ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ
МЕХАНИКА 2025. Т. 35. Вып. 3. С. 485–494.

УДК 531.26

© *Е. А. Никонова*

О ПРИМЕНЕНИИ РАВНОМОМЕНТНЫХ СИСТЕМ РАУСА В ЗАДАЧЕ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПОТЕНЦИАЛА НЬЮТОНОВСКОГО ТЯГОТЕНИЯ

Для произвольного твёрдого тела строится семейство равномоментных ему систем Рауса, определяемое семью независимыми параметрами. Каждому решению из семейства отвечает система из пяти точечных масс — четыре точки образуют невырожденный тетраэдр, а пятая точка располагается в его центре масс. Найденное решение является самым широким обобщением ранее полученных результатов и содержит их как частные случаи. Решение не допускает дальнейшего обобщения без увеличения числа точечных масс. У твёрдого тела и равномоментной ему системы Рауса совпадают моменты распределения масс вплоть до второго порядка. Неединственность равномоментных систем позволяет ставить задачу нахождения такой системы, которая наилучшим образом приближает моменты распределения масс старших порядков.

Ключевые слова: динамически эквивалентные системы, равномоментные системы, аппроксимация ньютоновского потенциала, тензор Эйлера–Пуансо, малые небесные тела.

DOI:10.35634/vm250310

Введение

Как известно, для произвольного тяжёлого твёрдого тела можно указать эквивалентные распределения масс, для которых свойства динамики тела остаются одинаковыми при одинаковых начальных условиях. Такие динамически неразличимые системы называются *равномоментными* или *динамически эквивалентными*. Общие требования к равномоментным системам изложены Э.Дж. Раусом в [1]: две материальные системы будут равномоментными, если они обладают одинаковой массой, их центры масс совпадают, а также совпадают матрицы тензоров инерции относительно совпадающих систем координат.

При описании движения твёрдого тела в центральном ньютоновском поле сил сформулированная Э. Дж. Раусом концепция равномоментных систем также остаётся справедливой, а получающиеся при этом результаты будут точными в рамках так называемого спутникового приближения, то есть случая, когда в разложении гравитационного потенциала в виде ряда по естественному малому параметру — отношению характерного размера тела к расстоянию до притягивающего центра — сохраняются слагаемые вплоть до второго порядка малости включительно. Такое приближение зачастую оказывается достаточным для предсказания и описания основных динамических эффектов, обуславливающих движение тела, см., например, [2].

Для твёрдого тела можно указать несколько равномоментных систем, и некоторые из них могут оказаться более удобными для вычислений, чем другие. Э. Дж. Раус [1] предложил строить для тел равномоментные им системы материальных точек. Так, для описания перемещения тела в пространстве требуется равномоментная система из, по меньшей мере, четырёх жёстко связанных между собой точечных масс [3–5]. В работе [3] также обсуждается вопрос о количестве свободных параметров — степеней свободы системы — в зависимости от числа точек, формирующих систему. Доказывается ряд утверждений общего характера, например, что образы равномоментных систем при аффинных преобразованиях также будут равномоментными системами, или, что аффинное преобразование преобразует данную систему в равномоментную ей систему тогда и только тогда, когда оно не меняет эллипсоид инерции. В работе [5] обсуждаются различные необходимые условия равномоментности систем точечных масс и доказывается их эквивалентность. При построении равномоментной системы для твёрдого тела ограничиваются рассмотрением системы четырёх материальных точек равных масс, имеющей шесть степеней свободы [1, 3–5], см. также [6]. Попытка систематизации таких систем точечных масс для наперёд заданного тела предпринимается в [7]. В [7] для произвольного задаваемого твёрдого тела построено семейство систем четырёх материальных точек *равных масс*, имеющее три степени свободы, и указана её явная параметризация. Системы будут равномоменты телу при любых значениях параметров семейства. Трём степеням свободы отвечает три поворота порождающего семейство правильного тетраэдра около его барицентра.

Цель настоящего исследования — обобщить результаты работ [6, 7]. Будем рассматривать системы из пяти материальных точек *различных масс*, четыре из которых образуют невырожденный тетраэдр, а пятая точка помещается в его центре масс. Такая система масс имеет семь степеней свободы. Ставится задача выполнить параметризацию такого семейства явно.

Принимая во внимание, что у твёрдого тела и равномоментной ему системы совпадают моменты распределения масс вплоть до второго порядка, имеющие место степени свободы позволяют ставить задачу нахождения такой системы, которая бы наилучшим образом приближала моменты распределения масс старших порядков.

§ 1. Постановка задачи

Э. Дж. Раус (см. [1, пример 10, с. 39; пример 3, с. 41; замечание к п. 44, с. 451]) предложил ставить в соответствие телу $\mathcal{B}$ массы $I_{000} = \iiint_{\mathcal{B}} dm$ равномоментную ему систему из четырёх материальных точек с равными массами, каждая из которых равна $3I_{000}/20n^2$, $n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, и пятой точки (вводимой для дополнения массы всей системы точек до массы тела I_{000}), помещённой в центре масс тела.

Обобщим постановку задачи и будем полагать массы всех пяти точек различными: m_i, $i = 1, \ldots, 5$. Система масс будет динамически эквивалентна телу $\mathcal{B}$ при выполнении условия

$$\mathbf{SMS}^T = \mathbf{\Sigma}, \tag{1.1}$$

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} I_{000} - m_5 & \mathbf{R}^T \\ \mathbf{R} & \mathbf{I} \end{pmatrix},$$

где $\mathbf{q}_i = (x_i, y_i, z_i)^T$ — радиус-вектор точечной массы m_i, $i = 1, 2, 3, 4$, в системе отсчёта $Oxyz$, жёстко связанной с телом $\mathcal{B}$, $\mathbf{q} = (x, y, z)^T$ — радиус-вектор элементарной массы dm тела $\mathcal{B}$, $\mathbf{R} = \iiint_{\mathcal{B}} \mathbf{q}\, dm$ — вектор-столбец, характеризующий положение центра масс тела $\mathcal{B}$, $\mathbf{I} = \iiint_{\mathcal{B}} \mathbf{q} \otimes \mathbf{q}\, dm$ — 3×3-матрица моментов распределения масс второго порядка, $\otimes$ — символ диадного произведения.

Выражение (1.1) — это система из десяти алгебраических уравнений на семнадцать неизвестных $\{x_i, y_i, z_i, m_i\}$, $i = 1, 2, 3, 4$, и m_5. Каждому её решению отвечает система пяти точечных масс, равномоментная телу $\mathcal{B}$. Наличие свободных неизвестных (семи) позволяет ставить задачу поиска такого решения системы (1.1), чтобы у тела $\mathcal{B}$ и равномоментной ему системы точечных масс были бы наиболее близкие моменты инерции третьего порядка.

§ 2. Частные решения системы (1.1)

Построение общего решения начнём с рассмотрения частных решений. Ограничимся рассмотрением четырёх материальных точек равных масс, то есть будем полагать

$m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = I_{000}/4$, $m_5 = 0$. С телом $\mathcal{B}$ жёстко свяжем систему отсчета $Oxyz$, начало которой совпадает с центром масс тела, а оси сонаправлены с его главными осями инерции. Это приводит к тождествам $I_{100} = I_{010} = I_{001} \equiv 0$, $I_{110} = I_{101} = I_{011} \equiv 0$, а матрица $\mathbf{I}$ принимает диагональный вид $\mathbf{I} = \mathrm{diag}\,(I_{200}, I_{020}, I_{002})$.

2.1. Простое частное решение

Под простым частным решением системы (1.1) будем понимать решение системы, не имеющее каких-либо свободных неизвестных. Рассмотрим, например, правильный тетраэдр с ребром $2\sqrt{2}$, барицентр которого совпадает с началом отсчета — точкой O, а одна из его вершин располагается на оси Oz. Умножив каждую компоненту радиусов-векторов на множители $\rho_x = \sqrt{I_{200}/I_{000}}$, $\rho_y = \sqrt{I_{020}/I_{000}}$, $\rho_z = \sqrt{I_{002}/I_{000}}$, соответственно, приходим к выражениям:

$$\begin{array}{llll}
P_1: & P_2: & P_3: & P_4: \\
x_1 = 0, & x_2 = 2\dfrac{\sqrt{6}}{3}\rho_x, & x_3 = -\dfrac{\sqrt{6}}{3}\rho_x, & x_4 = -\dfrac{\sqrt{6}}{3}\rho_x, \\
y_1 = 0, & y_2 = 0, & y_3 = \sqrt{2}\rho_y, & y_4 = -\sqrt{2}\rho_y, \\
z_1 = \pm\sqrt{3}\rho_z, & z_2 = \mp\dfrac{\sqrt{3}}{3}\rho_z, & z_3 = \mp\dfrac{\sqrt{3}}{3}\rho_z, & z_4 = \mp\dfrac{\sqrt{3}}{3}\rho_z.
\end{array}$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что совокупность $\mathcal{T}_\pm$ точек с массами $I_{000}/4$, располагающихся в вершинах построенного тетраэдра, является равномоментной системой для тела $\mathcal{B}$.

2.2. Двухпараметрическое семейство частных решений

Решение из предыдущего пункта допускает следующее обобщение. Будем искать четыре материальных точки P_1, P_2, P_3, P_4 с массами $m_1 = \mu I_{000}$, $\mu \in (0;1)$, $m_2 = m_3 = m_4 = I_{000}(1-\mu)/3$, координаты которых

$$P_1\colon \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z_1 \end{pmatrix}, \quad P_2\colon \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}, \quad P_3\colon \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}, \quad P_4\colon \begin{pmatrix} x_4 \\ y_4 \\ z_4 \end{pmatrix}$$

удовлетворяют системе из девяти уравнений

$$\begin{cases}
x_2 + x_3 + x_4 = 0, & y_2 + y_3 + y_4 = 0, & \mu z_1 + \dfrac{1-\mu}{3}(z_2 + z_3 + z_4) = 0, \\
x_2 y_2 + x_3 y_3 + x_4 y_4 = 0, & x_2 z_2 + x_3 z_3 + x_4 z_4 = 0, & y_2 z_2 + y_3 z_3 + y_4 z_4 = 0, \\
x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = \dfrac{3}{1-\mu}\rho_x^2, & y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 = \dfrac{3}{1-\mu}\rho_y^2, & \mu z_1^2 + \dfrac{1-\mu}{3}\left(z_2^2 + z_3^2 + z_4^2\right) = \rho_z^2.
\end{cases}$$

Эта система обладает двумя двухпараметрическими семействами решений, отличающихся друг от друга противоположным расположением точек относительно плоскости Oxy и зависящих от параметров μ и $\alpha \in [0; 2\pi)$:

$$\begin{array}{llll}
P_1: & P_2: & P_3: & P_4: \\
m_1 = \mu I_{000}, & m_2 = \dfrac{1-\mu}{3} I_{000}, & m_3 = \dfrac{1-\mu}{3} I_{000}, & m_4 = \dfrac{1-\mu}{3} I_{000}, \\[2ex]
x_1 = 0, & x_2 = \Theta_2 \cos\alpha\, \rho_x, & x_3 = \Theta_2 \cos\alpha_+\, \rho_x, & x_4 = \Theta_2 \cos\alpha_-\, \rho_x, \\[2ex]
y_1 = 0, & y_2 = \Theta_2 \sin\alpha\, \rho_y, & y_3 = \Theta_2 \sin\alpha_+\, \rho_y, & y_4 = \Theta_2 \sin\alpha_-\, \rho_y, \\[2ex]
z_1 = \pm\Theta_1 \rho_z, & z_2 = \mp\Theta_1^{-1}\rho_z, & z_3 = \mp\Theta_1^{-1}\rho_z, & z_4 = \mp\Theta_1^{-1}\rho_z,
\end{array}$$

где $\Theta_1 = \sqrt{1/\mu - 1}$, $\Theta_2 = \sqrt{2/(1-\mu)}$, $\alpha_\pm = \alpha \pm 2\pi/3$.

Рассмотрим семейство решений $\mathcal{T}_{\alpha,\mu}$, для которого точка P_1 располагается на положительной полуоси Oz. Для другого семейства утверждения будут аналогичны «с точностью до знака».

Точки P_k, $k = 2, 3, 4$, равноудалены от главной центральной плоскости инерции Oxy, располагаются в плоскости Π: $z = -\rho_z/\Theta_1\,(< 0)$. Чем больше масса m_1, сосредоточенная в точке P_1, тем точка P_1 ближе к плоскости Oxy, а точки P_k, $k = 2, 3, 4$, в свою очередь, — дальше от плоскости Oxy. Для точек P_k, $k = 2, 3, 4$, справедливо следующее

Предложение 2.1. *Точки P_2, P_3 и P_4 для любого значения угла α принадлежат эллипсу*

$$\frac{x^2}{(\Theta_2\rho_x)^2} + \frac{y^2}{(\Theta_2\rho_y)^2} = 1,$$

расположенному в плоскости Π.

Доказательство. Прямая проверка позволяет убедиться в справедливости утверждения. □

2.3. Связь между решениями

Рассмотренные системы $\mathcal{T}_\pm$ и $\mathcal{T}_{\alpha,\mu}$ обладают одним общим важным свойством. Чтобы продемонстрировать его, рассмотрим систему (1.1) для каждого из этих решений.

Для $\mathcal{T}_\pm$ имеем:

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_{\mathcal{T}_\pm} = \mathbf{K}\mathbf{R}_{\mathcal{T}_\pm},$$

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}_{\mathcal{T}_\pm} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2\sqrt{6}/3 & -\sqrt{6}/3 & -\sqrt{6}/3 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \pm\sqrt{3} & \mp\sqrt{3}/3 & \mp\sqrt{3}/3 & \mp\sqrt{3}/3 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_{\mathcal{T}_\pm} = \frac{I_{000}}{4}\mathbf{E}, \quad \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для $\mathcal{T}_{\alpha,\mu}$ имеем:

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_{\mathcal{T}_{\alpha,\mu}} = \mathbf{K}\mathbf{R}_{\mathcal{T}_{\alpha,\mu}},$$

$$\mathbf{R}_{\mathcal{T}_{\alpha,\mu}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \Theta_2\cos\alpha & \Theta_2\cos\alpha_+ & \Theta_2\cos\alpha_- \\ 0 & \Theta_2\sin\alpha & \Theta_2\sin\alpha_+ & \Theta_2\sin\alpha_- \\ \pm\Theta_1 & \mp\Theta_1^{-1} & \mp\Theta_1^{-1} & \mp\Theta_1^{-1} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_{\mathcal{T}_{\alpha,\mu}} = I_{000}\mathbf{E}_1, \quad \mathbf{E}_1 = \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1-\mu)/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\mu)/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-\mu)/3 \end{pmatrix}.$$

Левые части выражения (1.1) для $\mathcal{T}_\pm$ и $\mathcal{T}_{\alpha,\mu}$ содержат произведения вида

$$\mathbf{R}_{\mathcal{T}_\pm}\mathbf{M}_{\mathcal{T}_\pm}\mathbf{R}^T_{\mathcal{T}_\pm}, \quad \mathbf{R}_{\mathcal{T}_{\alpha,\mu}}\mathbf{M}_{\mathcal{T}_{\alpha,\mu}}\mathbf{R}^T_{\mathcal{T}_{\alpha,\mu}},$$

каждое из которых тождественно равно матрице $I_{000}\mathbf{E}$.

Заметим, что для любой ортогональной матрицы четвертого порядка $\mathbf{Q}$ верно тождество

$$\mathbf{Q}\mathbf{R}_{\mathcal{T}_\pm}\mathbf{M}_{\mathcal{T}_\pm}\mathbf{R}^T_{\mathcal{T}_\pm}\mathbf{Q}^T = I_{000}\mathbf{E}.$$

Представив

$$\mathbf{R}_{\mathcal{T}_{\alpha,\mu}}\mathbf{M}_{\mathcal{T}_{\alpha,\mu}}\mathbf{R}^T_{\mathcal{T}_{\alpha,\mu}} = \mathbf{R}_{\mathcal{T}_{\alpha,\mu}}\boldsymbol{\chi}_\mu\mathbf{M}_{\mathcal{T}_\pm}{\boldsymbol{\chi}_\mu}^T\mathbf{R}^T_{\mathcal{T}_{\alpha,\mu}},$$

решение $\mathcal{T}_\pm$ переходит в $\mathcal{T}_{\alpha,\mu}$, если существует матрица $\mathbf{Q}^\pm_{\alpha,\mu}$ такая, что

$$\mathbf{Q}^\pm_{\alpha,\mu}\mathbf{R}_{\mathcal{T}_\pm} = \mathbf{R}_{\mathcal{T}_{\alpha,\mu}}\boldsymbol{\chi}_\mu.$$

В явном виде матрица $\mathbf{Q}^\pm_{\alpha,\mu}$ записывается как

$$\mathbf{Q}^\pm_{\alpha,\mu} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}\sqrt{1-\mu}+\sqrt{\mu}\right) & 0 & 0 & \mp\frac{1}{2}\left(\sqrt{1-\mu}-\sqrt{3}\sqrt{\mu}\right) \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ \frac{1}{2}\left(\sqrt{1-\mu}-\sqrt{3}\sqrt{\mu}\right) & 0 & 0 & \pm\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}\sqrt{1-\mu}+\sqrt{\mu}\right) \end{pmatrix}.$$

Ортогональность матрицы $\mathbf{Q}^\pm_{\alpha,\mu}$ проверяется непосредственной проверкой равенств

$$\mathbf{Q}^\pm_{\alpha,\mu}\cdot{\mathbf{Q}^\pm_{\alpha,\mu}}^T = \mathbf{E}, \quad {\mathbf{Q}^\pm_{\alpha,\mu}}^T\cdot\mathbf{Q}^\pm_{\alpha,\mu} = \mathbf{E}.$$

Тем самым, матрица $\mathbf{Q}^\pm_{\alpha,\mu}$ реализует связь между частными решениями $\mathcal{T}_\pm$ и $\mathcal{T}_{\alpha,\mu}$.

§ 3. Общее решение системы (1.1)

Любое решение, как $\mathcal{T}_+$, так и $\mathcal{T}_-$, можно считать порождающим, а применение ортогональной матрицы $\mathbf{Q}$ приводит к новому решению, которому отвечает новая система масс, равномоментная телу $\mathcal{B}$. Пусть $\mathcal{T} = \mathcal{T}_+$, тогда условие

$$\mathbf{K}\mathbf{Q}\mathbf{R}_{\mathcal{T}}\mathbf{M}_{\mathcal{T}}\mathbf{R}^T_{\mathcal{T}}\mathbf{Q}^T\mathbf{K}^T = \begin{pmatrix} I_{000}-m_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{200} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{020} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{002} \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

описывает все динамически эквивалентные телу $\mathcal{B}$ системы из четырёх точечных масс и пятой материальной точки, расположенной в центре масс тела.

В общем случае элементы первой строки матрицы $\mathbf{Q}\mathbf{R}_{\mathcal{T}}$ будут отличаться от единиц. Пусть

$$\mathbf{Q}\mathbf{R}_{\mathcal{T}} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{pmatrix}.$$

Чтобы сохранить структуру матрицы и первую строку из единиц, представим произведение $\mathbf{Q}\mathbf{R}_{\mathcal{T}}$ в виде $\mathbf{Q}\,\mathbf{R}_{\mathcal{T}} = \boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\chi}$, где

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ b_1/a_1 & b_2/a_2 & b_3/a_3 & b_4/a_4 \\ c_1/a_1 & c_2/a_2 & c_3/a_3 & c_4/a_4 \\ d_1/a_1 & d_2/a_2 & d_3/a_3 & d_4/a_4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\chi} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \end{pmatrix}.$$

Решению системы (1.1) с

$$\mathbf{R} = \mathbf{K}\boldsymbol{\Omega}, \quad \mathbf{M} = \boldsymbol{\chi}\,\mathbf{M}_{\mathcal{T}}\,\boldsymbol{\chi}^T$$

будет отвечать совокупность четырёх материальных точек с массами

$$m_i = \frac{1}{4} a_i^2 I_{000}, \quad i = 1, 2, 3, 4, \tag{3.2}$$

радиусы-векторы которых имеют вид

$$\left(\frac{b_i}{a_i}\rho_x, \frac{c_i}{a_i}\rho_y, \frac{d_i}{a_i}\rho_z\right)^T, \tag{3.3}$$

где величины a_i, b_i, c_i и d_i зависят от матрицы $\mathbf{Q}$, и пятой точки массы m_5, помещённой в центре масс тела.

Заметим, что если массы m_1, m_2, m_3 и m_4 всегда величины положительные, то на массу m_5 никакие ограничения не налагаются — она может принимать нулевые и даже отрицательные значения.

Как известно, ортогональная матрица четвёртого порядка определяется шестью независимыми величинами — на шестнадцать компонент матрицы накладываются десять соотношений, определяющие её свойства ортогональности. Принимая во внимание независимый параметр m_5, можно говорить, что построено семипараметрическое семейство решений системы (3.1), равно как и системы (1.1), учитывающее все семь свободных параметров, имеющихся в системе (1.1), то есть построено общее решение системы (1.1).

§ 4. Моделирование гравитационного потенциала малых небесных тел

Пусть $\mathcal{B}$ — малое небесное тело. В современной астрономии самой распространенной моделью формы таких малых тел на сегодняшний день является многогранник с треугольными плоскими гранями, задаваемый упорядоченным списком вершин и набором граней, состоящих из номеров образующих их вершин. Для тел с триангулированной поверхностью в [8] (см. также [9–11]) предложен подход к вычислению моментов распределения массы различных порядков.

Наличие свободных параметров в построенном семипараметрическом семействе (3.2), (3.3) позволяет ставить задачу поиска такого решения, чтобы у тела $\mathcal{B}$ и равномоментной ему системы точечных масс были бы наиболее близкие моменты инерции третьего порядка. В качестве оценки совпадения моментов примем среднеквадратичную ошибку $\mathcal{L}$ — сумму квадратов отклонений моментов системы точечных масс от соответствующих моментов тела $\mathcal{B}$. Возникает минимизационная задача в пространстве семи параметров. Задачу поиска минимума можно решать численно, например, с помощью метода роя частиц [12].

§ 5. Выводы и заключительные замечания

В работе решена задача описания всех возможных систем из четырёх материальных точек различных масс и пятой точки, вводимой для дополнения массы всей системы точек до массы тела и помещаемой в центре масс тела. Получены явные формулы, описывающие семипараматрическое семейство, каждому решению которой отвечает система масс равномоментная заданному твёрдому телу $\mathcal{B}$. Предложено использовать имеющуюся неединственность равномоментных системы для моделирования распределения масс тела $\mathcal{B}$, учитывающую моменты распределения масс третьего порядка.

В работе [7] частная реализация обсуждаемого подхода успешно применяется для построения системы *четырёх равных масс*, равномоментной заданному телу и наилучшим образом приближающей его моменты распределения масс третьего порядка. В качестве примера рассматривается ядро кометы Чурюмова–Герасименко, относящееся к контактно-двойным малым небесным объектам [13]. Для него строится равномоментная система масс, наилучшим образом приближающая моменты третьего порядка. Настоящее исследование является обобщением подхода, предложенного в [7], см. также [6].

Аналитические методы, позволяющие для однородных тел вращения строить их эквигравитирующие[1] аналоги в виде одномерных стержней как с вещественным, так и чисто мнимым распределением плотности, предложены в [14]. Подробнее о проблеме построения эквигравитирующих стержней и дисков для тел с различной симметрией в распределении масс см., например, [15, 16], а также [17]. Отметим, что метод эквигравитирующих стержней и дисков является точным, в том смысле, что гравитационный потенциал тела вращения совпадает с гравитационным потенциалом его эквигравитирующего аналога, при этом метод равномоментных систем Рауса является приближённым, и позволяет моделировать гравитационный потенциал произвольного тела потенциалом системы точечных масс лишь с определённой точностью.

Финансирование. Исследования выполнены при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках базовой части госзадания в сфере науки, проект № FFNG-2024-0004.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Раус Э. Дж. Динамика системы твердых тел. Т. 1. М.: Наука, 1983.
2. Белецкий В. В. Движение искусственного спутника относительно центра масс. М.: Наука, 1965.
3. Franklin P. Equimomental systems // Journal of Mathematics and Physics. 1929. Vol. 8. Nos. 1–4. P. 129–140. https://doi.org/10.1002/sapm192981129
4. Sommerville D. M. Y. Equimomental tetrads of a rigid body // Edinburgh Mathematical Notes. 1930. Vol. 26. P. x–xi. https://doi.org/10.1017/S1757748900002127
5. Talbot A. Equimomental systems // The Mathematical Gazette. 1952. Vol. 36. Issue 316. P. 95–110. https://doi.org/10.2307/3610326
6. Никонова Е. А. Равногранный тетраэдр и система точечных масс, равномоментная твердому телу // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2023. Т. 10. № 1. С. 155–164. https://doi.org/10.21638/spbu01.2023.113
7. Буров А. А., Никонова Е. А., Никонов В. И. О приближении поля притяжения твердого тела полем притяжения четверки материальных точек одинаковой массы // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2024. Т. 11. № 2. С. 385–394. https://doi.org/10.21638/spbu01.2024.211
8. Dobrovolskis A. R. Inertia of any polyhedron // Icarus. 1996. Vol. 124. Issue 2. P. 698–704. https://doi.org/10.1006/icar.1996.0243
9. Буров А. А., Никонов В. И. Вычисление потенциала притяжения астероида (433) Эрос с точностью до членов четвертого порядка // Доклады Российской академии наук. Физика, технические науки. 2020. Т. 492. № 1. С. 58–62. https://doi.org/10.31857/S2686740020030086
10. Burov A. A., Nikonov V. I. Inertial characteristics of higher orders and dynamics in a proximity of a small celestial body // Russian Journal of Nonlinear Dynamics. 2020. Vol. 16. No. 2. P. 259–273. https://doi.org/10.20537/nd200203
11. Буров А. А., Никонов В. И. Чувствительность значений компонент тензоров Эйлера–Пуансо к выбору триангуляционной сетки поверхности тела // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2020. Т. 60. № 10. С. 1764–1776. https://doi.org/10.31857/S0044466920100063

[1]Следуя терминологии [14]

12. Kennedy J., Eberhart R. Particle swarm optimization // Proceedings of ICNN'95 - International Conference on Neural Networks. 1995. Vol. 4. P. 1942–1948. https://doi.org/10.1109/ICNN.1995.488968
13. Lages J., Shevchenko I. I., Rollin G. Chaotic dynamics around cometary nuclei // Icarus. 2018. Vol. 307. P. 391–399. https://doi.org/10.1016/j.icarus.2017.10.035
14. Кондратьев Б. П. Теория потенциала: эквигравитирующие стержни для осесимметричных тел // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2001. Т. 41. № 2. С. 269–281. https://www.mathnet.ru/rus/zvmmf1381
15. Кондратьев Б. П. Теория потенциала. Новые методы и задачи с решениями. М.: Мир, 2007.
16. Кондратьев Б. П. Новые методы в теории потенциала // Письма в журнал Физика элементарных частиц и атомного ядра. 2011. Т. 8. № 5. С. 728–736. https://www.elibrary.ru/item.asp?id=49474809
17. Мещеряков Г. А. Задачи теории потенциала и обобщенная Земля. М.: Наука, 1991.

Поступила в редакцию 30.05.2025
Принята к публикации 15.07.2025

Никонова Екатерина Александровна, к. ф.-м. н., научный сотрудник, отдел № 24 механики, Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук (ФИЦ ИУ РАН), 119333, Россия, Москва, ул. Вавилова, 42.
E-mail: nikonova.ekaterina.a@gmail.com

Цитирование: Е. А. Никонова. О применении равномоментных систем Рауса в задаче моделирования потенциала ньютоновского тяготения // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2025. Т. 35. Вып. 3. С. 485–494.

MECHANICS 2025. Vol. 35. Issue 3. Pp. 485–494.

E. A. Nikonova

On the application of the Routh equimomental systems in the problem of modeling the potential of Newtonian gravity

Keywords: dynamically equivalent systems, equimomental systems, approximation of the Newtonian potential, Euler–Poinsot tensor, small celestial bodies.

MSC2020: 70F15

DOI: 10.35634/vm250310

For an arbitrary rigid body, a family of Routh equimomental systems is constructed, determined by seven independent parameters. Each solution from the family corresponds to a system of five point masses: four points form a non-degenerate tetrahedron, and the fifth one is located at its center of mass. The solution found is the broadest generalization of previously obtained results and contains them as particular cases. The solution does not allow further generalization without increasing the number of point masses of system. For a rigid body and its Routh equimomental system, the inertia integrals up to the second order coincide. The non-uniqueness of equal momental systems allows one to pose the problem of finding a system that best approximates the moments of mass distribution of higher orders.

Funding. The study was funded by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation in the framework of the basic part, project no. FFNG-2024-0004.

REFERENCES

1. Routh E. J. *The elementary part of a treatise on the dynamics of a system of rigid bodies. Being part I of a treatise on the whole subject. With numerous examples*, London–New York: Macmillan and Co., 1891.
   Translated under the title *Dinamika sistem tverdykh tel. Tom 1*, Moscow: Nauka, 1983.
2. Beletskii V. V. *Dvizhenie iskusstvennogo sputnika otnositel'no tsentra mass* (The motion of an artificial satellite relative to the center of mass), Moscow: Nauka, 1965.
3. Franklin P. Equimomental systems, *Journal of Mathematics and Physics*, 1929, vol. 8, nos. 1–4, pp. 129–140. https://doi.org/10.1002/sapm192981129
4. Sommerville D. M. Y. Equimomental tetrads of a rigid body, *Edinburgh Mathematical Notes*, 1930, vol. 26, pp. x–xi. https://doi.org/10.1017/S1757748900002127
5. Talbot A. Equimomental systems, *The Mathematical Gazette*, 1952, vol. 36, issue 316, pp. 95–110. https://doi.org/10.2307/3610326
6. Nikonova E. A. Isosceles tetrahedron and an equimomental system of a rigid body, *Vestnik St. Petersburg University, Mathematics*, 2023, vol. 56, no. 1, pp. 119–124. https://doi.org/10.1134/S1063454123010107
7. Burov A. A., Nikonova E. A., Nikonov V. I. On the approximation of the attraction field of a rigid body by the attraction field of four material points of the same mass, *Vestnik St. Petersburg University, Mathematics*, 2024, vol. 57, no. 2, pp. 263–269. https://doi.org/10.1134/S1063454124700110
8. Dobrovolskis A. R. Inertia of any polyhedron, *Icarus*, 1996, vol. 124, issue 2, pp. 698–704. https://doi.org/10.1006/icar.1996.0243
9. Burov A. A., Nikonov V. I. Computation of attraction potential of asteroid (433) Eros with an accuracy up to the terms of the fourth order, *Doklady Physics*, 2020, vol. 65, no. 5, pp. 164–168. https://doi.org/10.1134/S1028335820050080
10. Burov A. A., Nikonov V. I. Inertial characteristics of higher orders and dynamics in a proximity of a small celestial body, *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*, 2020, vol. 16, no. 2, pp. 259–273. https://doi.org/10.20537/nd200203
11. Burov A. A., Nikonov V. I. Sensitivity of the Euler–Poinsot tensor values to the choice of the body surface triangulation mesh, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2020, vol. 60, no. 10, pp. 1708–1720. https://doi.org/10.1134/S0965542520100061

12. Kennedy J., Eberhart R. Particle swarm optimization, *Proceedings of ICNN'95 - International Conference on Neural Networks*, 1995, vol. 4, pp. 1942–1948. https://doi.org/10.1109/ICNN.1995.488968
13. Lages J., Shevchenko I. I., Rollin G. Chaotic dynamics around cometary nuclei, *Icarus*, 2018, vol. 307, pp. 391–399. https://doi.org/10.1016/j.icarus.2017.10.035
14. Kondrat'ev B. P. Potential theory: equigravitating line segments for axisymmetric bodies, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2001, vol. 41, no. 2, pp. 247–259. https://zbmath.org/1047.31007
15. Kondrat'ev B. P. *Teoriya potentsiala. Novye metody i zadachi s resheniyami* (Theory of potential. New methods and problems with solutions), Moscow: Mir, 2007.
16. Kondratyev B. P. New methods in potential theory, *Physics of Particles and Nuclei Letters*, 2011, vol. 8, no. 5, pp. 431–435. https://doi.org/10.1134/S1547477111050128
17. Meshcheryakov G. A. *Zadachi teorii potentsiala i obobshchennaya Zemlya* (Potential theory problems and generalized Earth), Moscow: Nauka, 1991.

Received 30.05.2025
Accepted 15.07.2025

Ekaterina Aleksandrovna Nikonova, Candidate of Physics and Mathematics, Researcher, Department 24 of Mechanics, Federal Research Center "Computer Science and Control" of the Russian Academy of Sciences (FRC CSC RAS), ul. Vavilova, 42, Moscow, 119333, Russia.
E-mail: nikonova.ekaterina.a@gmail.com

Citation: E. A. Nikonova. On the application of the Routh equimomental systems in the problem of modeling the potential of Newtonian gravity, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2025, vol. 35, issue 3, pp. 485–494.