

УДК 517.958

© Ж. Д. Тотиева

О РАЗРЕШИМОСТИ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С ПАМЯТЬЮ И АКУСТИЧЕСКИМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Рассматривается одномерная обратная задача определения ядра интегрального оператора свертки в волновом уравнении на отрезке для сред с дисперсией. Прямая задача представляет собой начально-краевую задачу одновременного нахождения потенциала скорости и смещения точек границы среды. В качестве граничных условий используются условия акустического управления. В качестве дополнительной информации для постановки обратной задачи задается интегральное условие переопределения. Обратная задача сводится к эквивалентной задаче исследования разрешимости замкнутой системы интегро-дифференциальных уравнений вольтерровского типа с нулевыми граничными условиями. С помощью техники оценки интегральных операторов и принципа сжимающих отображений в пространствах Соболева доказана локальная теорема существования и единственности решения обратной задачи.

Ключевые слова: волновое уравнение, акустические граничные условия, обратная задача, ядро памяти.

DOI: [10.35634/vm250306](https://doi.org/10.35634/vm250306)**Введение**

Рассмотрим интегро-дифференциальное волновое уравнение с начальными и граничными акустическими условиями для сред с дисперсией [1]:

$$u_{tt} - u_{xx} - u_{xxtt} + \int_0^t k(t-s)u_{xx}(x,s) ds = 0, \quad (x,t) \in I \times (0,T), \quad (0.1)$$

$$u|_{x=0} \equiv 0, \quad 0 \leq t < T, \quad (0.2)$$

$$\left[u_x - \int_0^t k(s)u_x(x,t-s) ds \right] \Big|_{x=l} = y'(t), \quad 0 \leq t < T, \quad (0.3)$$

$$u_t|_{x=l} = -py'(t) - qy(t), \quad 0 \leq t < T, \quad (0.4)$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t|_{t=0} = u_1(x), \quad x \in I, \quad (0.5)$$

где $u(x,t)$ — потенциал скорости, $k(t)$ — ядро памяти среды, $y(t)$ — смещение в точке $x = l$; T, p, q — некоторые положительные постоянные, $I := (0, l)$.

В последнее время волновые уравнения с акустическими граничными условиями изучаются многими авторами. В работе [2] задача (0.1)–(0.5) без учета дисперсии (при отсутствии слагаемого $-u_{xxtt}$ в уравнении (0.1)) рассматривалась в многомерном случае, когда I является ограниченной областью в $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$) с границей $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ из класса C^2 , Γ_0 и Γ_1 замкнуты и не пересекаются. В уравнении (0.3) в правой части использовалась производная по единичной внешней нормали к Γ . Эта работа была посвящена исследованию влияния функции ядра k и доказательству оценок скорости убывания решений, когда k не убывает экспоненциально. В работе [3] авторы рассматривают нелинейное вязкоупругое уравнение типа уравнения Кирхгофа с начальными условиями и акустическими граничными условиями. Они показывают, что, в зависимости от свойств ядра свертки k на бесконечности,

энергия решения убывает экспоненциально или полиномиально при $t \rightarrow +\infty$. Подход основан на интегральных неравенствах. Вместо использования метода Ляпунова для некоторой возмущенной энергии авторы концентрируются на исходной энергии, показывая, что она удовлетворяет нелинейному интегральному неравенству, которое, в свою очередь, дает окончательную оценку затухания.

Граничные условия типа (0.3), наложенные на часть границы, и условие Дирихле на другую часть границы, были рассмотрены, например, в [4–6]. Условие (0.3) означает, что правый конец I зажат в теле с вязкоупругими свойствами. Подробный анализ в этом направлении приводится в разделах литературы работ [2, 3]. Ядро памяти (интегрального слагаемого в (0.1)) представляет собой физические свойства вязкоупругой среды, которые трудно определить непосредственно из эксперимента или опытным путем. Имея дополнительную информацию о потенциале скорости u , мы можем восстановить k при условии, что потенциал скорости взят для подходящего подмножества I . Мы предполагаем, что такая дополнительная информация об u может быть представлена в интегральной форме, называемой интегральным условием переопределения:

$$\int_0^t \Phi(x) u_x(x, t) dx = f(t), \quad t \in [0, T], \quad (0.6)$$

где $f(t)$ — данные физического измерения, которые представляют собой среднюю скорость на I , Φ — это заданная функция, вид которой зависит от способа измерений, причем $\text{supp}(\Phi) \subseteq I$. Если функция $k(t)$ известна, то начально-краевая задача (0.1)–(0.5) определения $u(x, t)$ и $y(t)$ называется *прямой задачей*. *Обратная задача* — это задача определения $u(x, t)$, $y(t)$ и $k(t)$ из системы интегро-дифференциальных уравнений в частных производных (0.1)–(0.6). Для изучения поставленной задачи удобно представить известную функцию $\Phi(x)$ в виде разности $\varphi(x) - \varphi''(x)$, где $\varphi(x)$ будет определяться как $\left(1 - \frac{d^2}{dx^2}\right)^{-1} \Phi(x)$ с условиями, налагаемыми на функцию φ в параграфе 2.

Данное исследование относится к классу одномерных обратных задач для динамических линейных волновых процессов с последствием. Незвестная функция в приведенной выше задаче является ядром интегрального оператора, моделирующего явление памяти.

В теории обратных задач для гиперболических интегро-дифференциальных уравнений задачи нахождения ядра интегрального оператора (зависящего от временных и пространственных переменных) представляют собой направление, сформировавшееся в конце прошлого века [7–11]. Подробный анализ литературы в этой области приведен в монографии [12], которая является одной из последних фундаментальных работ в области обратных задач для сред с памятью. Также можно отметить интересную работу по определению матричного ядра системы вязкоупругости для случая анизотропной среды [13].

Задачи определения ядер, зависящих от двух или более переменных, рассматриваются в [14–22]. В работе [14] для решения обратных задач в ограниченной области используется метод разделения переменных, с помощью которого задачи сводятся к системе интегральных уравнений типа Вольтерра относительно неизвестных функций, зависящих от временной переменной. В работах [15–20] изучаются многомерные обратные задачи с сосредоточенными источниками возмущений, которые сводятся к решению задач интегральной геометрии. Целью исследуемых обратных задач является определение пространственных частей ядер и коэффициентов Ламе. Использование асимптотических подходов к исследованию разрешимости многомерных обратных задач приведено в статье [21]. В работе [22], с помощью метода шкал банаховых пространств аналитических функций в сочетании с методом весовых норм, получена глобальная однозначная разрешимость задачи определения $k(x, t)$ в классе функций, аналитических по пространственной переменной x и гладких по временной переменной t .

В последние годы мы наблюдаем увеличение числа публикаций, посвященных численным расчетам ядер интегральных операторов [23–26].

Научная новизна исследования состоит в исследовании разрешимости обратной задачи определения ядра интегрального оператора свертки для прямой задачи (0.1)–(0.5) с акустическими граничными условиями для сред с дисперсией.

Теоретическая значимость исследования заключается в получении необходимых и достаточных условий локальной однозначной разрешимости одномерной обратной задачи (0.1)–(0.6).

Более удобным представляется исследовать обратную задачу (0.1)–(0.6) в терминах функций $v := u_t + z \frac{x}{l}$, $z := py' + qy$.

Уравнения (0.1)–(0.6) в терминах функций v, z приведены ниже в параграфе 2. Функция v имеет нулевые граничные условия, что необходимо при применении энергетического неравенства в параграфе 3.

§ 1. Постановка обратной задачи

Для любых целых чисел m, p мы обозначаем через $W^{m,p}(I) := W^{m,p}(I; \mathbb{R})$ и $W^{m,p}(0, T) := W^{m,p}(0, T; \mathbb{R})$ обычные пространства Соболева, определенные для пространственной переменной и переменной времени соответственно. Для банахова пространства $\mathbb{X}$, пространство $L^p(0, T; \mathbb{X})$ содержит все измеримые функции Лебега $u: [0, T] \rightarrow \mathbb{X}$ с

$$\|u\|_{L^p(0, T; \mathbb{X})} := \left(\int_0^T \|u(t)\|_{\mathbb{X}}^p dt \right)^{1/p} < \infty, \quad 1 \leq p < \infty.$$

Пространства Соболева $W^{m,p}(0, T; \mathbb{X})$ содержат все функции $u \in L^p(0, T; \mathbb{X})$ такие, что $\frac{\partial^\gamma u}{\partial t^\gamma}$ существует в слабом смысле и принадлежит $L^p(0, T; \mathbb{X})$ для всех $0 \leq \gamma \leq m$. Пусть $H^m(I) := W^{m,2}(I)$, $H^m(0, T) := W^{m,2}(0, T)$, и $H^m(0, T; \mathbb{X}) := W^{m,2}(0, T; \mathbb{X})$.

Введем

$$H_0^1(I) = \{\varphi \in H^1(I) : \varphi(0) = \varphi(l) = 0\},$$

$$H_0^3(I) = \{\varphi \in H^3(I) : \varphi(0) = \varphi(l) = 0, \varphi'(0) = \varphi'(l) = 0, \varphi''(0) = \varphi''(l) = 0\}.$$

Обратная задача. Для $T > 0$ определить $\tau \in (0, T]$,

$$u \in H^3(0, \tau; H^2(I)), \quad k \in H^1(0, \tau) \quad \text{и} \quad y \in H^3(0, \tau) \quad (1.1)$$

или

$$v \in H^2(0, \tau; H_0^1(I) \cap H^2(I)), \quad k \in H^1(0, \tau) \quad \text{и} \quad z \in H^2(0, \tau) \quad (1.2)$$

такие, что (v, k, z) удовлетворяет системе:

$$v_{tt} - v_{xx} - v_{xxtt} + k(t)u_0''(x) + \int_0^t k(t-s)v_{xx}(x, s) ds = z'' \frac{x}{l}, \quad (x, t) \in I \times (0, \tau), \quad (1.3)$$

$$v|_{x=0} = v|_{x=l} = 0, \quad 0 \leq t < \tau, \quad (1.4)$$

$$\left[v_x - \int_0^t k(t-s)v_x(x, s) ds \right] \Big|_{x=l} =$$

$$= y''(t) + k(t)u_0'(l) + \frac{1}{l} \left(z(t) - \int_0^t k(t-s)z(s) ds \right), \quad 0 \leq t < \tau, \quad (1.5)$$

$$v|_{t=0} = v_0(x), \quad v_t|_{t=0} = v_1(x), \quad x \in I, \quad (1.6)$$

$$\int_0^l (\varphi(x) - \varphi''(x)) \left[v_x - \frac{z}{l} \right] dx = f'(t), \quad t \in (0, \tau), \quad (1.7)$$

и выполнены следующие условия:

- (i1) $u_0(x), u_1(x) \in H^4(I); u_2(x) := u_{tt}(x, 0), u_3(x) := u_{xtt}(x, 0) \in H^2(I), \varphi(x) \in H_0^3(I);$
- (i2) $v_0(x) := u_1(x) - u_1(l)\frac{x}{l}, v_1(x) := u_2(x) - u_2(l)\frac{x}{l} \in H_0^1(I) \cap H^2(I),$ где $u_2(x) = \left(1 - \frac{d^2}{dx^2}\right)^{-1} u_0''(x), u_2'(0) = 0;$
- (i3) $\alpha^{-1} := \int_0^l \varphi'(x) u_0''(x) dx \neq 0;$
- (i4) $f(t) \in H^4(0, T):$

$$\begin{aligned} \int_0^l (\varphi(x) - \varphi''(x)) u_0'(x) dx &= f(0), \\ \int_0^l (\varphi(x) - \varphi''(x)) u_1'(x) dx &= f'(0), \\ \int_0^l (\varphi(x) - \varphi''(x)) u_2(x) dx &= f''(0), \\ \int_0^l (\varphi(x) - \varphi''(x)) \left(1 - \frac{d^2}{dx^2}\right)^{-1} [u_1'''(x) - k(0)u_0'''(x)] dx &= f'''(0), \\ k(0) &= \alpha \left(f'''(0) - \int_0^l v_0(x) \varphi'''(x) dx \right), \quad u_3'(0) = 0. \end{aligned}$$

(i5) $y''(0) = \frac{1}{\psi(l)} \left[f'(0) + \int_0^l \psi(x) u_1''(x) dx \right] - k(0) u_0'(l),$ здесь $\psi(x) = \int_0^x \varphi(\xi) d\xi - \varphi'(x)$ и $\psi(l) \neq 0.$

Замечание 1.1. Согласно теореме Соболева о вложении, если $j + 1/2 < s, h(t) \in H^s(0, T),$ то $h(t) \in C^j[0, T],$ и из этого следуют равенства в (i4) и (i5).

Замечание 1.2. Условие переопределения (0.6) может быть переписано следующим образом:

$$- \int_0^l (\varphi'(x) - \varphi'''(x)) u(x, t) dx = f(t), \quad t \in (0, \tau), \quad (1.8)$$

или

$$\psi(l) u_x(l, t) - \int_0^l \psi(x) u_{xx} dx = f(t), \quad (1.9)$$

где $\psi(x)$ определена в (i5).

Затем мы можем переписать (1.5), используя (1.9):

$$y''(t) = G[v_{xx}](t) - k(t) G[u_{xx}](0) - \int_0^t k(t-s) G[v_{xx}](s) ds, \quad (1.10)$$

$$G[\cdot](t) := \frac{1}{\psi(l)} \left(f'(t) + \int_0^l \psi(x) [\cdot](x, t) dx \right).$$

В данной работе используются следующие неравенства.

Лемма 1.1 (см. [27, Теорема 4.4]). Пусть X — банахово пространство, $p \in (1, \infty), \tau \in \mathbb{R}_+, k \in L^p(0, \tau)$ и $f \in L^p(0, \tau; X).$ Тогда $k * f \in L^p(0, \tau; X)$ и

$$\|k * f\|_{L^p(0, \tau; X)} \leq \tau^{1-1/p} \|k\|_{L^p(0, \tau)} \|f\|_{L^p(0, \tau; X)},$$

где $(k * f)(t) = \int_0^t k(t-s) f(s) ds.$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя неравенство Юнга для свертки и неравенство Гёльдера, мы имеем

$$\|k * f\|_{L^p(0,\tau;X)} \leq \|k\|_{L^1(0,\tau)} \|f\|_{L^p(0,\tau;X)} \leq \tau^{1-1/p} \|k\|_{L^p(0,\tau)} \|f\|_{L^p(0,\tau;X)}. \quad \square$$

Лемма 1.2 (см. [27, Теорема 4.5]). Пусть X — банахово пространство, $p \in (1, \infty)$, $\tau \in \mathbb{R}_+$, $w \in W^{1,p}(0, \tau; X)$ с $w(0) = 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \|w\|_{L^\infty(0,\tau;X)} &\leq \tau^{1-1/p} \|w\|_{W^{1,p}(0,\tau;X)}, \\ \|w\|_{L^p(0,\tau;X)} &\leq \tau \|w\|_{W^{1,p}(0,\tau;X)}. \end{aligned}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Неравенства следуют из неравенства Гёльдера и неравенства Юнга для свертки, с помощью формулы $w = 1 * w_t$:

$$\|w\|_{L^p(0,\tau;X)} = \|1 * w_t\|_{L^p(0,\tau;X)} \leq \tau \|w_t\|_{L^p(0,\tau;X)} \leq \tau \|w\|_{W^{1,p}(0,\tau;X)}. \quad \square$$

§ 2. Эквивалентная задача

Лемма 2.1. Пусть выполняются предположения (i1)–(i5), и (u, k, y) с $v = u_t + z \frac{x}{l}$ является решением системы (1.2)–(1.7), определенной с $T > 0$, таким, что выполняется условие (1.1).

Тогда (v, k, y) удовлетворяет условиям:

$$v \in H^2(0, T; H_0^1(I) \cap H^2(I)), \quad k \in H^1(0, T), \quad y \in H^3(0, T) \quad (2.1)$$

и решает систему

$$v_{tt} - v_{xx} - v_{xxtt} + k(t)u_0''(x) + \int_0^t k(t-s)v_{xx}(x,s)ds = z'' \frac{x}{l}, \quad (x, t) \in I \times (0, T), \quad (2.2)$$

$$v|_{x=0} = v|_{x=l} = 0, \quad 0 \leq t < T, \quad (2.3)$$

$$v|_{t=0} = v_0(x), \quad v_t|_{t=0} = v_1(x), \quad x \in I, \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} k'(t) = \alpha \Big\{ & f^{(IV)}(t) - \int_0^l v_t(x,t)\varphi'''(x)dx - k(0) \int_0^l v(x,t)\varphi'''(x)dx - \\ & - \int_0^t \int_0^l k'(t-s)v(x,s)\varphi'''(x)dx ds \Big\}, \quad 0 < t < T, \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} y'''(t) = & G'[v_{xx}](t) - k'(t)G[u_{xx}](0) - k(0)G[v_{xx}](t) - \\ & - \int_0^t k'(t-s)G[v_{xx}](s)ds, \quad 0 < t < T, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где $z'' = py''' + qy''$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Шаг 1. Пусть задача (0.1)–(0.6) имеет решение (u, k, y) , удовлетворяющее (1.1). Тогда нетрудно видеть, что (v, k, y) удовлетворяет условию (2.1) и равенствам (2.2), (2.3).

Из равенств (0.1), (0.5) имеем

$$\begin{aligned} v(x, 0) &= u_1(x) - u_1(l) \frac{x}{l} = v_0(x), \\ v_t(x, 0) &= u_2(x) - u_2(l) \frac{x}{l} = v_1(x). \end{aligned}$$

Таким образом, выводим (2.4).

Умножая скалярно уравнение (2.2) на φ' , затем интегрируя по частям и используя допущения (i1) и (i3), получим:

$$k(t) = \alpha \left\{ f'''(t) - \int_0^l v(x, t) \varphi'''(x) dx - \int_0^t \int_0^l k(t-s) v(x, s) \varphi'''(x) dx ds \right\}, \quad (2.7)$$

где $f'''(t) = - \int_0^l (\varphi'(x) - \varphi'''(x)) \left(v_{tt} - z'' \frac{x}{l} \right) dx$. После дифференцирования уравнения (2.7) по t мы получим равенство (2.5).

Уравнение (2.6) получается путем дифференцирования (1.10) по t .

Шаг 2. Пусть задача (2.2)–(2.6) имеет решение (v, k, y) , удовлетворяющее условию (2.1). Нетрудно показать, что имеют место (0.2)–(0.5), и выполнено условие (1.1). Так как $v = u_t + z \frac{x}{l}$, равенство (2.2) можно переписать в виде:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(u_{tt} + z' \frac{x}{l} - u_{xx} - u_{xxtt} - \int_0^t k(s) u_{xx}(x, t-s) ds \right) = z'' \frac{x}{l}.$$

Интегрируя вышестоящее равенство, получим

$$u_{tt} + z' \frac{x}{l} - u_{xx} - u_{xxtt} - \int_0^t k(t-s) u_{xx} ds = z' \frac{x}{l} + \text{const}_1.$$

При $t = 0$, $\text{const}_1 = 0$. Следовательно, имеем (0.1).

Уравнение (2.5) для k' можно переписать в виде

$$\begin{aligned} f^{(IV)}(t) = \frac{\partial}{\partial t} & \left(- \int_0^l u_{xxt}(x, t) \varphi'(x) dx + k(0) \int_0^l u_{xx} \varphi'(x) dx + \right. \\ & \left. + \int_0^t \int_0^l k'(t-s) \varphi'(x) u_{xx}(x, s) dx ds \right). \end{aligned}$$

После интегрирования его по переменной t , находим

$$\begin{aligned} f'''(t) = & - \int_0^l u_{xxt}(x, t) \varphi'(x) dx + k(0) \int_0^l u_{xx} \varphi'(x) dx + \\ & + \int_0^t \int_0^l k'(t-s) \varphi'(x) u_{xx}(x, s) dx ds + \text{const}_2, \end{aligned}$$

При $t = 0$ и условии (i4), получим, что $\text{const}_2 = 0$. В то же время

$$f'''(t) = \frac{\partial}{\partial t} \left(- \int_0^l u_{xx}(x, t) \varphi'(x) dx + \int_0^t \int_0^l k(t-s) \varphi'(x) u_{xx}(x, s) dx ds \right).$$

Интегрируя по t , выводим

$$f''(t) = - \int_0^l u_{xx}(x, t) \varphi'(x) dx + \int_0^t \int_0^l k(t-s) \varphi'(x) u_{xx}(x, s) dx ds + \text{const}_3.$$

При $t = 0$ и условии (i4), получаем, что $\text{const}_3 = 0$, следовательно,

$$f''(t) = - \int_0^l \varphi'(x) u_{xx}(x, t) dx + \int_0^t \int_0^l k(t-s) \varphi'(x) u_{xx}(x, s) dx ds.$$

Используя уравнение (0.1) в последнем равенстве и при выполнении (i1), имеем

$$f''(t) = - \int_0^l \varphi'(x)(u_{tt} - u_{xxtt}) dx = - \frac{\partial}{\partial t} \int_0^l \varphi'(x)(u_t - u_{xxt}) dx.$$

Интегрируя дважды это равенство, аналогично, получим

$$f(t) = - \int_0^l \varphi'(x)(u - u_{xx}) dx = - \int_0^l \varphi'(x)u(x, t) dx + \int_0^l \varphi'''(x)u(x, t) dx,$$

что является равенством (1.8), следовательно, имеет место (0.6).

Эквивалентность равенств (2.6) и (1.5) доказывается аналогичным образом с использованием предположения (i5). Лемма 2.1 доказана. $\square$

§ 3. Основной результат

Из эквивалентной задачи (2.1)–(2.6) мы видим, что неизвестную функцию $y'''(t)$ можно легко исключить из системы (2.1)–(2.6), поскольку она выражается через k и v . Следовательно, основной результат будет доказан для функций k, v .

Теорема 3.1. Пусть выполнены предположения (i1)–(i5). Тогда существует $\tau \in (0, T)$ такое, что обратная задача (1.1)–(1.7) имеет единственное решение

$$(v, k) \in H^3(0, \tau; H_0^1(I) \cap H^2(I)) \times H^1(0, \tau).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $Q(\tau, M)$ — пространство функций $(\tilde{v}, \tilde{k}') \in H^2(0, \tau; H_0^1(I) \cap H^2(I)) \times L^2(0, \tau)$ таких, что

$$\|\tilde{v}\|_{H^2(0, \tau; H_0^1(I) \cap H^2(I))} + \|\tilde{k}'\|_{L^2(0, \tau)} \leq M,$$

и справедливы равенства

$$\begin{aligned} \tilde{v}|_{x=0} = \tilde{v}|_{x=l} = 0, \quad 0 \leq t < \tau, \\ \tilde{v}|_{t=0} = v_0(x), \quad \tilde{v}_t|_{t=0} = v_1(x), \quad x \in I, \\ \tilde{k}(0) = k(0), \end{aligned}$$

где $M = \text{const} > 0$ будет определена позже.

Возьмем $(\tilde{v}, \tilde{k}') \in Q(\tau, M)$ и рассмотрим систему равенств

$$\begin{aligned} k'(t) = \alpha \left\{ f^{(IV)}(t) - \int_0^l \tilde{v}_t(x, t) \varphi'''(x) dx - k(0) \int_0^l \tilde{v}(x, t) \varphi'''(x) dx - \right. \\ \left. - \int_0^t \int_0^l \tilde{k}'(t-s) \tilde{v}(x, s) \varphi'''(x) dx ds \right\}, \quad 0 < t < \tau, \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} v_{tt} - v_{xx} + \tilde{k}(t) u_0''(x) + \int_0^t \tilde{k}(t-s) \tilde{v}_{xx}(x, s) ds = z'' \frac{x}{l}, \quad (x, t) \in I \times (0, \tau), \\ v|_{x=0} = v|_{x=l} = 0, \quad 0 \leq t < \tau, \\ v|_{t=0} = v_0(x), \quad v_t|_{t=0} = v_1(x), \quad x \in I, \end{aligned} \quad (3.2)$$

с $z'' = py''' + qy''$,

$$\begin{aligned} y'''(t) = G'[\tilde{v}_{xx}](t) - k'(t)G[u_{xx}](0) - k(0)G[\tilde{v}_{xx}](t) - \\ - \int_0^t \tilde{k}'(t-s)G[\tilde{v}_{xx}](s) ds, \quad 0 < t < \tau. \end{aligned} \quad (3.3)$$

В равенствах выше вместо $\tilde{k}(t)$ подразумевается правая часть тождества $\tilde{k}(t) := k(0) + \int_0^t \tilde{k}'(s) ds$.

Нам необходимо найти неподвижную точку отображения

$$(v, k') := A(\tilde{v}, \tilde{k}'), \quad \text{где } A: Q(\tau, M) \rightarrow H^2(0, \tau; H_0^1(I) \cap H^2(I)) \times L^2(0, \tau)$$

определяется в соответствии с равенствами (3.1)–(3.3).

Покажем, что отображение A переводит $Q(\tau, M)$ в $Q(\tau, M)$ и является сжимающим.

Шаг 1. Во-первых, покажем, что такое отображение A существует для подходящих M и τ . Из (3.1) находим

$$\begin{aligned} \|k'\|_{L^2(0, \tau)} \leq & \alpha \left\{ \|f^{(IV)}(t)\|_{L^2(0, \tau)} + \|\tilde{v}_t\|_{L^2(0, \tau; L^2(I))} \|\varphi'''\|_{L^2(I)} + \right. \\ & \left. + |k(0)| \|\tilde{v}\|_{L^2(0, \tau; L^2(I))} \|\varphi'''\|_{L^2(I)} + \left\| \int_0^t \int_0^l \tilde{k}'(t-s) \tilde{v}(x, s) \varphi'''(x) dx ds \right\|_{L^2(0, \tau)} \right\}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Применяя неравенство из леммы 1.1 (где $X = \mathbb{R}$)

$$\|k * f\|_{L^2(0, \tau)} \leq \tau^{1/2} \|k\|_{L^2(0, \tau)} \|f\|_{L^2(0, \tau)}$$

к функциям $k(t) := \tilde{k}'(t)$, $f(t) := \int_0^l \tilde{v}(x, t) \varphi'''(x) dx$, имеем

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^t \int_0^l \tilde{k}'(t-s) \tilde{v}(x, s) \varphi'''(x) dx ds \right\|_{L^2(0, \tau)} & \leq \tau^{1/2} \|\tilde{k}'\|_{L^2(0, \tau)} \left\| \int_0^l \tilde{v}(x, t) \varphi'''(x) dx \right\|_{L^2(0, \tau)} \leq \\ & \leq \tau^{1/2} \|\tilde{k}'\|_{L^2(0, \tau)} \left(\int_0^\tau \|\tilde{v}(t)\|_{L^2(I)}^2 \|\varphi'''\|_{L^2(I)}^2 dt \right)^{1/2} = \\ & = \tau^{1/2} \|\tilde{k}'\|_{L^2(0, \tau)} \|\varphi'''\|_{L^2(I)} \|\tilde{v}\|_{L^2(0, \tau; L^2(I))}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Применяя лемму 1.2 (в части доказательства) выводим:

$$\begin{aligned} \|\tilde{v}\|_{L^2(0, \tau; L^2(I))} & \leq \|\tilde{v} - v_0\|_{L^2(0, \tau; L^2(I))} + \|v_0\|_{L^2(0, \tau; L^2(I))} \leq \\ & \leq \tau \|(\tilde{v} - v_0)_t\|_{L^2(0, \tau; L^2(I))} + \tau^{1/2} \|v_0\|_{L^2(I)} = \\ & = \tau \|\tilde{v}_t\|_{L^2(0, \tau; L^2(I))} + \tau^{1/2} \|v_0\|_{L^2(I)} \leq \tau (\tau \|\tilde{v}_{tt}\|_{L^2(0, \tau; L^2(I))} + \tau^{1/2} \|v_1\|_{L^2(I)}) + \\ & + \tau^{1/2} \|v_0\|_{L^2(I)} = \tau^2 \|\tilde{v}_{tt}\|_{L^2(0, \tau; L^2(I))} + \tau^{3/2} \|v_1\|_{L^2(I)} + \tau^{1/2} \|v_0\|_{L^2(I)}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} \|\tilde{v}_t\|_{L^2(0, \tau; L^2(I))} & \leq \|\tilde{v}_t - v_1\|_{L^2(0, \tau; L^2(I))} + \|v_1\|_{L^2(0, \tau; L^2(I))} \leq \\ & \leq \tau \|(\tilde{v}_t - v_1)_t\|_{L^2(0, \tau; L^2(I))} + \tau^{1/2} \|v_1\|_{L^2(I)} = \\ & = \tau \|\tilde{v}_{tt}\|_{L^2(0, \tau; L^2(I))} + \tau^{1/2} \|v_1\|_{L^2(I)}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

Используя (3.5)–(3.7) в (3.4), из определения пространства $Q(\tau, M)$, получаем:

$$\begin{aligned} \|k'\|_{L^2(0, \tau)} \leq & \alpha \left\{ \|f^{(IV)}(t)\|_{L^2(0, \tau)} + \|\varphi'''\|_{L^2(I)} \left[\tau \|\tilde{v}_{tt}\|_{L^2(0, \tau; L^2(I))} + \tau^{1/2} \|v_1\|_{L^2(I)} + \right. \right. \\ & \left. \left. + (\tau^2 \|\tilde{v}_{tt}\|_{L^2(0, \tau; L^2(I))} + \tau^{3/2} \|v_1\|_{L^2(I)} + \tau^{1/2} \|v_0\|_{L^2(I)}) (|k(0)| + \tau^{1/2} \|\tilde{k}'\|_{L^2(0, \tau)}) \right] \right\} \leq \\ & \leq \alpha \left\{ \|f^{(IV)}(t)\|_{L^2(0, \tau)} + \|\varphi'''\|_{L^2(I)} \left[\tau M + \tau^{1/2} \|v_1\|_{L^2(I)} + \right. \right. \\ & \left. \left. + (\tau^2 M + \tau^{3/2} \|v_1\|_{L^2(I)} + \tau^{1/2} \|v_0\|_{L^2(I)}) (|k(0)| + \tau^{1/2} M) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Для оценки $y'''(t)$ понадобятся следующие тождества:

$$\begin{aligned}\tilde{v}(x, t) &= v_0(x) + tv_1(x) + \int_0^t (t-s)\tilde{v}_{tt}(x, s) ds, \\ \tilde{v}_t(x, t) &= v_1(x) + \int_0^t \tilde{v}_{tt}(x, s) ds.\end{aligned}$$

Из этих тождеств вытекают следующие неравенства:

$$\begin{aligned}\|\tilde{v}_{xxt}\|_{L^2(0,\tau;L^2(I))} &\leq \|\tilde{v}_t\|_{L^2(0,\tau;H^2(I))} \leq \|v_1\|_{L^2(0,\tau;H^2(I))} + \left\| \int_0^t \tilde{v}_{tt}(x, s) ds \right\|_{L^2(0,\tau;H^2(I))} \leq \\ &\leq \tau^{1/2}\|v_1\|_{H^2(I)} + \tau\|\tilde{v}\|_{H^2(0,\tau;H^2(I))}, \\ \|\tilde{v}_{xx}\|_{L^2(0,\tau;L^2(I))} &\leq \|\tilde{v}\|_{L^2(0,\tau;H^2(I))} \leq \\ &\leq \|v_0\|_{L^2(0,\tau;H^2(I))} + \|tv_1\|_{L^2(0,\tau;H^2(I))} + \left\| \int_0^t (t-s)\tilde{v}_{tt}(x, s) ds \right\|_{L^2(0,\tau;H^2(I))} \leq \\ &\leq \tau^{1/2}\|v_0\|_{H^2(I)} + \tau^{3/2}\|v_1\|_{H^2(I)} + \tau^2\|\tilde{v}\|_{H^2(0,\tau;H^2(I))}.\end{aligned}$$

Следовательно, y''' из (3.3) можно оценить следующим образом:

$$\begin{aligned}\|y'''\|_{L^2(0,\tau)} &\leq \|G'[\tilde{v}_{xx}](t)\|_{L^2(0,\tau)} + |G[u_{xx}](0)|\|k'\|_{L^2(0,\tau)} + |k(0)|\|G[\tilde{v}_{xx}]\|_{L^2(0,\tau)} + \\ &+ \tau^{1/2}\|\tilde{k}'\|_{L^2(0,\tau)}\|G[\tilde{v}_{xx}]\|_{L^2(0,\tau)} \leq \frac{1}{|\psi(l)|} \left(\|f''\|_{L^2(0,\tau)} + \right. \\ &+ \|\psi\|_{L^2(I)} \left(\tau\|\tilde{v}\|_{H^2(0,\tau;H^2(I))} + \tau^{1/2}\|v_1\|_{H^2(I)} \right) + |G[u_{xx}](0)|\|k'\|_{L^2(0,\tau)} + \\ &+ \frac{1}{|\psi(l)|} (|k(0)| + \tau^{1/2}\|\tilde{k}'\|_{L^2(0,\tau)}) \left(\|f'\|_{L^2(0,\tau)} + \right. \\ &+ \|\psi\|_{L^2(I)} \left(\tau^2\|\tilde{v}\|_{H^2(0,\tau;H^2(I))} + \tau^{3/2}\|v_1\|_{H^2(I)} + \tau^{1/2}\|v_0\|_{H^2(I)} \right) \Big) \leq \\ &\leq \frac{1}{|\psi(l)|} \left(\|f''\|_{L^2(0,\tau)} + \|\psi\|_{L^2(I)} \left(\tau M + \tau^{1/2}\|v_1\|_{H^2(I)} \right) \right) + \\ &+ |G[u_{xx}](0)|\|k'\|_{L^2(0,\tau)} + \frac{1}{|\psi(l)|} (|k(0)| + \tau^{1/2}M) \left(\|f'\|_{L^2(0,\tau)} + \right. \\ &+ \|\psi\|_{L^2(I)} \left(\tau^2 M + \tau^{3/2}\|v_1\|_{H^2(I)} + \tau^{1/2}\|v_0\|_{H^2(I)} \right) \Big). \tag{3.9}\end{aligned}$$

Далее будем использовать (3.8) для $\|k'\|_{L^2(0,\tau)}$ в (3.9). Для простоты здесь и далее C представляет обобщенную константу, зависящую только от I .

Используя энергетические оценки для линейной начально-краевой задачи (3.2), имеем

$$\|v\|_{H^2(0,\tau;H^2(I))} \leq C(\|v_0\|_{H_0^1(I)\cap H^2(I)} + \|v_1\|_{H_0^1(I)\cap H^2(I)} + \|G\|_{L^2(0,\tau;L^2(I))}), \tag{3.10}$$

где

$$G := -\tilde{k}(t)u_0''(x) - \int_0^t \tilde{k}(t-s)\tilde{v}_{xx}(x, s) ds + z''\frac{x}{l}.$$

Оценим G :

$$\begin{aligned}\|G\|_{L^2(0,\tau;L^2(I))} &\leq \|\tilde{k}\|_{L^2(0,\tau)}\|u_0''\|_{L^2(I)} + \tau^{1/2}\|\tilde{k}\|_{L^2(0,\tau)}\|\tilde{v}_{xx}\|_{L^2(0,\tau;L^2(I))} + \|z''\|_{L^2(0,\tau)} \leq \\ &\leq C \left((\|u_0\|_{H^2(I)} + \tau^{1/2}\|\tilde{v}\|_{L^2(0,\tau;H^2(I))})\|\tilde{k}\|_{L^2(0,\tau)} + \|z''\|_{L^2(0,\tau)} \right).\end{aligned}$$

Таким образом, используя определение пространства функций $Q(\tau, M)$ и равенство $y''(t) = y''(0) + \int_0^t y'''(s) ds$, мы получим следующую оценку:

$$\begin{aligned} \|G\|_{L^2(0,\tau;L^2(I))} &\leq C \left\{ (\|u_0\|_{H^2(I)} + \tau^{1/2}M) \left\| k(0) + \int_0^t \tilde{k}'(s) ds \right\|_{L^2(0,\tau)} + p\|y'''\|_{L^2(0,\tau)} + \right. \\ &+ q \left\| y''(0) + \int_0^t y'''(s) ds \right\|_{L^2(0,\tau)} \Big\} \leq C \left\{ (\|u_0\|_{H^2(I)} + \tau^{1/2}M) (\tau^{1/2}|k(0)| + \tau\|\tilde{k}'\|_{L^2(0,\tau)}) + \right. \\ &\left. + p\|y'''\|_{L^2(0,\tau)} + q\tau^{1/2}|y''(0)| + q\tau\|y'''\|_{L^2(0,\tau)} \right\}, \end{aligned}$$

отсюда

$$\begin{aligned} \|G\|_{L^2(0,\tau;L^2(I))} &\leq C \left[(\|u_0\|_{H^2(I)} + \tau^{1/2}M) (\tau^{1/2}|k(0)| + \tau M) + \right. \\ &\left. + q\tau^{1/2}|y''(0)| + (p + \tau q)\|y'''\|_{L^2(0,\tau)} \right], \end{aligned}$$

Если взять $\tau > 0$ достаточно малым, что выполняется неравенство:

$$\tau^{1/2}(1 + M) \leq 1, \quad (3.11)$$

из оценок (3.8) и (3.10) следует:

$$\begin{aligned} &\|v\|_{H^2(0,\tau;H_0^1(I)\cap H^2(I))} + \|k'\|_{L^2(0,\tau)} \leq \\ &\leq C \left\{ \|v_0\|_{H_0^1(I)\cap H^2(I)} + \|v_1\|_{H_0^1(I)\cap H^2(I)} + (\|u_0\|_{H^2(I)} + \tau^{1/2}M) (\tau^{1/2}|k(0)| + \tau M) + \right. \\ &\quad \left. + q\tau^{1/2}|y''(0)| + (p + \tau q)\|y'''\|_{L^2(0,\tau)} + \|k'\|_{L^2(0,\tau)} \right\} \leq \\ &\leq C \left\{ \|v_0\|_{H_0^1(I)\cap H^2(I)} + \|v_1\|_{H_0^1(I)\cap H^2(I)} + (\|u_0\|_{H^2(I)} + 1)(|k(0)| + 1) + \right. \\ &\quad + q|y''(0)| + (p + q) \left(\frac{1}{|\psi(l)|} (\|f''\|_{L^2(0,\tau)} + \|\psi\|_{L^2(I)}(1 + \|v_1\|_{H^2(I)})) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{|\psi(l)|} (|k(0)| + 1) (\|f'\|_{L^2(0,\tau)} + \right. \\ &\quad \left. + \|\psi\|_{L^2(I)}(1 + \|v_1\|_{H^2(I)} + \|v_0\|_{H^2(I)})) + |G[u_{xx}(0)]|F(\tau) \Big) + F(\tau) \Big\} =: M_0. \end{aligned}$$

Здесь

$$F(\tau) = \alpha \left[\|f^{(IV)}\|_{L^2(0,\tau)} + \|\varphi'''\|_{L^2(I)} \left[1 + \|v_1\|_{L^2(I)} + (1 + \|v_1\|_{L^2(I)} + \|v_0\|_{L^2(I)})(|k(0)| + 1) \right] \right].$$

Заметим, что $M_0 = M_0(\tau)$ является неубывающей. Возвращаясь теперь к началу доказательства, поясним выбор числа M . Сначала выбираем число $M_1 > 0$ некоторым произвольным образом и полагаем $M := M_1$. По числу M_1 построим число τ_1 в соответствии с условием (3.11), то есть такое $\tau_1 > 0$, что $\tau_1^{1/2}(1 + M_1) \leq 1$. Положим $\tau := \tau_1$. По числу $\tau = \tau_1$ построим $M_0 = M_0(\tau_1)$. Если оказалось, что $M_0 \leq M$, то требуемая оценка получена. Предположим, что оказалось, что $M < M_0(\tau_1)$. Тогда выберем число $M_2 \geq M_0(\tau_1)$ и в качестве M выберем число M_2 , то есть положим $M := M_2$. По нему построим число $\tau_2 > 0$ такое, что выполнены неравенства $\tau_2^{1/2}(1 + M_2) \leq 1$ и $\tau_2 < \tau_1$. Положим $\tau := \tau_2$.

Поскольку функция $M_0 = M_0(\tau)$ неубывающая, следовательно, $M_0(\tau_2) \leq M_0(\tau_1)$. Положим $M_0 := M_0(\tau_2)$. Таким образом, получим

$$M_0 = M_0(\tau_2) \leq M_0(\tau_1) \leq M_2 = M,$$

то есть требуемая оценка получена.

Таким образом, мы можем определить отображение $A: Q(\tau, M) \rightarrow Q(\tau, M)$ посредством подходящего выбора $M \geq M_0$ и τ , удовлетворяющих (3.11).

Шаг 2. Докажем, что A есть сжимающее отображение.

Пусть $(\tilde{v}_j, \tilde{k}'_j) \in Q(\tau, M)$ для $j = 1, 2$; определим k'_j и v_j посредством (3.1)–(3.3) с $(\tilde{v}, \tilde{k}') = (\tilde{v}_j, \tilde{k}'_j)$ соответственно. Тогда (v_j, k'_j) для $j = 1, 2$ удовлетворяют

$$(v_1 - v_2)_{tt} - (v_1 - v_2)_{xx} + (\tilde{k}_1 - \tilde{k}_2)u''_0(x) + \int_0^t (\tilde{k}_1 - \tilde{k}_2)(t-s)(\tilde{v}_2)_{xx}(x, s) ds + \\ + \int_0^t \tilde{k}_1(t-s)(\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2)_{xx}(x, s) ds = (z''_1 - z''_2)\frac{x}{l}, \quad (x, t) \in I \times (0, \tau), \quad (3.12)$$

$$v_1 - v_2|_{x=0} = v_1 - v_2|_{x=l} = 0, \quad 0 \leq t < \tau, \\ v_1 - v_2|_{t=0} = 0, \quad (v_1 - v_2)_t|_{t=0} = 0, \quad x \in I, \\ (k'_1 - k'_2)(t) = -\alpha \left\{ \int_0^l (\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2)_t \varphi'''(x) dx + k(0) \int_0^l (\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2) \varphi'''(x) dx + \right. \\ \left. + \int_0^t \int_0^l (\tilde{k}_1 - \tilde{k}_2)'(t-s) \tilde{v}_2(x, s) \varphi''' dx ds + \int_0^t \int_0^l \tilde{k}'_1(t-s) (\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2)(x, s) \varphi''' dx ds \right\}, \quad (3.13) \\ 0 < t < \tau,$$

$$(y'''_1 - y'''_2)(t) = \frac{1}{\psi(l)} \int_0^l \psi(x) (\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2)_{txx} dx - (k'_1 - k'_2)(t) G[u_{xx}](0) - \\ - \frac{k(0)}{\psi(l)} \int_0^l \psi(x) (\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2)_{xx} dx - \int_0^t (\tilde{k}'_1 - \tilde{k}'_2)(t-s) G[(\tilde{v}_2)_{xx}](s) ds - \\ - \frac{1}{\psi(l)} \int_0^t \tilde{k}'_1(t-s) \int_0^l \psi(x) (\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2)_{xx}(x, s) dx ds, \quad 0 < t < \tau. \quad (3.14)$$

Теперь оценим $k'_1 - k'_2$ из уравнения (3.13):

$$\|k'_1 - k'_2\|_{L^2(0, \tau)} \leq \alpha \left\{ \|(\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2)_t\|_{L^2(0, \tau; L^2(I))} \|\varphi'''\|_{L^2(I)} + \right. \\ \left. + |k(0)| \|\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2\|_{L^2(0, \tau; L^2(I))} \|\varphi'''\|_{L^2(I)} + \left\| \int_0^t \int_0^l (\tilde{k}'_1 - \tilde{k}'_2)(t-s) \tilde{v}_2(x, s) \varphi'''(x) dx ds \right\|_{L^2(0, \tau)} + \right. \\ \left. + \left\| \int_0^t \int_0^l \tilde{k}'_1(t-s) (\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2)(x, s) \varphi'''(x) dx ds \right\|_{L^2(0, \tau)} \right\}.$$

Используя аналогичные рассуждения, которые применялись для оценки (3.8), выводим:

$$\begin{aligned}
& \|k'_1 - k'_2\|_{L^2(0,\tau)} \leq \alpha \left\{ \tau \|(\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2)_{tt}\|_{L^2(0,\tau;L^2(I))} \|\varphi'''\|_{L^2(I)} + \right. \\
& \quad + \tau^2 |k(0)| \|(\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2)_{tt}\|_{L^2(0,\tau;L^2(I))} \|\varphi'''\|_{L^2(I)} + \\
& \quad + \tau^{1/2} \|\tilde{k}'_1 - \tilde{k}'_2\|_{L^2(0,\tau)} \|\varphi'''\|_{L^2(I)} \|\tilde{v}_2\|_{L^2(0,\tau;L^2(I))} + \\
& \quad \left. + \tau^{1/2} \|\tilde{k}'_1\|_{L^2(0,\tau)} \|\varphi'''\|_{L^2(I)} \|(\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2)_{tt}\|_{L^2(0,\tau;L^2(I))} \right\} \leq \\
& \leq \alpha \tau^{1/2} \left\{ \tau^{1/2} \|(\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2)_{tt}\|_{L^2(0,\tau;L^2(I))} \|\varphi'''\|_{L^2(I)} + \right. \\
& \quad + \tau^{3/2} |k(0)| \|(\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2)_{tt}\|_{L^2(0,\tau;L^2(I))} \|\varphi'''\|_{L^2(I)} + \\
& \quad + \|\tilde{k}'_1 - \tilde{k}'_2\|_{L^2(0,\tau)} \|\varphi'''\|_{L^2(I)} \|\tilde{v}_2\|_{L^2(0,\tau;L^2(I))} + \\
& \quad \left. + \|\tilde{k}'_1\|_{L^2(0,\tau)} \|\varphi'''\|_{L^2(I)} \|(\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2)_{tt}\|_{L^2(0,\tau;L^2(I))} \right\} \leq \\
& \leq \alpha \tau^{1/2} \|\varphi'''\|_{L^2(I)} (\tau^{1/2} + \tau^{3/2} |k(0)| + \tau^2 M) \|(\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2)_{tt}\|_{H^2(0,\tau;H^1_0(I) \cap H^2(I))} + \\
& \quad + \alpha \tau^{1/2} \|\varphi'''\|_{L^2(I)} \tau^2 M \|\tilde{k}'_1 - \tilde{k}'_2\|_{L^2(0,\tau)}.
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Далее для (3.14) имеем:

$$\begin{aligned}
& \|y'''_1 - y'''_2\|_{L^2(0,\tau)} \leq \frac{1}{|\psi(l)|} \|\psi\|_{L^2(I)} \tau \|(\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2)_{tt}\|_{L^2(0,\tau;H^2(I))} \\
& + |G[u_{xx}](0)| \|k'_1 - k'_2\|_{L^2(0,\tau)} + \frac{|k(0)|}{|\psi(l)|} \|\psi\|_{L^2(I)} \tau^2 \|(\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2)_{tt}\|_{L^2(0,\tau;H^2(I))} + \\
& \quad + \tau^{1/2} \|\tilde{k}'_1 - \tilde{k}'_2\|_{L^2(0,\tau)} \|G[\tilde{v}_2]\|_{L^2(0,\tau;H^2(I))} + \\
& \quad + \frac{\tau^{1/2}}{|\psi(l)|} \|\psi\|_{L^2(I)} \|\tilde{k}'_1\|_{L^2(0,\tau)} \|\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2\|_{L^2(0,\tau;H^2(I))} \leq \\
& \leq \frac{\tau^{1/2}}{|\psi(l)|} \|\psi\|_{L^2(I)} (\tau^{1/2} + \tau^{3/2} |k(0)| + \tau^2 M) \|\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2\|_{H^2(0,\tau;H^1_0(I) \cap H^2(I))} + \\
& \quad + \frac{\tau^{1/2}}{|\psi(l)|} (\|f'\|_{L^2(0,\tau)} + \tau^2 M \|\psi\|_{L^2(I)}) \|\tilde{k}'_1 - \tilde{k}'_2\|_{L^2(0,\tau)} + \\
& \quad + |G[u_{xx}](0)| \|k'_1 - k'_2\|_{L^2(0,\tau)}.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Используя оценки для линейной начально-краевой задачи (3.12), получим:

$$\|v_1 - v_2\|_{H^2(0,\tau;H^1_0(I) \cap H^2(I))} \leq C \|G_1\|_{L^2(0,\tau;L^2(I))}, \tag{3.17}$$

где

$$\begin{aligned}
G_1 := & -(\tilde{k}_1 - \tilde{k}_2) u''_0(x) - \int_0^t (\tilde{k}_1 - \tilde{k}_2)(t-s) (\tilde{v}_2)_{xx}(x,s) ds - \\
& - \int_0^t \tilde{k}_1(t-s) (\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2)_{xx}(x,s) ds + (z''_1 - z''_2) \frac{x}{l}.
\end{aligned}$$

Для G_1 находим:

$$\begin{aligned}
& \|G_1\|_{L^2(0,\tau;L^2(I))} \leq \|\tilde{k}_1 - \tilde{k}_2\|_{L^2(0,\tau)} \|u_0\|_{H^2(I)} + \tau^{1/2} \|\tilde{k}_1 - \tilde{k}_2\|_{L^2(0,\tau)} \|(\tilde{v}_2)_{xx}\|_{L^2(0,\tau;L^2(I))} + \\
& \quad + \tau^{1/2} \|\tilde{k}_1\|_{L^2(0,\tau)} \|(\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2)_{xx}\|_{L^2(0,\tau;L^2(I))} + \|z''_1 - z''_2\|_{L^2(0,\tau)} \leq \\
& \leq C (\tau \|\tilde{k}'_1 - \tilde{k}'_2\|_{L^2(0,\tau)} \|u_0\|_{H^2(I)} + \tau^{7/2} \|\tilde{k}'_1 - \tilde{k}'_2\|_{L^2(0,\tau)} \|(\tilde{v}_2)_{tt}\|_{L^2(0,\tau;H^2(I))} + \\
& \quad + \tau^{7/2} \|\tilde{k}'_1\|_{L^2(0,\tau)} \|(\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2)_{tt}\|_{L^2(0,\tau;H^1_0(I) \cap H^2(I))} + \|z''_1 - z''_2\|_{L^2(0,\tau)}) \leq
\end{aligned}$$

$$\leq C \left(\tau (\|u_0\|_{H^2(I)} + \tau^{5/2} M) \|\tilde{k}'_1 - \tilde{k}'_2\|_{L^2(0,\tau)} + \right. \\ \left. + \tau^{7/2} M \|(\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2)\|_{H^2(0,\tau; H_0^1(I) \cap H^2(I))} + (p + q\tau) \|y'''_1 - y'''_2\|_{L^2(0,\tau)} \right).$$

Из (3.15)–(3.17) следует, что

$$\|v_1 - v_2\|_{H^2(0,\tau; H_0^1(I) \cap H^2(I))} + \|k'_1 - k'_2\|_{L^2(0,\tau)} \leq \\ \leq C \left(\tau (\|u_0\|_{H^2(I)} + \tau^{5/2} M) \|\tilde{k}'_1 - \tilde{k}'_2\|_{L^2(0,\tau)} + \right. \\ \left. + \tau^{7/2} M \|(\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2)\|_{H^2(0,\tau; H_0^1(I) \cap H^2(I))} + (p + q\tau) \|y'''_1 - y'''_2\|_{L^2(0,\tau)} \right) + \|k'_1 - k'_2\|_{L^2(0,\tau)} \leq \\ \leq C \left(\tau (\|u_0\|_{H^2(I)} + \tau^{5/2} M) \|\tilde{k}'_1 - \tilde{k}'_2\|_{L^2(0,\tau)} + \tau^{7/2} M \|(\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2)\|_{H^2(0,\tau; H_0^1(I) \cap H^2(I))} + \right. \\ \left. + (p + q\tau) \left\{ \frac{\tau^{1/2}}{|\psi(l)|} \|\psi\|_{L^2(I)} (\tau^{1/2} + \tau^{3/2} |k(0)| + \tau^2 M) \|(\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2)\|_{H^2(0,\tau; H_0^1(I) \cap H^2(I))} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\tau^{1/2}}{|\psi(l)|} (\|f'\|_{L^2(0,\tau)} + \tau^2 M \|\psi\|_{L^2(I)}) \|\tilde{k}'_1 - \tilde{k}'_2\|_{L^2(0,\tau)} \right\} \right) + \\ + (1 + C(p + q\tau) |G[u_{xx}](0)|) \|k'_1 - k'_2\|_{L^2(0,\tau)}.$$

Используя (3.15), получаем

$$\|v_1 - v_2\|_{H^2(0,\tau; H_0^1(I) \cap H^2(I))} + \|k'_1 - k'_2\|_{L^2(0,\tau)} \leq \\ \leq \tau^{1/2} \left\{ \tau^{1/2} C (\|u_0\|_{H^2(I)} + \tau^2 M) + \frac{C(p + q\tau)}{|\psi(l)|} (\|f'\|_{L^2(0,\tau)} + \tau^2 M \|\psi\|_{L^2(I)}) + \right. \\ \left. + \alpha \tau^2 M \|\varphi'''\|_{L^2(I)} (1 + C(p + q\tau) |G[u_{xx}](0)|) \right\} \|\tilde{k}'_1 - \tilde{k}'_2\|_{L^2(0,\tau)} + \\ + \tau^{1/2} \left\{ C \tau^3 M + \frac{C(p + q\tau)}{|\psi(l)|} \|\psi\|_{L^2(I)} (\tau^{1/2} + |k(0)| \tau^{3/2} + \tau^2 M) + \right. \\ \left. + \alpha \|\varphi'''\|_{L^2(I)} (1 + C(p + q\tau) |G[u_{xx}](0)|) (\tau^{1/2} + |k(0)| \tau^{3/2} + \tau^2 M) \right\} \times \\ \times \|(\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2)\|_{H^2(0,\tau; H_0^1(I) \cap H^2(I))}.$$

Если выбрать $\tau > 0$ достаточно малым, то $A: Q(\tau, M) \rightarrow Q(\tau, M)$ будет сжимающим отображением. Таким образом, на основе принципа сжимающих отображений можно заключить, что для достаточно малого τ существует единственное решение $(v, k') \in H^3(0, \tau; H_0^1(I) \cap H^2(I)) \times L^2(0, \tau)$ эквивалентной задачи (2.1)–(2.6) на $[0, \tau]$, и теорема доказана. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рыскин Н. М., Трубецков Д. И. Нелинейные волны. М.: Физматлит, 2000.
2. Park Jong Yeoul, Park Sun Hye. Decay rate estimates for wave equations of memory type with acoustic boundary conditions // Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications. 2011. Vol. 74. Issue 3. P. 993–998. <https://doi.org/10.1016/j.na.2010.09.057>
3. Ли Фушан, Хи Шуан. Динамические свойства нелинейного уравнения вязкоупругости типа Кирхгофа с граничными условиями акустического управления. I // Математические заметки. 2019. Т. 106. Вып. 5. С. 761–783. <https://doi.org/10.4213/mzm11749>

4. Park Jong Yeoul, Kang Jum Ran. Existence, uniqueness and uniform decay for the non-linear degenerate equation with memory condition at the boundary // *Applied Mathematics and Computation*. 2008. Vol. 202. Issue 2. P. 481–488. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2008.01.037>
5. de Lima Santos M. Asymptotic behaviour of solutions to wave equations with a memory condition at the boundary // *Electronic Journal of Differential Equations*. 2001. Vol. 2001. No. 73. P. 1–11. <https://ejde.math.txstate.edu/Volumes/2001/73/abstr.html>
6. Vicente A. Wave equation with acoustic/memory boundary conditions // *Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática*. 2009. Vol. 27. No. 1. P. 29–39. <https://doi.org/10.5269/bspm.v27i1.9066>
7. Грасселли М., Кабанихин С. И., Лоренци А. Обратная задача для интегродифференциального уравнения // *Сибирский математический журнал*. 1992. Т. 33. № 3. С. 58–68. <https://www.mathnet.ru/rus/smj3224>
8. Cavaterra C., Grasselli M. Identifying memory kernels in linear thermoviscoelasticity of Boltzmann type // *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*. 1994. Vol. 4. No. 6. P. 807–842. <https://doi.org/10.1142/S0218202594000455>
9. Bukhgeim A. L. Inverse problems of memory reconstruction // *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*. 1993. Vol. 1. No. 3. P. 193–205. <https://doi.org/10.1515/jiip.1993.1.3.193>
10. Дурдиев Д. К. Многомерная обратная задача для уравнения с памятью // *Сибирский математический журнал*. 1994. Т. 35. № 3. С. 574–582. <https://www.mathnet.ru/rus/smj747>
11. Bukhgeim A. L., Dyatlov G. V. Inverse problems for equations with memory // *Inverse problems and related topics*. New York: Chapman and Hall/CRC, 2019. P. 19–35. <https://doi.org/10.1201/9780429187841-2>
12. Durdiev D. K., Totieva Zh. D. Kernel determination problems in hyperbolic integro-differential equations. Singapore: Springer, 2023. <https://doi.org/10.1007/978-981-99-2260-4>
13. Durdiev D. K., Bozorov Z. R., Boltaev A. A. Inverse problem for the system of viscoelasticity in anisotropic media with tetragonal form of elasticity modulus // *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки*. 2023. Т. 33. Вып. 4. С. 581–600. <https://doi.org/10.35634/vm230404>
14. Janno J., von Wolfersdorf L. An inverse problem for identification of a time- and space-dependent memory kernel in viscoelasticity // *Inverse Problems*. 2001. Vol. 17. No. 1. P. 13–24. <https://doi.org/10.1088/0266-5611/17/1/302>
15. Lorenzi A., Messina F., Romanov V. G. Recovering a Lamé kernel in a viscoelastic system // *Applicable Analysis*. 2007. Vol. 86. Issue 11. P. 1375–1395. <https://doi.org/10.1080/00036810701675183>
16. Romanov V. G., Yamamoto M. Recovering a Lamé kernel in a viscoelastic equation by a single boundary measurement // *Applicable Analysis*. 2010. Vol. 89. Issue 3. P. 377–390. <https://doi.org/10.1080/00036810903518975>
17. Lorenzi A., Romanov V. G. Recovering two Lamé kernels in a viscoelastic system // *Inverse Problems and Imaging*. 2011. Vol. 5. Issue 2. P. 431–464. <https://doi.org/10.3934/ipi.2011.5.431>
18. Романов В. Г. Двумерная обратная задача для уравнения вязкоупругости // *Сибирский математический журнал*. 2012. Т. 53. № 6. С. 1401–1412. <https://www.mathnet.ru/rus/smj2392>
19. Романов В. Г. Оценки устойчивости решения в задаче об определении ядра уравнения вязкоупругости // *Сибирский журнал индустриальной математики*. 2012. Т. 15. № 1. С. 86–98. <https://www.mathnet.ru/rus/sjim713>
20. Romanov V. G. Inverse problems for equations with a memory // *Eurasian Journal of Mathematical and Computer Applications*. 2014. Vol. 2. No. 1. P. 51–80. <https://doi.org/10.32523/2306-3172-2014-2-4-51-80>
21. Дурдиев Д. К., Сафаров Ж. Ш. Задача определения памяти среды со слабо горизонтальной неоднородностью // *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки*. 2022. Т. 32. Вып. 3. С. 383–402. <https://doi.org/10.35634/vm220303>
22. Totieva Zh. D. A global in time existence and uniqueness result of a multidimensional inverse problem // *Applicable Analysis*. 2023. Vol. 103. Issue 4. P. 701–723. <https://doi.org/10.1080/00036811.2023.2207579>

23. Карчевский А. Л., Фатьянов А. Г. Численное решение обратной задачи для системы упругости с последствием для вертикально неоднородной среды // Сибирский журнал вычислительной математики. 2001. Т. 4. № 3. С. 259–268. <https://www.mathnet.ru/rus/sjvm399>
24. Дурдиев У. Д. Численное определение зависимости диэлектрической проницаемости слоистой среды от временной частоты // Сибирские электронные математические известия. 2020. Т. 17. С. 179–189. <https://doi.org/10.33048/semi.2020.17.013>
25. Bozorov Z. R. Numerical determining a memory function of a horizontally-stratified elastic medium with aftereffect // Eurasian Journal of Mathematical and Computer Applications. 2020. Vol. 8. Issue 2. P. 28–40. <https://doi.org/10.32523/2306-6172-2020-8-2-28-40>
26. Kaltenbacher B., Khristenko U., Nikolić V., Rajendran M. L., Wohlmuth B. Determining kernels in linear viscoelasticity // Journal of Computational Physics. 2022. Vol. 464. 111331. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2022.111331>
27. Colombo F., Guidetti D. A global in time existence and uniqueness result for a semilinear integrodifferential parabolic inverse problem in Sobolev space // Mathematical Models and Methods in Applied Sciences. 2007. Vol. 17. No. 04. P. 537–565. <https://doi.org/10.1142/S0218202507002017>

Поступила в редакцию 21.02.2025

Принята к публикации 10.09.2025

Тотиева Жанна Дмитриевна, д. ф.-м. н., ведущий научный сотрудник, отдел математического моделирования, Южный математический институт, Владикавказский научный центр РАН, 362025, Россия, г. Владикавказ, ул. Ватутина, 53.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0089-074X>

E-mail: jannatuaeva@inbox.ru

Цитирование: Ж. Д. Тотиева. О разрешимости обратной задачи для волнового уравнения с памятью и акустическими граничными условиями // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2025. Т. 35. Вып. 3. С. 420–437.

Zh. D. Totieva

On the solvability of the inverse problem for the wave equation with memory and acoustic boundary conditions

Keywords: wave equation, acoustic boundary condition, inverse problem, memory kernel.

MSC2020: 35L20, 35R30, 35Q99

DOI: [10.35634/vm250306](https://doi.org/10.35634/vm250306)

The one-dimensional inverse problem of determining the kernel of the integral convolution operator in the wave equation on a segment for media with dispersion is considered. The direct problem is an initial-boundary value problem of simultaneously finding the velocity potential and the displacement of the boundary points of the medium. The acoustic control conditions are used as boundary conditions. An integral overdetermination condition is specified as additional information for setting the inverse problem. The inverse problem is reduced to an equivalent problem of studying the solvability of a closed system of integro-differential equations of the Volterra type with zero boundary conditions. Using the technique of estimating integral operators and the principle of contractive mappings in Sobolev spaces, a local theorem of existence and uniqueness of a solution to the inverse problem is proved.

REFERENCES

1. Ryskin N. M., Trubetskov D. I. *Nelineinye volny* (Nonlinear waves), Moscow: Fizmatlit, 2000.
2. Park Jong Yeoul, Park Sun Hye. Decay rate estimates for wave equations of memory type with acoustic boundary conditions, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, 2011, vol. 74, issue 3, pp. 993–998. <https://doi.org/10.1016/j.na.2010.09.057>
3. Li Fushan, Xi Shuai. Dynamic properties of a nonlinear viscoelastic Kirchhoff-type equation with acoustic control boundary conditions. I, *Mathematical Notes*, 2019, vol. 106, issue 5, pp. 814–832. <https://doi.org/10.1134/S0001434619110142>
4. Park Jong Yeoul, Kang Jum Ran. Existence, uniqueness and uniform decay for the nonlinear degenerate equation with memory condition at the boundary, *Applied Mathematics and Computation*, 2008, vol. 202, issue 2, pp. 481–488. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2008.01.037>
5. de Lima Santos M. Asymptotic behaviour of solutions to wave equations with a memory condition at the boundary, *Electronic Journal of Differential Equations*, 2001, vol. 2001, no. 73, pp. 1–11. <https://ejde.math.txstate.edu/Volumes/2001/73/abstr.html>
6. Vicente A. Wave equation with acoustic/memory boundary conditions, *Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática*, 2009, vol. 27, no. 1, pp. 29–39. <https://doi.org/10.5269/bspm.v27i1.9066>
7. Grasselli M., Kabanikhin S. I., Lorenzi A. An inverse hyperbolic integrodifferential problem arising in geophysics. I, *Siberian Mathematical Journal*, 1992, vol. 33, issue 3, pp. 415–426. <https://doi.org/10.1007/BF00970889>
8. Cavaterra C., Grasselli M. Identifying memory kernels in linear thermoviscoelasticity of Boltzmann type, *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 1994, vol. 4, no. 6, pp. 807–842. <https://doi.org/10.1142/S0218202594000455>
9. Bukhgeim A. L. Inverse problems of memory reconstruction, *Journal of Inverse and Ill-posed Problems*, 1993, vol. 1, no. 3, pp. 193–205. <https://doi.org/10.1515/jiip.1993.1.3.193>
10. Durdiev D. K. A multidimensional inverse problem for an equation with memory, *Siberian Mathematical Journal*, 1994, vol. 35, issue 3, pp. 514–521. <https://doi.org/10.1007/BF02104815>
11. Bukhgeim A. L., Dyatlov G. V. Inverse problems for equations with memory, *Inverse problems and related topics*, New York: Chapman and Hall/CRC, 2019, pp. 19–35. <https://doi.org/10.1201/9780429187841-2>
12. Durdiev D. K., Totieva Zh. D. *Kernel determination problems in hyperbolic integro-differential equations*, Singapore: Springer, 2023. <https://doi.org/10.1007/978-981-99-2260-4>

13. Durdiev D.K., Bozorov Z.R., Boltaev A.A. Inverse problem for the system of viscoelasticity in anisotropic media with tetragonal form of elasticity modulus, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2023, vol. 33, issue 4, pp. 581–600.
<https://doi.org/10.35634/vm230404>
14. Janno J., von Wolfersdorf L. An inverse problem for identification of a time- and space-dependent memory kernel in viscoelasticity, *Inverse Problems*, 2001, vol. 17, pp. 13–24.
<https://doi.org/10.1088/0266-5611/17/1/302>
15. Lorenzi A., Messina F., Romanov V.G. Recovering a Lamé kernel in a viscoelastic system, *Applicable Analysis*, 2007, vol. 86, issue 11, pp. 1375–1395. <https://doi.org/10.1080/00036810701675183>
16. Romanov V.G., Yamamoto M. Recovering a Lamé kernel in a viscoelastic equation by a single boundary measurement, *Applicable Analysis*, 2010, vol. 89, issue 3, pp. 377–390.
<https://doi.org/10.1080/00036810903518975>
17. Lorenzi A., Romanov V.G. Recovering two Lamé kernels in a viscoelastic system, *Inverse Problems and Imaging*, 2011, vol. 5, issue 2, pp. 431–464. <https://doi.org/10.3934/ipi.2011.5.431>
18. Romanov V.G. A two-dimensional inverse problem for the viscoelasticity equation, *Siberian Mathematical Journal*, 2012, vol. 53, issue 6, pp. 1128–1138. <https://doi.org/10.1134/S0037446612060171>
19. Romanov V.G. Stability estimates for the solution to the problem of determining the kernel of a viscoelastic equation, *Journal of Applied and Industrial Mathematics*, 2012, vol. 6, issue 3, pp. 360–370.
<https://doi.org/10.1134/S1990478912030118>
20. Romanov V.G. Inverse problems for equations with a memory, *Eurasian Journal of Mathematical and Computer Applications*, 2014, vol. 2, no. 1, pp. 51–80.
<https://doi.org/10.32523/2306-3172-2014-2-4-51-80>
21. Durdiev D.K., Safarov J.Sh. The problem of determining the memory of an environment with weak horizontal heterogeneity, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2022, vol. 32, issue 3, pp. 383–402 (in Russian).
<https://doi.org/10.35634/vm220303>
22. Totieva Zh.D. A global in time existence and uniqueness result of a multidimensional inverse problem, *Applicable Analysis*, 2023, vol. 103, issue 4, pp. 701–723.
<https://doi.org/10.1080/00036811.2023.2207579>
23. Karchevsky A.L., Fatianov A.G. Numerical solution of the inverse problem for a system of elasticity with the aftereffect for a vertically inhomogeneous medium, *Sibirskii Zhurnal Vychislitel'noi Matematiki*, 2001, vol. 4, no. 3, pp. 259–268 (in Russian). <https://www.mathnet.ru/eng/sjvm399>
24. Durdiev U.D. Numerical method for determining the dependence of the dielectric permittivity on the frequency in the equation of electrodynamics with memory, *Sibirskie Elektronnye Matematicheskie Izvestiya*, 2020, vol. 17, pp. 179–189 (in Russian). <https://doi.org/10.33048/semi.2020.17.013>
25. Bozorov Z.R. Numerical determining a memory function of a horizontally-stratified elastic medium with aftereffect, *Eurasian Journal of Mathematical and Computer Applications*, 2020, vol. 8, issue 2, pp. 28–40. <https://doi.org/10.32523/2306-6172-2020-8-2-28-40>
26. Kaltenbacher B., Khristenko U., Nikolić V., Rajendran M.L., Wohlmuth B. Determining kernels in linear viscoelasticity, *Journal of Computational Physics*, 2022, vol. 464, 111331.
<https://doi.org/10.1016/j.jcp.2022.111331>
27. Colombo F., Guidetti D. A global in time existence and uniqueness result for a semilinear integrodifferential parabolic inverse problem in Sobolev space, *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 2007, vol. 17, no. 04, pp. 537–565. <https://doi.org/10.1142/S0218202507002017>

Received 21.02.2025

Accepted 10.09.2025

Zhanna Dmitrievna Totieva, Doctor of Physics and Mathematics, Leading Researcher, Department of Mathematical Modelling, Southern Mathematical Institute, Vladikavkaz Scientific Centre of the Russian Academy of Sciences, ul. Vatutina, 53, Vladikavkaz, 362025, Russia.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0089-074X>

E-mail: jannatuaeva@inbox.ru

Citation: Zh. D. Totieva. On the solvability of the inverse problem for the wave equation with memory and acoustic boundary conditions, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2025, vol. 35, issue 3, pp. 420–437.