

УДК 517.977

© С. Н. Попова, Э. А. Фахразиева

РАВНОМЕРНАЯ ПОЛНАЯ УПРАВЛЯЕМОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ ГИБРИДНЫХ СИСТЕМ

Для нестационарной линейной управляемой гибридной дискретно-непрерывной системы

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_{11}(t)x(t) + A_{12}(k)y(k) + B_{11}(t)u(t) + B_{12}(k)v(k), \\ y(k+1) = A_{21}(k)x(k) + A_{22}(k)y(k) + B_{21}(k)u(k) + B_{22}(k)v(k) \end{cases}$$

введены определения равномерной полной управляемости и матрицы Калмана. Доказано, что если найдется такое $\vartheta \in \mathbb{N}$, что при всех $l \in \mathbb{N}_0$ матрица Калмана удовлетворяет неравенству $W(l, l + \vartheta) \geq \gamma E$ с положительной константой γ , не зависящей от l , то гибридная система равномерно вполне управляема.

Ключевые слова: нестационарная линейная гибридная дискретно-непрерывная система, управляемость.

DOI: [10.35634/vm250304](https://doi.org/10.35634/vm250304)**Введение**

Понятие равномерной полной управляемости линейной нестационарной системы с непрерывным временем

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad (t, x, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \quad (1)$$

было введено Р. Калманом в работе [15] в связи с классической задачей математической теории управления: минимизировать энергию перевода произвольного начального состояния системы в начало координат на отрезке фиксированной длины. Оказалось, что управление, осуществляющее этот перевод, имеет вид

$$u(t) = -B^*(t)X^*(t, t_0)W^{-1}(t_0, t_0 + \vartheta)x_0, \quad t \in [t_0, t_0 + \vartheta],$$

где $t_0 \in \mathbb{R}$ — произвольный начальный момент времени, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ — произвольное начальное состояние системы, $X(t, s)$ — матрица Коши системы (1) с нулевым управлением,

$$W(t_0, t_0 + \vartheta) \doteq \int_{t_0}^{t_0 + \vartheta} X(t_0, s)B(s)B^*(s)X^*(t_0, s) ds$$

— матрица управляемости системы (1), которую позднее стали называть матрицей Калмана.

Согласно определению Калмана, система (1) называется *равномерно вполне управляемой*, если существуют такие $\vartheta > 0$ и $\gamma > 0$, что при всех $t_0 \in \mathbb{R}$ выполнено неравенство

$$W(t_0, t_0 + \vartheta) \geq \gamma E,$$

которое понимается в смысле квадратичных форм, то есть $\xi^*W(t_0, t_0 + \vartheta)\xi \geq \gamma\|\xi\|^2$ для каждого вектора $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Е. Л. Тонковым в [6] (см. также [7]) было установлено, что *система (1) равномерно вполне управляема тогда и только тогда, когда существуют такие $\vartheta > 0$ и $L > 0$, что*

при всех $t_0 \in \mathbb{R}$ и $x_0 \in \mathbb{R}^n$ найдется управление $u: [t_0, t_0 + \vartheta] \rightarrow \mathbb{R}^m$, переводящее начальное состояние $x(t_0) = x_0$ системы (1) в конечное состояние $x(t_0 + \vartheta) = 0$ и удовлетворяющее оценке $\sup_{t \in [t_0, t_0 + \vartheta]} \|u(t)\| \leq L\|x_0\|$. Отметим, что в некоторых случаях этот критерий удобно считать определением равномерной полной управляемости, например, если условия на коэффициенты системы (1) не обеспечивают существования матрицы Калмана.

Для линейных нестационарных управляемых систем с дискретным временем

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k), \quad (k, x, u) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \quad (2)$$

понятие равномерной полной управляемости изучалось, в частности, в работах [1, 4, 14]. Оказалось, что при определенных условиях на коэффициенты системы (2) справедливы те же результаты, что и для систем с непрерывным временем.

В этой статье изучается понятие равномерной полной управляемости нестационарной линейной гибридной дискретно-непрерывной системы вида

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_{11}(t)x(t) + A_{12}(k)y(k) + B_{11}(t)u(t) + B_{12}(k)v(k), \\ y(k+1) = A_{21}(k)x(k) + A_{22}(k)y(k) + B_{21}(k)u(k) + B_{22}(k)v(k). \end{cases} \quad (3)$$

В качестве определения равномерной полной управляемости этой системы выбрано условие, аналогичное критерию Тонкова. По системе (3) построена система с дискретным временем, в некотором смысле эквивалентная гибридной системе. В качестве матрицы Калмана гибридной системы (3) выбрана матрица Калмана эквивалентной дискретной системы. Доказано, что если найдутся такие $\vartheta \in \mathbb{N}$ и $\gamma > 0$, что при всех $l \in \mathbb{N}_0$ для матрицы Калмана выполнено неравенство $W(l, l + \vartheta) \geq \gamma E$, то система (3) равномерно вполне управляема.

В заключение введения отметим, что понятие равномерной полной управляемости оказалось очень удобным для решения задач управления асимптотикой решений линейных систем как с непрерывным [5], так и с дискретным временем [1, 9–11]. Предполагается применить условие равномерной полной управляемости гибридной системы для решения аналогичных задач. С этой целью в работе доказана теорема 2 о разрешимости матричной задачи управления.

§ 1. Основные определения

Пусть $e_1, \dots, e_n$ — канонический ортонормированный базис евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ с нормой $\|\cdot\|$, определяемой равенством $\|x\| = \sqrt{x^*x}$ (звездочка означает транспонирование); $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел, $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ — множество целых неотрицательных чисел. Через $\mathbb{R}^{n \times m}$ будем обозначать пространство вещественных матриц размерности $n \times m$ со спектральной нормой, то есть операторной нормой, индуцируемой в $\mathbb{R}^{n \times m}$ евклидовыми нормами в $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}^n$. Для любого набора векторов $\eta_i \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, \dots, m$, запись $[\eta_1, \dots, \eta_m]$ будет обозначать матрицу из $\mathbb{R}^{n \times m}$, имеющую своими столбцами векторы $\eta_1, \dots, \eta_m$; $E = [e_1, \dots, e_n] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — единичная матрица.

Рассмотрим нестационарную линейную управляемую гибридную систему (3), где $t \in [k, k+1)$, $k \in \mathbb{N}_0$, $x \in \mathbb{R}^{n_1}$, $y \in \mathbb{R}^{n_2}$, $u \in \mathbb{R}^{m_1}$, $v \in \mathbb{R}^{m_2}$; функции $A_{11}: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$ и $B_{11}: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^{n_1 \times m_1}$ кусочно непрерывны, могут иметь лишь разрывы первого рода и непрерывны справа в точках разрыва; управление $u: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^{m_1}$ кусочно непрерывно, может иметь лишь разрывы первого рода и непрерывно справа в точках разрыва; функции $A_{j2}: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}^{n_j \times n_2}$, $B_{j2}: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}^{n_j \times m_2}$ ($j = 1, 2$), $A_{21}: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}^{n_2 \times n_1}$, и $B_{21}: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}^{n_2 \times m_1}$ произвольны; управление $v: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}^{m_2}$ произвольно. Предполагаем, что нормы всех матриц ограничены положительной величиной a на области определения. Обозначим $n = n_1 + n_2$, $m = m_1 + m_2$.

Допустимыми управлениями называем функции $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$, удовлетворяющие поставленным выше условиям. Под решением системы (3) при выбранных допустимых управлениях $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$ понимаем функцию

$$z = z(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(k) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad t \in [k, k+1), \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad (4)$$

такую, что $x(t)$ и $y(k)$ удовлетворяют системе (3) при $t \in (k, k+1)$, при этом функция $x(t)$ непрерывна на $[0, +\infty)$.

Выберем в системе (3) управления $u(t) \equiv 0 \in \mathbb{R}^{m_1}$ и $v(k) \equiv 0 \in \mathbb{R}^{m_2}$, получим свободную систему

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_{11}(t)x(t) + A_{12}(k)y(k), \\ y(k+1) = A_{21}(k)x(k) + A_{22}(k)y(k). \end{cases} \quad (5)$$

Множество всех систем вида (5), удовлетворяющих поставленным условиям, обозначим $\mathcal{M}_n$. Пусть $X(t, s)$ — матрица Коши системы

$$\dot{x}(t) = A_{11}(t)x(t).$$

Положим

$$Z(k+1, k) = \begin{pmatrix} X(k+1, k) & \int_k^{k+1} X(k+1, s) ds \cdot A_{12}(k) \\ A_{21}(k) & A_{22}(k) \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad (6)$$

$$Z(k, l) = Z(k, k-1)Z(k-1, k-2) \dots Z(l+1, l), \quad k, l \in \mathbb{N}_0, \quad k > l. \quad (7)$$

Лемма 1. Для произвольного решения $z(\cdot)$ системы (5) имеет место равенство

$$z(k) = Z(k, l)z(l) \quad (8)$$

при всех $k, l \in \mathbb{N}_0, k > l$.

Доказательство. Возьмем любое $l \in \mathbb{N}_0$. По формуле Коши для систем с непрерывным временем для $t \in [l, l+1)$ имеем равенство

$$x(t) = X(t, l)x(l) + \int_l^t X(t, s) ds \cdot A_{12}(l)y(l).$$

Переходя к пределу при $t \rightarrow (l+1) - 0$, получим

$$x(l+1) = X(l+1, l)x(l) + \int_l^{l+1} X(l+1, s) ds \cdot A_{12}(l)y(l).$$

Из (6) следует, что равенство (8) выполнено для $k = l+1$. Справедливость этого равенства для $k > l+1$ вытекает из (7). $\square$

Определение 1. Будем называть матрицу $Z(k, l)$, $k, l \in \mathbb{N}_0, k > l$, определенную равенствами (6), (7), матрицей Коши гибридной системы (5) в целочисленные моменты времени.

Обозначим через $\mathcal{M}_n^0$ подмножество множества $\mathcal{M}_n$, состоящее из систем вида (5), для которых последовательность $(Z(k+1, k))_{k \in \mathbb{N}_0}$ вполне ограничена [3], то есть при каждом $k \in \mathbb{N}_0$ существует $Z^{-1}(k+1, k)$, и найдется такое $b > 0$, что при всех $k \in \mathbb{N}_0$ выполнены неравенства

$$\|Z(k+1, k)\| \leq b, \quad \|Z^{-1}(k+1, k)\| \leq b.$$

Отметим, что если система (5) принадлежит множеству $\mathcal{M}_n^0$, то ее матрица Коши $Z(k, l)$ может быть доопределена и для $k < l$ равенством

$$Z(k, l) = Z^{-1}(l, k), \quad l, k \in \mathbb{N}_0, \quad l > k. \quad (9)$$

Кроме того, положим $Z(k, k) = E$ для каждого $k \in \mathbb{N}_0$. Тогда равенство (8) выполнено для всех $l, k \in \mathbb{N}_0$.

Замечание 1. Всюду ниже будем рассматривать управляемые системы вида (3), для которых соответствующие свободные системы вида (5) принадлежат множеству $\mathcal{M}_n^0$.

§ 2. Равномерная полная управляемость

Следуя Е. Л. Тонкову [6, 7], введем следующее определение.

Определение 2. Система (3) называется *равномерно вполне управляемой*, если существуют такие $\vartheta \in \mathbb{N}$ и $L > 0$, что для каждого $l \in \mathbb{N}_0$ и любых $x_0 \in \mathbb{R}^{n_1}$, $y_0 \in \mathbb{R}^{n_2}$ найдутся допустимые управления $u: [l, l + \vartheta) \rightarrow \mathbb{R}^{m_1}$, $v: [l, l + \vartheta - 1] \cap \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}^{m_2}$ такие, что решение $(x(\cdot), y(\cdot))$ системы (3) с начальными условиями $x(l) = x_0$, $y(l) = y_0$ и с выбранными $u(\cdot)$, $v(\cdot)$ удовлетворяет равенствам $x(l + \vartheta) = 0$, $y(l + \vartheta) = 0$, при этом

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [l, l + \vartheta)} \|u(t)\| &\leq L \max\{\|x_0\|, \|y_0\|\}, \\ \max_{k \in [l, l + \vartheta - 1] \cap \mathbb{N}_0} \|v(k)\| &\leq L \max\{\|x_0\|, \|y_0\|\}. \end{aligned}$$

Рассмотрим подмножество допустимых управлений, состоящее из кусочно-постоянных функций специального вида.

Определение 3. Классом *дискретных управлений* назовем множество управлений $u(\cdot)$ вида $u(t) = u(k)$, $k \in \mathbb{N}_0$, $t \in [k, k + 1)$.

Определение 4. Система (3) называется *равномерно вполне управляемой в классе дискретных управлений*, если существуют такие $\vartheta \in \mathbb{N}$ и $L > 0$, что для каждого $l \in \mathbb{N}_0$ и любых $x_0 \in \mathbb{R}^{n_1}$, $y_0 \in \mathbb{R}^{n_2}$ найдутся допустимые управления: дискретное $u: [l, l + \vartheta) \rightarrow \mathbb{R}^{m_1}$, и $v: [l, l + \vartheta - 1] \cap \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}^{m_2}$ такие, что решение $(x(\cdot), y(\cdot))$ системы (3) с начальными условиями $x(l) = x_0$, $y(l) = y_0$ и с выбранными $u(\cdot)$, $v(\cdot)$ удовлетворяет равенствам $x(l + \vartheta) = 0$, $y(l + \vartheta) = 0$, при этом

$$\begin{aligned} \max_{k \in [l, l + \vartheta - 1] \cap \mathbb{N}_0} \|u(k)\| &\leq L \max\{\|x_0\|, \|y_0\|\}, \\ \max_{k \in [l, l + \vartheta - 1] \cap \mathbb{N}_0} \|v(k)\| &\leq L \max\{\|x_0\|, \|y_0\|\}. \end{aligned}$$

Замечание 2. В случае, когда условия определений 2 и 4 выполнены для фиксированного $\vartheta \in \mathbb{N}$, будем говорить, что система (3) является ϑ -*равномерно вполне управляемой*.

Очевидно, что выполнено следующее утверждение.

Утверждение 1. Если система (3) ϑ -равномерно вполне управляема в классе дискретных управлений, то она является ϑ -равномерно вполне управляемой.

Пусть заданы допустимые управления $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$. Рассмотрим произвольное решение $z(\cdot)$ вида (4) системы (3). Тогда по формуле Коши для систем с непрерывным временем для $t \in [k, k+1)$, $k \in \mathbb{N}_0$ получим равенство

$$x(t) = X(t, k)x(k) + \int_k^t X(t, \tau) d\tau A_{12}(k)y(k) + \int_k^t X(t, \tau) B_{11}(\tau) u(\tau) d\tau + \\ + \int_k^t X(t, \tau) d\tau B_{12}(k)v(k).$$

Рассмотрим дискретное управление $u(t) = u(k)$, $t \in [k, k+1)$, $k \in \mathbb{N}_0$. Тогда из предыдущего равенства получим

$$x(t) = X(t, k)x(k) + \int_k^t X(t, \tau) d\tau A_{12}(k)y(k) + \int_k^t X(t, \tau) B_{11}(\tau) d\tau u(k) + \\ + \int_k^t X(t, \tau) d\tau B_{12}(k)v(k), \quad t \in [k, k+1), \quad k \in \mathbb{N}_0. \quad (10)$$

При $t = k+1$ решение примет вид

$$x(k+1) = \lim_{t \rightarrow k+1-0} x(t) = X(k+1, k)x(k) + \int_k^{k+1} X(k+1, \tau) d\tau A_{12}(k)y(k) + \\ + \int_k^{k+1} X(k+1, \tau) B_{11}(\tau) d\tau u(k) + \int_k^{k+1} X(k+1, \tau) d\tau B_{12}(k)v(k).$$

Следовательно, решение системы (3) в момент времени $k+1$ может быть представлено в виде

$$z(k+1) = Z(k+1, k)z(k) + \begin{pmatrix} \int_k^{k+1} X(k+1, \tau) B_{11}(\tau) d\tau \\ B_{21}(k) \end{pmatrix} u(k) + \\ + \begin{pmatrix} \int_k^{k+1} X(k+1, \tau) d\tau B_{12}(k) \\ B_{22}(k) \end{pmatrix} v(k), \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Обозначим

$$B(k) = \begin{pmatrix} \int_k^{k+1} X(k+1, \tau) B_{11}(\tau) d\tau & \int_k^{k+1} X(k+1, \tau) d\tau B_{12}(k) \\ B_{21}(k) & B_{22}(k) \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad (11)$$

$$w(k) = \begin{pmatrix} u(k) \\ v(k) \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{N}_0. \quad (12)$$

Тогда получим, что решение $z(\cdot)$ системы (3) удовлетворяет линейной управляемой системе с дискретным временем

$$z(k+1) = Z(k+1, k)z(k) + B(k)w(k), \quad (k, z, w) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m. \quad (13)$$

Обратно, пусть задано управление $w(\cdot)$ вида (12), а $z = z(k) = \begin{pmatrix} x(k) \\ y(k) \end{pmatrix}$, $k \in \mathbb{N}_0$, — произвольное решение системы (13). Тогда, доопределяя $x(t)$ равенством (10) при $t \in (k, k+1)$, $k \in \mathbb{N}_0$, получим, что функция (4) является решением системы (3) с дискретным управлением $u(\cdot)$ и допустимым управлением $v(\cdot)$.

Таким образом, доказано

Утверждение 2. Система (3) в классе дискретных управлений и система с дискретным временем (13) эквивалентны в следующем смысле: для любых управлений $u = u(k): \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}^{m_1}$ и $v = v(k): \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}^{m_2}$, для всех $l \in \mathbb{N}_0$ и $z_0 \in \mathbb{R}^n$, решения этих систем с выбранными $u(\cdot)$, $v(\cdot)$ и с начальным условием $z(l) = z_0$ совпадают в моменты времени $t = k$ для каждого $k \in \mathbb{N}_0$.

Пусть $\vartheta \in \mathbb{N}$. Напомним (см. [1, 4, 14]), что система (13) называется ϑ -равномерно вполне управляемой, если найдется такое $L > 0$, что для каждого $l \in \mathbb{N}_0$ и $z_0 \in \mathbb{R}^n$ существует управление $w = w(k)$, $k = l, l+1, \dots, l+\vartheta-1$, переводящее начальное состояние $z(l) = z_0$ системы (13) в конечное состояние $z(l+\vartheta) = 0$ и удовлетворяющее оценке

$$\max_{k \in [l, l+\vartheta-1] \cap \mathbb{N}_0} \|w(k)\| \leq L \|z_0\|. \quad (14)$$

Тогда из утверждения 2 получаем следующее утверждение.

Утверждение 3. Система (3) ϑ -равномерно вполне управляема в классе дискретных управлений тогда и только тогда, когда система с дискретным временем (13) ϑ -равномерно вполне управляема.

Следствие 1. Если система с дискретным временем (13) ϑ -равномерно вполне управляема, то система (3) ϑ -равномерно вполне управляема.

§ 3. Матрица Калмана

Определение 5. Матрицей управляемости (матрицей Калмана) системы (3) будем называть матрицу вида

$$W(l, k) = \sum_{j=l}^{k-1} Z(l, j+1) B(j) B^*(j) Z^*(l, j+1), \quad k, l \in \mathbb{N}_0, \quad k > l,$$

где матрица $Z(k, l)$ определяется равенствами (6), (7), (9), а матрица $B(k)$ — равенством (11).

Теорема 1. Система (3) является ϑ -равномерно вполне управляемой в классе дискретных управлений тогда и только тогда, когда существует $\gamma > 0$ такое, что для каждого $l \in \mathbb{N}_0$ выполнено неравенство

$$W(l, l+\vartheta) \geq \gamma E. \quad (15)$$

Доказательство. Система (3) ϑ -равномерно вполне управляема в классе дискретных управлений тогда и только тогда, когда система с дискретным временем (13) ϑ -равномерно вполне управляема, а это, в свою очередь, равносильно [1, теорема 7.1] справедливости неравенства (15) для каждого $l \in \mathbb{N}_0$. $\square$

Следствие 2. Если существует $\gamma > 0$ такое, что неравенство (15) выполнено для каждого $l \in \mathbb{N}_0$, то система (3) ϑ -равномерно вполне управляема.

Замечание 3. В доказательстве теоремы 7.1 [1] использовано так называемое калмановское управление, переводящее начальное состояние $z(l) = z_0$ системы с дискретным временем (13) в конечное состояние $z(l+\vartheta) = 0$, имеющее вид

$$w(k) = -B^*(k) Z^*(l, k+1) W^{-1}(l, l+\vartheta) z_0, \quad k \in [l, l+\vartheta-1] \cap \mathbb{N}_0,$$

и удовлетворяющее оценке (14), где положительная величина L не зависит от $l \in \mathbb{N}_0$ и от $z_0 \in \mathbb{R}^n$.

Пример 1. Рассмотрим 2-периодическую систему

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = a(t)x(t) + u(t) + v(k), \\ y(k+1) = y(k) + u(k) + v(k), \end{cases} \quad (16)$$

где $a(t) = \begin{cases} 1, & t \in [2k, 2k+1), \\ 2, & t \in [2k+1, 2k+2), \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.$

Пользуясь определением 5, найдем матрицу Калмана $W(l, l + \vartheta)$ системы (16) при произвольных $l \in \mathbb{N}_0$ и $\vartheta = 2$.

Для матрицы Коши свободной системы

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = a(t)x(t), \\ y(k+1) = y(k), \end{cases}$$

выполнены равенства

$$Z(2k+1, 2k) = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Z(2k+2, 2k+1) = \begin{pmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Пользуясь формулой (11), находим матрицы

$$B(2k) = \begin{pmatrix} e-1 & e-1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B(2k+1) = \begin{pmatrix} (e^2-1)/2 & (e^2-1)/2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

1. Рассмотрим четные значения l , то есть возьмем $l = 2k$, где $k \in \mathbb{N}_0$. Непосредственные вычисления приводят к результату

$$W(2k, 2k+2) = \begin{pmatrix} 2(1-e^{-1})^2 + (e^{-1}-e^{-3})^2/2 & 2(1-e^{-1}) + (e^{-1}-e^{-3}) \\ 2(1-e^{-1}) + (e^{-1}-e^{-3}) & 4 \end{pmatrix}.$$

Главные миноры этой матрицы

$$\begin{aligned} W_{11}(2k, 2k+2) &= 2(1-e^{-1})^2 + (e^{-1}-e^{-3})^2/2, \\ \det W(2k, 2k+2) &= (e^{-3} - 3e^{-1} + 2)^2 \end{aligned}$$

положительны, что влечет [8, теорема 7.2.5] положительную определенность матрицы $W(2k, 2k+2)$, то есть существует такое $\gamma_1 > 0$, что при всех $k \in \mathbb{N}_0$ выполнено неравенство $W(2k, 2k+2) \geq \gamma_1 E$.

2. Теперь рассмотрим нечетные значения l , то есть возьмем $l = 2k+1$, где $k \in \mathbb{N}_0$. Тогда

$$W(2k+1, 2k+3) = \begin{pmatrix} (1-e^{-2})^2/2 + 2(e^{-2}-e^{-3})^2 & (1-e^{-2}) + 2(e^{-2}+e^{-3}) \\ (1-e^{-2}) + 2(e^{-2}+e^{-3}) & 4 \end{pmatrix}.$$

Главные миноры этой матрицы

$$\begin{aligned} W_{11}(2k+1, 2k+3) &= (1-e^{-2})^2/2 + 2(e^{-2}-e^{-3})^2, \\ \det W(2k+1, 2k+3) &= (2e^{-3} - 3e^{-1} + 1)^2 \end{aligned}$$

также положительны, поэтому $W(2k+1, 2k+3)$ положительно определена, и существует такое $\gamma_2 > 0$, что при всех $k \in \mathbb{N}_0$ выполнено неравенство $W(2k+1, 2k+3) \geq \gamma_2 E$.

Возьмем $\gamma = \min\{\gamma_1, \gamma_2\}$. Тогда для каждого $l \in \mathbb{N}_0$ выполняется неравенство $W(l, l+2) \geq \gamma E$. Таким образом, в рассмотренном примере 2-периодическая система (16) равномерно вполне управляема на отрезках длины $\vartheta = 2$, то есть длины, равной периоду системы. Отметим [12, 13], что в общем случае для линейных периодических систем с дискретным временем равномерная полная управляемость гарантируется на отрезках длины $\vartheta = n\omega$, где n — размерность системы, а ω — период системы.

§ 4. Матричная задача управления

По формуле Коши для систем с дискретным временем [2, с. 20] получаем, что для каждого решения системы (13) имеет место равенство

$$z(k) = Z(k, l)z(l) + \sum_{j=l}^{k-1} Z(k, j+1)B(j)w(j), \quad k, l \in \mathbb{N}_0, \quad k > l. \quad (17)$$

Теорема 2. Система (3) является ϑ -равномерно вполне управляемой в классе дискретных управлений тогда и только тогда, когда существует $\widehat{L} > 0$ такое, что для любого $l \in \mathbb{N}_0$ и каждой матрицы $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$ существует последовательность $(D(k))_{k \in [l, l+\vartheta-1] \cap \mathbb{N}_0} \subset \mathbb{R}^{m \times n}$, удовлетворяющая оценке

$$\max_{k \in [l, l+\vartheta-1] \cap \mathbb{N}_0} \|D(k)\| \leq \widehat{L} \|H - E\| \quad (18)$$

и разрешающая матричную задачу управления

$$C(k+1) = C(k) + Z(l, k+1)B(k)D(k), \quad (19)$$

$$C(l) = E, \quad (20)$$

$$C(l+\vartheta) = H. \quad (21)$$

Доказательство. Необходимость. Пусть система (3) является ϑ -равномерно вполне управляемой в классе дискретных управлений. Возьмем произвольные $l \in \mathbb{N}_0$, $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$ и выберем $z_{0i} = (E - H)e_i \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, \dots, n$. В соответствии с определением 4 построим управление $w_i(k) = \begin{pmatrix} u_i(k) \\ v_i(k) \end{pmatrix}$, $k \in \{l, l+1, \dots, l+\vartheta-1\}$, переводящее начальное состояние $z(l) = z_{0i}$ в конечное состояние $z(l+\vartheta) = 0 \in \mathbb{R}^n$ и такое, что

$$\max_{k \in [l, l+\vartheta-1] \cap \mathbb{N}_0} \|w_i(k)\| \leq L \|z_{0i}\|.$$

Тогда из (17) получим

$$z(l+\vartheta) = Z(l+\vartheta, l)z_{0i} + \sum_{j=l}^{l+\vartheta-1} Z(l+\vartheta, j+1)B(j)w_i(j) = 0,$$

поэтому

$$Z(l+\vartheta, l) \left(z_{0i} + \sum_{j=l}^{l+\vartheta-1} Z(l, j+1)B(j)w_i(j) \right) = 0.$$

Поскольку матрица Коши невырожденная, то

$$(E - H)e_i + \sum_{j=l}^{l+\vartheta-1} Z(l, j+1)B(j)w_i(j) = 0.$$

Положим $D(k) = [w_1(k), \dots, w_n(k)]$. Тогда из предыдущего равенства

$$(E - H)e_i + \sum_{j=l}^{l+\vartheta-1} Z(l, j+1)B(j)D(j)e_i = 0$$

для каждого $i \in \{1, \dots, n\}$. Следовательно,

$$(E - H) + \sum_{j=l}^{l+\vartheta-1} Z(l, j+1)B(j)D(j) = 0,$$

то есть

$$H = E + \sum_{j=l}^{l+\vartheta-1} Z(l, j+1)B(j)D(j).$$

Но решение уравнения (19) в совокупности с начальным условием (20) имеет вид

$$C(k) = E + \sum_{j=l}^{k-1} Z(l, j+1)B(j)D(j),$$

поэтому $C(l + \vartheta) = H$. Кроме того, для всех $k \in [l, l + \vartheta - 1] \cap \mathbb{N}_0$ и $\xi = \sum_{i=1}^n \xi_i e_i \in \mathbb{R}^n$ будут выполняться оценки

$$\begin{aligned} \|D(k)\xi\| &= \left\| \sum_{i=1}^n \xi_i D(k)e_i \right\| = \left\| \sum_{i=1}^n \xi_i w_i(k) \right\| \leq \sum_{i=1}^n |\xi_i| \|w_i(k)\| \leq \|\xi\| \sum_{i=1}^n \|w_i(k)\| \leq \\ &\leq \|\xi\| \sum_{i=1}^n L \|z_{0i}\| = \|\xi\| \sum_{i=1}^n L \|(E - H)e_i\| \leq nL \|\xi\| \|E - H\|. \end{aligned}$$

Определяя $\widehat{L} = nL$, получаем

$$\|D(k)\| = \max_{\|\xi\| \neq 0} \frac{\|D(k)\xi\|}{\|\xi\|} \leq \widehat{L} \|E - H\|, \quad k \in [l, l + \vartheta - 1] \cap \mathbb{N}_0,$$

поэтому оценка (18) выполнена.

Достаточность. Предположим, что для произвольных $l \in \mathbb{N}_0$ и $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$ существует последовательность $D(k) \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $k = l, l + 1, \dots, l + \vartheta - 1$, такая, что последовательность $C(k)$, $k = l, \dots, l + \vartheta - 1$, заданная уравнением (19), и начальным условием (20), удовлетворяет конечному условию (21), и неравенство (18) выполняется для некоторого положительного $\widehat{L}$.

Рассмотрим любые $l \in \mathbb{N}_0$ и $z_0 \in \mathbb{R}^n$. Суммируя (19) от $k = l$ до $k = l + \vartheta - 1$, получаем

$$\sum_{j=l}^{l+\vartheta-1} Z(l, j+1)B(j)D(j) = H - E.$$

Пусть $H = E + [-z_0, 0, \dots, 0]$. Определим управление $w(k) = D(k)e_1$. Тогда

$$\begin{aligned} z(l + \vartheta) &= Z(l + \vartheta, l) \left(z_0 + \sum_{j=l}^{l+\vartheta-1} Z(l, j+1)B(j)D(j)e_1 \right) = \\ &= Z(l + \vartheta, l) \left((E - H)e_1 + \sum_{j=l}^{l+\vartheta-1} Z(l, j+1)B(j)D(j)e_1 \right) = \\ &= Z(l + \vartheta, l) \left(E - H + \sum_{j=l}^{l+\vartheta-1} Z(l, j+1)B(j)D(j) \right) e_1 = Z(l + \vartheta, l) (E - H + H - E) e_1 = 0. \end{aligned}$$

Кроме того,

$$\max_{k \in [l, l+\vartheta-1] \cap \mathbb{N}_0} \|w(k)\| \leq \sup_{k \in [l, l+\vartheta-1] \cap \mathbb{N}_0} \|D(k)\| \leq \widehat{L}\|H - E\| = \widehat{L}\|(H - E)e_1\| = \widehat{L}\|z_0\|.$$

Это означает, что система (3) является ϑ -равномерно вполне управляемой в классе дискретных управлений. $\square$

Следствие 3. Условие теоремы 2 достаточно для ϑ -равномерной полной управляемости системы (3).

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках государственного задания, проект FEWS-2024-0009.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Банщикова И. Н. Локальная управляемость показателей Ляпунова линейных систем с дискретным временем // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2021. Т. 57. С. 3–76. <https://doi.org/10.35634/2226-3594-2021-57-01>
2. Гайшун И. В. Системы с дискретным временем. Минск: Институт математики НАН Беларуси, 2001.
3. Демидович В. Б. Об одном признаке устойчивости разностных уравнений // Дифференциальные уравнения. 1969. Т. 5. № 7. С. 1247–1255. <https://www.mathnet.ru/rus/de759>
4. Зайцев В. А., Попова С. Н., Тонков Е. Л. О свойстве равномерной полной управляемости линейной управляемой системы с дискретным временем // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2014. Вып. 4. С. 53–63. <https://doi.org/10.20537/vm140404>
5. Макаров Е. К., Попова С. Н. Управляемость асимптотических инвариантов нестационарных линейных систем. Минск: Беларуская навука, 2012.
6. Тонков Е. Л. Критерий равномерной управляемости и стабилизация линейной рекуррентной системы // Дифференциальные уравнения. 1979. Т. 15. № 10. С. 1804–1813. <https://www.mathnet.ru/rus/de3820>
7. Тонков Е. Л. К теории линейных управляемых систем. Ижевск: Издательский центр «Удмуртский университет», 2018.
8. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. М.: Мир, 1989.
9. Babiarz A., Czornik A., Makarov E., Niezabitowski M., Popova S. Pole placement theorem for discrete time-varying linear systems // SIAM Journal on Control and Optimization. 2017. Vol. 55. Issue 2. P. 671–692. <https://doi.org/10.1137/15m1033666>
10. Babiarz A., Banshchikova I., Czornik A., Makarov E., Niezabitowski M., Popova S. Necessary and sufficient conditions for assignability of the Lyapunov spectrum of discrete linear time-varying systems // IEEE Transactions on Automatic Control. 2018. Vol. 63. Issue 11. P. 3825–3837. <https://doi.org/10.1109/tac.2018.2823086>
11. Babiarz A., Banshchikova I., Czornik A., Makarov E., Niezabitowski M., Popova S. Proportional local assignability of Lyapunov spectrum of linear discrete time-varying systems // SIAM Journal on Control and Optimization. 2019. Vol. 57. Issue 2. P. 1355–1377. <https://doi.org/10.1137/17m1141734>
12. Bittanti S., Colaneri P., de Nicolao G. Discrete-time linear periodic systems: A note on the reachability and controllability interval length // Systems and Control Letters. 1986. Vol. 8. Issue 1. P. 75–78. [https://doi.org/10.1016/0167-6911\(86\)90033-2](https://doi.org/10.1016/0167-6911(86)90033-2)
13. Bittanti S., Colaneri P. Periodic systems. Filtering and control. London: Springer, 2009. <https://doi.org/10.1007/978-1-84800-911-0>
14. Halanay A., Ionescu V. Time-varying discrete linear systems. Input-output operators. Riccati equations. Disturbance attenuation. Basel: Birkhäuser, 1994. <https://doi.org/10.1007/978-3-0348-8499-0>

15. Kalman R. E. Contribution to the theory of optimal control // Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana. Serie 2. 1960. Vol. 5. P. 102–119. <https://zbmath.org/0112.06303>

Поступила в редакцию 20.06.2025

Принята к публикации 10.09.2025

Попова Светлана Николаевна, д. ф.-м. н., зав. кафедрой дифференциальных уравнений, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5501-474X>

E-mail: udsu.popova.sn@gmail.com

Фахразиева Эльмира Алмазовна, младший научный сотрудник, кафедра дифференциальных уравнений, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.

ORCID: <https://orcid.org/0009-0007-8679-6554>

E-mail: elmiraf12@mail.ru

Цитирование: С. Н. Попова, Э. А. Фахразиева. Равномерная полная управляемость линейных гибридных систем // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2025. Т. 35. Вып. 3. С. 395–407.

S. N. Popova, E. A. Fakhrazieva

Uniform complete controllability of linear hybrid systems

Keywords: non-stationary linear hybrid discrete-continuous system, controllability.

MSC2020: 93B05, 93C05, 93C30

DOI: [10.35634/vm250304](https://doi.org/10.35634/vm250304)

We consider a non-stationary linear hybrid discrete-continuous control system

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_{11}(t)x(t) + A_{12}(k)y(k) + B_{11}(t)u(t) + B_{12}(k)v(k), \\ y(k+1) = A_{21}(k)x(k) + A_{22}(k)y(k) + B_{21}(k)u(k) + B_{22}(k)v(k). \end{cases}$$

The concepts of uniform complete controllability and the Kalman matrix for this system are introduced. It is proved that if there exist $\vartheta \in \mathbb{N}$ and $\gamma > 0$ such that, for all $l \in \mathbb{N}_0$, for the Kalman matrix, an inequality $W(l, l + \vartheta) \geq \gamma I$ is valid, then the hybrid system is uniformly completely controllable.

Funding. The study was funded by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation in the framework of the state assignment, project number FEWS-2024-0009.

REFERENCES

1. Banshchikova I. N. Local assignability of Lyapunov exponents of linear discrete-time system, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2021, vol. 57, pp. 3–76 (in Russian). <https://doi.org/10.35634/2226-3594-2021-57-01>
2. Gaishun I. V. *Sistemy s diskretnym vremenem* (Systems with discrete time), Minsk: Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, 2001.
3. Demidovich V. B. A certain criterion for the stability of difference equations, *Differentsial'nye Uravneniya*, 1969, vol. 5, no. 7, pp. 1247–1255 (in Russian). <https://www.mathnet.ru/eng/de759>
4. Zaitsev V. A., Popova S. N., Tonkov E. L. On the property of uniform complete controllability of a discrete-time linear control system, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2014, issue 4, pp. 53–63 (in Russian). <https://doi.org/10.20537/vm140404>
5. Makarov E. K., Popova S. N. *Upravlyaemost' asimptoticheskikh invariantov nestatsionarnykh lineinykh sistem* (Controllability of asymptotic invariants of time-dependent linear systems), Minsk: Belaruskaya Navuka, 2012.
6. Tonkov E. L. A criterion of uniform controllability and stabilization of a linear recurrent system, *Differentsial'nye Uravneniya*, 1979, vol. 15, no. 10, pp. 1804–1813 (in Russian). <https://www.mathnet.ru/eng/de3820>
7. Tonkov E. L. *K teorii lineinykh upravlyaemykh sistem* (To the theory of linear control systems), Izhevsk: Udmurt State University, 2018.
8. Horn R. A., Johnson C. R. *Matrix analysis*, Cambridge: Cambridge University Press, 1986. Translated under the title *Matrichnyi analiz*, Moscow: Mir, 1989.
9. Babiarz A., Czornik A., Makarov E., Niezabitowski M., Popova S. Pole placement theorem for discrete time-varying linear systems, *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2017, vol. 55, issue 2, pp. 671–692. <https://doi.org/10.1137/15m1033666>
10. Babiarz A., Banshchikova I., Czornik A., Makarov E., Niezabitowski M., Popova S. Necessary and sufficient conditions for assignability of the Lyapunov spectrum of discrete linear time-varying systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2018, vol. 63, issue 11, pp. 3825–3837. <https://doi.org/10.1109/tac.2018.2823086>
11. Babiarz A., Banshchikova I., Czornik A., Makarov E., Niezabitowski M., Popova S. Proportional local assignability of Lyapunov spectrum of linear discrete time-varying systems, *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2019, vol. 57, issue 2, pp. 1355–1377. <https://doi.org/10.1137/17m1141734>

12. Bittanti S., Colaneri P., de Nicolao G. Discrete-time linear periodic systems: A note on the reachability and controllability interval length, *Systems and Control Letters*, 1986, vol. 8, issue 1, pp. 75–78. [https://doi.org/10.1016/0167-6911\(86\)90033-2](https://doi.org/10.1016/0167-6911(86)90033-2)
13. Bittanti S., Colaneri P. *Periodic systems. Filtering and control*, London: Springer, 2009. <https://doi.org/10.1007/978-1-84800-911-0>
14. Halanay A., Ionescu V. *Time-varying discrete linear systems. Input-output operators. Riccati equations. Disturbance attenuation*, Basel: Birkhäuser, 1994. <https://doi.org/10.1007/978-3-0348-8499-0>
15. Kalman R. E. Contribution to the theory of optimal control, *Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana. Serie 2*, 1960, vol. 5, pp. 102–119. <https://zbmath.org/0112.06303>

Received 20.06.2025

Accepted 10.09.2025

Svetlana Nikolaevna Popova, Doctor of Physics and Mathematics, Head of the Department of Differential Equations, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5501-474X>

E-mail: udsu.popova.sn@gmail.com

El'mira Almazovna Fakhrazieva, Junior Researcher, Department of Differential Equations, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.

ORCID: <https://orcid.org/0009-0007-8679-6554>

E-mail: elmiraf12@mail.ru

Citation: S. N. Popova, E. A. Fakhrazieva. Uniform complete controllability of linear hybrid systems, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2025, vol. 35, issue 3, pp. 395–407.