

УДК 519.872

© А. А. Назаров, Я. Е. Измайлова, А. Т. Исаев

АСИМПТОТИЧЕСКИ-ДИФFUЗИОННЫЙ АНАЛИЗ БЕСКОНЕЧНОЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ ЗАЯВКАМИ И БЛОКОМ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ДЛЯ ИСКАЖЕННЫХ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ

Рассматривается бесконечнолинейная система массового обслуживания с положительными и отрицательными заявками и блоком восстановления для искаженных положительных. Основным методом исследования является метод асимптотически-диффузионного анализа, заключающийся в построении диффузионной аппроксимации распределения вероятностей числа заявок в блоке восстановления. Были получены одномерные распределения вероятностей числа заявок в блоке обслуживания и числа заявок в блоке восстановления. Для определения области применимости полученных асимптотических результатов построена имитационная модель функционирования СМО.

Ключевые слова: система массового обслуживания (СМО), отрицательные заявки, блок восстановления, асимптотически-диффузионный анализ, имитационное моделирование.

DOI: [10.35634/vm250303](https://doi.org/10.35634/vm250303)**Введение**

В современном мире практически во всех сферах деятельности требуется организация эффективного обслуживания поступающих запросов. Будь то клиенты в торговых точках, звонки в службы поддержки или заявки на техническое обслуживание — все эти процессы можно рассматривать как системы массового обслуживания (СМО), где ограниченные ресурсы направлены на обработку непрерывного удовлетворения требований. Теория массового обслуживания обеспечивает математический аппарат и аппарат теории вероятностей для анализа таких систем, что позволяет выявить причины возникновения очередей, задержек и повторных обращений, а также разработать методы повышения эффективности обслуживания.

Тем не менее, в реальности функционирование таких систем часто оказывается далеким от идеала. На процесс обслуживания влияют различные внешние факторы и помехи, которые могут существенно нарушить привычный порядок работы. Внешние помехи в СМО могут проявляться через технические сбои, ошибки сотрудников, неожиданные задержки и другие специфические воздействия, которые в теории массового обслуживания обозначаются как «отрицательные заявки». Эти отрицательные заявки не просто добавляют нагрузку, но и могут исказить или прерывать процесс обслуживания положительных заявок, что требует дополнительных усилий для восстановления и повторной обработки.

Понятие отрицательных заявок была введена Э. Геленбе в рамках разработки G -сетей — обобщения классических моделей массового обслуживания, включающего как положительные, так и отрицательные потоки [1]. Существенный вклад в развитие G -сетей с отрицательными заявками внёс Жан-Мишель Фурно, расширив классы положительных и отрицательных заявок [2]. Дж. Ван и П. Чжан [3] рассмотрели систему с повторными вызовами типа Geo/Geo/1 с отрицательными клиентами и ненадежным прибором. И. Атенсия и П. Морено [4] изучили систему Geo/Geo/1 с отрицательными заявками и различными

процедурами удаления, вызванные отрицательными клиентами. В [5] рассматривается многолинейная СМО с неограниченным накопителем, марковским входящим потоком и марковским потоком отрицательных заявок, при этом поступившая отрицательная заявка уничтожает одну положительную заявку в конце очереди. Получен рекуррентный алгоритм для вычисления стационарных вероятностей состояний системы. В [6] исследована многолинейная СМО с отрицательными заявками и дополнительной очередью для вытесненных заявок.

В нынешних условиях модели систем массового обслуживания с отрицательными заявками становятся особенно актуальными для учёта прерываний и вытеснений, вызванных сбоями, ошибками и внешними факторами. Такие модели востребованы в телекоммуникациях, производстве и банковской сфере. Они позволяют точнее описывать поведение сложных сервисных систем, где стандартные подходы не учитывают негативные воздействия и необходимость восстановления. Исследуемая в данной работе модель бесконечнолинейной СМО с отрицательными заявками и блоком восстановления позволяет анализировать устойчивость и эффективность процессов с учётом реальных условий, что делает её перспективной для применения в высоконагруженных и критичных к надёжности системах. В первом параграфе описывается математическая и функциональная модель. Во втором параграфе модель исследуется методом асимптотически-диффузионного анализа. В третьем параграфе модель исследуется методом имитационного моделирования. В четвертом параграфе выполняются численные эксперименты и сравнительный анализ метода асимптотически-диффузионного анализа и метода имитационного моделирования. Заключение включает в себя основные выводы по данной работе.

§ 1. Функциональная и математическая модели, постановка задачи

1.1. Функциональная модель

Рассмотрим функциональную модель (рис. 1) системы обработки банковских операций как систему, включающую блок восстановления.



Рис. 1. Функциональная модель СМО с отрицательными заявками и блоком восстановления

Транзакции клиентов проходят через центральный блок обработки, где выполняются ключевые финансовые операции такие, как переводы, платежи. В обычных условиях все операции завершаются успешно и покидают систему. Однако в случае кибератак, например, при наличии вредоносного ПО или DDoS-атак, система безопасности принимает меры, переводя затронутые операции в блок восстановления. В этом блоке антивирусные решения осуществляют обнаружение, изоляцию и устранение угроз, а также восстанавливают целостность данных. После успешного завершения этих действий операции возвращаются

в основной блок для повторной попытки обработки. Такая структура системы гарантирует высокую степень надежности и устойчивости банковского программного обеспечения, позволяя эффективно реагировать на различные сбои и угрозы.

1.2. Математическая модель

Рассмотрим бесконечнолинейную систему массового обслуживания на вход которой поступает два простейших потока заявок: поток положительных заявок и поток отрицательных заявок (рис. 2).

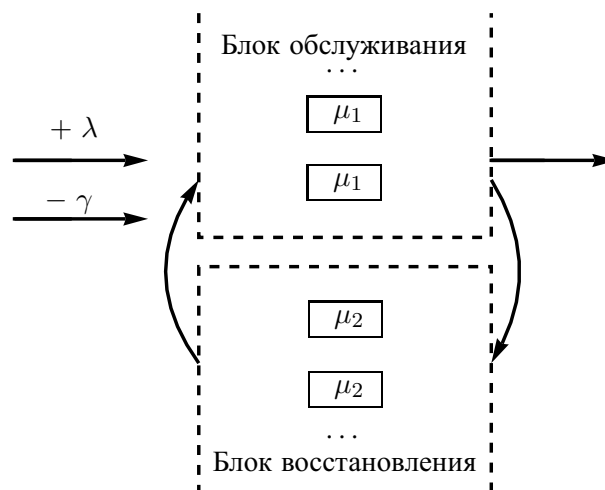


Рис. 2. Математическая модель СМО с отрицательными заявками и блоком восстановления

Поток положительных заявок поступает с интенсивностью λ , а поток отрицательных заявок поступает с интенсивностью γ . Поступившая положительная заявка переходит в блок обслуживания и встает на прибор. Время обслуживания имеет экспоненциальное распределение с параметром μ_1 . Если в момент обслуживания положительных заявок в систему приходит отрицательная заявка, то она искажает обслуживание одной из положительных, искаженная положительная заявка переходит в блок восстановления, а отрицательная заявка покидает систему. В блоке восстановления положительная заявка находится случайное время, распределенное по экспоненциальному закону с параметром μ_2 , после чего переходит вновь на обслуживание. Если в момент обслуживания положительных заявок в систему не приходит отрицательная заявка, то после обслуживания положительные заявки покидают систему. Если отрицательная заявка приходит и обнаруживает все приборы свободными, то она не влияет на состояние блока обслуживания и покидает его.

Обозначим

- $i(t)$ — число обслуживаемых положительных заявок,
- $n(t)$ — число восстанавливающихся заявок.

Рассмотрим марковский двумерный процесс $\{i(t), n(t)\}$.

Тогда $P\{i(t) = i, n(t) = n\} = P(i, n, t)$ — вероятность того, что в момент времени t число обслуживаемых положительных заявок равно i и в блоке восстановления находится n заявок.

Запишем систему дифференциальных уравнений Колмогорова:

$$\begin{cases} \text{для } i = 0 : \\ \frac{\partial P(0, n, t)}{\partial t} = -(\lambda + n\mu_2)P(0, n, t) + \mu_1 P(1, n, t) + \gamma P(1, n-1, t); \\ \text{для } i > 0 : \\ \frac{\partial P(i, n, t)}{\partial t} = -(\lambda + \gamma + i\mu_1 + n\mu_2)P(i, n, t) + (i+1)\mu_1 P(i+1, n, t) + \\ + \lambda P(i-1, n, t) + \gamma P(i+1, n-1, t) + (n+1)\mu_2 P(i-1, n+1, t). \end{cases} \quad (1.1)$$

В системе (1.1) предполагается, что $P(i, -1, t) = 0$.

Введем функцию вида

$$H(x, u, t) = \sum_{i=0}^{\infty} x^i \sum_{n=0}^{\infty} e^{jun} P(i, n, t),$$

которая по первому аргументу является производящей, а по второму — характеристической функцией. Тогда система уравнений (1.1) запишется в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial H(x, u, t)}{\partial t} = & (1-x)\mu_1 \frac{\partial H(x, u, t)}{\partial x} + j\mu_2(1-e^{-ju}x) \frac{\partial H(x, u, t)}{\partial u} + \\ & + \left(\lambda(x-1) + \gamma \left(\frac{e^{ju}}{x} - 1 \right) \right) H(x, u, t) + \left(1 - \frac{e^{ju}}{x} \right) \gamma H(0, u, t). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Обозначим $H(1, u, t) = H(u, t)$ и запишем добавочное уравнение, полученное из (1.2), положив $x = 1$:

$$\frac{\partial H(u, t)}{\partial t} = (e^{ju} - 1) \left(-\gamma H(0, u, t) + \gamma H(u, t) + j\mu_2 e^{-ju} \frac{\partial H(u, t)}{\partial u} \right). \quad (1.3)$$

Асимптотически-диффузионный анализ будем проводить в предельном условии длительного времени восстановления заявок, то есть при $\mu_2 \rightarrow 0$.

§ 2. Асимптотически-диффузионный анализ

Исследование методом асимптотически-диффузионного анализа проводится в несколько этапов.

1. Находим коэффициент переноса предельного диффузионного процесса, который будет получен позже.
2. Находим коэффициент диффузии (получаем уравнение для распределения вероятностей некоторого диффузионного процесса авторегрессии).
3. Выполняем модификацию полученного диффузионного процесса (модификация заключается в том, что переходим от процесса авторегрессии к процессу нормированному и центрированному).
4. Для построенного диффузионного процесса выписываем уравнение Фоккера–Планка в стационарном режиме и решаем его.
5. От полученной в п. 4 предельной плотности переходим к аппроксимации дискретного распределения вероятностей числа заявок в блоке восстановления.

2.1. Первый этап асимптотически-диффузионного анализа

Обозначим $\mu_2 = \epsilon$. Сделаем замены в уравнениях (1.2), (1.3):

$$\tau = \epsilon t, \quad u = \epsilon w, \quad H(x, u, t) = F^{(1)}(x, w, \tau, \epsilon).$$

Получим

$$\begin{aligned} \epsilon \frac{\partial F^{(1)}(x, w, \tau, \epsilon)}{\partial \tau} = (1-x)\mu_1 \frac{\partial F^{(1)}(x, w, \tau, \epsilon)}{\partial x} + j(1 - e^{-j\epsilon w} x) \frac{\partial F^{(1)}(x, w, \tau, \epsilon)}{\partial w} + \\ + \left(1 - \frac{e^{j\epsilon w}}{x}\right) \gamma F^{(1)}(0, w, \tau, \epsilon) + \left(\lambda(x-1) + \gamma \left(\frac{e^{j\epsilon w}}{x} - 1\right)\right) F^{(1)}(x, w, \tau, \epsilon), \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\epsilon \frac{\partial F^{(1)}(w, \tau, \epsilon)}{\partial \tau} = (e^{j\epsilon w} - 1) \left(-\gamma F^{(1)}(0, w, \tau, \epsilon) + \gamma F^{(1)}(w, \tau, \epsilon) + j e^{-j\epsilon w} \frac{\partial F^{(1)}(w, \tau, \epsilon)}{\partial w} \right). \quad (2.2)$$

Обозначим $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} F^{(1)}(x, w, \tau, \epsilon) = F^{(1)}(x, w, \tau)$. Сформулируем и докажем следующую теорему.

Теорема 2.1. *В бесконечнолинейной СМО с отрицательными заявками и блоком восстановления производящая функция распределения вероятностей числа заявок в блоке обслуживания имеет вид*

$$G(x) = x^{-\frac{\gamma}{\mu_1}} e^{-\frac{\lambda+s}{\mu_1}(1-x)} \left(1 - \frac{\gamma}{\mu_1} G(0) \int_x^1 y^{\frac{\gamma}{\mu_1}-1} e^{\frac{\lambda+s}{\mu_1}(1-y)} dy \right), \quad (2.3)$$

где $s = s(\tau)$ является решением уравнения

$$s'(\tau) = \gamma - \gamma G(0) - s. \quad (2.4)$$

Доказательство. В (2.1) выполним предельный переход при $\epsilon \rightarrow 0$, получим

$$\begin{aligned} (1-x)\mu_1 \frac{\partial F^{(1)}(x, w, \tau)}{\partial x} + j(1-x) \frac{\partial F^{(1)}(x, w, \tau)}{\partial w} + \left(1 - \frac{1}{x}\right) \gamma F^{(1)}(0, w, \tau) + \\ + \left(\lambda(x-1) + \gamma \left(\frac{1}{x} - 1\right)\right) F^{(1)}(x, w, \tau) = 0. \end{aligned}$$

После преобразований имеем

$$(1-x) \left(\mu_1 \frac{\partial F^{(1)}(x, w, \tau)}{\partial x} + j \frac{\partial F^{(1)}(x, w, \tau)}{\partial w} - \frac{\gamma}{x} F^{(1)}(0, w, \tau) + \left(\frac{\gamma}{x} - \lambda\right) F^{(1)}(x, w, \tau) \right) = 0.$$

Решение получившегося уравнения будем искать в виде

$$F^{(1)}(x, w, \tau) = G(x) e^{jws(\tau)}, \quad (2.5)$$

где $G(x)$ — производящая функция распределения вероятностей числа заявок в блоке обслуживания.

Подставим (2.5) в получившееся выше уравнение и после несложных преобразований, получим

$$\mu_1 \frac{\partial G(x)}{\partial x} = \left(\lambda - \frac{\gamma}{x} + s \right) G(x) + \frac{\gamma}{x} G(0). \quad (2.6)$$

Таким образом, получили линейное неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка, решение которого имеет вид

$$G(x) = x^{-\frac{\gamma}{\mu_1}} e^{-\frac{\lambda+s}{\mu_1}(1-x)} \left(1 - \frac{\gamma}{\mu_1} G(0) \int_x^1 y^{\frac{\gamma}{\mu_1}-1} e^{\frac{\lambda+s}{\mu_1}(1-y)} dy \right)$$

и совпадает с (2.3).

Найдем $G(0)$. Чтобы результат для $G(0)$ был корректным и конечным, требуется выполнение условия, при котором выражение в скобках в (2.3) обращается в ноль при $x \rightarrow 0$. Это позволит избежать возникновения бесконечных значений и гарантирует корректность вычислений. Тогда

$$G(0) = \frac{\mu_1}{\gamma} \frac{1}{\int_0^1 y^{\frac{\gamma}{\mu_1}-1} e^{\frac{\lambda+s}{\mu_1}(1-y)} dy}.$$

Запишем уравнение (2.2) с точностью до $O(\epsilon^2)$

$$\epsilon \frac{\partial F^{(1)}(w, \tau, \epsilon)}{\partial \tau} = j\epsilon w \left(-\gamma F^{(1)}(0, w, \tau, \epsilon) + \gamma F^{(1)}(w, \tau, \epsilon) + j(1 - j\epsilon w) \frac{\partial F^{(1)}(w, \tau, \epsilon)}{\partial w} \right) + O(\epsilon^2).$$

Разделим на ϵ и выполним предельный переход при $\epsilon \rightarrow 0$

$$\frac{\partial F^{(1)}(w, \tau)}{\partial \tau} = jw \left(-\gamma F^{(1)}(0, w, \tau) + \gamma F^{(1)}(w, \tau) + j \frac{\partial F^{(1)}(w, \tau)}{\partial w} \right).$$

Подставим (2.5), получим

$$s'(\tau) = \gamma - \gamma G(0) - s. \quad \square$$

Обозначим правую часть уравнения (2.4) через $a(s)$:

$$a(s) = s'(\tau) = \gamma - \gamma G(0) - s. \quad (2.7)$$

Функция $a(s)$ имеет смысл коэффициента переноса некоторого нормированного диффузионного процесса, с помощью которого получим аппроксимацию распределения вероятностей числа заявок в блоке восстановления.

2.2. Второй этап асимптотически-диффузионного анализа

В уравнениях (1.2), (1.3) сделаем замену:

$$H(x, u, t) = H^{(2)}(x, u, t) e^{j \frac{u}{\mu_2} s(\mu_2 t)},$$

получим уравнения для нахождения характеристической функции $H^{(2)}(x, u, t)$ случайного процесса $n(t) - \frac{s(\mu_2 t)}{\mu_2}$, в которых обозначив $\mu_2 = \epsilon^2$ и сделав замены

$$\tau = \epsilon^2 t, \quad u = \epsilon w, \quad H^{(2)}(x, u, t) = F^{(2)}(x, w, \tau, \epsilon),$$

получим уравнение для нахождения функции $F^{(2)}(x, w, \tau, \epsilon)$

$$\begin{aligned} \epsilon^2 \frac{\partial F^{(2)}(x, w, \tau, \epsilon)}{\partial \tau} + j\epsilon w a(s) F^{(2)}(x, w, \tau, \epsilon) &= (1-x) \mu_1 \frac{\partial F^{(2)}(x, w, \tau, \epsilon)}{\partial x} + \\ &+ j\epsilon (1 - e^{-j\epsilon w} x) \frac{\partial F^{(2)}(x, w, \tau, \epsilon)}{\partial w} + \left(1 - \frac{e^{j\epsilon w}}{x} \right) \gamma F^{(2)}(0, w, \tau, \epsilon) + \\ &+ \left(\lambda(x-1) + \gamma \left(\frac{e^{j\epsilon w}}{x} - 1 \right) - (1 - e^{-j\epsilon w} x) s \right) F^{(2)}(x, w, \tau, \epsilon) \end{aligned} \quad (2.8)$$

и добавочное уравнение

$$\epsilon^2 \frac{\partial F^{(2)}(w, \tau, \epsilon)}{\partial \tau} + j\epsilon w a(s) F^{(2)}(w, \tau, \epsilon) = (e^{j\epsilon w} - 1) \left(-\gamma F^{(2)}(0, w, \tau, \epsilon) + \right. \\ \left. + (\gamma - s e^{-j\epsilon w}) F^{(2)}(w, \tau, \epsilon) + j\epsilon e^{-j\epsilon w} \frac{\partial F^{(2)}(w, \tau, \epsilon)}{\partial w} \right). \quad (2.9)$$

Обозначим $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} F^{(2)}(x, w, \tau, \epsilon) = F^{(2)}(x, w, \tau)$. Сформулируем и докажем следующую теорему.

Теорема 2.2. *Функция $F^{(2)}(x, w, \tau)$ имеет вид*

$$F^{(2)}(x, w, \tau) = \Phi(w, \tau) G(x),$$

где $G(x)$ имеет вид (2.3), функция $\Phi(w, \tau)$ является характеристической функцией случайного процесса $y(\tau) = \lim_{\mu_2 \rightarrow 0} \sqrt{\mu_2} \left(n\left(\frac{\tau}{\mu_2}\right) - \frac{s(\tau)}{\mu_2} \right)$ и удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial \Phi(w, \tau)}{\partial \tau} = a'(s) w \frac{\partial \Phi(w, \tau)}{\partial w} - \frac{w^2}{2} b(s) \Phi(w, \tau), \quad (2.10)$$

где $a(s)$ имеет вид (2.7), $b(s)$ определяется равенством

$$b(s) = a(s) + 2(s - \gamma g(0)).$$

Здесь

$$g(0) = \frac{\int_0^1 \left(\frac{1}{y-1} \left(\left(a(s) - \frac{\gamma}{y} + ys \right) G(y) + \frac{\gamma}{y} G(0) \right) \right) y^{\frac{\gamma}{\mu_1}} e^{\frac{\lambda+s}{\mu_1}(1-y)} dy}{\gamma \int_0^1 y^{\frac{\gamma}{\mu_1}-1} e^{\frac{\lambda+s}{\mu_1}(1-y)} dy}. \quad (2.11)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Решение $F^{(2)}(x, w, \tau, \epsilon)$ будем искать в виде разложения

$$F^{(2)}(x, w, \tau, \epsilon) = \Phi(w, \tau) (G(x) + j\epsilon w f(x)) + O(\epsilon^2).$$

Подставив его в (2.8), получим

$$j\epsilon w a(s) (G(x) + j\epsilon w f(x)) = \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{j\epsilon w}{x} \right) (G(0) + j\epsilon w f(0)) + \\ + \left((\lambda + s)(x - 1) + \gamma \left(\frac{1}{x} + \frac{j\epsilon w}{x} - 1 \right) - j\epsilon w x s \right) (G(x) + j\epsilon w f(x)) + \\ + (1 - x) \left(\mu_1 \frac{\partial G(x)}{\partial x} + j\epsilon w \mu_1 \frac{\partial f(x)}{\partial x} + j\epsilon G(x) \frac{\partial \Phi(w, \tau)}{\Phi(w, \tau) \partial w} \right) + O(\epsilon^2).$$

После несложных преобразований, устремив $\epsilon \rightarrow 0$, получим

$$\left(1 - \frac{1}{x} \right) \gamma f(0) + \left((\lambda + s)(x - 1) + \gamma \left(\frac{1}{x} - 1 \right) \right) f(x) + (1 - x) \mu_1 \frac{\partial f(x)}{\partial x} = \\ = a(s) G(x) + \frac{\gamma}{x} G(0) - \left(\frac{\gamma}{x} - x s \right) G(x) - (1 - x) G(x) \frac{\partial \Phi(w, \tau)}{\Phi(w, \tau) \partial w}. \quad (2.12)$$

Решение уравнения (2.12) будем искать в виде

$$f(x) = CG(x) + g(x) - \phi(x) \frac{\partial \Phi(w, \tau)}{\Phi(w, \tau) \partial w}. \quad (2.13)$$

Подставим его в (2.12) и выпишем слагаемые с $\frac{\partial \Phi(w, \tau)}{\Phi(w, \tau) \partial w}$, с C и без них. Таким образом получим уравнения для нахождения функций $\phi(x)$ и $g(x)$:

$$\frac{\gamma}{x} \phi(0) + \left((\lambda + s) - \frac{\gamma}{x} \right) \phi(x) - \mu_1 \frac{\partial \phi(x)}{\partial x} = -G(x), \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial g(x)}{\partial x} - \frac{1}{\mu_1} \left((\lambda + s) - \frac{\gamma}{x} \right) g(x) &= \frac{1}{\mu_1} \frac{\gamma}{x} g(0) - \frac{1}{\mu_1(x-1)} a(s) G(x) - \\ &- \frac{1}{\mu_1(x-1)} \frac{\gamma}{x} G(0) + \frac{1}{\mu_1(x-1)} \left(\frac{\gamma}{x} - xs \right) G(x). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Продифференцировав уравнение (2.6) по s , нетрудно убедиться, что оно совпадает с (2.14).

Откуда получаем, что $\phi(x) = \phi(x, s) = \frac{\partial G(x, s)}{\partial s} = \frac{\partial G(x)}{\partial s}$.

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное неоднородное уравнение (2.15) совместно с дополнительным условием $g(1) = 0$, запишем его решение

$$g(x) = \exp\left(-\int_x^1 \alpha(\nu) d\nu\right) \left(-\int_x^1 \beta(y) \exp\left(\int_y^1 \alpha(\nu) d\nu\right) dy\right),$$

где

$$\begin{aligned} \alpha(\nu) &= \frac{1}{\mu_1} \left((\lambda + s) - \frac{\gamma}{\nu} \right), \\ \beta(y) &= \frac{1}{\mu_1} \frac{\gamma}{y} g(0) - \frac{1}{\mu_1(y-1)} \left(a(s) G(y) + \frac{\gamma}{y} G(0) - \left(\frac{\gamma}{y} - ys \right) G(y) \right). \end{aligned}$$

Откуда нетрудно получить значение $g(0)$, совпадающее с (2.11).

Рассмотрим уравнение (2.9). Подставим в него разложение

$$F^{(2)}(w, \tau, \epsilon) = \Phi(w, \tau)(1 + j\epsilon w f(1)) + O(\epsilon^2).$$

Тогда, с учетом (2.7), разделив на $j\epsilon^2$ и устремив $\epsilon \rightarrow 0$, имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi(w, \tau)}{\partial \tau} + (jw)^2 a(s) \Phi(w, \tau) f(1) &= (jw)^2 \Phi(w, \tau) \cdot \\ &\cdot \left(\gamma(f(1) - f(0)) + \frac{\partial \Phi(w, \tau)}{w \Phi(w, \tau) \partial w} + s(1 - f(1)) \right) + \frac{(jw)^2}{2} a(s) \Phi(w, \tau). \end{aligned}$$

Подставим (2.13) и с учетом $f(1) = C$, получим

$$\frac{\partial \Phi(w, \tau)}{\partial \tau} = (-1 - \gamma \phi(0)) w \frac{\partial \Phi(w, \tau)}{\partial w} - \frac{w^2}{2} (a(s) + 2(s - \gamma g(0))) \Phi(w, \tau).$$

Рассмотрим $\frac{da(s)}{ds}$:

$$\frac{da(s)}{ds} = (\gamma G(1) - \gamma G(0) - s)' = -\gamma \frac{\partial G(0, s)}{\partial s} - 1 = -\gamma \phi(0) - 1.$$

Окончательно получаем

$$\frac{\partial \Phi(w, \tau)}{\partial \tau} = a'(s) w \frac{\partial \Phi(w, \tau)}{\partial w} - \frac{w^2}{2} b(s) \Phi(w, \tau). \quad \square$$

Функция $b(s)$ имеет смысл коэффициента диффузии некоторого нормированного диффузионного процесса, с помощью которого получим аппроксимацию распределения вероятностей числа заявок в блоке восстановления.

2.3. Третий этап асимптотически-диффузионного анализа

К уравнению (2.10) применим обратное преобразование Фурье по переменной w . Тогда для плотности распределения вероятностей

$$P(y, \tau) = \frac{\partial P\{y(\tau) < y\}}{\partial y}$$

предельного процесса $y(\tau)$ запишем уравнение

$$\frac{\partial P(y, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial \{a'(s)yP(y, \tau)\}}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \{b(s)P(y, \tau)\}}{\partial y^2},$$

которое является уравнением Фоккера–Планка для плотности распределения вероятностей $P(y, \tau)$ значений централизованного и нормированного предельного числа заявок в блоке восстановления, а предельный случайный процесс $y(\tau)$ является диффузионным с коэффициентом переноса $a'(s)y$ и коэффициентом диффузии $b(s)$.

Рассмотрим процесс $z(\tau) = s(\tau) + \sqrt{\mu_2}y(\tau)$. Так как $\epsilon = \sqrt{\mu_2}$, то можем записать $z(\tau) = s(\tau) + \epsilon y(\tau)$. Случайный процесс $z(\tau)$ является решением стохастического дифференциального уравнения

$$dz(\tau) = a(z) d\tau + \sqrt{\mu_2 b(z)} dw(\tau),$$

где $w(\tau)$ — винеровский случайный процесс.

2.4. Четвертый этап асимптотически-диффузионного анализа

Рассмотрим стационарную плотность распределения вероятностей для процесса $z(\tau)$, то есть будем полагать, что система функционирует в стационарном режиме

$$p(z, \tau) = \frac{\partial P\{z(\tau) < z\}}{\partial z} = p(z).$$

Так как $z(\tau)$ является решением стохастического дифференциального уравнения, следовательно, процесс является диффузионным с коэффициентом переноса $a(z)$ и коэффициентом диффузии $b(z)$, поэтому его стационарная плотность распределения вероятностей является решением уравнения Фоккера–Планка

$$-(a(z)p(z))' + \frac{\mu_2}{2} (b(z)p(z))'' = 0,$$

которое имеет вид

$$p(z) = \frac{C}{b(z)} \exp \left\{ \frac{2}{\mu_2} \int_0^z \frac{a(s)}{b(s)} ds \right\},$$

где C — нормирующая константа. Таким образом, получаем плотность распределения вероятностей нормированного числа заявок в блоке восстановления.

2.5. Пятый этап асимптотически-диффузионного анализа

На пятом этапе находим дискретную аппроксимацию распределения вероятностей числа заявок в блоке восстановления. Перейдем от плотности распределения $p(z)$ непрерывного случайного процесса $z(\tau)$ к дискретному распределению $P(n)$ дискретного случайного процесса $n(\tau)$. Запишем неотрицательную функцию дискретного аргумента в виде

$$P_1(n) = \frac{C}{b(\mu_2 n)} \exp \left\{ \frac{2}{\mu_2} \int_0^{\mu_2 n} \frac{a(s)}{b(s)} ds \right\}.$$

Принимая во внимание условие нормировки, запишем следующее дискретное распределение вероятностей

$$P_{dif}^{(2)}(n) = \frac{P_1(n)}{\sum_{n=0}^{\infty} P_1(n)},$$

которое и будем называть диффузионной аппроксимацией распределения вероятностей числа заявок в блоке восстановления.

Более подробное описание построения диффузионной аппроксимации можно найти в работах [7, 8].

§ 3. Имитационное моделирование

3.1. Модельное время и события системы

В рамках данного исследования используется дискретно-событийный подход к моделированию, при котором система определена как последовательность событий, происходящих во времени. Каждое событие происходит в определенный момент и приводит к изменению состояния системы. Такой подход позволяет учитывать временные зависимости и порядок наступления событий, которые важны для точного описания моделируемых процессов.

Введём обозначения для моментов наступления основных событий, которыми являются:

- T_λ — поступление положительной заявки;
- T_γ — поступление отрицательной заявки;
- T_{μ_1} — завершение обслуживания;
- T_{μ_2} — завершение восстановления.

Вектор состояния системы состоит из:

- $i(t)$ — число обслуживаемых положительных заявок в момент времени t ;
- $n(t)$ — число восстанавливающихся заявок в момент времени t .

Чтобы учесть моменты наступления всех событий, введем таймер модального времени $T_{\text{мод.}}$, который на каждой итерации моделирования сдвигается к моменту ближайшего события.

Корректировку модального времени на каждой итерации можно описать таким образом:

$$T_{\text{мод.}} = \min(T_\lambda, T_\gamma, T_{\mu_1}, T_{\mu_2}).$$

3.2. Алгоритм имитационной модели

Время обслуживания и восстановления — экспоненциальное. Это означает, что случайное время определяется формулой:

$$-\frac{\ln(R(0, 1))}{y},$$

где y — задаваемый параметр распределения.

Алгоритм имитационной модели можно описать следующим образом.

1. Инициализируем параметры модели, включая параметры поступающих потоков, параметры обслуживания и восстановления, а также начальное состояние системы, начальное и максимальное время моделирования.
2. На каждом этапе генерируются случайные моменты наступления следующих событий: поступления положительных и отрицательных заявок, окончания обслуживания и окончания восстановления.
3. Определяем ближайшее событие — минимальный из сгенерированных моментов наступления событий.
4. Обновляем текущее время моделирования до момента этого события.
5. Обновляем состояние системы в зависимости от типа произошедшего события (увеличение или уменьшение количества заявок в обслуживании и восстановлении).
6. Фиксируем время, состояние системы и сохраняем информацию о событиях.
7. Повторяем шаги 2–6 до достижения максимального времени моделирования.
8. По результатам всех итераций определяем двумерное распределение вероятностей числа заявок в системе на основе накопленного времени пребывания в каждом состоянии.
9. Определяем одномерные распределения вероятностей числа заявок в блоке обслуживания и в блоке восстановления.

Полное описание алгоритма представлено в работе [9], где подробно изложены все этапы и особенности реализации.

§ 4. Численные эксперименты и область применимости результатов

Учитывая (2.3), нетрудно с помощью замен и обратного преобразования Фурье получить распределение вероятностей $P_{dif}^{(1)}$ числа заявок в блоке обслуживания. Обозначим через $P_{sim}^{(1)}$ и $P_{sim}^{(2)}$ распределения вероятностей числа заявок в блоке обслуживания и в блоке восстановления, соответственно, как результат работы имитационной модели. Для оценки точности диффузионной аппроксимации будем принимать величины

$$\Delta_1 = \max_{0 \leq n \leq \infty} \left| \sum_{k=0}^n (P_{sim}^{(1)} - P_{dif}^{(1)}) \right|, \quad \Delta_2 = \max_{0 \leq n \leq \infty} \left| \sum_{k=0}^n (P_{sim}^{(2)} - P_{dif}^{(2)}) \right|,$$

равные расстоянию Колмогорова между функциями распределения вероятностей, полученными методом асимптотически-диффузионного анализа и методом имитационного моделирования. Для блока обслуживания — Δ_1 , для блока восстановления — Δ_2 .

Таблица 1. Расстояния Колмогорова Δ_1 и Δ_2 для различных значений интенсивностей входящих потоков при указанных интенсивностях μ_2 ($\mu_1 = 1$).

μ_2		1	0,5	0,1	0,01
$\lambda = 0,5; \gamma = 0,5$	Δ_1	0,005	0,003	$4,75 \cdot 10^{-4}$	$6,25 \cdot 10^{-4}$
	Δ_2	0,103	0,098	0,014	0,011
$\lambda = 0,5; \gamma = 15$	Δ_1	0,006	0,002	$8,09 \cdot 10^{-4}$	$4,70 \cdot 10^{-4}$
	Δ_2	0,076	0,050	0,030	0,031
$\lambda = 15; \gamma = 0,5$	Δ_1	0,002	0,001	$9,18 \cdot 10^{-4}$	$6,22 \cdot 10^{-4}$
	Δ_2	0,052	0,011	0,003	0,006
$\lambda = 15; \gamma = 15$	Δ_1	0,037	0,024	0,006	$6,03 \cdot 10^{-4}$
	Δ_2	0,010	0,007	0,007	—

Допустимое значение погрешности расстояния Колмогорова будем считать 0,03. Таким образом, анализируя таблицу 1, начиная с $\mu_2 < 0,1$ асимптотически-диффузионная аппроксимация является применимой.

§ 5. Заключение

В работе исследована СМО с отрицательными заявками и блоком восстановления методами асимптотически-диффузионного анализа и имитационного моделирования, получены распределения вероятностей числа заявок в блоке обслуживания и числа заявок в блоке восстановления. Установлена область применимости асимптотических результатов.

Теоретические результаты, полученные в работе, расширяют класс математических моделей СМО с отрицательными заявками и их исследований. Практические результаты могут помочь при анализе проектирования банковских систем на случай учета кибератак.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gelenbe E. Product-form queueing networks with negative and positive customers // Journal of Applied Probability. 1991. Vol. 28. Issue 3. P. 656–663. <https://doi.org/10.2307/3214499>
2. Fourneau J.-M., Gelenbe E., Suros R. G-networks with multiple classes of negative and positive customers // Theoretical Computer Science. 1996. Vol. 155. Issue 1. P. 141–156. [https://doi.org/10.1016/0304-3975\(95\)00018-6](https://doi.org/10.1016/0304-3975(95)00018-6)
3. Wang Jinting, Zhang Peng. A discrete-time retrial queue with negative customers and unreliable server // Computers and Industrial Engineering. 2009. Vol. 56. Issue 4. P. 1216–1222. <https://doi.org/10.1016/j.cie.2008.07.010>
4. Atencia I., Moreno P. A single-server G-queue in discrete-time with geometrical arrival and service process // Performance Evaluation. 2005. Vol. 59. Issue 1. P. 85–97. <https://doi.org/10.1016/J.PEVA.2004.07.019>
5. Бочаров П. П., Д’Апиче Ч., Мандзо Р., Печинкин А. В. Анализ многолинейной марковской системы массового обслуживания с неограниченным накопителем и отрицательными заявками // Автоматика и телемеханика. 2007. Вып. 1. С. 93–104. <https://www.mathnet.ru/rus/at924>
6. Разумчик Р. В. Многолинейная экспоненциальная система массового обслуживания с отрицательными заявками и дополнительной очередью для вытесненных заявок // Т-Comm: Телекоммуникации и транспорт. 2011. Т. 5. № 7. С. 129–133. <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=17333591>
7. Назаров А. А., Измайлова Я. Е. Асимптотически-диффузионный анализ приоритетной RQ-системы $M^{(2)}|M^{(2)}|1$ // Автоматика и телемеханика. 2025. Вып. 5. С. 3–21. <https://www.mathnet.ru/rus/at16534>

8. Nazarov A., Phung-Duc Tuan, Paul S., Lizyura O. Diffusion limit for single-server retrial queues with renewal input and outgoing calls // Mathematics. 2022. Vol. 10. Issue 6. 948.
<https://doi.org/10.3390/math10060948>
9. Исаев А. Т. Исследование многолинейной системы массового обслуживания с отрицательными заявками и с блоком восстановления: выпускная бакалаврская работа по направлению подготовки: 01.03.02 - Прикладная математика и информатика / Томский государственный университет: Институт прикладной математики и компьютерных наук. Томск, 2025.
<https://vital.lib.tsu.ru/vital/access/manager/Repository/vital:22961>

Поступила в редакцию 16.06.2025

Принята к публикации 14.09.2025

Назаров Анатолий Андреевич, д. т. н., профессор, кафедра теории вероятностей и математической статистики, Институт прикладной математики и компьютерных наук, Национальный исследовательский Томский государственный университет, 634050, Россия, г. Томск, пр. Ленина, 36.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2091-6011>

E-mail: nazarov.tsu@gmail.com

Измайлова Яна Евгеньевна, к. ф.-м. н., доцент, кафедра теории вероятностей и математической статистики, Институт прикладной математики и компьютерных наук, Национальный исследовательский Томский государственный университет, 634050, Россия, г. Томск, пр. Ленина, 36.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9132-0127>

E-mail: evgenevna.92@mail.ru

Исаев Актан Токтобекович, студент, Институт прикладной математики и компьютерных наук, Национальный исследовательский Томский государственный университет, 634050, Россия, г. Томск, пр. Ленина, 36.

ORCID: <https://orcid.org/0009-0001-7709-125X>

E-mail: aktanisaev350@gmail.com

Цитирование: А. А. Назаров, Я. Е. Измайлова, А. Т. Исаев. Асимптотически-диффузионный анализ бесконечнолинейной системы массового обслуживания с отрицательными заявками и блоком восстановления для искаженных положительных // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2025. Т. 35. Вып. 3. С. 380–394.

A. A. Nazarov, Ya. E. Izmailova, A. T. Isaev

Asymptotic-diffusion analysis of an infinite-linear queuing system with negative calls and a recovery unit for distorted positive ones

Keywords: queueing system, negative calls, recovery unit, asymptotic-diffusion analysis, simulation modeling.

MSC2020: 60K25, 41A60

DOI: [10.35634/vm250303](https://doi.org/10.35634/vm250303)

In this paper, we consider an infinite-linear queuing system with positive and negative calls and a recovery unit for distorted positive ones. The main research method is the method of asymptotic diffusion analysis, which consists in constructing a diffusion approximation of the probability distribution of the number of calls in the recovery block. One-dimensional probability distributions of the number of calls in the service block and the number of calls in the recovery block are obtained. The simulation model of the queuing system functioning is built. The field of applicability of the obtained asymptotic results has been established.

REFERENCES

1. Gelenbe E. Product-form queueing networks with negative and positive customers, *Journal of Applied Probability*, 1991, vol. 28, issue 3, pp. 656–663. <https://doi.org/10.2307/3214499>
2. Fourneau J.-M., Gelenbe E., Suros R. *G*-networks with multiple classes of negative and positive customers, *Theoretical Computer Science*, 1996, vol. 155, issue 1, pp. 141–156. [https://doi.org/10.1016/0304-3975\(95\)00018-6](https://doi.org/10.1016/0304-3975(95)00018-6)
3. Wang Jinting, Zhang Peng. A discrete-time retrial queue with negative customers and unreliable server, *Computers and Industrial Engineering*, 2009, vol. 56, issue 4, pp. 1216–1222. <https://doi.org/10.1016/j.cie.2008.07.010>
4. Atencia I., Moreno P. A single-server *G*-queue in discrete-time with geometrical arrival and service process, *Performance Evaluation*, 2005, vol. 59, issue 1, pp. 85–97. <https://doi.org/10.1016/J.PEVA.2004.07.019>
5. Bocharov P. P., d'Apice C., Manzo R., Pechinkin A. V. Analysis of the multi-server Markov queueing system with unlimited buffer and negative customers, *Automation and Remote Control*, 2007, vol. 68, issue 1, pp. 85–94. <https://doi.org/10.1134/S0005117907010080>
6. Razumchik R. V. A multilinear exponential queueing system with negative requests and an additional queue for displaced requests, *T-Comm: Telecommunications and Transport*, 2011, vol. 5, no. 7, pp. 129–133 (in Russian). <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=17333591>
7. Nazarov A. A., Izmailova Y. E. Asymptotic-diffusion analysis of the retrial queueing system $M^{(2)}|M^{(2)}|1$ with priority customers for a non-priority component, *Automation and Remote Control*, 2025, vol. 86, issue 5, pp. 375–391. <https://doi.org/10.31857/S0005117925050017>
8. Nazarov A., Phung-Duc Tuan, Paul S., Lizyura O. Diffusion limit for single-server retrial queues with renewal input and outgoing calls, *Mathematics*, 2022, vol. 10, issue 6, 948. <https://doi.org/10.3390/math10060948>
9. Isaev A. T. *Research of a multilinear queueing system with negative applications and with a recovery unit*, final bachelor's thesis, Tomsk, 2025 (in Russian). <https://vital.lib.tsu.ru/vital/access/manager/Repository/vital:22961>

Received 16.06.2025

Accepted 14.09.2025

Anatoly Andreevich Nazarov, Doctor of Engineering, Professor, Department of Probability Theory and Mathematical Statistics, Institute of Applied Mathematics and Computer Sciences, Tomsk State University, pr. Lenina, 36, Tomsk, 634050, Russia.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2091-6011>

E-mail: nazarov.tsu@gmail.com

Yana Evgenevna Izmailova, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Probability Theory and Mathematical Statistics, Institute of Applied Mathematics and Computer Sciences, Tomsk State University, pr. Lenina, 36, Tomsk, 634050, Russia.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9132-0127>

E-mail: evgenevna.92@mail.ru

Aktan Toktobekovich Isaev, Student, Institute of Applied Mathematics and Computer Sciences, Tomsk State University, pr. Lenina, 36, Tomsk, 634050, Russia.

ORCID: <https://orcid.org/0009-0001-7709-125X>

E-mail: aktanisaev350@gmail.com

Citation: A. A. Nazarov, Ya. E. Izmailova, A. T. Isaev. Asymptotic-diffusion analysis of an infinite-linear queuing system with negative calls and a recovery unit for distorted positive ones, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2025, vol. 35, issue 3, pp. 380–394.