МАТЕМАТИКА 2025. Т. 35. Вып. 3. С. 408–419.

УДК 514.76

© *А. Р. Рустанов*

КОНЦИРКУЛЯРНО-РЕКУРРЕНТНЫЕ ПРИБЛИЖЕННО КЕЛЕРОВЫ МНОГООБРАЗИЯ

В работе рассматриваются два конциркулярных инварианта приближенно келерова многообразия. Доказано, что приближенно келерово многообразие конциркулярно-плоско тогда и только тогда, когда первый конциркулярный инвариант равен нулю. Получена формула для вычисления второго конциркулярного инварианта и выделен подкласс приближенно келеровых многообразий, названный классом конциркулярно-паракелеровых многообразий. Конциркулярно-паракелерово многообразие нулевой скалярной кривизны изометрично комплексному евклидову пространству $\mathbb{C}^n$, снабженному стандартной эрмитовой метрикой. Класс конциркулярно-паракелеровых многообразий ненулевого постоянного типа совпадает с классом шестимерных собственных приближенно келеровых многообразий. Доказано, что конциркулярно-паракелерово приближенно келерово многообразие является римановым многообразием постоянной неотрицательной скалярной кривизны. При этом его скалярная кривизна равна нулю тогда и только тогда, когда оно является келеровым многообразием. Получена полная локальная характеризация конциркулярно-паракелеровых приближенно келеровых многообразий и конциркулярно-рекуррентных приближенно келеровых многообразий.

Ключевые слова: приближенно келерово многообразие, конциркулярно-рекуррентное многообразие, келерово многообразие, конциркулярно-симметричное многообразие.

DOI: 10.35634/vm250305

Введение

Изучение конформно-инвариантных свойств римановых многообразий, в том числе и наделенных дополнительной структурой, является одной из наиболее актуальных задач современной дифференциальной геометрии. В данной работе рассмотрим нетривиальные конформные преобразования, сохраняющие геодезические окружности (то есть кривые, у которых первая кривизна постоянна, а остальные кривизны равны нулю). Такие преобразования называются конциркулярными. Простейшими примерами пространств, допускающих конциркулярные преобразования метрики, являются пространства постоянной кривизны. Начало изучению конциркулярных преобразований было положено К. Яно [1–4]. В дальнейшем конциркулярным преобразованиям и их приложениям в физике уделяли внимание многие исследователи. Отметим работы А. Фиалкова [5], Н. С. Синюкова [6], С. Г. Лейко [7,8], Й. Микеша, С. Е. Степанова, Е. Г. Шандры [9–12], А. В. Аминовой, Д. Р. Хакимова [13]. Тем не менее, геометрические свойства конциркулярных преобразований изучены пока недостаточно.

Существование на римановом многообразии рекуррентного тензора типа (3,1) накладывает существенные ограничения на геометрию этого многообразия. Например, известно, что полное риманово многообразие с рекуррентным тензором кривизны является фактор-многообразием односвязного симметрического пространства или многообразия типа $M^2\times\mathbb{R}^{n-2}$ по дискретной подгруппе группы изометрий [14]. Ряд авторов изучали келеровы многообразия с рекуррентным тензором кривизны того или иного вида [15, 16]. Данная тема достаточно новая, ранее она почти не рассматривалась в таком ракурсе, хотя и имеется много работ по классической теории конциркулярных полей. В разные годы по этой тематики публиковали работы И. Г. Шандра [9], Н. С. Синюков [6], С. Севинк [17] и многие другие. Случаю, когда специальные векторы на многообразиях являются торсообразующими, посвящены работы [18–23].

С обзором литературы по данной тематике можно ознакомиться в работах [12, 24].

В данной работе рассматривается геометрия концирկулярно-рекуррентных приближенно келеровых многообразий, то есть геометрия приближенно келеровых многообразий, тензор концирկулярной кривизны которых является рекуррентным.

Статья структурно организована следующим образом. После краткого введения, включающего в себя исторический обзор некоторой литературы по данной тематике, в § 1 мы приводим необходимый для дальнейшего изложения материал о геометрии приближенно келеровых многообразий. В § 2 подсчитаны компоненты тензора концирկулярной кривизны на пространстве присоединенной G-структуры и на их основе выделены два подкласса приближенно келеровых многообразий, тензор концирկулярной кривизны которых удовлетворяет определенным условиям. Получена локальная классификация выделенных классов. В § 3 рассматриваются концирկулярно-рекуррентные приближенно келеровы многообразия и получена локальная характеризация концирկулярно-рекуррентных приближенно келеровых многообразий.

§ 1. Приближенно келеровы многообразия

Определение 1.1 (см. [25]). *Почти эрмитовой* (короче, AH-) структурой на многообразии M называется пара (J, g), где J — почти комплексная структура на M, g — (псевдо)риманова метрика на M. При этом

$$\langle JX, JY\rangle = \langle X, Y\rangle; \quad X, Y \in \mathcal{X}(M).$$

Эндоморфизм J называется *структурным эндоморфизмом*. Многообразие, на котором фиксирована почти эрмитовая структура, называется *почти эрмитовым* (короче, AH-) многообразием.

Определение 1.2 (см. [25]). Почти эрмитова структура на многообразии M называется *приближенно* (*nearly*) *келеровой* (короче, NK-) структурой, если на M выполняется тождество

$$\nabla_X(J)Y + \nabla_Y(J)X = 0, \quad X, Y \in \mathcal{X}(M).$$

Напомним, что полная группа структурных уравнений NK-структуры имеет вид [25, теорема 1.1, с. 317–318]:

$$\begin{aligned}
d\omega^a &= -\theta^a_b \wedge \omega^b + B^{abc}\omega_b \wedge \omega_c;\\
d\omega_a &= \theta^b_a \wedge \omega_b + B_{abc}\omega^b \wedge \omega^c;\\
d\theta^a_b &= -\theta^a_c \wedge \theta^c_b + \left(A^{ad}_{bc} - 2B^{adh}B_{hbc}\right)\omega^c \wedge \omega_d;
\end{aligned}$$

где $\{A^{ad}_{bc}\}$ — глобально определенная система функций на пространстве присоединенной G-структуры, симметричная по верхним и нижним индексам, $\{B^{abc}\}$, $\{B_{abc}\}$ — глобально определенные системы функций на пространстве присоединенной G-структуры, служащие компонентами (комплексных) тензоров на M, называемых структурными тензорами первого и второго рода. Везде в работе будем считать, что индексы $i, j, k, \ldots$ принимают значения от 1 до $2n$, индексы $a, b, c, \ldots$ — значения от 1 до n, $\hat{a} = a+n$. При этом структурные тензоры первого и второго рода кососимметричны и удовлетворяют следующим равенствам:

$$\begin{aligned}
&dB^{abc} + B^{hbc}\theta^a_h + B^{ahc}\theta^b_h + B^{abh}\theta^c_h = 0;\\
&dB_{abc} - B_{hbc}\theta^h_a - B_{ahc}\theta^h_b - B_{abh}\theta^h_c = 0.
\end{aligned}$$

Проводя процедуру дифференциального продолжения второй группы структурных уравнений, получим:

$$dA^{ad}_{bc} + A^{hd}_{bc}\theta^a_h + A^{ah}_{bc}\theta^d_h - A^{ad}_{hc}\theta^h_b - A^{ad}_{bh}\theta^h_c = A^{ad}_{bch}\omega^h + A^{adh}_{bc}\omega_h, \tag{1.1}$$

причем

$$A^{ad}_{b[ch]} = A^{a[dh]}_{bc} = 0, \quad \overline{A^{ad}_{bch}} = A^{bch}_{ad}.$$

Соотношение (1.1) показывает, что система $\{A^{ad}_{bc}\}$ на пространстве присоединенной G-структуры является системой компонент некоторого четырехвалентного тензора A на многообразии M. Этот тензор называется структурным тензором третьего рода или тензором голоморфной секционной (короче, HS-) кривизны NK-многообразия. При этом получим следующие тождества [25]:

1) второе фундаментальное тождество

$$A^{ad}_{b[c}B_{gf]d} - 2B^{adh}B_{hb[c}B_{gf]d} = 0;$$

2) третье фундаментальное тождество

$$A^d_{[g}B_{f]cd} - 2B^d_c B_{gfd} = 0,$$

где $A^d_c = A^{hd}_{hc}$, $B^{ad}_{bc} = B^{adh}B_{bch}$, $B^d_c = B^{ghd}B_{ghc}$.

Кроме того, имеют место равенства:

$$dA^a_b + A^h_b\theta^a_h - A^a_h\theta^h_b = A^a_{bh}\omega^h + A^{ah}_b\omega_h,$$
$$dB^{ad}_{bc} + B^{hd}_{bc}\theta^a_h + B^{ah}_{bc}\theta^d_h - B^{ad}_{hc}\theta^h_b - B^{ad}_{bh}\theta^h_c = 0,$$
$$dB^a_b + B^h_b\theta^a_h - B^a_h\theta^h_b = 0.$$

В дальнейшем нам понадобится следующая лемма.

Лемма 1.1. *На NK-многообразии имеет место тождество* $B^{ag}_{bc}B_{dhg} = -B^{ag}_{dh}B_{bcg}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

$$B^{ag}_{bc}B_{dhg} = B^{agf}B_{fbc}B_{dhg} = -B^{afg}B_{dhg}B_{fbc} = -B^{af}_{dh}B_{bcf} = -B^{ag}_{dh}B_{bcg}. \qquad \square$$

Замечание 1.1. NK-многообразие является келеровым тогда и только тогда, когда на пространстве присоединенной G-структуры $B^{abc} = B_{abc} = 0$. NK-многообразие, не являющееся келеровым, называется *собственным* NK-многообразием.

Напомним выражения ненулевых компонент ключевых тензоров для NK-многообразия на пространстве присоединенной G-структуры.

Компоненты формы римановой связности [25]:

$$\theta^a_{\hat{b}} = -B^{abc}\omega_c; \qquad \theta^{\hat{a}}_b = -B_{abc}\omega^c.$$

Ковариантные компоненты тензора Римана–Кристоффеля [25]:

$$R_{ab\hat{c}\hat{d}} = R_{\hat{c}\hat{d}ab} = B^{cdh}B_{hab}; \tag{1.2}$$
$$R_{\hat{a}bc\hat{d}} = -R_{\hat{a}b\hat{d}c} = -R_{b\hat{a}c\hat{d}} = R_{b\hat{a}\hat{d}c} = -A^{bd}_{ac} + B^{bdh}B_{hac}. \tag{1.3}$$

Ковариантные компоненты тензора Риччи [25]:

$$S_{a\hat{b}} = S_{\hat{b}a} = A^{bc}_{ac} + 3B^{bcd}B_{acd}.$$

Скалярная кривизна:

$$\kappa = 2A^{ab}_{ab} + 6B^{abc}B_{abc}.$$

§ 2. Конциркулярные инварианты приближенно келерова многообразия

Основным конциркулярным инвариантом псевдориманова многообразия является тензор конциркулярной кривизны, вычисляемый по формуле [1]

$$\mathcal{Z}(X,Y)Z = R(X,Y)Z - \frac{\kappa}{n(n-1)}\big(g(Y,Z)X - g(X,Z)Y\big), \tag{2.1}$$

где κ — скалярная кривизна, $\dim M$ — размерность многообразия. В нашем случае размерность равна $2n$, значит

$$\mathcal{Z}(X,Y)Z = R(X,Y)Z - \frac{\kappa}{2n(2n-1)}\big(g(Y,Z)X - g(X,Z)Y\big).$$

В терминах компонент эта формула примет вид:

$$\mathcal{Z}^i_{jkl} = R^i_{jkl} - \frac{\kappa}{2n(2n-1)}\big(g_{jl}\delta^i_k - g_{jk}\delta^i_l\big),$$

а в терминах ковариантных компонент данная формула примет вид:

$$\mathcal{Z}_{ijkl} = R_{ijkl} - \frac{\kappa}{2n(2n-1)}(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}), \tag{2.2}$$

где R_{ijkl} — соответствующие компоненты тензора Римана–Кристоффеля; g_{ij} — компоненты метрического тензора; κ — скалярная кривизна.

Как видно из (2.1) тензор конциркулярной кривизны обладает всеми классическими свойствами симметрии тензора Римана–Кристоффеля. С учетом (1.2), (1.3) находим, что на пространстве присоединенной G-структуры соотношения (2.2) принимают вид:

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}_{ab\hat{c}\hat{d}} = \mathcal{Z}_{\hat{c}\hat{d}ab} = R_{ab\hat{c}\hat{d}} - \frac{\kappa}{2n(2n-1)}(g_{a\hat{c}}g_{b\hat{d}} - g_{a\hat{d}}g_{b\hat{c}}) = \\ = B^{cdh}B_{hab} - \frac{\kappa}{2n(2n-1)}(\delta^c_a\delta^d_b - \delta^d_a\delta^c_b);\end{aligned} \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}_{\hat{a}bc\hat{d}} = -\mathcal{Z}_{\hat{a}b\hat{d}c} = -\mathcal{Z}_{b\hat{a}c\hat{d}} = \mathcal{Z}_{b\hat{a}\hat{d}c} = R_{\hat{a}bc\hat{d}} - \frac{\kappa}{2n(2n-1)}(g_{ac}g_{\hat{b}\hat{d}} - g_{a\hat{d}}g_{\hat{b}c}) = \\ = -A^{bd}_{ac} + B^{bdh}B_{hac} + \frac{\kappa}{2n(2n-1)}\delta^d_a\delta^b_c.\end{aligned} \tag{2.4}$$

Остальные компоненты тензора конциркулярной кривизны равны нулю. Отсюда следует, что для NK-многообразия не более двух из основных конциркулярных инвариантов могут быть отличны от нуля, а именно, конциркулярные инварианты $\mathcal{Z}_1$ с компонентами $\{\mathcal{Z}_{\hat{a}bc\hat{d}}, \mathcal{Z}_{a\hat{b}\hat{c}d}\}$ и $\mathcal{Z}_2$ с компонентами $\{\mathcal{Z}_{\hat{a}\hat{b}cd}, \mathcal{Z}_{ab\hat{c}\hat{d}}\}$.

Предложение 2.1. *NK-многообразие конциркулярно-плоско тогда и только тогда, когда*

$$\mathcal{Z}_1 = 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу свойств симметрии тензора конциркулярной кривизны как алгебраического тензора, обращение в нуль инварианта $\mathcal{Z}_1$ влечет обращение в нуль инварианта $\mathcal{Z}_2$, а значит NK-многообразие будет конциркулярно-плоским. В самом деле, если $\mathcal{Z}_1 = 0$, то есть $\mathcal{Z}_{\hat{a}bc\hat{d}} = 0$, то $\mathcal{Z}_{\hat{a}\hat{b}cd} = -\mathcal{Z}_{\hat{a}cd\hat{b}} - \mathcal{Z}_{\hat{a}d\hat{b}c} = -\mathcal{Z}_{\hat{a}bc\hat{d}} + \mathcal{Z}_{\hat{a}dc\hat{b}} = 0$, а значит, $\mathcal{Z}_2 = 0$. □

Таким образом, самостоятельный интерес представляет изучение NK-многообразий, для которых $\mathcal{Z}_2 = 0$.

Предложение 2.2. *Конциркулярный инвариант $\mathcal{Z}_2$ NK-многообразия вычисляется по формуле*

$$\mathcal{Z}_2(X,Y)Z = \frac{1}{2}\big(\mathcal{Z}(X,Y)Z - \mathcal{Z}(JX,JY)Z\big), \quad X,Y,Z \in \mathcal{X}(M).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. На пространстве присоединенной G-структуры имеем

$$\begin{aligned}
\big(\mathcal{Z}(X,Y)Z\big)^a &= \mathcal{Z}^a_{ijk}X^jY^kZ^i = \mathcal{Z}_{\hat{a}\hat{b}cd}X^cY^dZ^{\hat{b}} + \mathcal{Z}_{\hat{a}b\hat{c}d}X^{\hat{c}}Y^dZ^b + \mathcal{Z}_{\hat{a}bc\hat{d}}X^cY^{\hat{d}}Z^b,\\
\big(\mathcal{Z}(JX,JY)Z\big)^a &= \mathcal{Z}^a_{ijk}(JX)^j(JY)^kZ^i =\\
&= \mathcal{Z}_{\hat{a}\hat{b}cd}(JX)^c(JY)^dZ^{\hat{b}} + \mathcal{Z}_{\hat{a}b\hat{c}d}(JX)^{\hat{c}}(JY)^dZ^b + \mathcal{Z}_{\hat{a}bc\hat{d}}(JX)^c(JY)^{\hat{d}}Z^b =\\
&= -\mathcal{Z}_{\hat{a}\hat{b}cd}X^cY^dZ^{\hat{b}} + \mathcal{Z}_{\hat{a}b\hat{c}d}X^{\hat{c}}Y^dZ^b + \mathcal{Z}_{\hat{a}bc\hat{d}}X^cY^{\hat{d}}Z^b.
\end{aligned}$$

Почленно вычитая из первого выражения второе, получим, что

$$\big(\mathcal{Z}(X,Y)Z - \mathcal{Z}(JX,JY)Z\big)^a = 2\mathcal{Z}_{\hat{a}\hat{b}cd}X^cY^dZ^{\hat{b}}.$$

Таким образом, функции $\mathcal{Z}_{\hat{a}\hat{b}cd}$ и им комплексно сопряженные являются компонентами тензора $\frac{1}{2}\big(\mathcal{Z}(X,Y)Z - \mathcal{Z}(JX,JY)Z\big)$, а, следовательно, этот тензор совпадает с тензором $\mathcal{Z}_2(X,Y)Z$. □

Определение 2.1. NK-многообразие, для которого $\mathcal{Z}_2 = 0$, назовем NK-многообразием класса $\mathcal{Z}_2$, или *конциркулярно-паракелеровым многообразием*.

В силу предложения 2.2, такое NK-многообразие определяется тождеством

$$\mathcal{Z}(JX,JY)Z = \mathcal{Z}(X,Y)Z, \quad X,Y,Z \in \mathcal{X}(M).$$

Пусть M — конциркулярно-паракелерово NK-многообразие. В силу (2.3) это равносильно тому, что

$$B^{cdh}B_{hab} = \frac{\kappa}{2n(2n-1)}\delta^{cd}_{ab}. \tag{2.5}$$

Таким образом, конциркулярно-паракелерово NK-многообразие является NK-многообразием постоянного типа $c = \frac{\kappa}{n(2n-1)}$. Причем глобально постоянного типа. Хорошо известно [25, теорема 3.3, с. 328], что класс NK-многообразий нулевого постоянного типа совпадает с классом келеровых многообразий, а класс NK-многообразий ненулевого постоянного типа совпадает с классом шестимерных собственных NK-многообразий. Поэтому имеет место следующая теорема.

Теорема 2.1. *Конциркулярно-паракелерово NK-многообразие нулевой скалярной кривизны изометрично комплексному евклидову пространству $\mathbb{C}^n$, снабженному стандартной эрмитовой метрикой. Класс конциркулярно-паракелеровых NK-многообразий ненулевого постоянного типа совпадает с классом шестимерных собственных NK-многообразий.*

Так как всякое шестимерное собственное NK-многообразие есть многообразие Эйнштейна с положительной космологической константой $\epsilon = 5c$ [25, теорема 3.4, с. 329], то конциркулярно-паракелерово NK-многообразие является многообразием Эйнштейна с положительной космологической константой $\epsilon = 5c$.

Свернем соотношение (2.5) сначала по индексам a и d, а затем по индексам b и c, получим

$$B \equiv B^a_a = \frac{n-1}{2(2n-1)}\kappa.$$

Теорема 2.2. *Конциркулярно-паракелерово NK-многообразие M является римановым многообразием постоянной неотрицательной скалярной кривизны. При этом его скалярная кривизна равна нулю тогда и только тогда, когда M — келерово многообразие.*

Доказательство. Пусть M — конциркулярно-паракелерово NK-многообразие. Согласно определению,

$$\frac{n-1}{2(2n-1)}\kappa = B \equiv B^{abc}B_{abc} = \sum_{abc} |B_{abc}|^2 \geqslant 0,$$

причем

$$B = 0 \Leftrightarrow B_{abc} = B^{abc} = 0.$$

Структурные тензоры первого и второго рода NK-многообразия нулевые тогда и только тогда, когда это многообразие является келеровым.

Наконец, дифференцируя тождество $B = B^{abc}B_{abc}$ внешним образом, получаем, что $dB = 0$, и значит, $B = \mathrm{const}$. □

Пусть теперь M — конциркулярно-плоское NK-многообразие. Тогда $\mathcal{Z}_1 = 0$ и согласно (2.4)

$$A^{bd}_{ac} = B^{bdh}B_{hac} + \frac{\kappa}{2n(2n-1)}\delta^d_a\delta^b_c.$$

С учетом (2.5) последнее равенство запишется в виде

$$A^{bd}_{ac} = \frac{\kappa}{2n(2n-1)}\delta^{bd}_{ac} - \frac{\kappa}{2n(2n-1)}\delta^d_a\delta^b_c = \frac{\kappa}{2n(2n-1)}\big(\delta^b_a\delta^d_c - 2\delta^b_c\delta^d_a\big).$$

Тогда (1.3) примет вид

$$R_{\hat{b}ac\hat{d}} = A^{bd}_{ac} - B^{bdh}B_{hac} = \frac{\kappa}{2n(2n-1)}\delta^d_a\delta^b_c.$$

Также, с учетом (2.5), имеем

$$R_{ab\hat{c}\hat{d}} = R_{\hat{c}\hat{d}ab} = B^{cdh}B_{hab} = \frac{\kappa}{2n(2n-1)}\delta^{cd}_{ab}.$$

Из последних двух равенств вытекает, что

$$R_{ijkl} = \frac{\kappa}{2n(2n-1)}(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}),$$

или, что равносильно,

$$R(X,Y)Z = \frac{\kappa}{2n(2n-1)}\big(\langle Y,Z\rangle X - \langle X,Z\rangle Y\big).$$

Таким образом, конциркулярно-плоское NK-многообразие является NK-многообразием постоянной кривизны $c = \frac{\kappa}{2n(2n-1)}$. Обратное очевидно. Итак, доказана следующая теорема.

Теорема 2.3. *Конциркулярно-плоское шестимерное NK-многообразие является пространством постоянной положительной кривизны $c = \frac{\kappa}{2n(2n-1)}$, равной постоянной типа многообразия.*

§ 3. Концикулярно-рекуррентные приближенно келеровы имногообразия

Определение 3.1. Риманово многообразие M называется *концикулярно-рекуррентным*, если для его тензора концикулярной кривизны $\mathcal{Z}$ выполнено соотношение

$$\nabla\mathcal{Z} = r \otimes \mathcal{Z},$$

где r — ковариантный вектор на M. Случай $r \neq 0$ называется нетривиальным. В случае $r = 0$, то есть, если $\nabla\mathcal{Z} = 0$, многообразие называется *концикулярно-симметричным*.

Вычисляя компоненты ковариантного дифференциала тензора концикулярной кривизны на пространстве присоединенной G-структуры, получим существенные ненулевые компоненты:

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}^a_{bcd,h} &= A^{ag}_{bc}B_{dhg} - A^{ag}_{bd}B_{chg} - B^{ag}_{bc}B_{dhg} - B^{ag}_{db}B_{chg} + B^{ag}_{cd}B_{bhg},\\
\mathcal{Z}^a_{bc\hat{d},h} &= A^{ad}_{bch} - \frac{1}{2n(2n-1)}\delta^a_c\delta^b_d\kappa_h,\\
\mathcal{Z}^a_{\hat{b}cd,h} &= -\frac{1}{2n(2n-1)}\left(\delta^a_c\delta^b_d - \delta^a_d\delta^b_c\right)\kappa_h,
\end{aligned} \tag{3.1}$$

где $d\kappa = \kappa^h\omega_h + \kappa_h\omega^h$.

Пусть M — концикулярно-рекуррентное приближенно келерово многообразие. Тогда соотношение $\nabla\mathcal{Z} = r \otimes \mathcal{Z}$ на пространстве присоединенной G-структуры примет вид $\mathcal{Z}^i_{jkl,h} = r_h\mathcal{Z}^i_{jkl}$. В частности, с учетом (2.3), (2.4) и (3.1), имеем:

$$\mathcal{Z}^a_{bcd,h} = A^{ag}_{bc}B_{dhg} - A^{ag}_{bd}B_{chg} - B^{ag}_{bc}B_{dhg} - B^{ag}_{db}B_{chg} + B^{ag}_{cd}B_{bhg} = r_h\mathcal{Z}^a_{bcd} = 0,$$

то есть

$$A^{ag}_{bc}B_{dhg} + A^{ag}_{bd}B_{hcg} - B^{ag}_{bc}B_{dhg} + B^{ag}_{bd}B_{chg} + B^{ag}_{cd}B_{bhg} = 0. \tag{3.2}$$

Поскольку $B^{ag}_{cd}B_{bhg} = -B^{ag}_{bh}B_{cdg}$, то равенство (3.2) перепишется в виде:

$$A^{ag}_{bc}B_{dhg} + A^{ag}_{bd}B_{hcg} - B^{ag}_{bc}B_{dhg} - B^{ag}_{bd}B_{hcg} - B^{ag}_{bh}B_{cdg} = 0. \tag{3.3}$$

С учетом второго фундаментального тождества, равенство (3.3) можно записать в виде:

$$A^{ag}_{bh}B_{cdg} = B^{ag}_{bc}B_{dhg} + B^{ag}_{bd}B_{hcg} + B^{ag}_{bh}B_{cdg}.$$

Альтернация последнего равенства по индексам b и h, дает

$$B^{ag}_{bc}B_{dhg} + B^{ag}_{bd}B_{hcg} + 2B^{ag}_{bh}B_{cdg} - B^{ag}_{hc}B_{dbg} - B^{ag}_{hd}B_{bcg} = 0. \tag{3.4}$$

Так как $-B^{ag}_{hc}B_{dbg} = -B^{ag}_{bd}B_{hcg}$ и $-B^{ag}_{hd}B_{bcg} = -B^{ag}_{bc}B_{dhg}$, то равенство (3.4) запишется в виде:

$$B^{ag}_{bh}B_{cdg} = 0.$$

Полученное равенство свернем по индексам a и b, тогда получим

$$B^g_hB_{cdg} = 0. \tag{3.5}$$

Эндоморфизм B, задаваемый в A-репере матрицей B^a_b, эрмитово-симметричен, и значит, диагонализируем в подходящем A-репере, то есть в этом репере

$$B^a_b = B_b\delta^a_b, \tag{3.6}$$

где $\{B_a\}$ — собственные значения этого эндоморфизма. Более того, эрмитова форма

$$B(X,Y)=B^a_bX^bY_a,$$

отвечающая этому эндоморфизму, положительно полуопределена, поскольку

$$B(X,X)=B^a_bX^bX_a=B^{acd}B_{bcd}X^bX_a=\sum_{c,d}\left|B_{acd}X^a\right|^2\geqslant 0.$$

Следовательно, $B_a\geqslant 0$, $a=1,\ldots,n$. Подставляя (3.6) в (3.5), получим $B_h\delta^g_hB_{cdg}=0$, то есть

$$B_hB_{cgh}=0.$$

Последнее равенство возможно тогда и только тогда, когда $B_{cgh}=0$, то есть M — келерово многообразие. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 3.1. *Конциркулярно-рекуррентное NK-многообразие является келеровым.*

Теперь рассмотрим равенство

$$\mathcal{Z}^a_{\widehat{b}cd,h}=-\frac{1}{2n(2n-1)}\big(\delta^a_c\delta^b_d-\delta^a_d\delta^b_c\big)\kappa_h=r_h\mathcal{Z}^a_{\widehat{b}cd}=r_h\left(B^{ab}_{cd}-\frac{1}{2n(2n-1)}\big(\delta^a_c\delta^b_d-\delta^b_c\delta^a_d\big)\kappa\right).$$

Поскольку $B_{cgh}=0$, то получаем

$$\kappa_h=r_h\kappa.$$

Далее рассмотрим равенство

$$\mathcal{Z}^a_{bc\widehat{d},h}=A^{ad}_{bch}-\frac{1}{2n(2n-1)}\delta^a_c\delta^b_d\kappa_h=r_h\mathcal{Z}^a_{bc\widehat{d}}=r_h\left(A^{ad}_{bc}-B^{ad}_{bc}-\frac{1}{2n(2n-1)}\delta^a_c\delta^b_d\kappa\right).$$

Отсюда, с учетом равенства $B_{cgh}=0$, имеем

$$A^{ad}_{bch}=r_hA^{ad}_{bc}.$$

Альтернация последнего равенства по индексам c и h дает

$$r_hA^{ad}_{bc}=r_cA^{ad}_{bh}.$$

Выберем A-репер так, чтобы $r_c=r\delta^1_c$. Тогда, если $h\neq 1$, то $0=r_hA^{ad}_{b1}=r_1A^{ad}_{bh}$. Отсюда

(1) либо $r_1=0$, тогда M — конциркулярно-симметрическое многообразие;

(2) либо $A^{ad}_{bh}=0$ $(h\neq 1)$.

С учетом свойств симметрии и сопряженности тензора голоморфной секционной кривизны имеем $A^{ad}_{bh}=A\delta^a_1\delta^d_1\delta^1_b\delta^1_c$, где A — некоторая функция на пространстве присоединенной G-структуры. Продифференцировав внешним образом соотношение $A^{11}_{\alpha 1}=A\delta^1_\alpha$ $\big(\alpha=2,3,\ldots,\frac{1}{2}\dim M\big)$, получим, что либо $A^{11}_{11}=0$, либо $\theta^1_\alpha=0$.

В первом случае $A^{ad}_{bh}=0$, то есть многообразие M — плоское келерово многообразие, а значит, локально голоморфно изометрично комплексному евклидову пространству $\mathbb{C}^n$, снабженному стандартной эрмитовой метрикой $\big\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\big\rangle=ds^2$, в каноническом атласе задаваемой соотношением $ds^2=\sum\limits_{a=1}^{n}dz^ad\overline{z}^a$. Во втором случае структурные уравнения распадутся на группу двумерной келеровой структуры и евклидовой структуры. В случае односвязности, указанные изометрии являются глобальными. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 3.2. *Концикулярно-рекуррентное приближенно келерово многообразие либо концикулярно-симметрично, либо локально изоморфно произведению комплексного евклидова пространства $\mathbb{C}^n$ и двумерного келерова многообразия. В случае односвязности многообразия, указанные изометрии являются глобальными.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Yano K. Concircular geometry I. Concircular transformations // Proceedings of the Japan Academy. Series A. Mathematical Sciences. 1940. Vol. 16. No. 6. P. 195–200. https://doi.org/10.3792/pia/1195579139
2. Yano K. Concircular geometry II. Integrability conditions of $\rho_{\mu\nu} = \phi g_{\mu\nu}$ // Proceedings of the Japan Academy. Series A. Mathematical Sciences. 1940. Vol. 16. No. 8. P. 354–360. https://doi.org/10.3792/pia/1195579022
3. Yano K. Concircular geometry III. Theory of curves // Proceedings of the Japan Academy. Series A. Mathematical Sciences. 1940. Vol. 16. No. 9. P. 442–448. https://doi.org/10.3792/pia/1195578994
4. Yano K. Concircular geometry IV. Theory of subspaces // Proceedings of the Japan Academy. Series A. Mathematical Sciences. 1940. Vol. 16. No. 10. P. 505–511. https://doi.org/10.3792/pia/1195578943
5. Fialkow A. Conformal geodesics // Transactions of the American Mathematical Society. 1939. Vol. 45. No. 3. P. 443–473. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1939-1501998-9
6. Синюков Н. С. Геодезические отображения римановых пространств. М.: Наука, 1979. https://zbmath.org/0637.53020
7. Лейко С. Г. О спин-конформных диффеоморфизмах псевдоримановых пространств // IX Всесоюзная геометрическая конференция: тез. докл. Кишинев: Штиинца, 1988. С. 182.
8. Лейко С. Г. Законы сохранения для спин-траекторий, порожденных изопериметрическими экстремалями поворота // Гравитация и теория относительности. Казань: Издательство Казанского университета, 1988. Вып. 26. С. 117–124.
9. Shandra I. G. Concircular vector fields on semi-Riemannian spaces // Journal of Mathematical Sciences. 2007. Vol. 142. No. 5. P. 2419–2435. https://doi.org/10.1007/s10958-007-0184-4
10. Stepanov S. E., Shandra I. G., Mikeš J. Harmonic and projective diffeomorphisms // Journal of Mathematical Sciences. 2015. Vol. 207. No. 4. P. 658–668. https://doi.org/10.1007/s10958-015-2388-3
11. Shandra I. G., Mikeš J. Geodesic mappings of $V_n(K)$-spaces and concircular vector fields // Mathematics. 2019. Vol. 7. Issue 8. 692. https://doi.org/10.3390/math7080692
12. Mikeš J., Stepanova E., Vanžurová A. Differential geometry of special mappings. Olomouc: Palacký University Olomouc, Faculty of Science, 2015. https://mathscinet.ams.org/mathscinet/relay-station?mr=3442960
13. Аминова А. В., Хакимов Д. Р. О проективных движениях пятимерных пространств специального вида // Известия высших учебных заведений. Математика. 2017. № 5. С. 97–102. https://www.mathnet.ru/rus/ivm9242
14. Wong Yung-Chow. Recurrent tensors on a linearly connected differentiable manifold // Transactions of the American Mathematical Society. 1961. Vol. 99. No. 2. P. 325–341. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1961-0121751-2
15. Hasegawa I. H-projective-recurrent Kählerian manifolds and Bochner-recurrent Kählerian manifolds // Hokkaido Mathematical Journal. 1974. Vol. 3. No. 2. P. 271–278. https://doi.org/10.14492/hokmj/1381758807
16. Toshikiyo Yamada. On a certain recurrent space and HP-transformation in a Kählerian manifold // Journal of the Asahikawa National College of Technology. 1976. No. 13. P. 103–109 (in Japanese).
17. Sevinç S., Şekerci G. A., Çöken A. C. Some results about concircular and concurrent vector fields on pseudo-Kaehler manifolds // Journal of Physics: Conference Series. 2016. Vol. 766. 012034. https://doi.org/10.1088/1742-6596/766/1/012034
18. Кириченко В. Ф., Арсеньева О. Е., Рустанов А. Р. Пример концикулярного векторного поля на локально конформно-келеровом многообразии // Математические заметки. 2022. Т. 111. Вып. 4. С. 519–524. https://doi.org/10.4213/mzm13307

19. Рустанов А. Р., Полькина Е. А. Некоторые вопросы геометрии локально конформно-келеровых многообразий // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2022. № 3 (215). С. 23–28. https://doi.org/10.18522/1026-2237-2022-3-23-28
20. Рустанов А. Р., Арсеньева О. Е., Харитонова С. В. О геометрии голоморфных торсообразующих векторных полей на почти контактных метрических многообразиях // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2023. Т. 222. С. 83–93. https://doi.org/10.36535/0233-6723-2023-222-83-93
21. Хохлов С. В., Игнаточкина Л. А. Инвариантность некоторых классов почти эрмитовых структур относительно однопараметрической группы диффеоморфизмов, порожденных векторным полем Ли // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. 2022. Вып. 53. С. 127–134. https://doi.org/10.5922/0321-4796-2022-53-12
22. Игнаточкина Л. А. Характеристический вектор почти контактной метрической структуры как аффинное движение // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. 2022. Вып. 53. С. 59–67. https://doi.org/10.5922/0321-4796-2022-53-6
23. Игнаточкина Л. А., Никифорова А. В., Терпстра М. А. Инвариантность почти контактной метрической структуры гладкого многообразия относительно характеристического вектора // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2023. Т. 223. С. 24–35. https://www.mathnet.ru/rus/into1152
24. Аминова А. В. Проективные преобразования псевдоримановых многообразий. М.: Янус-К, 2003.
25. Кириченко В. Ф. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. Одесса: Печатный Дом, 2013.

Поступила в редакцию 29.05.2025
Принята к публикации 27.07.2025

Рустанов Алигаджи Рабаданович, к. ф.-м. н., доцент, кафедра высшей математики, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, 26.
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5217-8167
E-mail: aligadzhi@yandex.ru

Цитирование: А. Р. Рустанов. Конциркулярно-рекуррентные приближенно келеровы многообразия // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2025. Т. 35. Вып. 3. С. 408–419.

VESTNIK UDMURTSKOGO UNIVERSITETA. MATEMATIKA. MEKHANIKA. KOMP'YUTERNYE NAUKI
MATHEMATICS 2025. Vol. 35. Issue 3. Pp. 408–419.

A. R. Rustanov

Concircularly recurrent nearly Kähler manifolds

Keywords: nearly Kähler manifold, concircularly recurrent manifold, Kähler manifold, concircularly symmetric manifold.

MSC2020: 53B35, 53C10, 32Q15

DOI: 10.35634/vm250305

In this paper, two concircular invariants of a nearly Kähler manifold are considered. It is proved that a nearly Kähler manifold is concircularly flat if and only if the first concircular invariant is zero. A formula for calculating the second concircular invariant is obtained, and a subclass of nearly Kähler manifolds is distinguished, called the class of concircular-paraKähler manifolds. A concircular-paraKähler manifold of zero scalar curvature is isometric to the complex Euclidean space $\mathbb{C}^n$ equipped with the standard Hermitian metric. The class of concircular-paraKähler manifolds of nonzero constant type coincides with the class of six-dimensional proper nearly Kähler manifolds. It is proved that a concircular-paraKähler nearly Kähler manifold is a Riemannian manifold of constant nonnegative scalar curvature. In this case, its scalar curvature is zero if and only if it is a Kähler manifold. A complete local characterization of concircular-paraKähler nearly Kähler manifolds and concircular-recurrent nearly Kähler manifolds is obtained.

REFERENCES

1. Yano K. Concircular geometry I. Concircular transformations, *Proceedings of the Japan Academy. Series A. Mathematical Sciences*, 1940, vol. 16, no. 6, pp. 195–200. https://doi.org/10.3792/pia/1195579139
2. Yano K. Concircular geometry II. Integrability conditions of $\rho_{\mu\nu} = \phi g_{\mu\nu}$, *Proceedings of the Japan Academy. Series A. Mathematical Sciences*, 1940, vol. 16, no. 8, pp. 354–360. https://doi.org/10.3792/pia/1195579022
3. Yano K. Concircular geometry III. Theory of curves, *Proceedings of the Japan Academy. Series A. Mathematical Sciences*, 1940, vol. 16, no. 9, pp. 442–448. https://doi.org/10.3792/pia/1195578994
4. Yano K. Concircular geometry IV. Theory of subspaces, *Proceedings of the Japan Academy. Series A. Mathematical Sciences*, 1940, vol. 16, no. 10, pp. 505–511. https://doi.org/10.3792/pia/1195578943
5. Fialkow A. Conformal geodesics, *Transactions of the American Mathematical Society*, 1939, vol. 45, no. 3, pp. 443–473. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1939-1501998-9
6. Sinyukov N. S. *Geodezicheskie otobrazheniya rimanovykh prostranstv* (Geodesic mappings of Riemannian spaces), Moscow: Nauka, 1979. https://zbmath.org/0637.53020
7. Leiko S. G. On spin-conformal diffeomorphisms of pseudo-Riemannian spaces, *IX All-Union Geometric Conference: Abstracts of All-Union Conf.*, Chișinău: Știința, 1988, p. 182 (in Russian).
8. Leiko S. G. Conservation laws for spin-trajectories generated by isoperimetric rotation extremals, *Gravitatsiya i teoriya otnositel'nosti* (Gravity and theory of relativity), Kazan: Kazan University, 1988, issue 26, pp. 117–124 (in Russian).
9. Shandra I. G. Concircular vector fields on semi-Riemannian spaces, *Journal of Mathematical Sciences*, 2007, vol. 142, no. 5, pp. 2419–2435. https://doi.org/10.1007/s10958-007-0184-4
10. Stepanov S. E., Shandra I. G., Mikeš J. Harmonic and projective diffeomorphisms, *Journal of Mathematical Sciences*, 2015, vol. 207, no. 4, pp. 658–668. https://doi.org/10.1007/s10958-015-2388-3
11. Shandra I. G., Mikeš J. Geodesic mappings of $V_n(K)$-spaces and concircular vector fields, *Mathematics*, 2019, vol. 7, issue 8, 692. https://doi.org/10.3390/math7080692
12. Mikeš J., Stepanova E., Vanžurová A. *Differential geometry of special mappings*, Olomouc: Palacký University Olomouc, Faculty of Science, 2015. https://mathscinet.ams.org/mathscinet/relay-station?mr=3442960

13. Aminova A. V., Khakimov D. R. On projective motions of five-dimensional spaces of special form, *Russian Mathematics*, 2017, vol. 61, issue 5, pp. 83–87 https://doi.org/10.3103/S1066369X17050115
14. Wong Yung-Chow. Recurrent tensors on a linearly connected differentiable manifold, *Transactions of the American Mathematical Society*, 1961, vol. 99, no. 2, pp. 325–341. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1961-0121751-2
15. Hasegawa I. H-projective-recurrent Kählerian manifolds and Bochner-recurrent Kählerian manifolds, *Hokkaido Mathematical Journal*, 1974, vol. 3, no. 2, pp. 271–278. https://doi.org/10.14492/hokmj/1381758807
16. Toshikiyo Yamada. On a certain recurrent space and HP-transformation in a Kählerian manifold, *Journal of the Asahikawa National College of Technology*, 1976, no. 13, pp. 103–109 (in Japanese).
17. Sevinç S., Şekerci G. A., Çöken A. C. Some results about concircular and concurrent vector fields on pseudo-Kaehler manifolds, *Journal of Physics: Conference Series*, 2016, vol. 766, 012034. https://doi.org/10.1088/1742-6596/766/1/012034
18. Kirichenko V. F., Arsen'eva O. E., Rustanov A. R. An example of a concircular vector field on a locally conformally Kähler manifold, *Mathematical Notes*, 2022, vol. 111, nos. 3–4, pp. 544–548. https://doi.org/10.1134/S0001434622030221
19. Rustanov A. R., Polkina E. A. Some questions of geometry of locally conformal Kahler manifolds, *University News. North-Caucasian Region. Natural Sciences Series*, 2022, no. 3 (215), pp. 23–28 (in Russian). https://doi.org/10.18522/1026-2237-2022-3-23-28
20. Rustanov A. R., Arsen'eva O. E., Kharitonova S. V. On the geometry of holomorphic torse-forming vector fields on almost contact metric manifolds, *Itogi Nauki i Tekhniki. Sovremennaya Matematika i ee Prilozheniya. Tematicheskie Obzory*, 2023, vol. 222, pp. 83–93 (in Russian). https://doi.org/10.36535/0233-6723-2023-222-83-93
21. Khokhlov S. V., Ignatochkina L. A. Invariance of some classes of almost Hermitian structures concerning to the one-parameter group of diffeomorphisms generated by the Lie vector field, *Differential Geometry of Manifolds of Figures*, 2022, issue 53, pp. 127–134 (in Russian). https://doi.org/10.5922/0321-4796-2022-53-12
22. Ignatochkina L. A. Reeb vector field of almost contact metric structure as affine motion, *Differential Geometry of Manifolds of Figures*, 2022, issue 53, pp. 59–67 (in Russian). https://doi.org/10.5922/0321-4796-2022-53-6
23. Ignatochkina L. A., Nikiforova A. V., Terpstra M. A. Invariance of an almost contact metric structure of a smooth manifold with respect to the characteristic vector, *Itogi Nauki i Tekhniki. Sovremennaya Matematika i ee Prilozheniya. Tematicheskie Obzory*, 2023, vol. 223, pp. 24–35 (in Russian). https://www.mathnet.ru/eng/into1152
24. Aminova A. V. *Proektivnye preobrazovaniya psevdorimanovykh mnogoobrazii* (Projective transformations of pseudo-Riemannian manifolds), Moscow: Yanus-K, 2003.
25. Kirichenko V. F. *Differentsial'no-geometricheskie struktury na mnogoobraziyakh* (Differential-geometric structures on manifolds), Odessa: Pechatnyi Dom, 2013.

Received 29.05.2025
Accepted 27.07.2025

Aligadzhi Rabadanovich Rustanov, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Higher Mathematics, Moscow State University of Civil Engineering, Yaroslavskoe Shosse, 26, Moscow, 129337, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5217-8167
E-mail: aligadzhi@yandex.ru

Citation: A. R. Rustanov. Concircularly recurrent nearly Kähler manifolds, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2025, vol. 35, issue 3, pp. 408–419.