

УДК 539.3

© С. А. Бочкарёв

АНАЛИЗ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ УСЕЧЕННЫХ КОНИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ, ЗАПОЛНЕННЫХ ЖИДКОСТЬЮ

Представлены результаты численных исследований собственных колебаний усеченных прямых конических оболочек вращения, полностью заполненных идеальной сжимаемой жидкостью. Толщина оболочек непостоянна вдоль образующей и изменяется по различным законам. Поведение упругой конструкции и жидкой среды описывается в рамках классической теории оболочек, основанной на гипотезах Кирхгофа–Лява, и уравнений Эйлера. Уравнения движения оболочки совместно с соответствующими геометрическими и физическими соотношениями сводятся к системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно новых неизвестных. Акустическое волновое уравнение, записанное относительно гидродинамического давления, преобразуется к системе дифференциальных уравнений с помощью метода обобщенных дифференциальных квадратур. Решение сформулированной краевой задачи осуществляется методом ортогональной прогонки Годунова и сводится к вычислению собственных частот колебаний. Для этой цели используется сочетание пошаговой процедуры с последующим уточнением найденных значений в полученном диапазоне методом Мюллера. Достоверность получаемых результатов подтверждена сравнением с известными численными решениями. Для оболочек с различными углами конусности и комбинациями граничных условий (свободное опирание, жесткое и консольное закрепления) исследованы зависимости низших частот колебаний, полученных при степенном (линейном и квадратичном, имеющих симметричную и несимметричную формы) и гармоническом (с положительной и отрицательной кривизной) изменении толщины. Оценено влияние граничных условий на возможность существования конфигураций (угол конусности, закон изменения толщины, отношение максимальной и минимальной толщины профиля), обеспечивавших повышение фундаментальной частоты по сравнению с оболочками постоянной толщины при ограничениях на вес конструкции.

Ключевые слова: классическая теория оболочек, прямая коническая оболочка, метод ортогональной прогонки Годунова, идеальная сжимаемая жидкость, метод обобщенных дифференциальных квадратур, собственные колебания, переменная толщина.

DOI: [10.35634/vm250308](https://doi.org/10.35634/vm250308)

Введение

Известно [1–3], что переменная толщина является одним из инструментов оптимизации конструкций. Она позволяет не только уменьшать массу изделий при соблюдении накладываемых на них эксплуатационных требований, но и изменять их прочностные характеристики за счет перераспределения материала в критических областях без увеличения общей массы. Использование неоднородной толщины способствует улучшению механических свойств тонкостенных тел, увеличивая их жесткость в зонах с высокими напряжениями и уменьшая количество материала в менее нагруженных частях. Поскольку даже незначительная неоднородность конструкции оказывает влияние на ее частотный спектр, анализ влияния различных законов изменения толщины на динамические характеристики стал предметом исследований многочисленных публикаций.

Тонкостенные оболочки вращения с гладко-переменным или ступенчато-переменным изменением толщины находят широкое применение в авиационно-космической технике, машиностроении, строительной индустрии в виде основных или вспомогательных элементов сложных конструкций. Наиболее интенсивно исследованы пустые цилиндрические

и конические оболочки, толщина которых переменна в меридиональном или окружном направлениях [4–7]. В этих работах, выполненных с использованием различных численных методов, изучено влияние неоднородной толщины на напряженно-деформированное состояние, частоты собственных или вынужденных колебаний, границы упругой, аэроупругой или термоупругой устойчивости. В значительно меньшей степени представлены исследования оболочек вращения, взаимодействующих с жидкостью.

Аналитическое решение задачи о собственных колебаниях содержащей жидкость цилиндрической оболочки с линейным изменением толщины представлено в [8]. Конструкция, рассматриваемая в рамках теории оболочек Флюгге, разбивается на участки с постоянной толщиной, объединение которых осуществляется с помощью метода передаточных матриц. В работах [9, 10] с помощью методов передаточной матрицы и степенных рядов исследуются подкрепленные конические оболочки, описываемые уравнениями Флюгге. Проанализировано влияние граничных условий на частоты колебаний оболочек, толщина которых изменяется линейно, параболически, ступенчато или остается неизменной. Теория оболочек типа Тимошенко, учитывающая деформации поперечного сдвига, и метод передаточных матриц используются в [11] для анализа собственных колебаний конических оболочек с трапецевидным продольным сечением при различных геометрических параметрах и вариантах граничных условий. В перечисленных выше работах учет сжимаемой жидкой среды осуществляется по предложенному в [12] алгоритму, согласно которому тело конической формы разбивается по длине на ряд цилиндрических сегментов с постоянным радиусом, в пределах которых гидродинамическое давление вычисляется по аналитической формуле с использованием функций Ганкеля. Свободные колебания полностью заполненной жидкостью двухслойной жестко закрепленной цилиндрической оболочки переменной толщины исследованы в [13] с использованием сплайнов Бикли для аппроксимации перемещений и углов поворота. Толщина одного из слоев меняется по линейному, экспоненциальному или синусоидальному закону. Гибридный метод конечных элементов (МКЭ), в котором точные функции перемещений определяются непосредственно из уравнений теорий оболочек Сандерса, используется в [14] для анализа гидроупругого взаимодействия подкрепленной конической оболочки с линейным распределением толщины. В работе [15] в рамках классической теории оболочек исследованы собственные колебания жестко закрепленных и консольных двухслойных конических оболочек с линейным, экспоненциальным и синусоидальным изменением толщины слоев. Для аппроксимации перемещений применяются сплайны Бикли третьего и пятого порядков. В двух последних работах гидродинамическое давление несжимаемой жидкости вычисляется с помощью предложенного в [16] аналитического выражения, записанного относительно угла при вершине и окружной гармонике, которое методом разделения переменных получено из волнового уравнения, записанного в сферической системе координат. Влияние различных законов изменения толщины на низшие частоты колебаний частично заполненной сжимаемой жидкостью цилиндрической оболочки с разными вариантами граничных условий исследовано в работе [17] с помощью комбинации методов ортогональной прогонки (ОПГ) и обобщенных дифференциальных квадратур (ОДК). Частотный и динамический анализ погруженной в жидкость комбинированной конструкции, состоящей из подкрепленной цилиндрической оболочки со ступенчатым изменением толщины и торцевых пластин, осуществлен в [18]. Решение основано на совместном использовании методов конечных и граничных элементов, применяемых для моделирования упругих тел, описываемых теорией оболочек Доннела, и несжимаемой жидкости соответственно.

Из представленного обзора следует, что анализ конических оболочек переменной толщины, содержащих жидкость, ограничен только отдельными сочетаниями некоторых параметров. Детальное исследование различных комбинаций углов конусности и законов из-

менения толщины, направленное на выявление оптимальных конфигураций, обеспечивающих, например, максимизацию низшей частоты колебаний, в литературе не представлено. Выполнение такого анализа является целью данной работы. Также отметим, что в отличие от процитированных публикаций в качестве объекта исследования рассматривается коническая оболочка прямой формы. У таких конструкций радиус нижнего (левого) края больше верхнего (правого). Как продемонстрировано в недавней статье [19], различие в частотах между прямой и перевернутой формами может быть весьма значительным в случае несимметричных граничных условий, что требует детального изучения динамического поведения каждой из них.

Как и в упомянутой работе [17] численное решение задачи основано на совместном использовании методов ОДК [20] и ОПГ, предложенной Годуновым [21]. Для конической оболочки эта комбинация более предпочтительна из-за невозможности получения аналитического выражения для гидродинамического давления. Наряду с методами конечных или граничных элементов она позволяет достаточно точно описывать поведение жидкости на смоченной поверхности. Однако в отличие от более универсальных методов предлагаемый подход в случае осесимметричных тел обладает большей точностью и эффективностью, что продемонстрировано при исследовании изотропных или слоистых цилиндрических и конических оболочек [22–25].

§ 1. Постановка задачи

Рассматривается прямая вертикально ориентированная усеченная коническая оболочка вращения (рис. 1) высотой L , длиной образующей $l = L / \cos A$, радиусами R_1 , R_2 и углом при вершине A , полностью заполненная идеальной сжимаемой жидкостью объемом V_f . Толщина оболочки $h = h(\xi)$ переменна по образующей и математически описывается как $h = h_e (1 + g(\xi))$. Здесь $\xi = s/l$ — безразмерная координата, $g(\xi)$ — функция ξ , определяющая закон изменения толщины, h_e — толщина, вычисляемая из условия эквивалентности масс относительно референсной h_0 . Рассматриваемые в работе законы изменения толщины определяют следующие профили: 1–2 — линейный несимметричный и симметричный; 3–4 — квадратичный несимметричный и симметричный; 5–6 — гармонический выпуклый и вогнутый; 7–8 — несимметричные линейный и квадратичный, толщина которых меняется от минимального значения к максимальному. Схематичное изображение перечисленных профилей и соответствующие им значения параметров приведены на рис. 2 и в таблице 1. Указанный в таблице 1 параметр k характеризует переменность толщины. При его значении $k = 0$ толщина оболочки постоянна и равна $h = h_0$. Вместо параметра переменности толщины k более удобно использовать безразмерный параметр $\beta = k + 1 = h_{\max}/h_{\min}$, который имеет явный физический смысл. Здесь $h_{\max}$ и $h_{\min}$ — максимальная и минимальная толщина профиля соответственно. Примеры профилей эквивалентной массы при различных значениях параметра β и разных законах изменения толщины приведены в [4]. Исходя из условия эквивалентности масс ставится задача исследования влияния переменности толщины, определяемой по разным законам, на низшую частоту колебаний усеченной конической оболочки, полностью заполненной жидкостью, при различных углах конусности и кинематических граничных условиях, задаваемых на краях.

§ 2. Основные соотношения

Малые колебания сжимаемой жидкости описываются линеаризованными уравнениями Эйлера, которые в акустическом приближении сводятся к волновому уравнению относи-

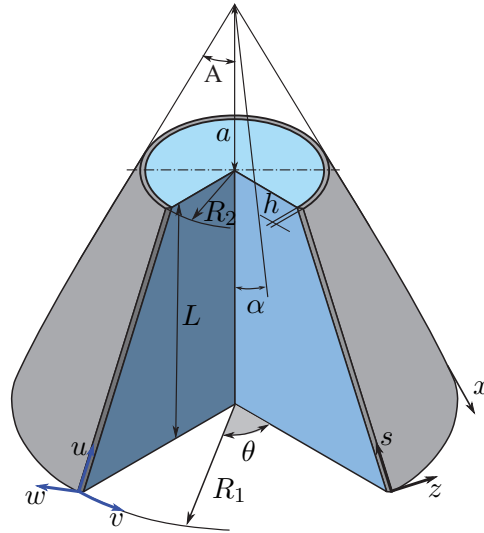


Рис. 1. Расчетная схема усеченной прямой конической оболочки, заполненной жидкостью

тельно гидродинамического давления p [26]

$$\nabla^2 p = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{2}{x} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{x^2} \left(\frac{1}{\sin^2 \alpha} \frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\tan \alpha} \frac{\partial p}{\partial \alpha} + \frac{\partial^2 p}{\partial \alpha^2} \right) = \frac{1}{c_f^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}, \quad (1)$$

где (x, α, θ) — сферическая система координат, c_f — скорость звука в жидкости.

Гидродинамическое давление p должно удовлетворять следующим условиям:

- на смоченной поверхности

$$\frac{1}{x} \frac{\partial p}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=A} = -\rho_f \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}; \quad (2)$$

- оси вращения оболочки

$$\frac{\partial p}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} = 0; \quad (3)$$

- верхней и нижней поверхностях жидкости

$$x = a/\cos \alpha : \quad \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad x = (a + L)/\cos \alpha : \quad \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad (4)$$

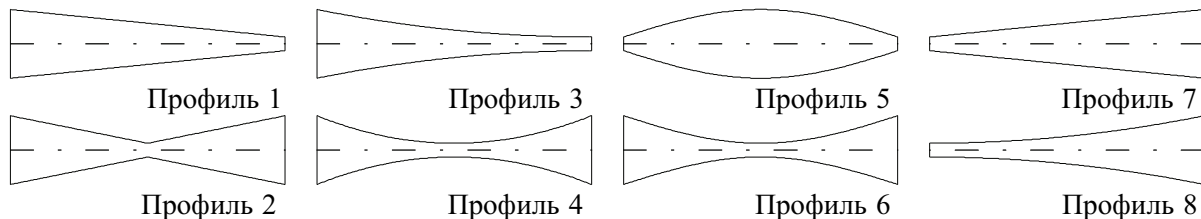


Рис. 2. Схематичные изображения продольных сечений оболочки с различными вариантами изменения толщины

где ρ_f — плотность жидкости, w — нормальная компонента вектора перемещений оболочки. Условия (4) характеризуют взаимодействие жидкости с недеформируемыми поверхностями.

Таблица 1. Параметры законов изменения толщины

Профиль 1	Профиль 2	Профиль 3	Профиль 4
$g(\xi) = k \xi - 1 $ $h_e = \frac{2h_0}{2+k}$	$g(\xi) = k 2\xi - 1 $ $h_e = \frac{2h_0}{2+k}$	$g(\xi) = k(\xi - 1)^2$ $h_e = \frac{3h_0}{3+k}$	$g(\xi) = k(2\xi - 1)^2$ $h_e = \frac{3h_0}{3+k}$
Профиль 5	Профиль 6	Профиль 7	Профиль 8
$g(\xi) = k \sin(\pi\xi)$ $h_e = \frac{\pi h_0}{2k+\pi}$	$g(\xi) = k [1 - \sin(\pi\xi)]$ $h_e = \frac{\pi h_0}{\pi k + \pi - 2k}$	$g(\xi) = k\xi$ $h_e = \frac{2h_0}{2+k}$	$g(\xi) = k\xi^2$ $h_e = \frac{3h_0}{3+k}$

Применение метода ОПГ требует преобразования волнового уравнения (1) к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Для аппроксимации по координате α используется метод ОДК [20]. Область жидкости разбивается на n равных углов α_i , в любом из которых производные l -го порядка функции $p(x, \alpha, \theta)$ заменяются взвешенной суммой значений функции во всех углах

$$\frac{\partial^l p(x, \alpha_i, \theta)}{\partial \alpha^l} = \sum_{k=1}^n c_{ik}^{(l)} p(x, \alpha_k, \theta), \quad i = \overline{1, n}, \quad l = \overline{1, m}, \quad (5)$$

где $m = n - 1$, а весовые коэффициенты $c_{ik}^{(l)}$ вычисляются по известным рекуррентным формулам [20]. С учетом (5) и граничных условий (2)–(3) получим вместо (1) следующую систему уравнений [27]

$$\frac{\partial^2 p_i}{\partial x^2} + \frac{2}{x} \frac{\partial p_i}{\partial x} + \frac{1}{x^2} \left(\frac{1}{\sin^2 \alpha_i} \frac{\partial^2 p_i}{\partial \theta^2} + \frac{p_i^{(1)}(x, \theta)}{\operatorname{tg} \alpha_i} + p_i^{(2)}(x, \theta) \right) - \frac{1}{c_f^2} \frac{\partial^2 p_i}{\partial t^2} = 0, \quad i = \overline{2, m}. \quad (6)$$

Выражения для производных $p_i^{(1)}(x, \theta)$ и $p_i^{(2)}(x, \theta)$ приведены в [27].

Для классической теории оболочек, основанной на гипотезах Кирхгофа–Лява, компоненты вектора деформации E_{ij} записываются в виде [28]

$$E_{11} = \varepsilon_{11} + z\kappa_{11}, \quad E_{22} = \varepsilon_{22} + z\kappa_{22}, \quad E_{12} = \varepsilon_{12} + 2z\kappa_{12}, \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= u' + r_1 w, & \varepsilon_{22} &= v^\bullet + \gamma u + r_2 w, & \varepsilon_{12} &= v' + u^\bullet - \gamma v, \\ \kappa_{11} &= \theta_1', & \kappa_{22} &= \theta_2^\bullet + \gamma \theta_1, & \kappa_{12} &= \theta_1^\bullet - \gamma \theta_2 + r_2 v', \\ \theta_1 &= -w' + r_1 u, & \theta_2 &= -w^\bullet + r_2 v, \\ (\dots)' &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial(\dots)}{\partial s}, & (\dots)^\bullet &= \frac{1}{A_2} \frac{\partial(\dots)}{\partial \theta}, & \gamma &= \frac{1}{A_2} A_2'. \end{aligned}$$

Здесь: (s, θ, z) — криволинейная система координат; A_1 и A_2 — коэффициенты Ламе; r_1 и r_2 — кривизны; u, v — меридиональная и окружная составляющие вектора перемещений оболочки; θ_1 и θ_2 — углы поворота недеформируемой нормали.

Физические соотношения, устанавливающие связь между вектором усилий и моментов $\mathbf{T}$ и вектором обобщенных деформаций $\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12}, \kappa_{11}, \kappa_{22}, 2\kappa_{12}\}^T$, в матричном виде записываются как

$$\mathbf{T} = \{T_{11}, T_{22}, S, M_{11}, M_{22}, H\}^T = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{b} & \mathbf{c} \end{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (8)$$

где коэффициенты, входящие в матрицу жесткостей $\mathbf{D}$, являются функциями координаты ξ и определяются известным образом [28].

Уравнения движения оболочки имеют вид [28]

$$\begin{aligned} T'_{11} + \gamma(T_{11} - T_{22}) + S^\bullet + r_1(Q_{11} - H^\bullet) - \rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 0, \\ S' + 2\gamma(S + r_1 H) + T_{22}^\bullet + r_2(Q_{22} + H') - \rho_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= 0, \\ Q'_{11} + \gamma Q_{11} + Q_{22}^\bullet - r_1 T_{11} - r_2 T_{22} - \rho_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + p_n &= 0, \\ M'_{11} + \gamma(M_{11} - M_{22}) + H^\bullet - Q_{11} &= 0, \quad H' + 2\gamma H + M_{22}^\bullet - Q_{22} = 0, \end{aligned} \quad (9)$$

где Q_{ii} — поперечные силы, $\rho_0 = \int_{-h(\xi)/2}^{h(\xi)/2} \rho dz$, ρ — плотность материала оболочки.

Раскладывая все компоненты (6), (7), (8) в ряды Фурье по координате θ

$$\begin{aligned} X(s, \theta) &= \sum_{j=0} X_j(s) \cos(j\theta), \quad Y(s, \theta) = \sum_{j=0} Y_j(s) \sin(j\theta), \\ X &= \{u, w, \theta_1, E_{11}, E_{22}, K_{11}, K_{22}, T_{11}, T_{22}, M_{11}, M_{22}, Q_{11}, p\}, \\ Y &= \{v, \theta_2, E_{12}, K_{12}, S, H, Q_{22}\}, \end{aligned}$$

сводим геометрические (7) и физические (8) соотношения, а также уравнения движения (9) к системе восьми обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка относительно новых неизвестных [28]

$$\begin{aligned} y_1 &= T_{11}, \quad y_2 = S + 2r_2 H, \quad y_3 = M_{11}, \quad y_4 = Q_{11} + \bar{j} H, \\ y_5 &= u, \quad y_6 = v, \quad y_7 = w, \quad y_8 = \theta_1. \end{aligned}$$

Здесь j — номер гармоники при разложении в ряд Фурье, $\bar{j} = j/A_2$. С учетом этого и используя представление для движения в виде $\mathbf{y}(t) = \mathbf{y} \exp(i\omega t)$, запишем искомую систему следующим образом

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(j, \omega, \mathbf{y}), \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} f_1 &= \bar{j}(2r_2 H - y_2) - \psi(y_1 - T_{22}) - r_1 y_4 - \omega^2 \rho_0 y_5, \\ f_2 &= \bar{j} T_{22} - 2\psi y_2 - r_2 Q_{22} - \omega^2 \rho_0 y_6, \\ f_3 &= y_4 - \psi(y_3 - M_{22}) - 2\bar{j} H, \\ f_4 &= r_1 y_1 - \psi y_4 + r_2 T_{22} - \bar{j}(Q_{22} + 2\psi H) - p_n - \omega^2 \rho_0 y_7, \\ f_5 &= \varepsilon_{11} - r_1 y_7, \quad f_6 = \varepsilon_{12} + \psi y_6 + \bar{j} y_5, \quad f_7 = -y_8 + r_1 y_5, \quad f_8 = \kappa_{11}. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь ω — характеристический показатель, $i^2 = -1$. Входящие в выражения (11) величины приведены в работе [27].

С учетом разложения в ряд Фурье система уравнений (6) в нормальном виде Коши может быть записана как

$$\begin{aligned} \frac{dy_{7+2(i-1)}}{dx} &= y_{8+2(i-1)}, \\ \frac{dy_{8+2(i-1)}}{dx} &= -\frac{p_i^{(2)}(x)}{x^2} + \frac{y_{7+2(i-1)}}{x^2} \left(\frac{j^2}{\sin^2 \alpha_i} - \frac{p_i^{(1)}(x)}{\operatorname{tg} \alpha_i} - \frac{x^2 \omega^2}{c_f^2} \right) - \frac{2y_{8+2(i-1)}}{x}, \end{aligned} \quad (12)$$

где $y_{7+2(i-1)} = p_i(x)$, $i = \overline{2, m}$.

§ 3. Метод решения

Объединенная система уравнений (10), (12), совокупное число неизвестных которой составляет $N = 8 + 2m$, с соответствующими однородными граничными условиями, задаваемыми на краях оболочки и столба жидкости

$$y_i|_{s=0}\delta_i + y_{i+4}|_{s=0}(1 - \delta_i) = 0, \quad i = 1 \dots 4, \quad y_i|_{x=(a+L)/\cos \alpha} = 0, \quad i = 10, 12 \dots N/2, \quad (13)$$

$$y_i|_{s=l}\delta_{i+4} + y_{i+4}|_{s=l}(1 - \delta_{i+4}) = 0, \quad i = 1 \dots 4, \quad y_i|_{x=a/\cos \alpha} = 0, \quad i = 10, 12 \dots N/2, \quad (14)$$

решается методом ОПГ [21] с численным интегрированием дифференциальных уравнений методом Рунге–Кутты четвертого порядка точности. В уравнениях (13)–(14) $\delta_i = 0$, если заданы кинематические, и $\delta_i = 1$, если заданы статические граничные условия.

Общее решение систем представляется в виде

$$\mathbf{y} = \sum_{k=1}^{N/2} C_k \mathbf{y}_k,$$

где C_k — некоторые константы и $\mathbf{y}_k$ — совокупность линейно независимых решений объединенных систем, удовлетворяющих граничным условиям (13). После интегрирования по заданному интервалу и удовлетворения граничных условий (14) для определения постоянных C_k получим следующую алгебраическую систему

$$\sum_{k=1}^{N/2} C_k f_{ik} = 0, \quad i = 1, \dots, N/2. \quad (15)$$

Искомая задача сводится к вычислению таких значений ω , при которых существует нетривиальное решение системы (15), необходимым условием которого является равенство нулю определителя матрицы $|f_{ik}(\omega)| = 0$. Значения ω , при которых происходит смена знака определителя $|f_{ik}|$, вычисляются с использованием шаговой процедуры и уточняются в полученном диапазоне методом Мюллера [29, 30].

§ 4. Численные результаты

В численных примерах рассматриваются свободно опертые ($v = w = T_{11} = M_{11} = 0$, SS), жестко защемленные ($u = v = w = \theta_1 = 0$, CC) на обоих краях или консольно закрепленные ($T_{11} = 0, S + 2r_2 H = 0, M_{11} = 0, Q_{11} + \bar{j}H = 0$, CF) конические оболочки ($L = 0.9144$ м, $R_m = 0.876$ м, $h = 0.0015$ м, модуль упругости $E = 200$ ГПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$, $\rho = 7800$ кг/м³), полностью заполненные сжимаемой жидкостью ($\rho_f = 1000$ кг/м³, $c_f = 1500$ м/с). При варьировании геометрических параметров высота оболочки L и средний радиус $R_m = 0.5(R_1 + R_2)$ остаются неизменными при различных углах конусности. Их предельные значения подчиняются условию $\tan A < 2R_m/L$ и соответствуют размерам эквивалентной по объему цилиндрической оболочки.

Верификация описанного выше алгоритма в случае конических оболочек, взаимодействующих с жидкостью, осуществлена в работах [19, 24, 27]. Достоверность результатов, получаемых для оболочек переменной толщины оценена на следующем примере. Рассматривается пустая перевернутая коническая оболочка ($\nu = 0.3$, $R_2/R_1 = 0.5$, $h_{\min}/h_{\max} = 0.5$, $h_{\max}/R_2 = 0.01$), толщина которой изменяется согласно линейному закону в симметричной конфигурации (Профиль 7). На рис. 3 приведены зависимости параметра частоты $\lambda^4 = 12\rho R_2^4 \omega^2 (1 - \nu^2)/(E h_{\max}^2)$ от номера окружной гармоники j , полученные для оболочек с разными вариантами граничных условий и углов конусности для трех первых полуволн в меридиональном направлении ι . Здесь представлено сравнение с результатами

работы [31], где данная задача решалась методом передаточной матрицы в рамках теории оболочек Флюгге. Из представленных данных следует, что имеет место хорошее согласование с известным решением.

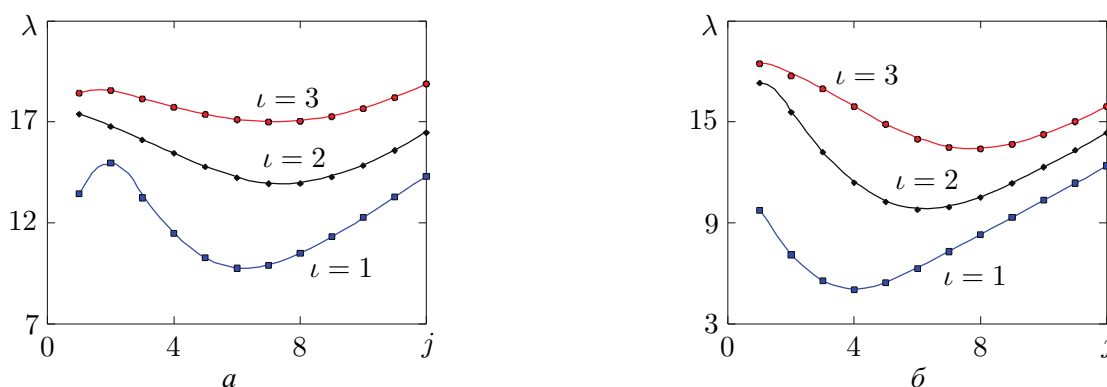


Рис. 3. Сравнение параметра частоты λ для пустой конической оболочки с линейным изменением толщины (Профиль 7) для разных комбинаций граничных условий: линии — работа [31], символы — расчет; *a* — SS, $A = 45^\circ$; *б* — CF, $A = 30^\circ$

На рис. 4 показаны зависимости низшей частоты ω от угла конусности A . Они получены для пустых и полностью заполненных жидкостью конических оболочек постоянной толщины ($\beta = 1$), имеющих различные граничные условия. В случае симметричного закрепления (СС и SS) повышение угла при вершине оболочек приводит к снижению фундаментальной частоты, что обусловлено ростом образующей поверхности. Однако для консольно закрепленных оболочек наблюдается противоположная картина. Повышение частоты имеет место вплоть до определенного значения A . При фиксированном среднем радиусе R_m увеличение угла при вершине A приводит к росту одного радиуса и уменьшению другого. Закрепление большего из них повышает жесткость системы и, следовательно, приводит к росту частоты до тех пор, пока эффекты на свободном крае не становятся доминирующими. Аналогичная особенность в поведении собственных частот в зависимости от угла конусности была выявлена ранее как для пустых, так и заполненных жидкостью перевернутых оболочек [32, 33]. Рост низшей частоты пустой жестко закрепленной только по большему радиусу оболочки продемонстрирован в работе [34]. В случае перевернутых оболочек поведение частоты с ростом угла конусности является идентичным для любого варианта граничных условий [19]. Продемонстрированное на рис. 4 поведение фундаментальной частоты при симметричных и несимметричных граничных условиях не является обязательным, а в большей мере определяется соответствующим выбором геометрических параметров. Например, в работе [35] при варьировании размеров пустой оболочки, исходя из условия $l \sin A / R_2 = \text{const}$, рост низшей частоты осуществляется на широком диапазоне углов при вершине не только при свободном опирании или жестком закреплении обоих краев, но и при сочетании этих условий. Аналогичные зависимости представлены в [36] и для консольно закрепленных оболочек как в случае заделки края с меньшим радиусом, так и с большим. В указанных публикациях сопоставление с эквивалентными цилиндрическими оболочками не осуществляется.

При выбранном способе пересчета геометрических параметров с ростом угла при вершине происходит изменение жесткости в осевом и окружном направлениях. Вследствие этого меняется не только спектр собственных частот колебаний, но и окружная мода, соответствующая низшей частоте. На кривых, представленных на рис. 4, символами обозначены места смены формы колебаний. Волновое число для низшей моды возрастает с увеличением ограничений на краях конструкции и уменьшается с ростом угла конусности [37].

В частности, в случае жесткого закрепления пустой оболочки (рис. 4, *а*) окружная мода последовательно снижается с $j = 13$ до $j = 9$, для SS — 11...7. При консольном закреплении снижение j сменяется скачкообразным повышением при изменении тренда роста частоты на ее снижение: 9...6, 8, 9. Жидкость, заполняющая внутренний объем оболочки, за счет своей присоединенной массы способствует снижению частот колебаний и волновых чисел для низших мод (рис. 4, *б*), не оказывая качественного влияния на их зависимости от угла: CC — 12...8; SS — 10...6; CF — 8...5, 7, 8.

На рис. 5 представлены результаты, полученные для оболочек переменной толщины, полностью заполненных жидкостью. Здесь приведены зависимости параметра частоты Ω от угла конусности, вычисленные для оболочек с разными граничными условиями и параметром переменности толщины β равным 2, 5 и 8. Параметр частоты Ω представляет собой отношение частот ω_i/ω_0 , соответствующих оболочкам с неравномерной ω_i и равномерной толщиной ω_0 , вычисленных при одном и том же угле конусности. Цифры на графиках соответствуют номеру профиля. Здесь же приведена пунктирная линия ($\Omega = 1$), которая наглядно позволяет оценить наличие профилей с неравномерной толщиной, частота которых выше равномерной. Символами на кривых, как и ранее, показано изменение гармоник с низшей частотой. Переменная по длине жесткость конструкции также оказывает на них влияние, незначительно расширяя диапазон как в область меньших, так и больших значений, по сравнению с постоянной. Для некоторых профилей последовательности чередований минимальных гармоник остаются неизменными. Однако углы конусности, при которых осуществляются переходы от одной формы к другой, различаются.

Для всех вариантов граничных условий изменение кривых в области значений, близких к максимальным, демонстрирует существенное различие в поведении оболочек с равномерной и неравномерной толщиной. Резкий рост у одних кривых, как и падение у других отражает, возможно, особенности рассматриваемой геометрии. Повышение угла конусности приводит к значительному уменьшению минимального радиуса, при котором нивелируется различие в граничных условиях (рис. 4), а с вычислительной точки зрения появляются дополнительные требования к качеству дискретизации этой области.

Из представленных на рис. 5 данных можно заключить, что в случае оболочек, полностью заполненных жидкостью, можно подобрать такой профиль с неравномерным распределением толщины, который будет обеспечивать более высокую фундаментальную частоту колебаний системы оболочка–жидкость. Этот вывод справедлив как для конической оболочки, так и цилиндрической, что согласуется с результатами работы [17], где аналогичные

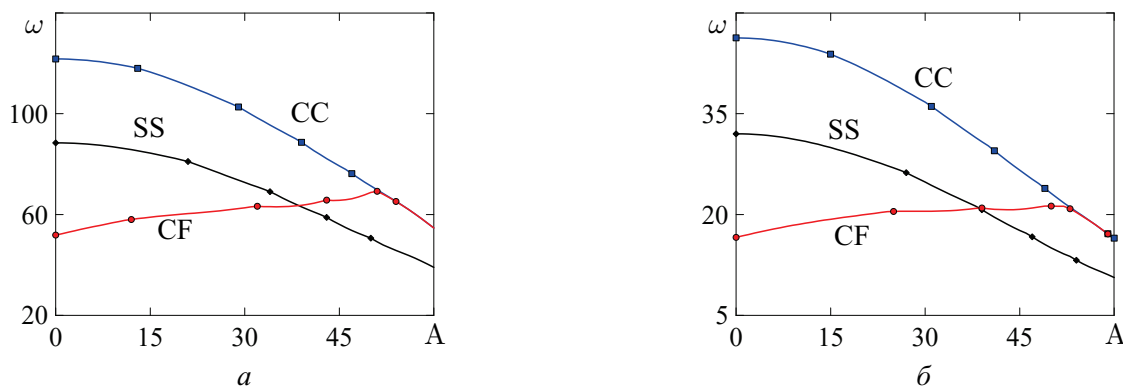


Рис. 4. Зависимости низших частот ω (Гц) от угла конусности A , полученные для прямых пустых (*а*) и заполненных жидкостью (*б*) оболочек постоянной толщины ($\beta = 1$) с разными комбинациями граничных условий

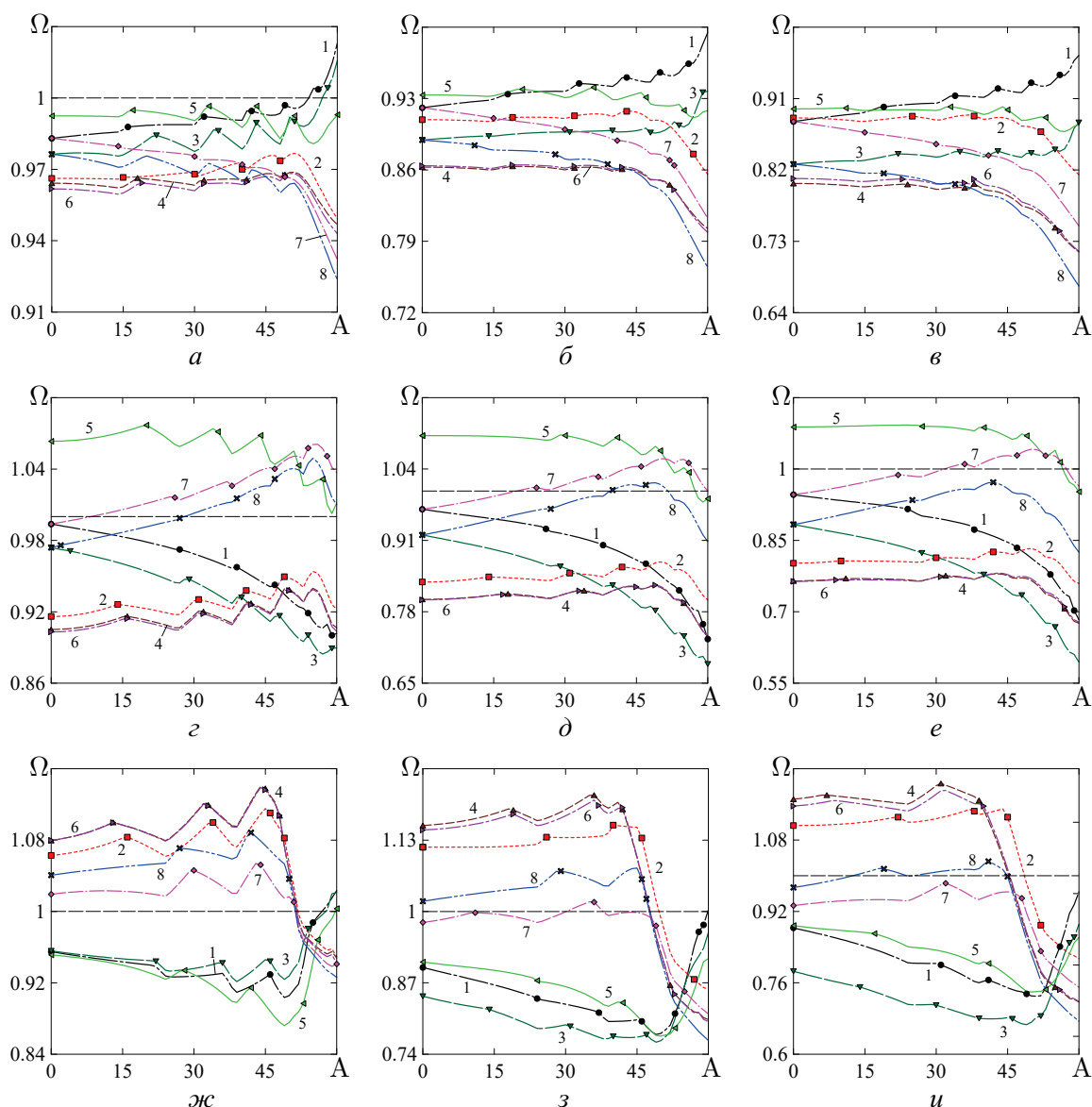


Рис. 5. Зависимости параметра частоты Ω от угла конусности A , полученные для оболочек переменной толщины $\beta = 2$ (а, г, ж), $\beta = 5$ (б, д, з) и $\beta = 8$ (в, е, и) при различных комбинациях граничных условий: а, б, в — CC; г, д, е — SS; ж, з, и — CF

вычисления осуществлялись при других геометрических размерах. При этом выбор подходящего профиля строго зависит от заданного варианта граничных условий, что совпадает с данными, полученными для пустых оболочек [4]. В частности, для жестко закрепленных оболочек, с учетом высказанного замечания относительно поведения частот при высоких углах конусности, невозможно подобрать профиль с неравномерным распределением толщины, обеспечивающий повышение частоты при любом угле при вершине. В случае свободно опертых оболочек гармонически выпуклый профиль (Профиль 5) оказывается просто идеальным для данного типа граничных условий, обеспечивая повышение частоты фактически на всем диапазоне варьируемого параметра. Наоборот, профили с симметричным изменением толщины (2, 4 и 6) не рекомендуется использовать в случае симметричных граничных условий (SS или CC), поскольку в этом случае снижение частоты может быть значительным. При консольном закреплении несколько законов изменения толщины, а именно тех, у которых толщина, приходящаяся на свободный край, является наиболь-

шей, способствуют значительному росту частоты, особенно при малых значениях параметра переменности толщины β . Среди всех рассмотренных вариантов наибольшая максимизация фундаментальной частоты достигается при $\beta = 5$. В случае консольного закрепления неравномерный квадратичный симметричный профиль (Профиль 4) обеспечивает повышение более чем на 21% для угла $A = 36^\circ$. При свободном опирании рост в пределах 10% достигается для гармонически выпуклого профиля (Профиль 5) при $A = 29^\circ$.

Среди исследуемых профилей можно отметить те, толщина которых меняется от минимального значения к максимальному (Профили 7 и 8), которые в некотором роде оказываются универсальными, так как обеспечивают повышение частоты для двух типов граничных условий на достаточно широком диапазоне углов конусности. При более высоких значениях переменности толщины ($\beta = 5$ или $\beta = 8$), эти преимущества исчезают. Отметим, что с повышением параметра β поведение кривых для всех законов изменения толщины качественно не меняется. При этом повышение отношения максимальной толщины профиля к минимальной, за некоторым исключением, уменьшает значение параметра частоты Ω .

§ 5. Заключение

Представлены результаты численного исследования собственных частот колебаний вертикальных прямых усеченных конических оболочек, полностью заполненных идеальной сжимаемой жидкостью, толщина которых меняется вдоль образующей по степенному или гармоническому законам. Решение краевой задачи выполнено методом ортогональной прогонки Годунова, в котором осуществлено интегрирование связанных систем обыкновенных дифференциальных уравнений для оболочки и жидкости. Проанализировано влияние угла конусности, граничных условий и отношения максимальной толщины профиля к минимальной на фундаментальные частоты колебаний и соответствующие им окружные моды. Осуществлено сравнение частот, получаемых для оболочек с переменной и постоянной толщиной, при одинаковых углах конусности и условии эквивалентности масс. Выявлено, что для оболочек, толщина которых неравномерно распределена вдоль образующей, существование конфигураций, при которых возможно повышение частоты по сравнению с оболочкой постоянной толщины, определяется заданной комбинацией граничных условий. Продемонстрировано, что для конкретного угла конусности и определенных граничных условий подбором закона изменения толщины и параметра переменности толщины можно добиться максимизации низшей частоты колебаний при сохранении массы оболочки неизменной.

Финансирование. Работа выполнена в рамках государственного задания (регистрационный номер темы 124020700047-3) и реализации программы создания и развития научного центра мирового уровня «Сверхзвук» на 2020–2025 гг (расчеты оболочек постоянной толщины).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Tornabene F., Fantuzzi N., Baccocchi M., Viola E., Reddy J. N. A numerical investigation on the natural frequencies of FGM sandwich shells with variable thickness by the local generalized differential quadrature method // *Applied Sciences*. 2017. Vol. 7. Issue 2. 131. <https://doi.org/10.3390/app7020131>
2. Баничук Н. В. Оптимизация форм упругих тел. М.: Наука, 1980. <https://zbmath.org/0649.73040>
3. Ольхофф Н. Оптимальное проектирование конструкций. Вопросы вибрации и потери устойчивости. М.: Мир, 1981.
4. Бочкарёв С. А. Собственные колебания усеченных конических оболочек переменной толщины // *Вычислительная механика сплошных сред*. 2020. Т. 13. № 4. С. 402–413. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2020.13.4.31>
5. Teng Mei Wen, Wang Yan Qing. Thickness configuration effect on frequency and critical speed of spinning variable-thickness cylindrical shells // *International Journal of Structural Stability and Dynamics*. 2023. Vol. 23. No. 05. 2350055. <https://doi.org/10.1142/S0219455423500554>

6. Long Nguyen Trong, Quan Nguyen Minh, Ha Nguyen Hoang, Tan Nguyen Cong, Ninh Dinh Gia, Thang Vu Toan, Eslami Habib, Dao Dzung Viet. Dynamical responses of variable generatrix profile and thickness ceramic-matrix composite shells under electro-thermo-mechanical effects // *Thin-Walled Structures*. 2023. Vol. 185. 110592. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2023.110592>
7. Zheng Dayuan. Vibration characteristic analysis of thin-walled conical shells with arbitrary thickness variation and general boundary condition // *Thin-Walled Structures*. 2025. Vol 212. 113160. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2025.113160>
8. Han R. P. S., Liu J. D. Free vibration analysis of a fluid-loaded variable thickness cylindrical tank // *Journal of Sound and Vibration*. 1994. Vol. 176. Issue 2. P. 235–253. <https://doi.org/10.1006/jsvi.1994.1371>
9. Liu Ming, Liu Jun, Cheng Yuansheng. Free vibration of a fluid loaded ring-stiffened conical shell with variable thickness // *Journal of Vibration and Acoustics*. 2014. Vol. 136. Issue 5. 051003. <https://doi.org/10.1115/1.4027804>
10. Liu Jun, Ye Xu, Liu Ming, Cheng Yuan-sheng, Wu Li. A semi-analytical method of free vibration of fluid loaded ring-stiffened stepped conical shell // *Journal of Marine Engineering and Technology*. 2014. Vol. 13. Issue 2. P. 35–49. <https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/20464177.2014.11020297>
11. Li Xudong, Zhao Shihao, Qiu Shuheng, Wang Dongjie, Chen Jinhua, Zhang Chi, Qu Yilin. Theoretical analysis for free vibration of submerged conical motor stator // *Applied Ocean Research*. 2024. Vol. 142. 103809. <https://doi.org/10.1016/j.apor.2023.103809>
12. Caresta M., Kessissoglou N. J. Vibration of fluid loaded conical shells // *The Journal of the Acoustical Society of America*. 2008. Vol. 124. Issue 4. P. 2068–2077. <https://doi.org/10.1121/1.2973237>
13. Nurul Izyan M. D., Viswanathan K. K., Nur Hafizah A. K., Sankar D. S. Free vibration of layered cylindrical shells of variable thickness filled with fluid // *28th International Congress on Sound and Vibration 2022 (ICSV28)*. Singapore: International Institute of Acoustics and Vibration (IIAV), 2022. Vol. 2. P. 1286–1293.
14. Esmaeilzadehazimi M., Bakhtiari M., Toorani M., Lakis A. A. Numerical modeling and analysis of fluid-filled truncated conical shells with ring stiffeners // *Journal of Fluids and Structures*. 2024. Vol. 127. 104121. <https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2024.104121>
15. Nurul Izyan M. D., Viswanathan K. K., Sankar D. S. Nor Hafizah A. K. Free vibration of conical shell frusta of variable thickness with fluid interaction // *Structural Engineering and Mechanics*. 2024. Vol. 90. No. 6. P. 601–610. <https://doi.org/10.12989/SEM.2024.90.6.601>
16. Nurul Izyan M. D., Viswanathan K. K., Aziz Z. A., Lee Jang Hyun, Prabakar K. Free vibration of layered truncated conical shells filled with quiescent fluid using spline method // *Composite Structures*. 2017. Vol. 163. P. 385–398. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2016.12.011>
17. Бочкарёв С. А., Матвеев В. П. Анализ собственных колебаний цилиндрической оболочки переменной толщины, частично заполненной жидкостью // *Труды Института математики и механики УрО РАН*. 2023. Т. 29. № 2. С. 27–40. <https://doi.org/10.21538/0134-4889-2023-29-2-27-40>
18. Zhang Dechun, Yin Hong, Li Peng, Yang Yiren. On the frequency and dynamic analyses of complex cylindrical shells submerged in fluid: An axisymmetric FEM/BEM method // *Ocean Engineering*. 2023. Vol. 287. Part 1. 115752. <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2023.115752>
19. Bochkarev S. A., Lekomtsev S. V. Analysis of natural vibration of truncated conical shells partially filled with fluid // *International Journal of Mechanical System Dynamics*. 2024. Vol. 4. Issue 2. P. 142–152. <https://doi.org/10.1002/msd2.12105>
20. Shu Chang. *Differential quadrature and its application in engineering*. London: Springer, 2000. <https://doi.org/10.1007/978-1-4471-0407-0>
21. Годунов С. К. Обыкновенные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Т. 1. Краевые задачи. Новосибирск: НГУ, 1994.
22. Бочкарёв С. А., Лekomtsev С. В., Матвеев В. П. Собственные колебания композитных цилиндрических оболочек частично заполненных жидкостью // *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия*. 2023. Т. 10. Вып. 4. С. 616–631. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2023.403>

23. Bochkarev S. A., Matveenko V. P. Natural vibrations and stability of composite cylindrical shells containing a quiescent fluid // *International Journal of Applied Mechanics*. 2024. Vol. 16. No. 08. 2450096. <https://doi.org/10.1142/S1758825124500960>
24. Бочкарёв С. А., Лекомцев С. В. Численное исследование собственных колебаний слоистых усеченных конических оболочек, заполненных жидкостью // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*. 2025. № 1. С. 5–19. <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2025.1.01>
25. Бочкарёв С. А. Устойчивость слоистых цилиндрических оболочек, заполненных жидкостью // *Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико-математические науки»*. 2025. Т. 29. № 1. С. 55–76. <https://doi.org/10.14498/vsgtu2117>
26. Païdoussis M. P. Fluid-structure interactions. Slender structures and axial flow. Vol. 2. London: Academic Press, 2004.
27. Бочкарёв С. А., Лекомцев С. В., Матвеев В. П. Собственные колебания усеченных конических оболочек, содержащих жидкость // *Прикладная математика и механика*. 2022. Т. 86. Вып. 4. С. 505–526. <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=49297184>
28. Кармишин А. В., Ляковец В. А., Мяченков В. И., Фролов А. Н. Статика и динамика тонкостенных оболочечных конструкций. М.: Машиностроение, 1975.
29. Muller D. E. A method for solving algebraic equations using an automatic computer // *Mathematics of Computation*. 1956. Vol. 10. P. 208–215. <https://doi.org/10.1090/s0025-5718-1956-0083822-0>
30. Wu Xinyuan. Improved Muller method and Bisection method with global and asymptotic superlinear convergence of both point and interval for solving nonlinear equations // *Applied Mathematics and Computation*. 2005. Vol. 166. Issue 2. P. 299–311. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2004.04.120>
31. Irie T., Yamada G., Kaneko Y. Free vibration of a conical shell with variable thickness // *Journal of Sound and Vibration*. 1982. Vol. 82. Issue 1. P. 83–94. [https://doi.org/10.1016/0022-460X\(82\)90544-2](https://doi.org/10.1016/0022-460X(82)90544-2)
32. Rahmanian M., Firouz-Abadi R. D., Cigeroglu E. Free vibrations of moderately thick truncated conical shells filled with quiescent fluid // *Journal of Fluids and Structures*. 2016. Vol. 63. P. 280–301. <https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2016.04.005>
33. Thambiratnam D. P., Zhuge Yan. Axisymmetric free vibration analysis of conical shells // *Engineering Structures*. 1993. Vol. 15. Issue 2. P. 83–89. [https://doi.org/10.1016/0141-0296\(93\)90002-L](https://doi.org/10.1016/0141-0296(93)90002-L)
34. Buchanan G. R., Wong F. T.-I. Frequencies and mode shapes for thick truncated hollow cones // *International Journal of Mechanical Sciences*. 2001. Vol. 43. Issue 12. P. 2815–2832. [https://doi.org/10.1016/S0020-7403\(01\)00068-6](https://doi.org/10.1016/S0020-7403(01)00068-6)
35. Shu Chang. An efficient approach for free vibration analysis of conical shells // *International Journal of Mechanical Sciences*. 1996. Vol. 38. Issues 8–9. P. 935–949. [https://doi.org/10.1016/0020-7403\(95\)00096-8](https://doi.org/10.1016/0020-7403(95)00096-8)
36. Irie T., Yamada G., Tanaka K. Natural frequencies of truncated conical shells // *Journal of Sound and Vibration*. 1984. Vol. 92. Issue 3. P. 447–453. [https://doi.org/10.1016/0022-460X\(84\)90391-2](https://doi.org/10.1016/0022-460X(84)90391-2)
37. Narita Y., Ohta Y., Yamada G., Kobayashi Y. Analytical method for vibration of angle-ply cylindrical shells having arbitrary edges // *AIAA Journal*. 1992. Vol. 30. Issue 3. P. 790–796. <https://doi.org/10.2514/3.10986>

Поступила в редакцию 08.06.2025

Принята к публикации 28.08.2025

Бочкарёв Сергей Аркадьевич, к. ф.-м. н., старший научный сотрудник, лаборатория механики функциональных материалов, Институт механики сплошных сред, УрО РАН, 614018, Россия, г. Пермь, ул. Академика Королёва, 1.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9722-1269>

E-mail: bochkarev@icmm.ru

Цитирование: С. А. Бочкарёв. Анализ собственных колебаний усеченных конических оболочек переменной толщины, заполненных жидкостью // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2025. Т. 35. Вып. 3. С. 452–468.

S. A. Bochkarev**Analysis of natural vibrations of truncated conical shells of variable thickness filled with fluid**

Keywords: classical shell theory, straight conical shell, Godunov orthogonal sweep method, ideal compressible fluid, generalized differential quadrature method, natural vibrations, variable thickness.

MSC2020: 70J10, 74F10

DOI: [10.35634/vm250308](https://doi.org/10.35634/vm250308)

The article presents the results of numerical studies of natural vibrations of truncated straight conical shells of revolution completely filled with an ideal compressible fluid. The shell thickness is not constant along the generatrix and changes according to various laws. The behavior of the elastic structure and liquid medium is described in the framework of the classical shell theory, which is based on the Kirchhoff–Love hypotheses and the Euler equations. The equations of shell motion together with the corresponding geometric and physical relations are reduced to a system of ordinary differential equations with respect to new unknowns. The acoustic wave equation written with respect to the hydrodynamic pressure is transformed to a system of differential equations using the method of generalized differential quadrature. The solution of the formulated boundary value problem is developed by the Godunov orthogonal sweep method and is reduced to the calculation of natural vibrational frequencies. To this end, a step-by-step computational procedure is applied in combination with the subsequent refinement of the found values in the obtained range by the Muller method. The validity of the results obtained is verified by comparison with the known numerical solutions. For shells with different cone angles and combinations of boundary conditions (free support, rigid clamping and cantilevered support), the dependence of the lowest vibration frequencies obtained with a power (linear and quadratic, having symmetric and asymmetric forms) and harmonic (with positive and negative curvature) thickness change were investigated. The influence of boundary conditions on the possibility of the existence of configurations (cone angle, law of thickness variation, ratio of maximum or minimum cross-section thickness) that ensured an increase in the fundamental frequency compared to shells of constant thickness with restrictions on the weight of the structure was estimated.

Funding. The research was carried out within the state assignment of Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (theme No. 124020700047-3) and partially in the framework of the program for the creation and development of the world-class scientific center “Supersonic” for 2020–2025 (calculations of shells with constant thickness).

REFERENCES

1. Tornabene F., Fantuzzi N., Baccocchi M., Viola E., Reddy J. N. A numerical investigation on the natural frequencies of FGM sandwich shells with variable thickness by the local generalized differential quadrature method, *Applied Sciences*, 2017, vol. 7, issue 2, 131. <https://doi.org/10.3390/app7020131>
2. Banichuk N. V. *Optimizatsiya form uprugikh tel* (Optimization of forms of elastic bodies), Moscow: Nauka, 1980. <https://zbmath.org/0649.73040>
3. Olhoff N. *Optimal'noe proektirovanie konstruktssii. Voprosy vibratsii i poteri ustoychivosti* (Optimal design of structures. Issues of vibration and loss of stability), Moscow: Mir, 1981.
4. Bochkarev S. A. Natural vibrations of truncated conical shells of variable thickness, *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2021, vol. 62, issue 7, pp. 1222–1233. <https://doi.org/10.1134/S0021894421070038>
5. Teng Mei Wen, Wang Yan Qing. Thickness configuration effect on frequency and critical speed of spinning variable-thickness cylindrical shells, *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 2023, vol. 23, no. 05, 2350055. <https://doi.org/10.1142/S0219455423500554>
6. Long Nguyen Trong, Quan Nguyen Minh, Ha Nguyen Hoang, Tan Nguyen Cong, Ninh Dinh Gia, Thang Vu Toan, Eslami Habib, Dao Dzong Viet. Dynamical responses of variable generatrix profile

- and thickness ceramic-matrix composite shells under electro-thermo-mechanical effects, *Thin-Walled Structures*, 2023, vol. 185, 110592. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2023.110592>
7. Zheng Dayuan. Vibration characteristic analysis of thin-walled conical shells with arbitrary thickness variation and general boundary condition, *Thin-Walled Structures*, 2025, vol. 212, 113160. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2025.113160>
 8. Han R. P. S., Liu J. D. Free vibration analysis of a fluid-loaded variable thickness cylindrical tank, *Journal of Sound and Vibration*, 1994, vol. 176, issue 2, pp. 235–253. <https://doi.org/10.1006/jsvi.1994.1371>
 9. Liu Ming, Liu Jun, Cheng Yuansheng. Free vibration of a fluid loaded ring-stiffened conical shell with variable thickness, *Journal of Vibration and Acoustics*, 2014, vol. 136, issue 5, 051003. <https://doi.org/10.1115/1.4027804>
 10. Liu Jun, Ye Xu, Liu Ming, Cheng Yuan-sheng, Wu Li. A semi-analytical method of free vibration of fluid loaded ring-stiffened stepped conical shell, *Journal of Marine Engineering and Technology*, 2014, vol. 13, issue 2, pp. 35–49. <https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/20464177.2014.11020297>
 11. Li Xudong, Zhao Shihao, Qiu Shuheng, Wang Dongjie, Chen Jinhua, Zhang Chi, Qu Yilin. Theoretical analysis for free vibration of submerged conical motor stator, *Applied Ocean Research*, 2024, vol. 142, 103809. <https://doi.org/10.1016/j.apor.2023.103809>
 12. Caresta M., Kessissoglou N. J. Vibration of fluid loaded conical shells, *The Journal of the Acoustical Society of America*, 2008, vol. 124, issue 4, pp. 2068–2077. <https://doi.org/10.1121/1.2973237>
 13. Nurul Izyan M. D., Viswanathan K. K., Nur Hafizah A. K., Sankar D. S. Free vibration of layered cylindrical shells of variable thickness filled with fluid, *28th International Congress on Sound and Vibration 2022 (ICSV28)*, Singapore: International Institute of Acoustics and Vibration (IIAV), 2022, vol. 2, pp. 1286–1293.
 14. Esmaeilzadehazimi M., Bakhtiari M., Toorani M., Lakis A. A. Numerical modeling and analysis of fluid-filled truncated conical shells with ring stiffeners, *Journal of Fluids and Structures*, 2024, vol. 127, 104121. <https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2024.104121>
 15. Nurul Izyan M. D., Viswanathan K. K., Sankar D. S., Nor Hafizah A. K. Free vibration of conical shell frusta of variable thickness with fluid interaction, *Structural Engineering and Mechanics*, 2024, vol. 90, no. 6, pp. 601–610. <https://doi.org/10.12989/SEM.2024.90.6.601>
 16. Nurul Izyan M. D., Viswanathan K. K., Aziz Z. A., Lee Jang Hyun, Prabakar K. Free vibration of layered truncated conical shells filled with quiescent fluid using spline method, *Composite Structures*, 2017, vol. 163, pp. 385–398. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2016.12.011>
 17. Bochkarev S. A., Matveenko V. P. Free vibration analysis of a cylindrical shell of variable thickness partially filled with fluid, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2023, vol. 321, suppl. 1, pp. S20–S32. <https://doi.org/10.1134/S0081543823030045>
 18. Zhang Dechun, Yin Hong, Li Peng, Yang Yiren. On the frequency and dynamic analyses of complex cylindrical shells submerged in fluid: An axisymmetric FEM/BEM method, *Ocean Engineering*, 2023, vol. 287, part 1, 115752. <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2023.115752>
 19. Bochkarev S. A., Lekomtsev S. V. Analysis of natural vibration of truncated conical shells partially filled with fluid, *International Journal of Mechanical System Dynamics*, 2024, vol. 4, issue 2, pp. 142–152. <https://doi.org/10.1002/msd2.12105>
 20. Shu Chang. *Differential quadrature and its application in engineering*, London: Springer, 2000. <https://doi.org/10.1007/978-1-4471-0407-0>
 21. Godunov S. K. *Ordinary differential equations with constant coefficients*, Providence: American Mathematical Society, 1997.
 22. Bochkarev S. A., Lekomtsev S. V., Matveenko V. P. Natural vibrations of composite cylindrical shells partially filled with fluid, *Vestnik St. Petersburg University, Mathematics*, 2023, vol. 56, issue 4, pp. 435–445. <https://doi.org/10.1134/S1063454123040052>
 23. Bochkarev S. A., Matveenko V. P. Natural vibrations and stability of composite cylindrical shells containing a quiescent fluid, *International Journal of Applied Mechanics*, 2024, vol. 16, no. 08, 2450096. <https://doi.org/10.1142/S1758825124500960>

24. Bochkarev S. A., Lekomtsev S. V. The numerical investigation of natural vibrations of a truncated layered conical shell filled with a fluid, *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2025, no. 1, pp. 5–19 (in Russian). <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2025.1.01>
25. Bochkarev S. A. Stability of layered cylindrical shells filled with fluid, *Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences*, 2025, vol. 29, no. 1, pp. 55–76 (in Russian). <https://doi.org/10.14498/vsgtu2117>
26. Païdoussis M. P. *Fluid-structure interactions. Slender structures and axial flow. Vol. 2*, London: Academic Press, 2004.
27. Bochkarev S. A., Lekomtsev S. V., Matveenkov V. P. Natural vibrations of truncated conical shells containing fluid, *Mechanics of Solids*, 2022, vol. 57, issue 8, pp. 1971–1986. <https://doi.org/10.3103/S0025654422080064>
28. Karmishin A. V., Lyaskovets V. A., Myachenkov V. I., Frolov A. N. *Statika i dinamika tonkostennykh obolocheknykh konstruksii* (The statics and dynamics of thin-walled shell structures), Moscow: Mashinostroenie, 1975.
29. Muller D. E. A method for solving algebraic equations using an automatic computer, *Mathematics of Computation*, 1956, vol. 10, pp. 208–215. <https://doi.org/10.1090/s0025-5718-1956-0083822-0>
30. Wu Xinyuan. Improved Muller method and Bisection method with global and asymptotic superlinear convergence of both point and interval for solving nonlinear equations, *Applied Mathematics and Computation*, 2005, vol. 166, issue 2, pp. 299–311. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2004.04.120>
31. Irie T., Yamada G., Kaneko Y. Free vibration of a conical shell with variable thickness, *Journal of Sound and Vibration*, 1982, vol. 82, issue 1, pp. 83–94. [https://doi.org/10.1016/0022-460X\(82\)90544-2](https://doi.org/10.1016/0022-460X(82)90544-2)
32. Rahmanian M., Firouz-Abadi R. D., Cigeroglu E. Free vibrations of moderately thick truncated conical shells filled with quiescent fluid, *Journal of Fluids and Structures*, 2016, vol. 63, pp. 280–301. <https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2016.04.005>
33. Thambiratnam D. P., Zhuge Yan. Axisymmetric free vibration analysis of conical shells, *Engineering Structures*, 1993, vol. 15, issue 2, pp. 83–89. [https://doi.org/10.1016/0141-0296\(93\)90002-L](https://doi.org/10.1016/0141-0296(93)90002-L)
34. Buchanan G. R., Wong F. T.-I. Frequencies and mode shapes for thick truncated hollow cones, *International Journal of Mechanical Sciences*, 2001, vol. 43, issue 12, pp. 2815–2832. [https://doi.org/10.1016/S0020-7403\(01\)00068-6](https://doi.org/10.1016/S0020-7403(01)00068-6)
35. Shu Chang. An efficient approach for free vibration analysis of conical shells, *International Journal of Mechanical Sciences*, 1996, vol. 38, issues 8–9, pp. 935–949. [https://doi.org/10.1016/0020-7403\(95\)00096-8](https://doi.org/10.1016/0020-7403(95)00096-8)
36. Irie T., Yamada G., Tanaka K. Natural frequencies of truncated conical shells, *Journal of Sound and Vibration*, 1984, vol. 92, issue 3, pp. 447–453. [https://doi.org/10.1016/0022-460X\(84\)90391-2](https://doi.org/10.1016/0022-460X(84)90391-2)
37. Narita Y., Ohta Y., Yamada G., Kobayashi Y. Analytical method for vibration of angle-ply cylindrical shells having arbitrary edges, *AIAA Journal*, 1992, vol. 30, issue 3, pp. 790–796. <https://doi.org/10.2514/3.10986>

Received 08.06.2025

Accepted 28.08.2025

Sergey Arkadievich Bochkarev, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher, Laboratory of Functional Materials Mechanics, Institute of Continuous Media Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. Akademika Koroleva, 1, Perm, 614018, Russia.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9722-1269>

E-mail: bochkarev@icmm.ru

Citation: S. A. Bochkarev. Analysis of natural vibrations of truncated conical shells of variable thickness filled with fluid, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2025, vol. 35, issue 3, pp. 452–468.