

УДК 532.517.2, 66.063.8

© *Е. И. Борзенко, Д. Н. Гарбузов, М. А. Ефремов***МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ СТЕПЕННОЙ ЖИДКОСТИ В АППАРАТЕ С ЛОПАСТНОЙ МЕШАЛКОЙ**

Представлены результаты математического моделирования течения степенной жидкости в смесительном аппарате лопастного типа. Численное решение задачи основано на методе контрольного объема и процедуре SIMPLE, реализованных на неравномерной ортогональной сетке. Исследована картина распределения кинематических характеристик в объеме и изучена структура потока с выделением характерных циркуляционных зон для псевдопластичной, ньютоновской и дилатантной реологий. Для оценки процесса смешения во времени решена задача о перераспределении ансамбля маркерных частиц, в начальный момент расположенных в выделенной области и движущихся со скоростью среды. Проведены параметрические исследования двух технологических критериев: интеграла от диссипативной функции, показывающего энергетические затраты на организацию течения; оригинальной характеристики, рассчитываемой по текущему распределению маркерных частиц, позволяющей оценить однородность перемешивания.

Ключевые слова: смесительный аппарат, лопасть, степенная жидкость, математическое моделирование, структура потока, циркуляционная зона, качество смешения.

DOI: [10.35634/vm250307](https://doi.org/10.35634/vm250307)**Введение**

Процессы механического перемешивания жидких масс в специализированных аппаратах, направленные на достижения требуемого уровня однородности, часто встречаются в химической, пищевой, металлургической и других индустриях. Математическое описание течений, реализующихся при смешении, осложнено необходимостью учета неньютоновских свойств и неканонической областью течения. Так же в некоторых процессах среда является многофазной, например, в процессе диспергирования твердых частиц или газовых пузырьков по объему жидкости. Эффективная организация технологического процесса требует детальных знаний о характеристиках потока в смесителях [1]. Такие знания можно успешно получать с использованием аппарата вычислительной гидродинамики [2, 3]. Аналитические решения удается получить для узкого круга задач с большим числом допущений.

Результаты численных исследований течений ньютоновской и степенной жидкостей в смесительных аппаратах представлены в [4–7]. Отмечается, что для псевдопластичной жидкости характерным является наличие зон с высокими значениями эффективной вязкости, которые могут приводить к снижению качества смешения. В работе [8] введена характеристика однородности для оценки качества смешения на основе расчета уравнения конвективной диффузии для концентрации трассеров. Исследования влияния геометрических особенностей якорных мешалок на процесс течения степенной жидкости в аппарате описаны в [9]. Экспериментальные исследования течений псевдопластичной жидкости описаны в [10, 11].

В отдельный класс выделяется задача исследования процесса диспергирования твердых частиц и газовых пузырьков по объему жидкости. При ее численном решении используются смешанные лагранже-эйлеровые методы. Результаты исследования процесса диспергирования с использованием смесительных аппаратов с мешалками представлены в [12, 13].

Тем не менее исследования в области численного моделирования течений высоковязких неньютоновских сред в смесительных аппаратах требуют дальнейшего развития, с точки зрения более глубокого понимания структуры потока и механизмов перемешивания. Целью настоящей работы было численное исследование течения степенной жидкости в смесительном аппарате с вращающейся с постоянной скоростью однолопастной мешалкой, анализ структуры потока и оценка качества процесса смешения с помощью ансамбля маркерных частиц. Количественно перемешивание оценивалось с помощью распространенного в технологии числа мощности и оригинального параметра неоднородности. Рассмотренная однолопастная конфигурация аппарата интересна с точки зрения качества смешения неньютоновских сред, так как, например, двухлопастная мешалка может создавать большие зоны неоднородного смешения [7, 14], а для псевдопластичной реологии характерно формирование областей с низкой интенсивностью течения [15] и, как следствие, с низкой скоростью перемешивания.

§ 1. Постановка задачи

Рассматривается плоское течение реологически сложной жидкости в смесительном аппарате с однолопастной мешалкой, которая вращается с постоянной угловой скоростью ω (рис. 1). Математическую основу образуют уравнение движения и неразрывности, записанные в полярной системе координат, связанной с мешалкой в безразмерной, дивергентной форме:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial(rV^2)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(VU)}{\partial \epsilon} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r\mu \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left(\mu \frac{\partial V}{\partial \epsilon} \right) + \right. \\ \left. + \frac{\partial \mu}{\partial r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \mu}{\partial \epsilon} \left(\frac{\partial U}{\partial r} - \frac{U}{r} \right) - \frac{\mu}{r^2} \left(2 \frac{\partial U}{\partial \epsilon} + V \right) \right] + \frac{U^2}{r} + \bar{\omega}^2 r + 2\bar{\omega} U, \quad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial(rUV)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(U^2)}{\partial \epsilon} = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \epsilon} + \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r\mu \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left(\mu \frac{\partial U}{\partial \epsilon} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{r} \frac{\partial \mu}{\partial r} \left(\frac{\partial V}{\partial \epsilon} - U \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \mu}{\partial \epsilon} \left(\frac{\partial U}{\partial \epsilon} + 2V \right) + \frac{\mu}{r^2} \left(2 \frac{\partial V}{\partial \epsilon} - U \right) \right] - \frac{UV}{r} - 2\bar{\omega} V, \quad (2) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial(rV)}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial \epsilon} = 0. \quad (3)$$

Здесь U, V — угловая и радиальная составляющие скорости соответственно, t — время, r и ϵ — радиальная и угловая координата, $\bar{\omega} = 1$ — безразмерное значение угловой скорости вращения мешалки, $\text{Re} = \rho \omega^{2-n} R^2 / k$ — число Рейнольдса, R — радиус смесительного аппарата, k — коэффициент консистенции, n — степень нелинейности среды, ρ — плотность жидкости.

Система замыкается реологическим уравнением Оствальда–де Виля, согласно которому эффективная вязкость μ определяется следующей формулой:

$$\mu = (I_2)^{\frac{n-1}{2}},$$

где I_2 — второй инвариант тензора скоростей деформации. При обезразмеривании длины использовался масштаб R , времени — ω^{-1} , скорости — ωR , давления — $\rho \omega^2 R$, вязкости — $k \omega^{n-1}$. При $n < 1$ жидкость ведет себя как псевдопластичная жидкость, при $n > 1$ — как дилатантная, при $n = 1$ — как ньютоновская.

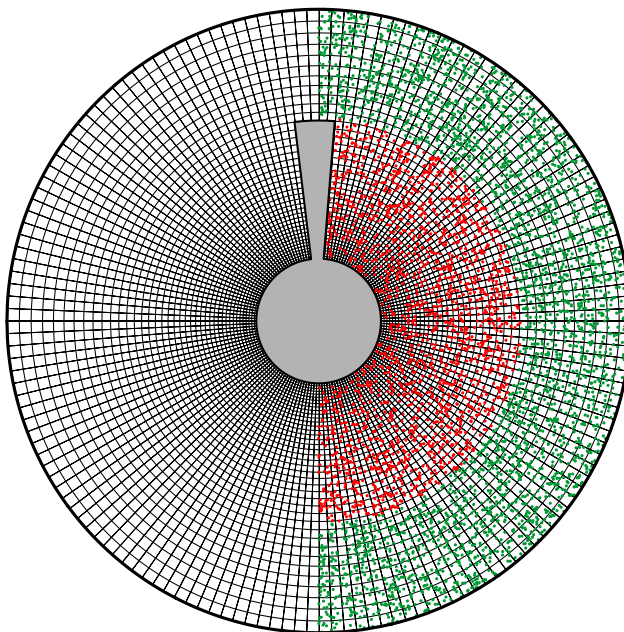


Рис. 1. Расчетная область

В качестве граничных условий на твердых стенках используются условия прилипания. В начальный момент времени скорость жидкости в области течения равна нулю. Решение задачи заключается в отыскании установившихся полей скорости и давления.

С целью оценки качества процесса смешения в начальный момент времени в выделенные области случайным образом располагаются маркерные частицы двух видов, как показано на рис. 1. Их движение рассчитывается в предположении, что скорость совпадает со скоростью жидкой фазы, и частицы не оказывают на поток никакого влияния:

$$\frac{dr_p}{dt} = V(r_p, \epsilon_p), \quad \frac{d\epsilon_p}{dt} = U(r_p, \epsilon_p), \quad (4)$$

где r_p, ϵ_p — координаты маркерной частицы. Такая математическая модель адекватно описывает процесс перераспределения твердых частиц субмиллиметровых размеров и небольшой концентрации в высоковязких средах [16].

Используемые в работе значения безразмерного критерия Re и реологического параметра n соответствуют случаям ламинарных течений многих полимерных жидкостей в промышленных и лабораторных смесительных аппаратах с умеренными скоростями вращения мешалки. При этом движение среды в аппарате можно разложить на три составляющие: радиальную, тангенциальную и осевую, количественное соотношение которых зависит от геометрических, реологических и технологических параметров. При низких значениях числа Рейнольдса в исследуемой области преобладают радиальная и тангенциальная составляющие [14, 17], что оправдывает допущение о двумерной постановке.

§ 2. Метод решения

Поставленная задача решается численно. Область решения дискретизируется с помощью ортогональной разнесенной сетки с неравномерным шагом, для сохранения пропорции размеров контрольного объема по мере роста радиальной координаты (рис. 1). Дифференциальные уравнения движения и неразрывности (1)–(3) дискретизируются с помощью метода контрольного объема. Уравнение неразрывности удовлетворяется с использованием

алгоритма SIMPLE [18]. Для обеспечения устойчивости расчетов используется нижняя релаксация для поправки давления. Так как математическая постановка записана в системе координат, движущейся вместе с лопастью мешалкой, то в этой системе внешняя стенка вращается с угловой скоростью $-\omega$, а мешалка неподвижна, что значительно упрощает реализацию численного метода.

Интегрирование уравнений (4) выполняется с использованием схемы Рунге–Кутты второго порядка точности.

Проверка аппроксимационной сходимости разработанного алгоритма проведена для задачи течения псевдопластичной жидкости ($Re = 1$, $n = 0.7$) в коаксиальном зазоре, на последовательности сеток. Количественно порядок сходимости оценивался с помощью интеграла по области от диссипативной функции (таблица 1).

Таблица 1. Результаты численного эксперимента

Количество узлов в сетке	$N = 10 \times 39$	$N = 20 \times 78$	$N = 40 \times 156$
Φ	0.564793	0.561203	0.560447

Порядок сходимости можно оценить по следующей формуле:

$$\log_2 \left(\left| \frac{\Phi_{20} - \Phi_{10}}{\Phi_{40} - \Phi_{20}} \right| \right) = 2.248,$$

где индексы соответствуют количеству разбиений области течения по радиусу. Все дальнейшие расчеты проведены на сетка с 40 разбиениями.

§ 3. Результаты

Кинематика потока степенной жидкости в аппарате с однолопастной мешалкой характеризуется формированием циркуляционных зон в ее окрестности, которые оказывают значимое влияние на качество смешения. На рис. 2 представлены распределения модуля вектора скорости и линии тока после установления течения в системе координат, движущейся вместе с мешалкой. Для псевдопластичной жидкости (рис. 2, а) реализуются две изолированные зоны C_1 и C_2 , расположенные перед и после лопасти по ходу ее движения. С ростом параметра нелинейности их размеры уменьшаются и возникает новая циркуляционная зона C_0 (рис. 1, б), огибающая центральное тело. Для дилатантной среды при $n = 1.5$ (рис. 1, в) реализуется одна зона C_0 . В области потока с радиальной координатой больше радиуса мешалки линии тока для всех рассмотренных случаев практически не отличаются от окружностей, то есть отсутствует радиальная составляющая вектора скорости. В этой зоне течение имеет сдвиговой характер.

Анализ распределения магнитуды скорости по области течения показывает, что для псевдопластичной жидкости интенсивное движение наблюдается только в окрестности лопатки, в остальной части потока скорости невысокие. Для дилатантной среды в области, ограниченной радиусом лопатки, реализуется достаточно интенсивное движение. Максимальные скорости наблюдаются в окрестности внешней кромки лопасти для всех рассмотренных значений параметра нелинейности, при этом для псевдопластичной жидкости здесь расположена область низких значений эффективной вязкости, а для дилатантной — наоборот, высоких, что иллюстрирует рис. 3. Характерным является формирование двух зон локальных экстремумов вязкости на внешней стенке.

Эффективность перемешивания определяется макроструктурой потока в рабочем объеме аппарата, которая для рассматриваемого типа смесителя включает сдвиговой поток, прилегающий к внешней стенке, и циркуляционные зоны в окрестности лопасти. Размеры

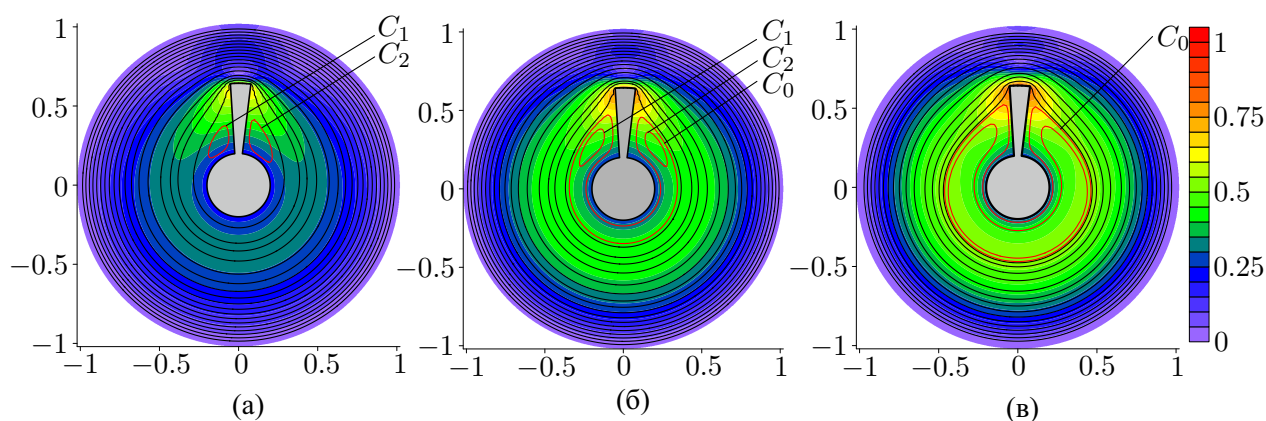


Рис. 2. Распределение магнитуды вектора скорости и линии тока при $Re = 1$: (а) $n = 0.5$ (псевдопластичная жидкость); (б) $n = 1$ (ньютоновская жидкость); (в) $n = 1.5$ (дилатантная жидкость)

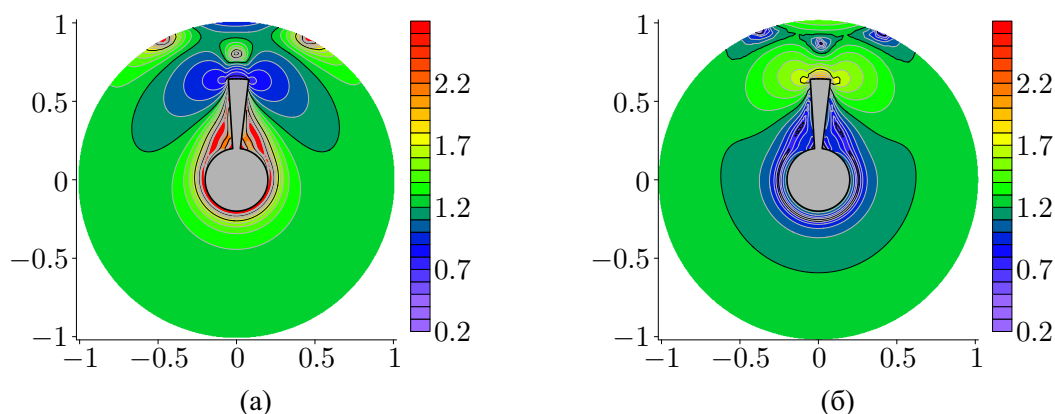


Рис. 3. Распределение эффективной вязкости при $Re = 1$: (а) $n = 0.7$ (псевдопластичная жидкость); (б) $n = 1.3$ (дилатантная жидкость)

и конфигурация последних зависят от параметров среды и скорости вращения мешалки и, во многом, определяют качество смешения, что иллюстрируется с помощью маркерных частиц.

Процесс перераспределения частиц по объему смесителя с течением времени представлен на рис. 4, 5, 6 для псевдопластичной, ньютоновской и дилатантной жидкостей. Здесь и на последующих рисунках синими линиями отмечены циркуляционные зоны. После одного оборота картины распределения частиц практически одинаковы. После пяти оборотов основные отличия наблюдаются в окрестности лопасти. Наличие одной циркуляционной зоны C_0 для дилатантной жидкости (рис. 6, д), огибающей центральное тело, заставляет частицы перераспределяться по ее объему. Видно, что после 10 оборотов мешалки практически все частицы переместились с одной стороны мешалки на другую. Напротив, наличие двух изолированных циркуляционных зон C_1 и C_2 около лопасти для псевдопластичной среды (рис. 4, д) ограничивает процесс смешения: маркерные частицы не попадают в область зоны C_1 , которая в начальный момент времени не содержала их. Течение ньютоновской жидкости (рис. 5, д) характеризуется наличием зоны C_0 , которая обеспечивает частичное перераспределение маркеров в «пустые» области, и зон C_1 и C_2 , ограничивающих передвижение частиц. Течение вне этих зон носит сдвиговой характер с формированием слоис-

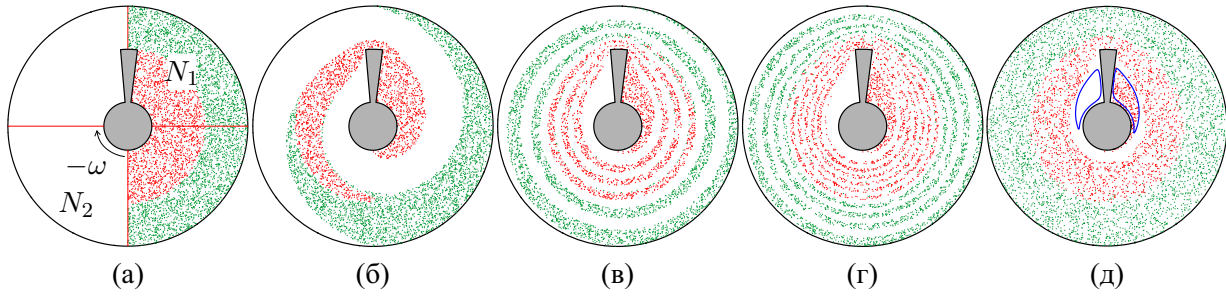


Рис. 4. Распределение маркеров для псевдопластичной жидкости при $Re = 1$ и $n = 0.7$ в момент времени: (а) 0 оборотов; (б) 1 оборот; (в) 5 оборотов; (г) 10 оборотов; (д) 80 оборотов

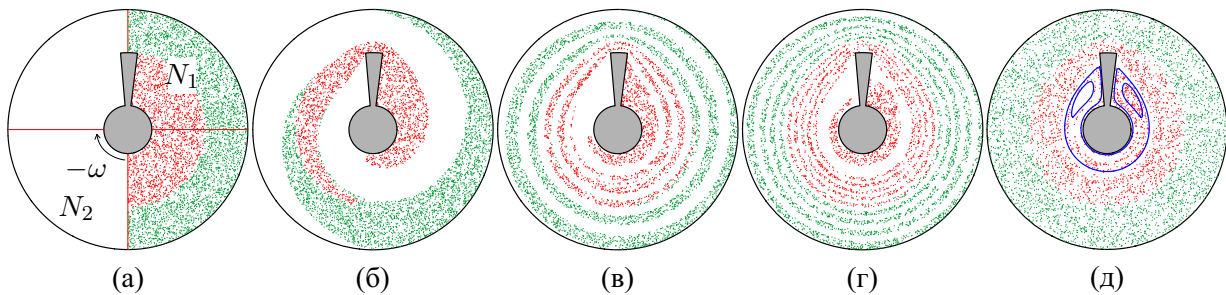


Рис. 5. Распределение маркеров для ньютоновской жидкости при $Re = 1$ и $n = 1$ в момент времени: (а) 0 оборотов; (б) 1 оборот; (в) 5 оборотов; (г) 10 оборотов; (д) 80 оборотов

той структуры из маркерных частиц, масштаб которой со временем уменьшается и после 80 оборотов практически не наблюдается. Анализ движения частиц двух видов, отмеченных на рисунках зеленым и красным цветом, показывает, что вне зависимости от реологической модели не происходит перемешивания частиц двух видов между собой.

В качестве количественной характеристики процесса смешения применяется безразмерное число мощности [19]

$$N_p = \frac{P}{\rho\omega^3(2R)^5} = \frac{\Phi}{32Re},$$

где P и Φ — размерное и безразмерное значения интеграла от диссипативной функции

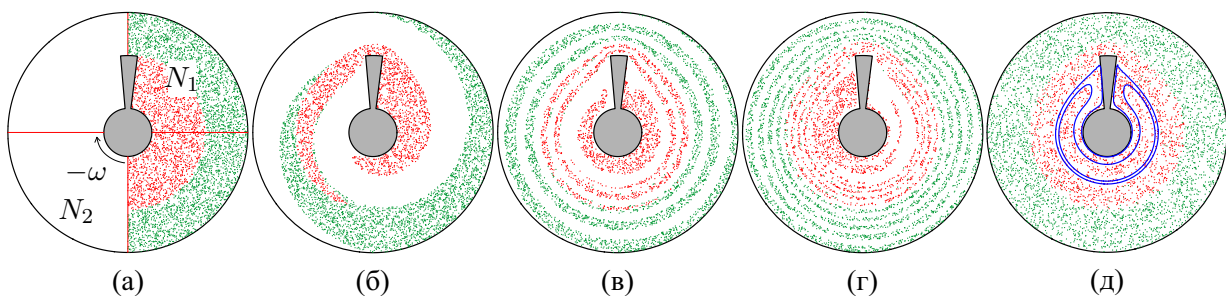


Рис. 6. Распределение маркеров для дилатантной жидкости при $Re = 1$ и $n = 1.3$ в момент времени: (а) 0 оборотов; (б) 1 оборот; (в) 5 оборотов; (г) 10 оборотов; (д) 80 оборотов

по области течения Ω :

$$\Phi = \iint_{\Omega} \mu(I_2) \left\{ 2 \left(\frac{\partial V}{\partial R} \right)^2 + 2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \epsilon} + \frac{V}{r} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \epsilon} + \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{U}{r} \right)^2 \right\} r dr d\epsilon.$$

Таблица 2. Значение характеристики Φ в зависимости от определяющих параметров

N_P	$n = 0.5$	$n = 0.7$	$n = 1$	$n = 1.3$	$n = 1.5$
Re = 1	62.59	69.22	81.28	95.87	107.19
Re = 10	0.6297	0.6956	0.8156	0.9612	1.0744
Re = 40	0.04112	0.04537	0.05293	0.06199	0.06885

Величина N_P в стационарном режиме показывает потери на вязкое трение и характеризует энергетические затраты на организацию течения. В таблице 2 приведены значения N_P в зависимости от степени нелинейности и числа Рейнольдса для случая установившегося течения. В рассматриваемом диапазоне изменения наблюдается практически линейный рост характеристики с увеличением n при постоянном значении Re. Наиболее интенсивное движение с высокими градиентами компонент вектора скорости реализуется в окрестности внешней кромки мешалки для всех случаев (рис. 2). Для дилатантной жидкости эта область соответствует высоким значениям вязкости, чем объясняются более высокие значения N_P по сравнению с псевдопластичной реологией. Увеличение числа Рейнольдса соответствует уменьшению вязких слагаемых по отношению к конвективным, а следовательно, и вязкой диссипации, что приводит к снижению параметра N_P и проявлению инерциальных эффектов. В частности, изменяются границы циркуляционных зон, и они теряют симметрию относительно лопатки.

На рис. 7 представлены картины распределения маркеров после 80 оборотов для различных значений чисел Re при прочих равных для псевдопластичной реологии. Видно, что с ростом Re циркуляционная зона C_1 увеличивается в размерах, а C_2 — уменьшается, что приводит к формированию «пустой» области (без маркерных частиц) достаточно больших размеров. В области, примыкающей к внешней стенке, качественно картина не изменяется, течение носит сдвиговой характер со слоистой структурой распределения маркеров. Случай дилатантной реологии проиллюстрирован на рис. 8. Увеличение параметра Re приводит к формированию изолированной циркуляционной зоны C_1 , которая ограничивает процесс перераспределения маркеров по области и ухудшает качество смешения. Таким образом, при больших числах Рейнольдса ($Re > 40$) доминирующую роль в перераспределении маркеров играет зона C_1 как при $n = 0.7$, так и при $n = 1.3$, и макроструктуры потоков схожи. А в случае низких значений чисел Рейнольдса ($Re < 1$) макроструктура определяется степенью нелинейности.

На основе распределения маркеров был рассчитан параметр неоднородности, который позволяет оценить качество смешения с течением времени. Область течения разбивается на четыре четверти, как показано на рис. 4, а ($t = 0$), и в каждый момент времени вычисляется количество маркеров N_1 и N_2 в первой и третьей четверти соответственно. Значение параметра неоднородности определяется по следующей формуле:

$$\nu(t) = \frac{N_1(t) - N_2(t)}{N_1(t) + N_2(t)}.$$

Поведения характеристик ν с течением времени для трех реологий проиллюстрированы на рис. 9 при $Re = 1$. Хотя распределения полей вектора скорости и давления устанавливаются со временем, значение ν имеет нестационарный характер вследствие неравномерного

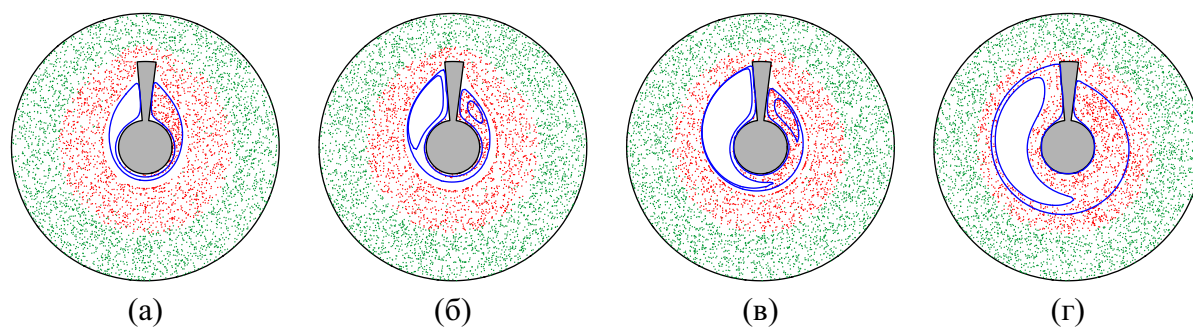


Рис. 7. Распределение маркеров для псевдопластичной жидкости в момент времени после 80 оборотов для $n = 0.7$: (а) $Re = 1$; (б) $Re = 20$; (в) $Re = 40$; (г) $Re = 100$

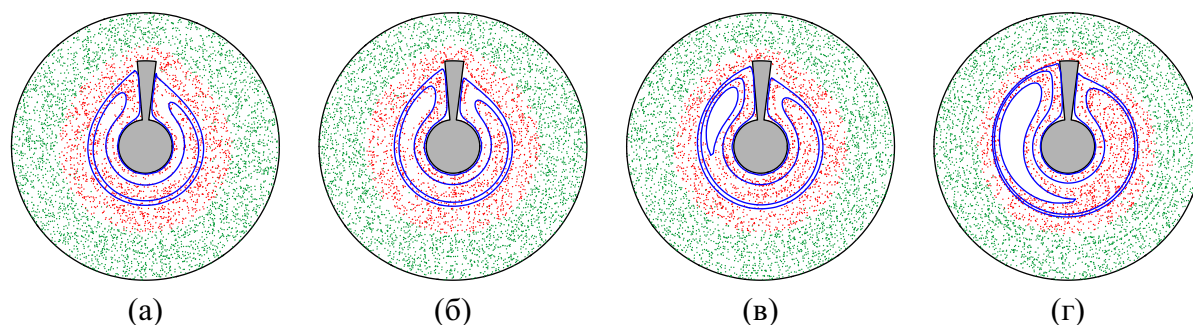


Рис. 8. Распределение маркеров для дилатантной жидкости в момент времени после 80 оборотов для $n = 1.3$: (а) $Re = 1$; (б) $Re = 20$; (в) $Re = 40$; (г) $Re = 100$

начального положения маркерных частиц по области и их перераспределения со временем. Во всех случаях наблюдается колебательная составляющая с частотой, соответствующей частоте вращения мешалки. Для псевдопластичной жидкости амплитуда колебаний изменяется слабо из-за наличия изолированных циркуляционных зон C_1 и C_2 . Для дилатантной жидкости можно выделить еще одну низкочастотную моду (относительно частоты вращения мешалки), которая связана с периодическим движением частиц в циркуляционной зоне C_0 . Амплитуда колебаний при этом со временем уменьшается, так как распределение частиц в циркуляционной зоне становится однороднее. Ньютоновскому случаю свойственны обе тенденции, так как в нем реализуются зоны обоих типов.

На рис. 10, 11 представлены зависимости характеристики неоднородности ν от времени для псевдопластичной и дилатантной жидкости при различных числах Re . В случае псевдопластичной жидкости (рис. 10) рост Re приводит к увеличению изолированной зоны C_1 , при этом зона C_2 значительно уменьшается в размерах и формируется огибающая зона C_0 (рис. 7). Как следствие, амплитуда колебаний характеристики ν увеличивается приблизительно в два раза при увеличении Re с 10 до 40, а при $Re = 100$ реализуется низкочастотная мода. Для дилатантной жидкости (рис. 11) огибающая зона C_0 (рис. 7) реализуется во всем рассмотренном диапазоне чисел Re , что приводит к наличию низкочастотной моды даже при малых Re (рис. 11, а).

В таблице 3 представлены осредненные абсолютные значения характеристики ν по 20 оборотам. С ростом n ее уменьшение объясняется увеличением интенсивности огибающей зоны C_0 , обеспечивающей перераспределение маркеров в областях, примыкающих к мешалке, и уменьшением изолированных зон. Увеличение числа Re от 1 до 100 приводит к росту неоднородности в связи с увеличением зоны C_1 .

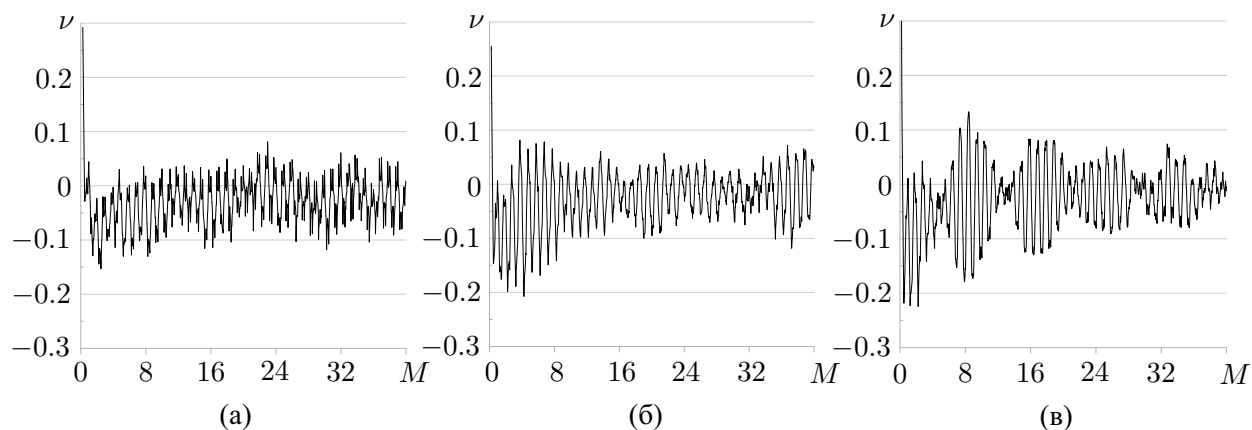


Рис. 9. Зависимость характеристики неоднородности от числа оборотов M для $Re = 1$: (а) $n = 0.5$; (б) $n = 1$; (в) $n = 1.5$

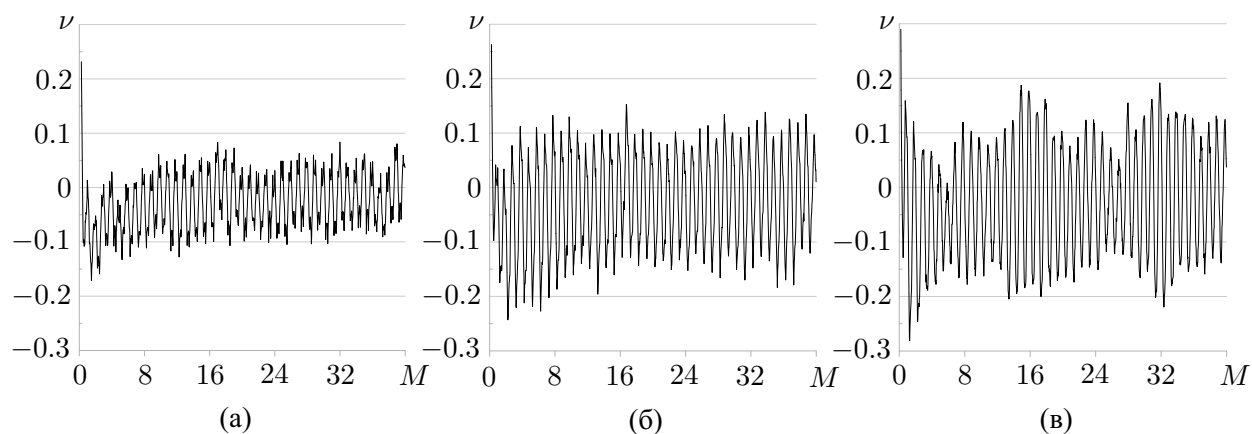


Рис. 10. Зависимость характеристики неоднородности от числа оборотов M для псевдопластичной жидкости при $n = 0.7$: (а) $Re = 10$; (б) $Re = 40$; (в) $Re = 100$

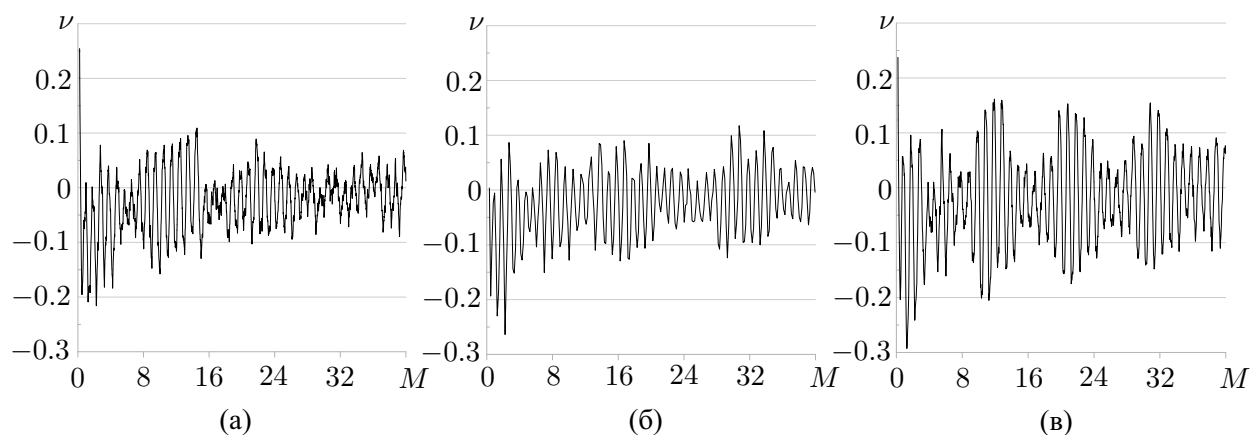


Рис. 11. Зависимость характеристики неоднородности от числа оборотов M для дилатантной жидкости при $n = 1.3$: (а) $Re = 10$; (б) $Re = 40$; (в) $Re = 100$

Таблица 3. Значение характеристики Φ в зависимости от определяющих параметров

$\bar{\nu}$	$n = 0.5$	$n = 0.7$	$n = 1$	$n = 1.3$	$n = 1.5$
$Re = 1$	0.0272658	0.0354808	0.0297292	0.0210561	0.0141081
$Re = 10$	0.031032	0.0423515	0.0316751	0.0252839	0.0165773
$Re = 40$	0.0663916	0.067812	0.0543761	0.0376333	0.0267969
$Re = 100$	0.097038	0.0908906	0.0722198	0.0639671	0.0545119

Заключение

Выполнены параметрические исследования плоских течений степенной жидкости в однолопастной мешалке с использованием оригинальной программы расчета в диапазоне изменения чисел Re от 1 до 100 и степени нелинейности от 0.5 до 1.5. Представлены распределения компонент скорости, вязкости и линий тока, иллюстрирующие структуру потока. Характерным является формирование в окрестности мешалки циркуляционных зон двух типов: изолированные зоны C_1 и C_2 , расположенные перед и после лопасти по ходу ее движения; зона C_0 , огибающая центральное тело. Качество смешения проанализировано с помощью распределенного по области потока ансамбля маркерных частиц. На его основе вычислен критерий неоднородности. Для псевдопластичной жидкости при низких значениях Re реализуются изолированные зоны. Наличие последних ограничивает процесс смешения, так как маркеры не попадают в зону C_1 и не покидают зону C_2 . Случай дилатантной реологии характеризуется зоной C_0 , которая огибает центральное тело мешалки и, как следствие, не ограничивает перераспределение маркеров. В области, примыкающей к внешней стенке смесителя, кинематика потока имеет сдвиговой характер, а маркерные частицы образуют слоистые структуры, масштаб которых уменьшается со временем. При числах Re порядка 100 во всем исследуемом диапазоне степеней нелинейности картина течения характеризуется наличием зоны C_1 достаточно больших размеров, которая снижает качество смешения. Так же процесс перемешивания исследован с помощью числа мощности и параметра неоднородности, которые позволяют количественно описать выявленные качественные закономерности.

Финансирование. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 24–29–00594).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Барабаш В. М., Абиев Р. Ш., Кулов Н. Н. Обзор работ по теории и практике перемешивания // Теоретические основы химической технологии. 2018. Т. 52. № 4. С. 367–383.
<https://doi.org/10.1134/S0040357118040024>
2. Снигерев Б. А., Тазюков Ф. Х. Неизотермическое ползущее течение вязкоупругой жидкости со свободной поверхностью при формировании волокон // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2010. Вып. 2. С. 101–108.
<https://doi.org/10.20537/vm100209>
3. Фомин А. А., Фомина Л. Н. Численное моделирование течения вязкой несжимаемой жидкости и теплообмена в плоском канале с обратным уступом // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2015. Т. 25. Вып. 2. С. 280–294.
<https://doi.org/10.20537/vm150212>
4. Ameer H. Effect of some parameters on the performance of anchor impellers for stirring shear-thinning fluids in a cylindrical vessel // Journal of Hydrodynamics. 2016. Vol. 28. No. 4. P. 669–675.
[https://doi.org/10.1016/S1001-6058\(16\)60671-6](https://doi.org/10.1016/S1001-6058(16)60671-6)

5. Patel D., Ein-Mozaffari F., Mehrvar M. Effect of rheological parameters on non-ideal flows in the continuous-flow mixing of biopolymer solutions // *Chemical Engineering Research and Design*. 2015. Vol. 100. P. 126–134. <https://doi.org/10.1016/j.cherd.2015.05.010>
6. Rahimzadeh A., Ein-Mozaffari F., Lohi A. Influence of rheological parameters on the performance of the aerated coaxial mixer containing a pseudoplastic fluid // *Physics of Fluids*. 2024. Vol. 36. Issue 5. 053102. <https://doi.org/10.1063/5.0202461>
7. Борзенко Е. И., Гарбузов Д. Н. Течение ньютоновской жидкости в смесителях различных конфигураций // *Вычислительная механика сплошных сред*. 2024. Т. 17. № 4. С. 486–495. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2024.17.4.39>
8. Wu Binxin. CFD simulation of mixing for high-solids anaerobic digestion // *Biotechnology and Bioengineering*. 2012. Vol. 109. Issue 8. P. 2116–2126. <https://doi.org/10.1002/bit.24482>
9. Chachi M., Kamla Y., Alhaffar M. T., Bouzit M., Meliani M. H., Al-Badour F. A., Rahman M. M., Suleiman R. K. Quantitative assessment of agitator performance in an anchor-stirred tank: investigating the impact of geometry, eccentricity, and rheological characteristics // *Arabian Journal for Science and Engineering*. 2024. Vol. 49. No. 10. P. 13885–13895. <https://doi.org/10.1007/s13369-024-08821-0>
10. Shiue Angus, Zhu Likuan, Wang Chao-Li, Jeng Jyh-Cheng, Leggett Graham. Mixing performance of a non-Newtonian fluid in a coaxial agitated impeller reactor // *Journal of the Taiwan Institute of Chemical Engineers*. 2023. Vol. 143. 104715. <https://doi.org/10.1016/j.jtice.2023.104715>
11. Kazemzadeh A., Ein-Mozaffari F., Lohi A., Pakzad L. Investigation of hydrodynamic performances of coaxial mixers in agitation of yield-pseudoplastic fluids: Single and double central impellers in combination with the anchor // *Chemical Engineering Journal*. 2016. Vol. 294. P. 417–430. <https://doi.org/10.1016/j.cej.2016.03.010>
12. Ge Man, Chen Juntong, Zhao Longyun, Zheng Gaoan. Mixing transport mechanism of three-phase particle flow based on CFD-DEM coupling // *Processes*. 2023. Vol. 11. Issue 6. 1619. <https://doi.org/10.3390/pr11061619>
13. Kou Bin, Hou Yanqing, Fu Weiqin, Yang Ni, Liu Junchang, Xie Gang. Simulation of multi-phase flow in autoclaves using a coupled CFD-DPM approach // *Processes*. 2023. Vol. 11. Issue 3. 890. <https://doi.org/10.3390/pr11030890>
14. Komoda Yoshiyuki, Date Tomoya. Enhancement of laminar mixing by an anchor impeller with rotationally reciprocating motion // *AIP Advances*. 2022. Vol. 12. Issue 1. 015013. <https://doi.org/10.1063/5.0075750>
15. Bertrand Et J., Couderc J. P. Agitation de fluides pseudoplastiques par un agitateur bipale // *The Canadian Journal of Chemical Engineering*. 1982. Vol. 60. Issue 6. P. 738–747. <https://doi.org/10.1002/cjce.5450600604>
16. Брагинский Л. Н., Бегачев В. И., Барабаш В. М. Перемешивание в жидких средах. Физические основы и инженерные методы расчета. Л.: Химия, 1984.
17. Benhanifia K., Redouane F., Lakhdar R., Brahim M., Al-Farhany Kh., Jamshed W., Eid M. R., El Din S. M., Raizah Z. Investigation of mixing viscoplastic fluid with a modified anchor impeller inside a cylindrical stirred vessel using Casson–Papanastasiou model // *Scientific Reports*. 2022. Vol. 12. Article number: 17534. <https://doi.org/10.1038/s41598-022-22415-6>
18. Патанкар С. В. Численные методы решения задач теплообмена и механики жидкости. М.: Энергоиздат, 1988.
19. Paul E. L., Atiemo-Obeng V. A., Kresta S. M. Handbook of industrial mixing. Hoboken, New Jersey: Wiley-Interscience, 2003. <https://doi.org/10.1002/0471451452>

Поступила в редакцию 15.05.2025

Принята к публикации 10.07.2025

Борзенко Евгений Иванович, д. ф.-м. н., доцент, кафедра автоматизации технологических процессов, Томский государственный университет, 634050, Россия, г. Томск, пр. Ленина, 36.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6264-1776>

E-mail: borzenko@ftf.tsu.ru

Гарбузов Дмитрий Николаевич, аспирант, младший научный сотрудник, лаборатория проблем опасных космических объектов, Томский государственный университет, 634050, Россия, г. Томск, пр. Ленина, 36.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7787-8247>

E-mail: dmitrij.garbuzov.98@mail.ru

Ефремов Максим Андреевич, лаборант, лаборатория проблем опасных космических объектов, Томский государственный университет, 634050, Россия, г. Томск, пр. Ленина, 36.

E-mail: 33murman@gmail.com

Цитирование: Е. И. Борзенко, Д. Н. Гарбузов, М. А. Ефремов. Математическое моделирование течения степенной жидкости в аппарате с лопастной мешалкой // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2025. Т. 35. Вып. 3. С. 438–451.

E. I. Borzenko, D. N. Garbuzov, M. A. Efremov

Mathematical modeling of power-law fluid flow in a mixer with a blade stirrer

Keywords: mixing apparatus, blade, power-law fluid, mathematical modeling, flow structure, circulation zone, mixing quality.

MSC2020: 76A05, 76M12

DOI: [10.35634/vm250307](https://doi.org/10.35634/vm250307)

The article presents the results of mathematical modeling of a power-law fluid flow in a blade stirrer mixing apparatus. The numerical solution of the problem is based on the control volume method and the SIMPLE procedure implemented on a non-uniform orthogonal grid. The distribution pattern of kinematic characteristics in the volume is investigated, and the flow structure is studied with the allocation of characteristic circulation zones for pseudoplastic, Newtonian and dilatant rheologies. To assess the mixing process over time, the problem of redistribution of an ensemble of marker particles initially located in the selected region and moving with the velocity of the medium is solved. Parametric studies of two technological criteria are carried out: the integral of the dissipative function showing the energy costs of organizing the flow; the original characteristic calculated from the current distribution of marker particles, allowing one to estimate the homogeneity of mixing.

Funding. The study was funded by RSCF, project number 24–29–00594.

REFERENCES

1. Barabash V. M., Abiev R. Sh., Kulov N. N. Theory and practice of mixing: a review, *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*, 2018, vol. 52, no. 4, pp. 473–487. <https://doi.org/10.1134/S004057951804036X>
2. Snigerev B. A., Tazyukov F. Kh. Nonisothermal creeping flow of viscoelastic fluid with free surface during forming fibers, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2010, issue 2, pp. 101–108 (in Russian). <https://doi.org/10.20537/vm100209>
3. Fomin A. A., Fomina L. N. Numerical simulation of the viscous incompressible fluid flow and heat transfer in a plane channel with backward-facing step, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2015, vol. 25, issue 2, pp. 280–294 (in Russian). <https://doi.org/10.20537/vm150212>
4. Ameer H. Effect of some parameters on the performance of anchor impellers for stirring shear-thinning fluids in a cylindrical vessel, *Journal of Hydrodynamics*, 2016, vol. 28, no. 4, pp. 669–675. [https://doi.org/10.1016/S1001-6058\(16\)60671-6](https://doi.org/10.1016/S1001-6058(16)60671-6)
5. Patel D., Ein-Mozaffari F., Mehrvar M. Effect of rheological parameters on non-ideal flows in the continuous-flow mixing of biopolymer solutions, *Chemical Engineering Research and Design*, 2015, vol. 100, pp. 126–134. <https://doi.org/10.1016/j.cherd.2015.05.010>
6. Rahimzadeh A., Ein-Mozaffari F., Lohi A. Influence of rheological parameters on the performance of the aerated coaxial mixer containing a pseudoplastic fluid, *Physics of Fluids*, 2024, vol. 36, issue 5, 053102. <https://doi.org/10.1063/5.0202461>
7. Borzenko E. I., Garbuzov D. N. Flow of a Newtonian fluid in agitators of different configurations, *Computational Continuum Mechanics*, 2024, vol. 17, no. 4, pp. 486–495 (in Russian). <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2024.17.4.39>
8. Wu Binxin. CFD simulation of mixing for high-solids anaerobic digestion, *Biotechnology and Bio-engineering*, 2012, vol. 109, issue 8, pp. 2116–2126. <https://doi.org/10.1002/bit.24482>
9. Chachi M., Kamla Y., Alhaffar M. T., Bouzit M., Meliani M. H., Al-Badour F. A., Rahman M. M., Suleiman R. K. Quantitative assessment of agitator performance in an anchor-stirred tank: investigating the impact of geometry, eccentricity, and rheological characteristics, *Arabian Journal for Science and Engineering*, 2024, vol. 49, no. 10, pp. 13885–13895. <https://doi.org/10.1007/s13369-024-08821-0>

10. Shiue Angus, Zhu Likuan, Wang Chao-Li, Jeng Jyh-Cheng, Leggett Graham. Mixing performance of a non-Newtonian fluid in a coaxial agitated impeller reactor, *Journal of the Taiwan Institute of Chemical Engineers*, 2023, vol. 143, 104715. <https://doi.org/10.1016/j.jtice.2023.104715>
11. Kazemzadeh A., Ein-Mozaffari F., Lohi A., Pakzad L. Investigation of hydrodynamic performances of coaxial mixers in agitation of yield-pseudoplastic fluids: Single and double central impellers in combination with the anchor, *Chemical Engineering Journal*, 2016, vol. 294, pp. 417–430. <https://doi.org/10.1016/j.cej.2016.03.010>
12. Ge Man, Chen Juntong, Zhao Longyun, Zheng Gaoan. Mixing transport mechanism of three-phase particle flow based on CFD-DEM coupling, *Processes*, 2023, vol. 11, issue 6, 1619. <https://doi.org/10.3390/pr11061619>
13. Kou Bin, Hou Yanqing, Fu Weiqin, Yang Ni, Liu Junchang, Xie Gang. Simulation of multi-phase flow in autoclaves using a coupled CFD-DPM approach, *Processes*, 2023, vol. 11, issue 3, 890. <https://doi.org/10.3390/pr11030890>
14. Komoda Yoshiyuki, Date Tomoya. Enhancement of laminar mixing by an anchor impeller with rotationally reciprocating motion, *AIP Advances*, 2022, vol. 12, issue 1, 015013. <https://doi.org/10.1063/5.0075750>
15. Bertrand Et J., Couderc J.P. Agitation de fluides pseudoplastiques par un agitateur bipale, *The Canadian Journal of Chemical Engineering*, 1982, vol. 60, issue 6, pp. 738–747. <https://doi.org/10.1002/cjce.5450600604>
16. Braginskii L.N., Begachev V.I., Barabash V.M. *Peremeshivanie v zhidkikh sredakh. Fizicheskie osnovy i inzhenernye metody rascheta* (Mixing in liquid media. Physical principles and engineering calculation methods), Leningrad: Khimiya, 1984.
17. Benhanifia K., Redouane F., Lakhdar R., Brahim M., Al-Farhany Kh., Jamshed W., Eid M.R., El Din S.M., Raizah Z. Investigation of mixing viscoplastic fluid with a modified anchor impeller inside a cylindrical stirred vessel using Casson–Papanastasiou model, *Scientific Reports*, 2022, vol. 12, article number: 17534. <https://doi.org/10.1038/s41598-022-22415-6>
18. Patankar S. V. *Numerical heat transfer and fluid flow*, Boca Raton: CRC Press, 2018. <https://doi.org/10.1201/9781482234213>
19. Paul E. L., Atiemo-Obeng V. A., Kresta S. M. *Handbook of industrial mixing*, Hoboken, New Jersey: Wiley-Interscience, 2003. <https://doi.org/10.1002/0471451452>

Received 15.05.2025

Accepted 10.07.2025

Evgeny Ivanovich Borzenko, Doctor of Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Automation of Technological Processes, Tomsk State University, pr. Lenina, 36, Tomsk, 634050, Russia.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6264-1776>

E-mail: borzenko@ftf.tsu.ru

Dmitrii Nikolaevich Garbuzov, Post-Graduate Student, Junior Researcher, Laboratory for Problems of Dangerous Space Objects, Tomsk State University, pr. Lenina, 36, Tomsk, 634050, Russia.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7787-8247>

E-mail: dmitrij.garbuzov.98@mail.ru

Maksim Andreevich Efremov, Laboratory Assistant, Laboratory for Problems of Dangerous Space Objects, Tomsk State University, pr. Lenina, 36, Tomsk, 634050, Russia.

E-mail: 33murman@gmail.com

Citation: E. I. Borzenko, D. N. Garbuzov, M. A. Efremov. Mathematical modeling of power-law fluid flow in a mixer with a blade stirrer, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2025, vol. 35, issue 3, pp. 438–451.