \in (1,2]$, $\beta \in [0,1]$, число $\lambda > 0$, $f\colon [0,T] \times E \to E$ — нелинейное отображение типа Каратеодори. Число $a \in (0,T)$ фиксировано, также как и элемент $\xi \in E$. Отметим, что в отличие от вышеизложенных типов уравнений, в данном случае порядок внешней дробной производной меньше порядка внутренней. Такое различие является существенным, как для самих разновидностей уравнений, так и для решения краевых задач для них. Налагаемые краевые условия являются вполне естественными для приложений, так как первые два являются периодическими, а третье фактически означает, что в фиксированный момент времени a функция должна принимать наперед заданное значение ξ. Для разрешения поставленной задачи будет использоваться теория дробного математического анализа, свойства функции Миттаг–Леффлера, а также теория мер некомпактности и уплотняющих операторов. Идея решения состоит в следующем: исходная задача сводится к задаче о существовании неподвижных точек соответствующего разрешающего интегрального оператора в пространстве непрерывных функций. Для доказательства существования неподвижных точек разрешающего оператора будет использоваться теорема типа Б. Н. Садовского о неподвижной точке. Для этого мы показываем, что разрешающий интегральный оператор является уплотняющим относительно векторной меры некомпактности в пространстве непрерывных функций и преобразует замкнутый шар в этом пространстве в себя.

§ 1. Предварительные сведения

1.1. Дробный анализВначале введем необходимые понятия и обозначения из дробного математического анализа (более подробные сведения можно найти в монографиях [12, 17]).

Пусть E — вещественное банахово пространство.

Определение 1. Дробным интегралом порядка $\alpha > 0$ функции $g\colon [0,T] \to E$ называется функция $I_0^\alpha g$ следующего вида:

$$I_0^\alpha g(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} g(s)\, ds,$$

где Γ — гамма-функция Эйлера

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x}\, dx.$$

Отметим, что для гамма-функции Эйлера имеет место свойство (см., например, [17]):

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} = 0 \text{ для } \alpha = 0, -1, -2, \ldots.$$

Определение 2. Дробной производной Римана–Лиувилля порядка $\alpha > 0$ непрерывной функции $g\colon [0,T] \to E$ называется функция ${}^{RL}D_0^\alpha g$ следующего вида:

$${}^{RL}D_0^\alpha g(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1} g(s)\, ds, \quad n = [\alpha]+1.$$

Определение 3. Дробной производной Капуто порядка $\alpha > 0$ функции $g \in C^n([0,T];E)$ называется функция ${}^{C}D_0^\alpha g$ следующего вида:

$${}^{C}D_0^\alpha g(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1} g^{(n)}(s)\, ds, \quad n = [\alpha]+1.$$

Дробная производная Капуто порядка $\alpha > 0$ для непрерывной функции $g\colon [0,T] \to E$ связана с дробной производной Римана–Лиувилля того же порядка $\alpha > 0$ следующим соотношением:

$$\left({}^{C}D_0^\alpha g\right)(t) = \left({}^{RL}D_0^\alpha \left(g(s) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} s^k\right)\right)(t).$$

Большим преимуществом дробной производной Капуто, по сравнению с дробной производной Римана–Лиувилля, является сохранение основных свойств производной целого порядка, например равенство нулю производной от константы.

Лемма 1 (см. [12, лемма 2.22]). *Пусть $g \in C^n([0,T];E)$ и $\alpha > 0$, тогда*

$$\left(I_0^\alpha\, {}^{C}D_0^\alpha g\right)(t) = g(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} t^k, \quad n = [\alpha]+1.$$

Определение 4. Функция вида

$$E_{\alpha,\gamma}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + \gamma)}, \quad \alpha > 0,\ \gamma \in \mathbb{C},\ z \in \mathbb{C},$$

называется функцией Миттаг–Леффлера.

Функция Миттаг–Леффлера имеет большое значение в дробном исчислении. Например, рассмотрим задачу Коши для скалярного дифференциального уравнения дробного порядка

$$^{C}D_0^{\alpha} x(t) = \lambda x(t) + f(t), \quad t \in [0, T], \tag{1.1}$$

$$x(0) = c_1, \quad x'(0) = c_2, \tag{1.2}$$

где $\alpha \in (1, 2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $f\colon [0, T] \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция. Решением данной задачи является непрерывная функция $x\colon [0, T] \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая условиям (1.2), для которой дробная производная Капуто $^{C}D_0^{\alpha} x$ также непрерывна и удовлетворяет уравнению (1.1). Известно (см. [12, пример 4.9]), что единственным решением данной задачи является функция

$$x(t) = E_{\alpha,1}(\lambda t^{\alpha})c_1 + tE_{\alpha,2}(\lambda t^{\alpha})c_2 + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda (t-s)^{\alpha}) f(s)\, ds.$$

В дальнейшем нам понадобятся следующие соотношения и утверждение (см. [6]):

$$E_{\alpha,\gamma}(z) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} + zE_{\alpha,\gamma+\alpha}(z), \tag{1.3}$$

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^n (t^{\gamma-1} E_{\alpha,\gamma}(\lambda t^{\alpha})) = t^{\gamma-n-1} E_{\alpha,\gamma-n}(\lambda t^{\alpha}), \tag{1.4}$$

$$\int_0^z t^{\gamma-1} E_{\alpha,\gamma}(\lambda t^{\alpha})\, dt = z^{\gamma} E_{\alpha,\gamma+1}(\lambda z^{\alpha}). \tag{1.5}$$

Лемма 2 (см. [9]). *Для функции $g \in L^{\infty}([0, T]; E)$ и $\alpha > 1$, $\gamma \in \mathbb{R}$ имеет место равенство*

$$\left(\int_0^t (t-s)^{\gamma-1} E_{\alpha,\gamma}(\lambda (t-s)^{\alpha}) g(s)\, ds\right)'_t = \int_0^t (t-s)^{\gamma-2} E_{\alpha,\gamma-1}(\lambda (t-s)^{\alpha}) g(s)\, ds.$$

1.2. Меры некомпактности и уплотняющие отображенияПусть $\mathcal{E}$ — банахово пространство и $Pb(\mathcal{E}) = \{A \subseteq \mathcal{E} \colon A \neq \varnothing \text{ и ограничено}\}$.

Определение 5 (см., например, [8]). Пусть $(\mathcal{A}, \geqslant)$ — частично-упорядоченное множество. Функция $\beta\colon Pb(\mathcal{E}) \to \mathcal{A}$ называется мерой некомпактности (мнк) в $\mathcal{E}$, если для каждого $\Omega \in Pb(\mathcal{E})$ выполняется:

$$\beta(\overline{\text{co}}\,\Omega) = \beta(\Omega),$$

где $\overline{\text{co}}\,\Omega$ обозначает замыкание выпуклой оболочки Ω.

Мера некомпактности β называется:

(a) *монотонной*, если для любых $\Omega_0, \Omega_1 \in Pb(\mathcal{E})$ из $\Omega_0 \subseteq \Omega_1$ следует, что $\beta(\Omega_0) \leqslant \beta(\Omega_1)$;

(b) *несингулярной*, если для любого $a \in \mathcal{E}$ и любого $\Omega \in Pb(\mathcal{E})$ выполнено

$$\beta(\{a\} \cup \Omega) = \beta(\Omega);$$

(c) *инвариантный относительно объединения с компактными множествами*, если

$$\beta(\Omega \cup K) = \beta(\Omega)$$

для любого $\Omega \in Pb(\mathcal{E})$, K относительно компактного в $\mathcal{E}$;

(d) *вещественной*, если $\mathcal{A}$ — множество вещественных чисел $\mathbb{R}$ с естественным упорядочением.

Если $\mathcal{A}$ — конус в банаховом пространстве, то β называется:

(e) *алгебраически полуаддитивной*, если $\beta(\Omega_0 + \Omega_1) \leqslant \beta(\Omega_0) + \beta(\Omega_1)$ для любых Ω_0, $\Omega_1 \in Pb(\mathcal{E})$;

(f) *правильной* (*регулярной*), если $\beta(\Omega) = 0$ равносильно относительной компактности Ω.

Примером вещественной меры некомпактности в пространстве $\mathcal{E}$, обладающей всеми выше перечисленными свойствами, является *мера некомпактности Хаусдорфа*:

$$\chi_{\mathcal{E}}(\Omega) = \inf\{\varepsilon > 0 \mid \Omega \text{ имеет конечную } \varepsilon\text{-сеть}\}.$$

Отметим, что мнк Хаусдорфа удовлетворяет также свойству полуоднородности:

$$\chi(\lambda\Omega) = |\lambda|\chi(\Omega),$$

для всех $\lambda \in \mathbb{R}$ и $\Omega \in P(\mathcal{E})$.

Определение 6 (см., например, [8, 15]). Пусть X — замкнутое подмножество $\mathcal{E}$, β — мнк в $\mathcal{E}$. Отображение $f\colon X \to \mathcal{E}$ называется уплотняющим относительно мнк β (или β-уплотняющим), если для каждого $\Omega \in Pb(X)$, не являющегося относительно компактным, выполняется:

$$\beta(f(\Omega)) \ngeqslant \beta(\Omega).$$

Теорема 1 (см. [8]). *Пусть $\mathcal{M}$ — ограниченное выпуклое замкнутое подмножество $\mathcal{E}$, $f\colon \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ — непрерывное, β-уплотняющее отображение, где β — несингулярная мнк в $\mathcal{E}$. Тогда множество неподвижных точек* $\operatorname{Fix} f = \{x\colon x = f(x)\}$ *суть непустое множество.*

§ 2. Основные результаты

Рассмотрим в сепарабельном банаховом пространстве E следующую задачу Коши:

$$^{C}D_0^{\alpha}x(t) = \lambda x(t) + g(t), \quad t \in [0,T], \quad \alpha \in (1,2], \tag{2.1}$$

$$x(0) = c_1, \qquad x'(0) = c_2, \tag{2.2}$$

где $g\colon [0,T] \to E$ и c_1, $c_2 \in E$.

Определение 7. Решением задачи Коши (2.1), (2.2) называется функция $x \in C([0,T];E)$, удовлетворяющая равенству

$$x(t) = c_1 E_{\alpha,1}(\lambda t^{\alpha}) + c_2 t E_{\alpha,2}(\lambda t^{\alpha}) + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t-s)^{\alpha}) g(s)\, ds.$$

Лемма 3. *Пусть* $f \in L^\infty([0,T];E)$ *и*

$$\Delta = \frac{1}{\lambda}\left((E_{\alpha,1}(\lambda T^\alpha)-1)^2 - E_{\alpha,0}(\lambda T^\alpha)E_{\alpha,2}(\lambda T^\alpha)\right) \neq 0. \tag{2.3}$$

Тогда краевая задача

$$^C D_0^\beta(^C D_0^\alpha - \lambda)x(t) = f(t), \quad t \in [0,T], \quad \alpha \in (1,2],\ \beta \in [0,1], \tag{2.4}$$

$$x(0) = x(T), \quad x'(0) = x'(T), \quad x(a) = \xi, \tag{2.5}$$

имеет единственное решение

$$x(t) = \xi - \int_0^a (a-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda(a-s)^\alpha)(I_0^\beta f)(s)\,ds +$$

$$+\frac{1}{\lambda\Delta}\left[TE_{\alpha,2}(\lambda T^\alpha)\int_0^T (T-s)^{\alpha-2}E_{\alpha,\alpha-1}(\lambda(T-s)^\alpha)(I_0^\beta f)(s)\,ds -\right.$$

$$\left.-(E_{\alpha,1}(\lambda T^\alpha)-1)\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda(T-s)^\alpha)(I_0^\beta f)(s)\,ds\right](E_{\alpha,1}(\lambda t^\alpha) - E_{\alpha,1}(\lambda a^\alpha)) +$$

$$+\frac{1}{\lambda\Delta}\left[T^{-1}E_{\alpha,0}(\lambda T^\alpha)\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda(T-s)^\alpha)(I_0^\beta f)(s)\,ds -\right.$$

$$\left.-(E_{\alpha,1}(\lambda T^\alpha)-1)\int_0^T (T-s)^{\alpha-2}E_{\alpha,\alpha-1}(\lambda(T-s)^\alpha)(I_0^\beta f)(s)\,ds\right](tE_{\alpha,2}(\lambda t^\alpha) - aE_{\alpha,2}(\lambda a^\alpha)) +$$

$$+\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t-s)^\alpha)(I_0^\beta f)(s)\,ds.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вначале отметим следующие известные факты (см. [12, п. 2.1]). Для функции $f \in L^p([0,T];E)$, $p \geqslant 1$, при $0 < \beta < \frac{1}{p}$ дробный интеграл $I_0^\beta f \in L^q([0,T];E)$ с $q > p$, а при $\beta > \frac{1}{p}$ функция $I_0^\beta f$ оказывается непрерывной (даже гёльдеровской). Поэтому в нашем случае можно утверждать, что $I_0^\beta f \in C([0,T];E)$.

Действуя оператором дробного интегрирования I_0^β к обеим частям уравнения (2.4) и применяя лемму 1, мы имеем

$$^C D_0^\alpha x(t) = \lambda x(t) + (I_0^\beta f)(t) + c_0. \tag{2.6}$$

Теперь, воспользовавшись определением 7, мы получаем следующий вид решения для начально-краевой задачи (2.6), (2.2):

$$x(t) = c_1 E_{\alpha,1}(\lambda t^\alpha) + c_2 t E_{\alpha,2}(\lambda t^\alpha) + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t-s)^\alpha)(I_0^\beta f)(s)\,ds +$$

$$+\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t-s)^\alpha)c_0\,ds.$$

Преобразуем последнее, для этого в четвертом слагаемом вычислим интеграл с помощью формулы (1.5):

$$\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t-s)^\alpha)\,ds = -\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t-s)^\alpha)\,d(t-s) =$$

$$= \int_0^t y^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda y^\alpha)\,dy = t^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(\lambda t^\alpha).$$

Теперь заметим, что если мы возьмем $\gamma = 1$ в формуле (1.3), мы получим

$$E_{\alpha,1}(\lambda t^\alpha) = \frac{1}{\Gamma(1)} + \lambda t^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(\lambda t^\alpha) = 1 + \lambda t^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(\lambda t^\alpha),$$

поэтому

$$\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t-s)^\alpha)\, ds = \frac{1}{\lambda}\left(E_{\alpha,1}(\lambda t^\alpha) - 1\right).$$

Подставляя вычисленный интеграл в формулу решения, мы имеем

$$\begin{aligned} x(t) = \frac{1}{\lambda}\left(E_{\alpha,1}(\lambda t^\alpha) - 1\right) c_0 + c_1 E_{\alpha,1}(\lambda t^\alpha) + c_2 t E_{\alpha,2}(\lambda t^\alpha) + \\ + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t-s)^\alpha)(I_0^\beta f)(s)\, ds. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Используя формулу (1.4), а также лемму 2, мы можем найти производную

$$\begin{aligned} x'(t) = \frac{1}{\lambda} t^{-1} E_{\alpha,0}(\lambda t^\alpha) c_0 + c_1 t^{-1} E_{\alpha,0}(\lambda t^\alpha) + c_2 E_{\alpha,1}(\lambda t^\alpha) + \\ + \int_0^t (t-s)^{\alpha-2} E_{\alpha,\alpha-1}(\lambda(t-s)^\alpha)(I_0^\beta f)(s)\, ds. \end{aligned}$$

Так как $\dfrac{1}{\Gamma(0)} = 0$, то для функции $E_{\alpha,0}(\lambda t^\alpha)$ мы имеем

$$E_{\alpha,0}(\lambda t^\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t^\alpha)^n}{\Gamma(\alpha n)} = \frac{1}{\Gamma(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda t^\alpha)^n}{\Gamma(\alpha n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda t^\alpha)^n}{\Gamma(\alpha n)},$$

следовательно,

$$t^{-1} E_{\alpha,0}(\lambda t^\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n t^{\alpha n - 1}}{\Gamma(\alpha n)}.$$

Используя последнее и определение функции Миттаг–Леффлера, имеем

$$x(0) = c_1, \quad x'(0) = c_2.$$

В силу краевых условий (2.5), мы получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{1}{\lambda}\left(E_{\alpha,1}(\lambda T^\alpha) - 1\right) c_0 + (E_{\alpha,1}(\lambda T^\alpha) - 1) c_1 + T E_{\alpha,2}(\lambda T^\alpha) c_2 = \\ \qquad = -\int_0^T (T-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda(T-s)^\alpha)(I_0^\beta f)(s)\, ds, \\ \frac{1}{\lambda}\left(E_{\alpha,1}(\lambda a^\alpha) - 1\right) c_0 + E_{\alpha,1}(\lambda a^\alpha) c_1 + a E_{\alpha,2}(\lambda a^\alpha) c_2 = \\ \qquad = \xi - \int_0^a (a-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda(a-s)^\alpha)(I_0^\beta f)(s)\, ds, \\ \frac{1}{\lambda} T^{-1} E_{\alpha,0}(\lambda T^\alpha) c_0 + T^{-1} E_{\alpha,0}(\lambda T^\alpha) c_1 + (E_{\alpha,1}(\lambda T^\alpha) - 1) c_2 = \\ \qquad = -\int_0^T (T-s)^{\alpha-2} E_{\alpha,\alpha-1}(\lambda(T-s)^\alpha)(I_0^\beta f)(s)\, ds. \end{cases}$$

Разрешать последнюю систему будем с помощью правила Крамера. Вычислив соответствующие определители, мы получаем

$$\Delta = \frac{1}{\lambda}\left((E_{\alpha,1}(\lambda T^{\alpha})-1)^2 - E_{\alpha,0}(\lambda T^{\alpha})E_{\alpha,2}(\lambda T^{\alpha})\right),$$

$$\begin{aligned}\Delta_0 = (I_2-\xi)\left((E_{\alpha,1}(\lambda T^{\alpha})-1)^2 - E_{\alpha,0}(\lambda T^{\alpha})E_{\alpha,2}(\lambda T^{\alpha})\right) +\\ + E_{\alpha,1}(\lambda a^{\alpha})\left(I_3 T E_{\alpha,2}(\lambda T^{\alpha}) - I_1\left(E_{\alpha,1}(\lambda T^{\alpha})-1\right)\right) +\\ + aE_{\alpha,2}(\lambda a^{\alpha})\left(I_1 T^{-1}E_{\alpha,0}(\lambda T^{\alpha}) - I_3\left(E_{\alpha,1}(\lambda T^{\alpha})-1\right)\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta_1 = \frac{1}{\lambda}\Big[\left(E_{\alpha,1}(\lambda a^{\alpha})-1\right)\left(I_1\left(E_{\alpha,1}(\lambda T^{\alpha})-1\right) - I_3 T E_{\alpha,2}(\lambda T^{\alpha})\right) +\\ + (\xi - I_2)\left((E_{\alpha,1}(\lambda T^{\alpha})-1)^2 - E_{\alpha,0}(\lambda T^{\alpha})E_{\alpha,2}(\lambda T^{\alpha})\right) +\\ + aE_{\alpha,2}(\lambda a^{\alpha})\left(I_3\left(E_{\alpha,1}(\lambda T^{\alpha})-1\right) - I_1 T^{-1}E_{\alpha,0}(\lambda T^{\alpha})\right)\Big],\end{aligned}$$

$$\Delta_2 = \frac{1}{\lambda}\Big[I_1 T^{-1}E_{\alpha,0}(\lambda T^{\alpha}) - I_3\left(E_{\alpha,1}(\lambda T^{\alpha})-1\right)\Big],$$

где

$$I_1 = \int_0^T (T-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda(T-s)^{\alpha})(I_0^{\beta}f)(s)\,ds,$$

$$I_2 = \int_0^a (a-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda(a-s)^{\alpha})(I_0^{\beta}f)(s)\,ds,$$

$$I_3 = \int_0^T (T-s)^{\alpha-2}E_{\alpha,\alpha-1}(\lambda(T-s)^{\alpha})(I_0^{\beta}f)(s)\,ds.$$

Далее, находим неизвестные

$$c_0 = \frac{\Delta_0}{\Delta}, \quad c_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad c_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta},$$

и подставляем в уравнение (2.7), в результате чего получаем, что

$$\begin{aligned}x(t) = \frac{1}{\lambda\Delta}\Big[I_3 T E_{\alpha,2}(\lambda T^{\alpha}) - I_1\left(E_{\alpha,1}(\lambda T^{\alpha})-1\right)\Big]E_{\alpha,1}(\lambda t^{\alpha}) -\\ - \frac{1}{\lambda\Delta}\Big[(I_2-\xi)\left((E_{\alpha,1}(\lambda T^{\alpha})-1)^2 - E_{\alpha,0}(\lambda T^{\alpha})E_{\alpha,2}(\lambda T^{\alpha})\right) +\\ + E_{\alpha,1}(\lambda a^{\alpha})\left(I_3 T E_{\alpha,2}(\lambda T^{\alpha}) - I_1\left(E_{\alpha,1}(\lambda T^{\alpha})-1\right)\right) +\\ + aE_{\alpha,2}(\lambda a^{\alpha})\left(I_1 T^{-1}E_{\alpha,0}(\lambda T^{\alpha}) - I_3\left(E_{\alpha,1}(\lambda T^{\alpha})-1\right)\right)\Big] +\\ + \frac{1}{\lambda\Delta}\Big[I_1 T^{-1}E_{\alpha,0}(\lambda T^{\alpha}) - I_3\left(E_{\alpha,1}(\lambda T^{\alpha})-1\right)\Big]tE_{\alpha,2}(\lambda t^{\alpha}) +\\ + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t-s)^{\alpha})(I_0^{\beta}f)(s)\,ds,\end{aligned}$$

преобразовав последнее, имеем

$$\begin{aligned}x(t) = \xi - \int_0^a (a-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda(a-s)^{\alpha})(I_0^{\beta}f)(s)\,ds +\\ + \frac{1}{\lambda\Delta}\left[TE_{\alpha,2}(\lambda T^{\alpha})\int_0^T (T-s)^{\alpha-2}E_{\alpha,\alpha-1}(\lambda(T-s)^{\alpha})(I_0^{\beta}f)(s)\,ds -\right.\\ \left. - \left(E_{\alpha,1}(\lambda T^{\alpha})-1\right)\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda(T-s)^{\alpha})(I_0^{\beta}f)(s)\,ds\right]\left(E_{\alpha,1}(\lambda t^{\alpha}) - E_{\alpha,1}(\lambda a^{\alpha})\right) +\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{\lambda\Delta}\Bigg[T^{-1}E_{\alpha,0}(\lambda T^{\alpha})\int_0^T(T-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda(T-s)^{\alpha})(I_0^{\beta}f)(s)\,ds-$$

$$-(E_{\alpha,1}(\lambda T^{\alpha})-1)\int_0^T(T-s)^{\alpha-2}E_{\alpha,\alpha-1}(\lambda(T-s)^{\alpha})(I_0^{\beta}f)(s)\,ds\Bigg](tE_{\alpha,2}(\lambda t^{\alpha})-aE_{\alpha,2}(\lambda a^{\alpha}))+$$

$$+\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t-s)^{\alpha})(I_0^{\beta}f)(s)\,ds.$$

$\square$

Введем в рассмотрение функцию $L\colon[0,T]\times[0,T]\to\mathbb{R}$:

$$L(t,s)=\frac{1}{\lambda\Delta}\Bigg[TE_{\alpha,2}(\lambda T^{\alpha})\cdot(T-s)^{\alpha-2}E_{\alpha,\alpha-1}(\lambda(T-s)^{\alpha})-$$

$$-(E_{\alpha,1}(\lambda T^{\alpha})-1)\cdot(T-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda(T-s)^{\alpha})\Bigg](E_{\alpha,1}(\lambda t^{\alpha})-E_{\alpha,1}(\lambda a^{\alpha}))+$$

$$+\frac{1}{\lambda\Delta}\Bigg[T^{-1}E_{\alpha,0}(\lambda T^{\alpha})\cdot(T-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda(T-s)^{\alpha})-$$

$$-(E_{\alpha,1}(\lambda T^{\alpha})-1)\cdot(T-s)^{\alpha-2}E_{\alpha,\alpha-1}(\lambda(T-s)^{\alpha})\Bigg](tE_{\alpha,2}(\lambda t^{\alpha})-aE_{\alpha,2}(\lambda a^{\alpha})),$$

где

$$\Delta=\frac{1}{\lambda}\big((E_{\alpha,1}(\lambda T^{\alpha})-1)^2-E_{\alpha,0}(\lambda T^{\alpha})E_{\alpha,2}(\lambda T^{\alpha})\big).$$

Тогда решение задачи (2.4)–(2.5) примет вид:

$$x(t)=\xi-\int_0^a(a-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda(a-s)^{\alpha})(I_0^{\beta}f)(s)\,ds+\int_0^T L(t,s)(I_0^{\beta}f)(s)\,ds+$$

$$+\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t-s)^{\alpha})(I_0^{\beta}f)(s)\,ds.$$

Лемма 4. *Для функции L справедлива оценка*

$$\int_0^T|L(t,s)|\,ds\leqslant\frac{\gamma_1^3+5\gamma_1\gamma_2}{\lambda|\gamma_1^2-\gamma_2|},$$

где

$$\gamma_1=E_{\alpha,1}(\lambda T^{\alpha})-1,\quad \gamma_2=E_{\alpha,0}(\lambda T^{\alpha})E_{\alpha,2}(\lambda T^{\alpha}).\tag{2.8}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Подставив в формулу для функции L выражение Δ, мы получим

$$\int_0^T|L(t,s)|\,ds\leqslant\Bigg[\frac{TE_{\alpha,2}(\lambda T^{\alpha})\int_0^T(T-s)^{\alpha-2}E_{\alpha,\alpha-1}(\lambda(T-s)^{\alpha})\,ds}{|\,(E_{\alpha,1}(\lambda T^{\alpha})-1)^2-E_{\alpha,0}(\lambda T^{\alpha})E_{\alpha,2}(\lambda T^{\alpha})|}+$$

$$+\frac{(E_{\alpha,1}(\lambda T^{\alpha})-1)\int_0^T(T-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda(T-s)^{\alpha})\,ds}{|\,(E_{\alpha,1}(\lambda T^{\alpha})-1)^2-E_{\alpha,0}(\lambda T^{\alpha})E_{\alpha,2}(\lambda T^{\alpha})|}\Bigg]|E_{\alpha,1}(\lambda t^{\alpha})-E_{\alpha,1}(\lambda a^{\alpha})|+$$

$$+\Bigg[\frac{T^{-1}E_{\alpha,0}(\lambda T^{\alpha})\int_0^T(T-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda(T-s)^{\alpha})\,ds}{|\,(E_{\alpha,1}(\lambda T^{\alpha})-1)^2-E_{\alpha,0}(\lambda T^{\alpha})E_{\alpha,2}(\lambda T^{\alpha})|}+$$

$$+\frac{(E_{\alpha,1}(\lambda T^\alpha)-1)\int_0^T(T-s)^{\alpha-2}E_{\alpha,\alpha-1}(\lambda(T-s)^\alpha)\,ds}{|\,(E_{\alpha,1}(\lambda T^\alpha)-1)^2-E_{\alpha,0}(\lambda T^\alpha)E_{\alpha,2}(\lambda T^\alpha)|}\Bigg]|tE_{\alpha,2}(\lambda t^\alpha)-aE_{\alpha,2}(\lambda a^\alpha)|.$$

Аналогичным образом, как и в доказательстве леммы 3, мы можем вычислить интегралы из правой части последнего выражения:

$$\int_0^T(T-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda(T-s)^\alpha)\,ds=\frac{1}{\lambda}\,(E_{\alpha,1}(\lambda T^\alpha)-1),$$
$$\int_0^T(T-s)^{\alpha-2}E_{\alpha,\alpha-1}(\lambda(T-s)^\alpha)\,ds=\frac{1}{\lambda}T^{-1}E_{\alpha,0}(\lambda T^\alpha).$$

Используя найденные значения интегралов, продолжим оценку

$$\int_0^T|L(t,s)|\,ds\leqslant\Bigg[\frac{TE_{\alpha,2}(\lambda T^\alpha)\frac{1}{\lambda}T^{-1}E_{\alpha,0}(\lambda T^\alpha)}{|\,(E_{\alpha,1}(\lambda T^\alpha)-1)^2-E_{\alpha,0}(\lambda T^\alpha)E_{\alpha,2}(\lambda T^\alpha)|}+$$
$$+\frac{(E_{\alpha,1}(\lambda T^\alpha)-1)\,\frac{1}{\lambda}\,(E_{\alpha,1}(\lambda T^\alpha)-1)}{|\,(E_{\alpha,1}(\lambda T^\alpha)-1)^2-E_{\alpha,0}(\lambda T^\alpha)E_{\alpha,2}(\lambda T^\alpha)|}\Bigg]|E_{\alpha,1}(\lambda t^\alpha)-E_{\alpha,1}(\lambda a^\alpha)|+$$
$$+\Bigg[\frac{T^{-1}E_{\alpha,0}(\lambda T^\alpha)\frac{1}{\lambda}\,(E_{\alpha,1}(\lambda T^\alpha)-1)}{|\,(E_{\alpha,1}(\lambda T^\alpha)-1)^2-E_{\alpha,0}(\lambda T^\alpha)E_{\alpha,2}(\lambda T^\alpha)|}+$$
$$+\frac{(E_{\alpha,1}(\lambda T^\alpha)-1)\,\frac{1}{\lambda}T^{-1}E_{\alpha,0}(\lambda T^\alpha)}{|\,(E_{\alpha,1}(\lambda T^\alpha)-1)^2-E_{\alpha,0}(\lambda T^\alpha)E_{\alpha,2}(\lambda T^\alpha)|}\Bigg]|tE_{\alpha,2}(\lambda t^\alpha)-aE_{\alpha,2}(\lambda a^\alpha)|\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{\lambda}\frac{E_{\alpha,2}(\lambda T^\alpha)E_{\alpha,0}(\lambda T^\alpha)+(E_{\alpha,1}(\lambda T^\alpha)-1)^2}{|\,(E_{\alpha,1}(\lambda T^\alpha)-1)^2-E_{\alpha,0}(\lambda T^\alpha)E_{\alpha,2}(\lambda T^\alpha)|}\,(E_{\alpha,1}(\lambda T^\alpha)-1)+$$
$$+\frac{1}{\lambda}\frac{2T^{-1}E_{\alpha,0}(\lambda T^\alpha)\,(E_{\alpha,1}(\lambda T^\alpha)-1)}{|\,(E_{\alpha,1}(\lambda T^\alpha)-1)^2-E_{\alpha,0}(\lambda T^\alpha)E_{\alpha,2}(\lambda T^\alpha)|}2TE_{\alpha,2}(\lambda T^\alpha)=\frac{\gamma_1^3+5\gamma_1\gamma_2}{\lambda|\gamma_1^2-\gamma_2|}.$$

□

Будем полагать, что оператор $f\colon[0,T]\times E\to E$ подчиняется следующим условиям:

$(f1)$ для любого $\xi\in E$ функция $f\,(\cdot,\xi)\colon\ [0,T]\to E$ измерима;

$(f2)$ для п. в. $t\in[0,T]$ оператор $f(t,\cdot)\colon E\to E$ непрерывен;

$(f3)$ существует функция $\omega\in L_+^\infty([0,T])$ такая, что для каждого $\xi\in E$ мы имеем неравенство

$$\|f(t,\xi)\|_E\leqslant\omega(t)(1+\|\xi\|_E)\ \text{ для п. в. }\ t\in[0,T].$$

$(f4)$ существует функция $\mu\in L_+^\infty([0,T])$ такая, что для каждого ограниченного множества $\Omega\subset E$ выполняется неравенство

$$\chi(f(t,\Omega))\leqslant\mu(t)\chi(\Omega),$$

для п. в. $t\in[0,T]$, где χ — мнк Хаусдорфа в E.

Введем в рассмотрение оператор F заданный следующим образом

$$Fx(t)=\xi-\int_0^a(a-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda(a-s)^\alpha)(I_0^\beta f)(s,x(s))\,ds+\int_0^T L(t,s)(I_0^\beta f)(s,x(s))\,ds+$$
$$+\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t-s)^\alpha)(I_0^\beta f)(s,x(s))\,ds.$$

Из определения функции L следует, что для любого $t \in [0,T]$ и $1 < \alpha < 2$, $L(\cdot,s) \in L^p([0,T])$, $p \geqslant 1$, и функция L теряет непрерывность только в точке $s = T$, поэтому $F\colon C([0,T];E) \to C([0,T];E)$.

Если функция $x \in C([0,T];E)$ является решением задачи (0.1)–(0.2), то она является неподвижной точкой оператора F. Поэтому мы в дальнейшем будем доказывать существование неподвижных точек оператора F.

Для доказательства существования неподвижных точек оператора F введем в рассмотрение оператор $S\colon L^\infty([0,T];E) \to C([0,T];E)$ вида

$$S(f)(t) = \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t-s)^\alpha) g(s)\, ds.$$

Лемма 5 (см. [9]). *Для каждого компактного множества $K \subset E$ и ограниченной последовательности $\{\xi_n\} \subset L^\infty([0,T];E)$ такой, что $\{\xi_n(t)\} \subset K$ для п. в. $t \in [0,T]$, слабая сходимость $\xi_n \rightharpoonup \xi_0$ в $L^1([0,T];E)$ влечет сходимость $S(\xi_n) \to S(\xi_0)$ в $C([0,T];E)$.*

Лемма 6 (см. [9]). *Пусть $\Omega \subset C([0,T];E)$ — непустое ограниченное множество, $\Omega(t)$ — относительно компактное подмножество E для каждого $t \in [0,T]$ и функция g подчиняется условиям $(f1)$–$(f4)$, тогда*

$$M = \left\{ S(f)(t) = \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t-s)^\alpha) g(s,x(s))\, ds \colon x \in \Omega \right\}$$

является равностепенно непрерывным множеством.

Для доказательства того, что оператор F уплотняющий, рассмотрим конус

$$\mathbb{R}^2_+ = \{\zeta = (\zeta_1,\zeta_2)\colon \zeta_1 \geqslant 0, \zeta_2 \geqslant 0\}$$

с естественным частичным порядком и введем в пространстве $C([0,T];E)$ следующую векторную меру некомпактности

$$\nu\colon Pb(C([0,T];E)) \to \mathbb{R}^2_+,$$

определенную как

$$\nu(\Omega) = (\varphi(\Omega), \quad \operatorname{mod}_C(\Omega)),$$

где $\varphi(\Omega)$ есть модуль послойной некомпактности

$$\varphi(\Omega) = \sup_{t\in[0,T]} \chi(\{y(t)\colon y \in \Omega\}),$$

а вторая компонента — модуль равностепенной непрерывности

$$\operatorname{mod}_C(\Omega) = \lim_{\delta\to 0} \sup_{y\in\Omega} \max_{|t_1-t_2|\leqslant\delta} \|y(t_1) - y(t_2)\|.$$

Теорема 2. *Пусть выполняются условия $(f1)$–$(f4)$,* (2.3). *Предположим, что дополнительно выполняется условие*

$$\frac{\|\mu\|_\infty T^\beta}{\lambda\Gamma(\beta+1)} \left(2\gamma_1 + \frac{\gamma_1^3 + 5\gamma_1\gamma_2}{|\gamma_1^2 - \gamma_2|} \right) < 1, \tag{2.9}$$

где $\mu(\cdot)$ — функция из условия $(f4)$, а γ_1, γ_2 — константы из формул (2.8). *Тогда оператор F является ν-уплотняющим.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\Omega \subset C([0,T];E)$ — непустое ограниченное множество такое, что

$$\nu(F(\Omega)) \geqslant \nu(\Omega). \tag{2.10}$$

Покажем, что Ω — относительно компактно.

Из (2.10), следует, что

$$\varphi(F(\Omega)) \geqslant \varphi(\Omega). \tag{2.11}$$

Используя свойство $(f4)$, мы для $s \in [0,T]$ имеем

$$\chi\left((I_0^\beta f)(s,x(s))\colon x\in\Omega\right) = \chi\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^s (s-\tau)^{\beta-1} f(\tau,x(\tau))\,d\tau\colon x\in\Omega\right) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^s (s-\tau)^{\beta-1}\|\mu\|_\infty \chi(\Omega(\tau))\,d\tau \leqslant \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^s (s-\tau)^{\beta-1}\,d\tau\cdot\|\mu\|_\infty\varphi(\Omega) =$$
$$= \frac{s^\beta}{\Gamma(\beta)\beta}\cdot\|\mu\|_\infty\varphi(\Omega) \leqslant \frac{T^\beta}{\Gamma(\beta+1)}\cdot\|\mu\|_\infty\varphi(\Omega).$$

Теперь применяя лемму 4, а также уже известные результаты вычислений интегралов, мы получаем оценку

$$\chi\left(F(\Omega)(t)\right) \leqslant \chi\left(\int_0^a (a-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda(a-s)^\alpha)(I_0^\beta f)(s,x(s))ds\colon x\in\Omega\right) +$$
$$+\chi\left(\int_0^T L(t,s)(I_0^\beta f)(s,x(s))\,ds\colon x\in\Omega\right) +$$
$$+\chi\left(\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t-s)^\alpha)(I_0^\beta f)(s,x(s))\,ds\colon x\in\Omega\right) \leqslant$$
$$\leqslant \int_0^a (a-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda(a-s)^\alpha)\chi\left((I_0^\beta f)(s,x(s))\colon x\in\Omega\right)ds +$$
$$+\int_0^T |L(t,s)|\chi\left((I_0^\beta f)(s,x(s))\colon x\in\Omega\right)\,ds +$$
$$+\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t-s)^\alpha)\chi\left((I_0^\beta f)(s,x(s))\,:\,x\in\Omega\right)ds \leqslant$$
$$+\int_0^a (a-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda(a-s)^\alpha)ds\cdot\frac{T^\beta}{\Gamma(\beta+1)}\|\mu\|_\infty\varphi(\Omega) +$$
$$+\int_0^T |L(t,s)|\,ds\cdot\frac{T^\beta}{\Gamma(\beta+1)}\|\mu\|_\infty\varphi(\Omega) +$$
$$+\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t-s)^\alpha)ds\cdot\frac{T^\beta}{\Gamma(\beta+1)}\|\mu\|_\infty\varphi(\Omega) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{\lambda}\left(E_{\alpha,1}(\lambda a^\alpha)-1\right)\cdot\frac{T^\beta}{\Gamma(\beta+1)}\|\mu\|_\infty\varphi(\Omega) +$$
$$+\frac{\gamma_1^3+5\gamma_1\gamma_2}{\lambda|\gamma_1^2-\gamma_2|}\cdot\frac{T^\beta}{\Gamma(\beta+1)}\|\mu\|_\infty\varphi(\Omega) + \frac{1}{\lambda}\left(E_{\alpha,1}(\lambda t^\alpha)-1\right)\cdot\frac{T^\beta}{\Gamma(\beta+1)}\|\mu\|_\infty\varphi(\Omega) =$$
$$= \frac{\|\mu\|_\infty T^\beta}{\lambda\Gamma(\beta+1)}\left(2\gamma_1 + \frac{\gamma_1^3+5\gamma_1\gamma_2}{|\gamma_1^2-\gamma_2|}\right)\cdot\varphi(\Omega).$$

Из последней оценки мы имеем

$$\sup_{t\in[0,T]} \chi\left(F(\Omega)(t)\right) \leqslant \frac{\|\mu\|_\infty T^\beta}{\lambda\Gamma(\beta+1)}\left(2\gamma_1 + \frac{\gamma_1^3+5\gamma_1\gamma_2}{|\gamma_1^2-\gamma_2|}\right)\cdot\varphi(\Omega),$$

или что то же самое

$$\varphi\left(F(\Omega)\right) \leqslant \frac{\|\mu\|_\infty T^\beta}{\lambda\Gamma(\beta+1)}\left(2\gamma_1 + \frac{\gamma_1^3+5\gamma_1\gamma_2}{|\gamma_1^2-\gamma_2|}\right)\cdot\varphi(\Omega).$$

Условия (2.9) и (2.11) вместе с последним влекут за собой равенство

$$\varphi(\Omega)=0.$$

Теперь покажем, что

$$\mathrm{mod}\,_C(F(\Omega))=0.$$

Неравенство (2.10) влечет за собой следующее

$$\mathrm{mod}\,_C(F(\Omega)) \geqslant \mathrm{mod}\,_C(\Omega).$$

В тоже время из леммы 6 известно, что множество функций

$$M=\left\{S(f)(t)=\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t-s)^\alpha)(I_0^\beta f)(s,x(s))\,ds\colon x\in\Omega\right\}$$

является равностепенно непрерывным, поэтому

$$\mathrm{mod}\,_C(F(\Omega))=0,$$

следовательно, и $\mathrm{mod}\,_C(\Omega)=0$, поэтому $\nu(\Omega)=(0,0)$, что доказывает относительную компактность множества Ω. □

Перейдем к доказательству главного утверждения работы.

Теорема 3. *При выполнении условий* $(f1)$–$(f4)$, (2.3) *предположим, что*

$$l=\frac{kT^\beta}{\lambda\Gamma(\beta+1)}\left(2\gamma_1+\frac{\gamma_1^3+5\gamma_1\gamma_2}{|\gamma_1^2-\gamma_2|}\right)<1,$$

где $k=\max\{\|\omega\|_\infty, \|\mu\|_\infty\}$, *функции* ω *и* μ *из условий* $(f3)$ *и* $(f4)$ *соответственно. Тогда задача* (0.1)–(0.2) *имеет решение.*

Доказательство. Возьмем произвольную функцию $x\in C([0,T];E)$. Благодаря свойству $(f3)$, мы для нормы дробного интеграла имеем:

$$\begin{aligned}\|(I_0^\beta f)(s,x(s))\|_E &= \frac{1}{\Gamma(\beta)}\left\|\int_0^s (s-\tau)^{\beta-1}f(\tau,x(\tau))\,d\tau\right\|_E \leqslant\\ &\leqslant \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^s (s-\tau)^{\beta-1}\omega(s)(1+\|x(s)\|_E)\,d\tau \leqslant\\ &\leqslant \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^s (s-\tau)^{\beta-1}\,d\tau\cdot\|\omega\|_\infty(1+\|x\|_{C([0,T];E)}) =\\ = \frac{s^\beta}{\Gamma(\beta)\beta}\cdot\|\omega\|_\infty(1+\|x\|_{C([0,T];E)}) &\leqslant \frac{T^\beta}{\Gamma(\beta+1)}\cdot\|\omega\|_\infty(1+\|x\|_{C([0,T];E)}).\end{aligned}$$

Применяя лемму 4, для каждого $t \in [0,T]$ мы получаем оценку

$$\|F(x)(t)\|_E \leqslant \|\xi\|_E + \Big\| \int_0^a (a-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda(a-s)^\alpha)(I_0^\beta f)(s,x(s))\,ds \Big\|_E +$$
$$+ \Big\| \int_0^T L(t,s)(I_0^\beta f)(s,x(s))\,ds \Big\|_E + \Big\| \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t-s)^\alpha)(I_0^\beta f)(s,x(s))\,ds \Big\|_E \leqslant$$
$$\leqslant \|\xi\|_E + \int_0^a (a-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda(a-s)^\alpha)\|(I_0^\beta f)(s,x(s))\|_E\,ds +$$
$$+ \int_0^T |L(t,s)|\|(I_0^\beta f)(s,x(s))\|_E\,ds + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t-s)^\alpha)\|(I_0^\beta f)(s,x(s))\|_E\,ds \leqslant$$
$$\leqslant \|\xi\|_E + \int_0^a (a-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda(a-s)^\alpha)\,ds \cdot \frac{T^\beta}{\Gamma(\beta+1)}\|\omega\|_\infty(1+\|x\|_{C([0,T];E)}) +$$
$$+ \int_0^T |L(t,s)|\,ds \cdot \frac{T^\beta}{\Gamma(\beta+1)}\|\omega\|_\infty(1+\|x\|_{C([0,T];E)}) +$$
$$+ \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t-s)^\alpha)\,ds \cdot \frac{T^\beta}{\Gamma(\beta+1)}\|\omega\|_\infty(1+\|x\|_{C([0,T];E)}) \leqslant$$
$$\leqslant \|\xi\|_E + \frac{1}{\lambda}\left(E_{\alpha,1}(\lambda a^\alpha)-1\right) \cdot \frac{T^\beta}{\Gamma(\beta+1)}\|\omega\|_\infty(1+\|x\|_{C([0,T];E)}) +$$
$$+ \frac{\gamma_1^3+5\gamma_1\gamma_2}{\lambda|\gamma_1^2-\gamma_2|} \cdot \frac{T^\beta}{\Gamma(\beta+1)}\|\omega\|_\infty(1+\|x\|_{C([0,T];E)}) +$$
$$+ \frac{1}{\lambda}\left(E_{\alpha,1}(\lambda t^\alpha)-1\right) \cdot \frac{T^\beta}{\Gamma(\beta+1)}\|\omega\|_\infty(1+\|x\|_{C([0,T];E)}) \leqslant$$
$$\leqslant \|\xi\|_E + \frac{kT^\beta}{\lambda\Gamma(\beta+1)}\left(2\gamma_1 + \frac{\gamma_1^3+5\gamma_1\gamma_2}{|\gamma_1^2-\gamma_2|}\right) \cdot (1+\|x\|_{C([0,T];E)}) = \|\xi\|_E + l(1+\|x\|_{C([0,T];E)}).$$

Если мы возьмем

$$R \geqslant \frac{\|\xi\|_E + l}{1-l},$$

тогда неравенство $\|x\|_{C([0,T];E)} \leqslant R$ влечет, что $\|Fx\|_{C([0,T];E)} \leqslant R$. Таким образом, оператор F преобразует замкнутый шар $B_R(0) \subset C([0,T];E)$ в себя. Поскольку оператор F уплотняющий, по теореме 1 он имеет неподвижную точку, которая дает решение задачи (0.1)–(0.2). □

Финансирование. Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-31-60011 и гранта Президента РФ для государственной поддержки молодых российских ученых — кандидатов наук, проект МК-338.2021.1.1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Афанасова М. С., Петросян Г. Г. О краевой задаче для функционально-дифференциального включения дробного порядка с общим начальным условием в банаховом пространстве // Известия высших учебных заведений. Математика. 2019. № 9. С. 3–15. https://doi.org/10.26907/0021-3446-2019-9-3-15
2. Илолов М. И. Дробные линейные интегро-дифференциальные уравнения Вольтерра в банаховых пространствах // Итоги науки и техники. Серия «Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры». 2019. Т. 173. С. 58–64. https://doi.org/10.36535/0233-6723-2019-173-58-64

3. Петросян Г. Г. Об антипериодической краевой задаче для полулинейного дифференциального включения дробного порядка с отклоняющимся аргументом в банаховом пространстве // Уфимский математический журнал. 2020. Т. 12. № 3. С. 71–82. http://mi.mathnet.ru/ufa529
4. Ahmad B., Ntouyas S. K., Alsaedi A., Alnahdi M. Existence theory for fractional-order neutral boundary value problems // Fractional Differential Calculus. 2018. Vol. 8. No. 1. P. 111–126. https://doi.org/10.7153/fdc-2018-08-07
5. Benedetti I., Obukhovskii V., Taddei V. On noncompact fractional order differential inclusions with generalized boundary condition and impulses in a Banach space // Journal of Function Spaces. 2015. Vol. 2015. Article ID: 651359. https://doi.org/10.1155/2015/651359
6. Gorenflo R., Kilbas A. A., Mainardi F., Rogosin S. V. Mittag–Leffler functions, related topics and applications. Berlin–Heidelberg: Springer, 2014. https://doi.org/10.1007/978-3-662-43930-2
7. Hilfer R. Applications of fractional calculus in physics. Singapore: World Scientific, 2000. https://doi.org/10.1142/3779
8. Kamenskii M. I., Obukhovskii V. V., Zecca P. Condensing multivalued maps and semilinear differential inclusions in Banach spaces. Berlin–New York: De Gruyter, 2001. https://doi.org/10.1515/9783110870893
9. Kamenskii M. I., Petrosyan G. G., Wen C.-F. An existence result for a periodic boundary value problem of fractional semilinear differential equations in a Banach space // Journal of Nonlinear and Variational Analysis. 2021. Vol. 5. Issue 1. P. 155–177. https://doi.org/10.23952/jnva.5.2021.1.10
10. Ke T. D., Loi N. V., Obukhovskii V. V. Decay solutions for a class of fractional differential variational inequalities // Fractional Calculus and Applied Analysis. 2015. Vol. 18. Issue 3. P. 531–553. https://doi.org/10.1515/fca-2015-0033
11. Ke T. D., Obukhovskii V. V., Wong N.-Ch., Yao J.-Ch. On a class of fractional order differential inclusions with infinite delays // Applicable Analysis. 2013. Vol. 92. Issue 1. P. 115–137. https://doi.org/10.1080/00036811.2011.601454
12. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. Theory and applications of fractional differential equations. Amsterdam: Elsevier, 2006.
13. Mainardi F., Rionero S., Ruggeri T. On the initial value problem for the fractional diffusion-wave equation // Waves and Stability in Continuous Media. Singapore: World Scientific, 1994. P. 246–251.
14. Ntouyas S. K., Alsaedi A., Ahmad B. Existence theorems for mixed Riemann–Liouville and Caputo fractional differential equations and inclusions with nonlocal fractional integro-differential boundary conditions // Fractal and Fractional. 2019. Vol. 3. Issue 2. Article 21. https://doi.org/10.3390/fractalfract3020021
15. Obukhovskii V. V., Gel'man B. D. Multivalued maps and differential inclusions. Elements of theory and applications. Hackensack, NJ: World Scientific, 2020. https://doi.org/10.1142/11825
16. Petrosyan G. G. Antiperiodic boundary value problem for a semilinear differential equation of fractional order // Известия Иркутского государственного университета. Сер. Математика. 2020. Т. 34. С. 51–66. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2020.34.51
17. Podlubny I. Fractional differential equations. An introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications. San Diego: Academic Press, 1998.
18. Salem A., Alzahrani F., Almaghamsi L. Fractional Langevin equations with nonlocal integral boundary conditions // Mathematics. 2019. Vol. 7. Issue 5. Article 402. https://doi.org/10.3390/math7050402
19. Salem A., Alnegga M. Fractional Langevin equations with multi-point and non-local integral boundary conditions // Cogent Mathematics and Statistics. 2020. Vol. 7. Issue 1. Article: 1758361. https://doi.org/10.1080/25742558.2020.1758361
20. Tarasov V. E. Fractional dynamics. Applications of fractional calculus to dynamics of particles, fields and media. Berlin: Springer, 2010. https://doi.org/10.1007/978-3-642-14003-7
21. Wang G., Zhang L., Song G. Boundary value problem of a nonlinear Langevin equation with two different fractional orders and impulses // Fixed Point Theory and Applications. 2012. Vol. 2012. Issue 1. Article number: 200. https://doi.org/10.1186/1687-1812-2012-200

Поступила в редакцию 23.06.2022

Принята к публикации 21.07.2022

Петросян Гарик Гагикович, к. ф.-м. н., ведущий научный сотрудник, Научно-образовательный центр, Воронежский государственный университет инженерных технологий, 394036, Россия, г. Воронеж, пр. Революции, 19;
доцент, кафедра высшей математики, Воронежский государственный педагогический университет, 394024, Россия, г. Воронеж, ул. Ленина, 86.
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-8154-6299
E-mail: garikpetrosyan@yandex.ru

Цитирование: Г. Г. Петросян. О краевой задаче для класса дифференциальных уравнений дробного порядка типа Ланжевена в банаховом пространстве // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2022. Т. 32. Вып. 3. С. 415–432.

VESTNIK UDMURTSKOGO UNIVERSITETA. MATEMATIKA. MEKHANIKA. KOMP'UTERNYE NAUKI

MATHEMATICS 2022. Vol. 32. Issue 3. Pp. 415–432.

G. G. Petrosyan

On a boundary value problem for a class of fractional Langevin type differential equations in a Banach space

Keywords: Caputo fractional derivative, Langevin type differential equation, boundary value problem, fixed point, condensing map, measure of noncompactness, Mittag–Leffler function.

MSC2020: 34B15, 34B30, 34G20, 47H08, 47H10

DOI: 10.35634/vm220305

In this paper, we consider a boundary value problem for differential equations of Langevin type with the Caputo fractional derivative in a Banach space. It is assumed that the nonlinear part of the equation is a Caratheodory type map. Equations of this type generalize equations of motion in various kinds of media, for example, viscoelastic media or in media where a drag force is expressed using a fractional derivative. We will use the theory of fractional mathematical analysis, the properties of the Mittag–Leffler function, as well as the theory of measures of non-compactness and condensing operators to solve the problem. The initial problem is reduced to the problem of the existence of fixed points of the corresponding resolving integral operator in the space of continuous functions. We will use Sadovskii type fixed point theorem to prove the existence of fixed points of the resolving operator. We will show that the resolving integral operator is condensing with respect to the vector measure of non-compactness in the space of continuous functions and transforms a closed ball in this space into itself.

Funding. The work was supported by the RFBR, project number 19-31-60011 and the grant from the President of the Russian Federation for young scientists — candidates of science, project number MK-338.2021.1.1.

REFERENCES

1. Afanasova M. S., Petrosyan G. G. On the boundary value problem for functional differential inclusion of fractional order with general initial condition in a Banach space, *Russian Mathematics*, 2019, vol. 63, no. 9, pp. 1–11. https://doi.org/10.3103/S1066369X19090019
2. Ilolov M. I. Fractional linear Volterra integro-differential equations in Banach spaces, *Itogi Nauki i Tekhniki. Seriya "Sovremennaya Matematika i ee Prilozheniya. Tematicheskie Obzory"*, 2019, vol. 173, pp. 58–64 (in Russian). https://doi.org/10.36535/0233-6723-2019-173-58-64
3. Petrosyan G. G. On antiperiodic boundary value problem for semilinear fractional differential inclusion with a deviating argument in Banach space, *Ufa Mathematical Journal*, 2020, vol. 12, no. 3, pp. 69–80. https://doi.org/10.13108/2020-12-3-69
4. Ahmad B., Ntouyas S. K., Alsaedi A., Alnahdi M. Existence theory for fractional-order neutral boundary value problems, *Fractional Differential Calculus*, 2018, vol. 8, no. 1, pp. 111–126. https://doi.org/10.7153/fdc-2018-08-07
5. Benedetti I., Obukhovskii V., Taddei V. On noncompact fractional order differential inclusions with generalized boundary condition and impulses in a Banach space, *Journal of Function Spaces*, 2015, vol. 2015, article ID: 651359. https://doi.org/10.1155/2015/651359
6. Gorenflo R., Kilbas A. A., Mainardi F., Rogosin S. V. *Mittag–Leffler functions, related topics and applications*, Berlin–Heidelberg: Springer, 2014. https://doi.org/10.1007/978-3-662-43930-2
7. Hilfer R. *Applications of fractional calculus in physics*, Singapore: World Scientific, 2000. https://doi.org/10.1142/3779
8. Kamenskii M. I., Obukhovskii V. V., Zecca P. *Condensing multivalued maps and semilinear differential inclusions in Banach spaces*, Berlin–New York: De Gruyter, 2001. https://doi.org/10.1515/9783110870893
9. Kamenskii M. I., Petrosyan G. G., Wen C.-F. An existence result for a periodic boundary value problem of fractional semilinear differential equations in a Banach space, *Journal of Nonlinear and Variational Analysis*, 2021, vol. 5, issue 1, pp. 155–177. https://doi.org/10.23952/jnva.5.2021.1.10

10. Ke T. D., Loi N. V., Obukhovskii V. V. Decay solutions for a class of fractional differential variational inequalities, *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 2015, vol. 18, issue 3, pp. 531–553. https://doi.org/10.1515/fca-2015-0033
11. Ke T. D., Obukhovskii V. V., Wong N.-Ch., Yao J.-Ch. On a class of fractional order differential inclusions with infinite delays, *Applicable Analysis*, 2013, vol. 92, issue 1, pp. 115–137. https://doi.org/10.1080/00036811.2011.601454
12. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. *Theory and applications of fractional differential equations*, Amsterdam: Elsevier, 2006.
13. Mainardi F., Rionero S., Ruggeri T. On the initial value problem for the fractional diffusion-wave equation, *Waves and Stability in Continuous Media*, Singapore: World Scientific, 1994, pp. 246–251.
14. Ntouyas S. K., Alsaedi A., Ahmad B. Existence theorems for mixed Riemann–Liouville and Caputo fractional differential equations and inclusions with nonlocal fractional integro-differential boundary conditions, *Fractal and Fractional*, 2019, vol. 3, issue 2, article 21. https://doi.org/10.3390/fractalfract3020021
15. Obukhovskii V. V., Gel'man B. D. *Multivalued maps and differential inclusions. Elements of theory and applications*, Hackensack, NJ: World Scientific, 2020. https://doi.org/10.1142/11825
16. Petrosyan G. G. Antiperiodic boundary value problem for a semilinear differential equation of fractional order, *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2020, vol. 34, pp. 51–66. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2020.34.51
17. Podlubny I. *Fractional differential equations. An introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications*, San Diego: Academic Press, 1998.
18. Salem A., Alzahrani F., Almaghamsi L. Fractional Langevin equations with nonlocal integral boundary conditions, *Mathematics*, 2019, vol. 7, issue 5, article 402. https://doi.org/10.3390/math7050402
19. Salem A., Alnegga M. Fractional Langevin equations with multi-point and non-local integral boundary conditions, *Cogent Mathematics and Statistics*, 2020, vol. 7, issue 1, article: 1758361. https://doi.org/10.1080/25742558.2020.1758361
20. Tarasov V. E. *Fractional dynamics. Applications of fractional calculus to dynamics of particles, fields and media*, Berlin: Springer, 2010. https://doi.org/10.1007/978-3-642-14003-7
21. Wang G., Zhang L., Song G. Boundary value problem of a nonlinear Langevin equation with two different fractional orders and impulses, *Fixed Point Theory and Applications*, 2012, vol. 2012, issue 1, article number: 200. https://doi.org/10.1186/1687-1812-2012-200

Received 23.06.2022

Accepted 21.07.2022

Garik Gagikovich Petrosyan, Candidate of Physics and Mathematics, Leading Researcher, Research and Educational Center, Voronezh State University of Engineering Technologies, pr. Revolyutsii, 19, Voronezh, 394036, Russia.
Assistant Professor, Department of Higher Mathematics, Voronezh State Pedagogical University, ul. Lenina, 86, Voronezh, 394043, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-8154-6299
E-mail: garikpetrosyan@yandex.ru

Citation: G. G. Petrosyan. On a boundary value problem for a class of fractional Langevin type differential equations in a Banach space, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2022, vol. 32, issue 3, pp. 415–432.