МАТЕМАТИКА 2019. Т. 29. Вып. 4. С. 501–517.

УДК 517.929

© *А. В. Егорова, Л. И. Родина*

ОБ ОПТИМАЛЬНОЙ ДОБЫЧЕ ВОЗОБНОВЛЯЕМОГО РЕСУРСА ИЗ СТРУКТУРИРОВАННОЙ ПОПУЛЯЦИИ

Рассматривается структурированная популяция, особи которой разделены на возрастные или типические группы, заданная нормальной автономной системой разностных уравнений. Для данной популяции исследуется задача оптимального сбора возобновляемого ресурса на конечном или бесконечном промежутках времени. Для популяции, эксплуатируемой на конечном промежутке, описана стратегия промысла, при которой достигается наибольшее значение общей стоимости изымаемого ресурса. Если же добыча ресурса происходит на неограниченном промежутке, то определяется средняя временная выгода и вычисляется ее значение при стационарном режиме эксплуатации; рассматриваются случаи, когда система имеет асимптотически устойчивую неподвижную точку или устойчивый цикл. Также описана стратегия промысла, которая является оптимальной среди других способов эксплуатации; показано, что при определенных условиях она является стационарной или отличается от стационарной только значением управления в начальный момент времени. Результаты работы проиллюстрированы на примере двухвозрастной эксплуатируемой популяции, в которой промысловому изъятию подвержены особи или младшей, или обеих возрастных групп.

Ключевые слова: модель популяции, подверженной промыслу, средняя временная выгода, оптимальная эксплуатация, режимы эксплуатации популяции.

DOI: 10.20537/vm190403

Введение

На протяжении многих лет человечество стремилось к рациональному использованию природных ресурсов, что потребовало разработки оптимальных стратегий их эксплуатации. Вместе с этим возникла необходимость изучения популяционной структуры эксплуатируемых видов, а именно возрастной структуры. Изменение численности популяции, выживание и рост неполовозрелых особей, переходы в старшие возрастные классы — эти и другие характеристики являются сложными процессами, на которые промысел оказывает различное влияние. Методы математического моделирования позволили разработать различные стратегии промысла и изучить их последствия для развития всей популяции.

Одной из первых классических работ по исследованию динамики популяции, по-видимому, является работа Лесли 1945 г. [1]. Им предложена матричная модель развития популяции, разделенной на конечное число возрастных классов одинаковой длительности, равной шагу модели по времени. При изучении данной модели выяснилось, что она не всегда удобна и применима к реальным условиям из-за крайней жесткости своих положений. В 1965 г. Лефкович предложил обобщение модели Лесли, в которой использовались последовательные стадии развития организма. Обобщенная модель вызвала широкий математический интерес к исследованию матричных моделей динамики популяции с дискретной стадийной структурой и их свойств (см. [2]).

В последние годы появилось множество работ, посвященных аналитическому и численному исследованию режимов динамики двухвозрастной популяции, в которых показано, что в популяциях такого типа могут наблюдаться циклические и хаотические режимы. Во многих работах (см., например, [3,4]) исследуется развитие различных структурированных популяций при оптимальном промысле с постоянной долей изъятия. Авторы показывают, что для некоторых двухвозрастных популяций (например, для отдельных видов рыб, насекомых, двух- и трехлетних растений) оптимальным является изъятие фиксированной доли от численности особей только одной из возрастных групп; при одновременной эксплуатации обоих возрастов максимум дохода не достигается. В работе [5] исследуются популяции, описанные моделью Риккера, в предположении, что ограничивающие популяционный рост параметры среды изменяются циклически; показано, что оптимальная стратегия эксплуатации предусматривает чередования лет интенсивного промысла с годами его практически полного отсутствия. В [6] показано, что эксплуатируемая популяция обладает свойством мультирежимности; это означает, что при одних и тех же значениях параметров системы наблюдаются различные динамические режимы.

Ряд работ посвящен исследованию проблемы сбора распределенного ресурса. Так, в [7] рассматривается периодический импульсный сбор возобновляемого ресурса с логистическим законом роста. Доказано, что для заданного усилия сбора существует стационарное распределение в области ресурса, доставляющее на бесконечном горизонте максимальную эффективность сбора. В [8] исследуются условия оптимальности в задаче циклического сбора ресурса, распределенного на окружности с некоторой заданной плотностью. Особый интерес вызывают задачи максимизации чистого дисконтированного дохода от промысла популяции. В работе [9] показано, что в модели популяции, учитывающей возрастную структуру, оптимальный сбор является периодическим и периодичность обусловлена селективностью уборки урожая.

Современное состояние работ по вопросам оптимальной добычи ресурса для различных моделей эксплуатируемых популяций, более подробно описано в [6, 10]. В [11, 12] приведен обзор литературы, посвященной задачам оптимального сбора ресурса в вероятностных моделях.

В нашей работе исследуются модели динамики неоднородной эксплуатируемой популяции, состоящей из особей отдельных видов, либо разделенной на возрастные группы. В частности, можно предполагать, что мы рассматриваем добычу n различных видов рыб, между которыми существуют отношения конкуренции за пищу или места обитания, или отношения хищник–жертва. Рассматриваются вопросы оптимального сбора ресурса для данной популяции на конечном и бесконечном промежутках времени при различных ограничениях на условия промысла. Основная задача заключается в вычислении средней временной выгоды от извлечения возобновляемого ресурса и построения управления, при котором данная функция является максимальной. Результаты работы проиллюстрированы на примере двухвозрастной эксплуатируемой популяции, в которой промысловому изъятию подвержены особи или младшей, или обеих возрастных групп.

§ 1. Определение средней временной выгоды для моделей популяций, заданных нормальной автономной системой разностных уравнений

Приведем общее описание данных моделей. Предполагаем, что исследуемая популяция является неоднородной, то есть либо состоит из отдельных видов $x_1, \ldots, x_n$, либо разделена на $n \geqslant 2$ возрастных групп. Обозначим через $x_i(k)$, $i = 1, \ldots, n$, количество ресурса каждого из n видов или возрастных классов в момент времени $k = 0, 1, 2, \ldots$. Пусть развитие популяции при отсутствии эксплуатации описывается системой разностных уравнений

$$x(k+1) = F\big(x(k)\big), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{1.1}$$

где $x(k) = \mathrm{col}\big(x_1(k), \ldots, x_n(k)\big)$, то есть $x(k)$ — вектор-столбец с координатами $x_1(k), \ldots, x_n(k)$, $F(x) = \mathrm{col}\big(f_1(x), \ldots, f_n(x)\big)$. Предполагаем, что $f_i(x)$, $i = 1, \ldots, n$, — вещественные неотрицательные функции, заданные для всех $x \in \mathbb{R}^n_+ \doteq \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 \geqslant 0, \ldots, x_n \geqslant 0\}$, удовлетворяющие условию $f_i(0) = 0$, причем $f_i \in C^2(\mathbb{R}^n_+)$, то есть обладают непрерывными производными до второго порядка включительно и матрица Якоби $\left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{i,j=1,\ldots,n}$ является невырожденной для всех $x \in \mathbb{R}^n_+$. Также будем рассматривать случай, когда функции $f_i(x)$ заданы в некоторой области $I \subset \mathbb{R}^n_+$ такой, что $0 \in I$. Здесь нужно дополнительно предполагать, что $F(I) \subseteq I$, тогда решение системы (1.1) продолжаемо.

Отметим, что в данной работе в скобках мы обозначаем временные, а нижними индексами — пространственные параметры; например, через $u_i(k)$ обозначается доля ресурса i-го вида, извлеченного из популяции в момент $k \in \{0, 1, 2, \ldots\}$. Обозначим также

$$U \doteq \bigl\{\overline{u} : \overline{u} = \bigl(u(0), u(1), \ldots, u(k), \ldots\bigr)\bigr\}, \quad \text{где} \quad u(k) = \bigl(u_1(k), \ldots, u_n(k)\bigr) \in [0, 1]^n,$$

и будем рассматривать последовательность $\overline{u} \in U$ как управление, которым можно варьировать для достижения лучшего результата сбора ресурса. Пусть теперь $x_i(k)$ — количество ресурса i-го вида в момент k до сбора, тогда оставшееся после сбора количество ресурса данного вида равно $(1 - u_i(k))x_i(k)$, $i = 1, \ldots, n$, и модель эксплуатируемой популяции имеет вид

$$x(k+1) = F\bigl((1 - u(k))x(k)\bigr), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{1.2}$$

где $(1 - u(k))x(k) \doteq \mathrm{col}\bigl((1 - u_1(k))x_1(k), \ldots, (1 - u_n(k))x_n(k)\bigr)$. Предполагаем, что решение $x(k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, системы (1.2) продолжаемо для всех $\overline{u} \in U$; для этого будем дополнительно полагать, что для функций $f_i(x)$, заданных в области $I \subset \mathbb{R}^n_+$, выполнено $\bigcup\limits_{u \in [0,1]^n} F\bigl((1 - u)I\bigr) \subseteq I$. Пусть $\widetilde{x}(k) \doteq (1 - u(k))x(k)$, тогда систему (1.2) можно записать в виде

$$\widetilde{x}(k+1) = (1 - u(k+1))F\bigl(\widetilde{x}(k)\bigr), \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Неоднородность ресурса может сказываться на стоимости добываемой продукции, поэтому будем считать, что стоимости условной единицы каждого из классов равны положительным постоянным $C_1, \ldots, C_n$. Следовательно, стоимость всей продукции в момент k равна

$$z(k) = \sum_{i=1}^{n} C_i x_i(k) u_i(k).$$

Для любых $\overline{u} \in U$ и $x(0) \in \mathbb{R}^n_+$ введем в рассмотрение функцию

$$H\bigl(\overline{u}, x(0)\bigr) \doteq \varliminf_{k \to \infty} \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} z(j) = \varliminf_{k \to \infty} \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{i=1}^{n} C_i x_i(j) u_i(j), \tag{1.3}$$

которую назовем *средней временной выгодой* от извлечения ресурса.

Под *стационарным режимом эксплуатации* популяции, заданной системой (1.2), будем понимать такой способ добычи ресурса, при котором $u(k) = u^0 = (u^0_1, \ldots, u^0_n) \in [0, 1]^n$ для всех $k = 0, 1, 2, \ldots$. При данном режиме система (1.2) имеет вид

$$x(k+1) = F\bigl((1 - u^0)x(k)\bigr), \quad k = 0, 1, 2, \ldots. \tag{1.4}$$

Обозначим через $x(k, u^0, x_0) = \mathrm{col}\bigl(x_1(k, u^0, x_0), \ldots, x_n(k, u^0, x_0)\bigr)$ решение системы (1.4), удовлетворяющее начальному условию $x(0) = x_0$. Пусть $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$. Напомним (см. [13, с. 44]), что решение $\widehat{x}(k, u^0, x^*_0)$ системы (1.4) называется *устойчивым по Ляпунову*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что как только $\|x_0 - x^*_0\| < \delta$, то $\|x(k,u^0,x_0)-\widehat{x}(k,u^0,x_0^*)\|<\varepsilon$ для всех $k\geqslant 1$. Решение $\widehat{x}(k,u^0,x_0^*)$ называется *асимптотически устойчивым*, если оно устойчиво по Ляпунову и для любого начального условия x_0 из некоторой окрестности точки x_0^* имеет место равенство

$$\lim_{k\to\infty}\big\|x(k,u^0,x_0)-\widehat{x}(k,u^0,x_0^*)\big\|=0.$$

Если существует решение системы (1.4) вида

$$x(k)\equiv\mathrm{const}=\widehat{x}(u^0)=\mathrm{col}\big(\widehat{x}_1(u^0),\ldots,\widehat{x}_n(u^0)\big),$$

то оно называется *неподвижной точкой* данной системы; это решение удовлетворяет уравнению $\widehat{x}(u^0)=F\big((1-u^0)\widehat{x}(u^0)\big)$. Если решение $x(k)\equiv\widehat{x}(u^0)$ устойчиво (асимптотически устойчиво), то его называют устойчивой (асимптотически устойчивой) неподвижной точкой. Множество начальных точек $x(0)=x_0$, для которых

$$\lim_{k\to\infty}\big\|x(k,u^0,x_0)-\widehat{x}(u^0)\big\|=0, \tag{1.5}$$

называется *множеством притяжения точки* $\widehat{x}(u^0)$, обозначим его $A\big(\widehat{x}(u^0)\big)$.

Утверждение 1. *Предположим, что система* (1.4) *имеет асимптотически устойчивую неподвижную точку* $\widehat{x}(u^0)$. *Тогда для любой начальной точки* $x(0)\in A\big(\widehat{x}(u^0)\big)$ *выполнено равенство*

$$H\big(\overline{u}^0,x(0)\big)=\sum_{i=1}^n C_i\widehat{x}_i(u^0)u_i^0,\quad \text{где}\quad \overline{u}^0=(u^0,\ldots,u^0,\ldots). \tag{1.6}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (1.5) получаем, что $\lim\limits_{k\to\infty}x_i(k,u^0,x_0)=\widehat{x}_i(u^0)$ для всех $i=1,\ldots,n$ и любого $x(0)=x_0\in A\big(\widehat{x}(u^0)\big)$. Далее, $u(k)=u^0$, $k=0,1,2,\ldots$, поэтому

$$\lim_{k\to\infty}z(k)=\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^n C_ix_i(k)u_i(k)=\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^n C_ix_i(k,u^0,x_0)u_i^0=\sum_{i=1}^n C_i\widehat{x}_i(u^0)u_i^0.$$

Следовательно, предел $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{1}{k}\sum\limits_{j=0}^{k-1}z(j)$ существует (как предел среднего арифметического) и равен $\sum\limits_{i=1}^n C_i\widehat{x}_i(u^0)u_i^0$. Таким образом,

$$H\big(\overline{u}^0,x(0)\big)\doteq\underline{\lim}_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1}z(j)=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1}z(j)=\sum_{i=1}^n C_i\widehat{x}_i(u^0)u_i^0,$$

то есть (1.6) выполнено для любой начальной точки $x(0)=x_0\in A\big(\widehat{x}(u^0)\big)$. □

Приведем равенство для вычисления средней временной выгоды в случае, когда система (1.4) имеет устойчивый цикл длины $\ell\geqslant 2$. Обозначим k-ю итерацию функции F через F^k, то есть $F^1=F$, $F^k=F(F^{k-1})$, $k=2,3,\ldots$. Напомним, что точка $\beta^0(u^0)$ называется *периодической точкой периода* $\ell\in\mathbb{N}$ для системы (1.4), если $F^\ell(\beta^0(u^0))=\beta^0(u^0)$ и $F^m(\beta^0(u^0))\neq\beta^0(u^0)$ при $m=1,\ldots,\ell-1$. Если $\ell\geqslant 2$, то каждая из точек $\beta^m(u^0)=F^m(\beta^0(u^0))$, $m=1,\ldots,\ell-1$ также является периодической точкой периода ℓ, то есть точки $\beta^0(u^0),\ldots,\beta^{\ell-1}(u^0)$ образуют периодическую траекторию или *цикл* $B(u^0)=\big\{\beta^0(u^0),\ldots,\beta^{\ell-1}(u^0)\big\}$ *периода* ℓ. Цикл $B(u^0)$ системы (1.4) называется *притягивающим* (*устойчивым*), если существует окрестность V (область притяжения цикла) такая, что $F(V)\subset V$ и $\bigcap\limits_{k\geqslant 0}F^k(V)=B(u^0)$ (см. [14, с. 9]).

Утверждение 2. *Предположим, что система* (1.4) *имеет устойчивый цикл* $B(u^0) = \{\beta^0(u^0), \ldots, \beta^{\ell-1}(u^0)\}$ *длины* $\ell \geqslant 2$. *Тогда для любой начальной точки* $x(0)$ *из области притяжения* V *данного цикла выполнено равенство*

$$H\big(\overline{u}^0, x(0)\big) = \frac{1}{\ell} \sum_{i=1}^{n} C_i\big(\beta_i^0(u^0) + \ldots + \beta_i^{\ell-1}(u^0)\big)u_i^0. \tag{1.7}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как система (1.4) обладает устойчивым циклом $B(u^0)$, то для каждой начальной точки $x(0) = x_0 \in V$ траектория решения $x(k, u^0, x_0)$ данной системы распадается на ℓ последовательностей, сходящихся к точкам $\beta^0(u^0), \ldots, \beta^{\ell-1}(u^0)$ соответственно (см. [14, с. 9]). Это означает, что

$$\lim_{p\to\infty} x_i(p\ell + m, u^0, x_0) = \beta_i^m(u^0), \quad m = 0, 1, \ldots, \ell - 1, \;\; i = 1, \ldots, n.$$

Следовательно, так как $u(k) = u^0$ для всех $k = 0, 1, 2, \ldots$, то

$$\lim_{p\to\infty} z(p\ell + m) = \lim_{p\to\infty} \sum_{i=1}^{n} C_i x_i(p\ell + m, u^0, x_0) u_i(p\ell + m) = \sum_{i=1}^{n} C_i \beta_i^m(u^0) u_i^0.$$

Далее, $\lim\limits_{p\to\infty} \sum\limits_{m=0}^{\ell-1} z(p\ell + m) = \sum\limits_{m=0}^{\ell-1} \sum\limits_{i=1}^{n} C_i \beta_i^m(u^0) u_i^0 = \sum\limits_{i=1}^{n} C_i\big(\beta_i^0(u^0) + \ldots + \beta_i^{\ell-1}(u^0)\big)u_i^0$ и

$$\begin{aligned} H\big(\overline{u}^0, x(0)\big) &\doteq \varliminf_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} z(j) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} z(j) = \lim_{p\to\infty} \frac{1}{p\ell} \sum_{j=0}^{p\ell-1} z(j) = \\ &= \frac{1}{\ell} \lim_{p\to\infty} \frac{1}{p} \sum_{q=0}^{p-1} \sum_{m=0}^{\ell-1} z(q\ell + m) = \frac{1}{\ell} \sum_{i=1}^{n} C_i\big(\beta_i^0(u^0) + \ldots + \beta_i^{\ell-1}(u^0)\big)u_i^0. \end{aligned}$$

Таким образом, равенство (1.7) выполнено для любой точки $x(0) = x_0 \in V$. □

§ 2. Оптимальный режим эксплуатации популяции на конечном промежутке времени

Пусть $\overline{u}(k) \doteq (u(0), \ldots, u(k-1))$, где $u(j) = (u_1(j), \ldots, u_n(j)) \in [0, 1]^n$, $j = 0, 1, \ldots, k - 1$. Для любого $k = 1, 2, \ldots$ рассмотрим функцию

$$h\big(\overline{u}(k), x(0)\big) \doteq \sum_{j=0}^{k-1} z(j) = \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{i=1}^{n} C_i x_i(j) u_i(j), \tag{2.1}$$

равную стоимости ресурса, извлеченного за k изъятий.

Теорема 1. *Пусть функция* $D(x) \doteq \sum\limits_{i=1}^{n} C_i\big(f_i(x) - x_i\big)$ *достигает максимального значения в единственной точке* $x^* \in \mathbb{R}_+^n$ *и* $x_i^* \leqslant f_i(x^*) \neq 0$ *для любого* $i = 1, \ldots, n$. *Тогда для любого* $x(0) \in \mathbb{R}_+^n$ *такого, что* $x_i(0) \geqslant x_i^*$, $i = 1, \ldots, n$, *функция* $h\big(\overline{u}(k), x(0)\big)$ *достигает наибольшего значения*

$$h\big(\overline{u}^*(k), x(0)\big) = (k - 1) \cdot D(x^*) + \sum_{i=1}^{n} C_i x_i(0) \tag{2.2}$$

на множестве $[0,1]^{kn}$ *при следующем режиме эксплуатации:*

(1) *если* $k=1$, *то* $u^*(0)=(1,\dots,1)$;

(2) *если* $k=2$, *то* $\overline{u}^*(2)=\big(u^*(0),u^*(1)\big)$, $u^*(0)=\Big(1-\dfrac{x_1^*}{x_1(0)},\dots,1-\dfrac{x_n^*}{x_n(0)}\Big)$, $u^*(1)=(1,\dots,1)$;

(3) *если* $k\geqslant 3$, *то* $\overline{u}^*(k)=\big(u^*(0),\dots,u^*(k-1)\big)$, *где* $u^*(0)=\Big(1-\dfrac{x_1^*}{x_1(0)},\dots,1-\dfrac{x_n^*}{x_n(0)}\Big)$; $u^*(j)=\Big(1-\dfrac{x_1^*}{f_1(x^*)},\dots,1-\dfrac{x_n^*}{f_n(x^*)}\Big)$ *при* $j=1,\dots,k-2$; $u^*(k-1)=(1,\dots,1)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $k=1$, то максимальное значение функции

$$h\big(\overline{u}(1),x(0)\big)=\sum_{i=1}^{n}C_ix_i(0)u_i(0)$$

достигается при $u^*(0)=(1,\dots,1)$ и равно $h\big(\overline{u}^*(1),x(0)\big)=\sum\limits_{i=1}^{n}C_ix_i(0)$.

Пусть $k\geqslant 2$. Рассмотрим режим эксплуатации $\overline{u}^*(k)=\big(u^*(0),\dots,u^*(k-1)\big)$, определенный в условии теоремы. Найдем

$$x(1)=F\big((1-u^*(0))x(0)\big)=F\Big(\frac{x_1^*}{x_1(0)}x_1(0),\dots,\frac{x_n^*}{x_n(0)}x_n(0)\Big)=F(x^*). \tag{2.3}$$

Если $k\geqslant 3$, то

$$x(j)=F\big((1-u^*(j-1))x(j-1)\big)=F\Big(\frac{x_1^*}{f_1(x^*)}f_1(x^*),\dots,\frac{x_n^*}{f_n(x^*)}f_n(x^*)\Big)=F(x^*),\quad j=2,\dots,k-1. \tag{2.4}$$

Подставляя данные значения $x(1),\dots,x(k-1)$ и $\overline{u}^*(k)$ в (2.1), получаем равенство (2.2).

Зафиксируем $x(0)\in\mathbb{R}_+^n$ такое, что $x_i(0)\geqslant x_i^*$, $i=1,\dots,n$. Докажем, что

$$h\big(\overline{u}(k),x(0)\big)\leqslant h\big(\overline{u}^*(k),x(0)\big)=(k-1)\cdot D(x^*)+\sum_{i=1}^{n}C_ix_i(0) \tag{2.5}$$

для любых $\overline{u}(k)\in[0,1]^{kn}$. Отметим, что $D(x)$ достигает максимального значения в точке $x^*\in\mathbb{R}_+^n$, поэтому для всех $\Delta x=(\Delta x_1,\dots,\Delta x_n)\in\mathbb{R}^n$ (таких, что $x^*+\Delta x\in\mathbb{R}_+^n$) выполнено неравенство $D(x^*+\Delta x)\leqslant D(x^*)$, которое равносильно неравенству

$$\sum_{i=1}^{n}C_i\big(f_i(x^*+\Delta x)-x_i^*-\Delta x_i\big)\leqslant\sum_{i=1}^{n}C_i\big(f_i(x^*)-x_i^*\big).$$

Из последнего неравенства получаем

$$\sum_{i=1}^{n}C_if_i(x^*+\Delta x)\leqslant\sum_{i=1}^{n}C_i\big(f_i(x^*)+\Delta x_i\big). \tag{2.6}$$

Представим $u(j)\in[0,1]^n$ в виде $u(j)=u^*(j)+\Delta u(j)$, где $\Delta u(j)=\big(\Delta u_1(j),\dots,\Delta u_n(j)\big)$, $j=0,\dots,k-1$. Найдем

$$\begin{aligned}h\big(\overline{u}(k),x(0)\big)&\doteq\sum_{j=0}^{k-1}\sum_{i=1}^{n}C_ix_i(j)u_i(j)=\sum_{j=0}^{k-1}\sum_{i=1}^{n}C_ix_i(j)\big(u_i^*(j)+\Delta u_i(j)\big)=\\&=\sum_{j=0}^{k-2}\sum_{i=1}^{n}C_ix_i(j)(u_i^*(j)+\Delta u_i(j))+\sum_{i=1}^{n}C_ix_i(k-1)(1+\Delta u_i(k-1)).\end{aligned} \tag{2.7}$$

Оценим последнее слагаемое в (2.7). Так как $u^*(k-1) = (1, \dots, 1)$, то $\Delta u_i(k-1) \leqslant 0$ для всех $i = 1, \dots, n$ и

$$\sum_{i=1}^{n} C_i x_i(k-1)(1 + \Delta u_i(k-1)) \leqslant \sum_{i=1}^{n} C_i x_i(k-1). \tag{2.8}$$

Пусть $k = 2$, тогда из (2.8) получаем

$$\begin{aligned} h\big(\overline{u}(2), x(0)\big) &\doteq \sum_{j=0}^{1} \sum_{i=1}^{n} C_i x_i(j) u_i(j) = \sum_{i=1}^{n} C_i x_i(0)(u_i^*(0) + \Delta u_i(0)) + \\ &+ \sum_{i=1}^{n} C_i x_i(1)(1 + \Delta u_i(1)) \leqslant \sum_{i=1}^{n} C_i x_i(0)\Big(1 - \frac{x_i^*}{x_i(0)} + \Delta u_i(0)\Big) + \sum_{i=1}^{n} C_i x_i(1) = \\ &= \sum_{i=1}^{n} C_i x_i(0) - \sum_{i=1}^{n} C_i x_i^* + \sum_{i=1}^{n} C_i \Delta u_i(0) x_i(0) + \sum_{i=1}^{n} C_i x_i(1). \end{aligned} \tag{2.9}$$

Найдем

$$\begin{aligned} x(1) &= F\big((1 - u(0))x(0)\big) = F\big((1 - u_1(0))x_1(0), \dots, (1 - u_n(0))x_n(0)\big) = \\ &= F\Big(\Big(\frac{x_1^*}{x_1(0)} - \Delta u_1(0)\Big)x_1(0), \dots, \Big(\frac{x_n^*}{x_n(0)} - \Delta u_n(0)\Big)x_n(0)\Big) = \\ &= F\big(x_1^* - \Delta u_1(0)x_1(0), \dots, x_n^* - \Delta u_n(0)x_n(0)\big) = F(x^* - \Delta u(0)x(0)). \end{aligned}$$

Тогда из (2.6) следует

$$\sum_{i=1}^{n} C_i x_i(1) = \sum_{i=1}^{n} C_i f_i(x^* - \Delta u(0)x(0)) \leqslant \sum_{i=1}^{n} C_i\big(f_i(x^*) - \Delta u_i(0)x_i(0)\big). \tag{2.10}$$

Таким образом, из (2.9) и (2.10) имеем

$$\begin{aligned} h\big(\overline{u}(2), x(0)\big) &\leqslant \sum_{i=1}^{n} C_i x_i(0) - \sum_{i=1}^{n} C_i x_i^* + \sum_{i=1}^{n} C_i \Delta u_i(0) x_i(0) + \sum_{i=1}^{n} C_i\big(f_i(x^*) - \Delta u_i(0)x_i(0)\big) = \\ &= \sum_{i=1}^{n} C_i\big(f_i(x^*) - x_i^*\big) + \sum_{i=1}^{n} C_i x_i(0) = D(x^*) + \sum_{i=1}^{n} C_i x_i(0) = h\big(\overline{u}^*(2), x(0)\big), \end{aligned} \tag{2.11}$$

то есть (2.2) выполнено.

Далее, если $k \geqslant 3$, то

$$u(k-2) = u^*(k-2) + \Delta u(k-2) = \Big(1 - \frac{x_1^*}{f_1(x^*)} + \Delta u_1(k-2), \dots, 1 - \frac{x_n^*}{f_n(x^*)} + \Delta u_n(k-2)\Big),$$

следовательно, $x(k-1) = F\big((1 - u(k-2))x(k-2)\big) =$

$$= F\Big(\Big(\frac{x_1^*}{f_1(x^*)} - \Delta u_1(k-2)\Big)x_1(k-2), \dots, \Big(\frac{x_n^*}{f_n(x^*)} - \Delta u_n(k-2)\Big)x_n(k-2)\Big).$$

Пусть

$$\Delta x(k-2) \doteq \big(\Delta x_1(k-2), \dots, \Delta x_n(k-2)\big), \text{ где } \Delta x_i(k-2) = \Big(\frac{x_i^*}{f_i(x^*)} - \Delta u_i(k-2)\Big)x_i(k-2) - x_i^*;$$

тогда $x(k-1) = F(x^* + \Delta x(k-2))$ и $x_i(k-1) = f_i(x^* + \Delta x(k-2))$, $i = 1, \ldots, n$. Таким образом, учитывая (2.6), получаем

$$\sum_{i=1}^{n} C_i x_i(k-1) = \sum_{i=1}^{n} C_i f_i\big(x^* + \Delta x(k-2)\big) \leqslant \sum_{i=1}^{n} C_i\big(f_i(x^*) + \Delta x_i(k-2)\big) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} C_i\Big(f_i(x^*) + \Big(\frac{x_i^*}{f_i(x^*)} - \Delta u_i(k-2)\Big)x_i(k-2) - x_i^*\Big) =$$
$$= D(x^*) + \sum_{i=1}^{n} C_i\Big(\frac{x_i^*}{f_i(x^*)} - \Delta u_i(k-2)\Big)x_i(k-2).$$

Следовательно,

$$\sum_{j=0}^{k-2}\sum_{i=1}^{n} C_i x_i(j)u_i(j) + \sum_{i=1}^{n} C_i x_i(k-1) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{j=0}^{k-3}\sum_{i=1}^{n} C_i x_i(j)u_i(j) + \sum_{i=1}^{n} C_i x_i(k-2)\Big(1 - \frac{x_i^*}{f_i(x^*)} + \Delta u_i(k-2)\Big) + D(x^*) + \qquad (2.12)$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} C_i\Big(\frac{x_i^*}{f_i(x^*)} - \Delta u_i(k-2)\Big)x_i(k-2) = D(x^*) + \sum_{j=0}^{k-3}\sum_{i=1}^{n} C_i x_i(j)u_i(j) + \sum_{i=1}^{n} C_i x_i(k-2).$$

Далее, из (2.8), (2.11) и (2.12) (при $k \geqslant 3$) следуют неравенства

$$h\big(\overline{u}(k), x(0)\big) \doteq \sum_{j=0}^{k-1}\sum_{i=1}^{n} C_i x_i(j)u_i(j) \leqslant \sum_{j=0}^{k-2}\sum_{i=1}^{n} C_i x_i(j)u_i(j) + \sum_{i=1}^{n} C_i x_i(k-1) \leqslant$$
$$\leqslant D(x^*) + \sum_{j=0}^{k-3}\sum_{i=1}^{n} C_i x_i(j)u_i(j) + \sum_{i=1}^{n} C_i x_i(k-2) \leqslant$$
$$\leqslant 2D(x^*) + \sum_{j=0}^{k-4}\sum_{i=1}^{n} C_i x_i(j)u_i(j) + \sum_{i=1}^{n} C_i x_i(k-3) \leqslant \ldots \leqslant$$
$$\leqslant (k-2)D(x^*) + \sum_{i=1}^{n} C_i x_i(0)u_i(0) + \sum_{i=1}^{n} C_i x_i(1) \leqslant$$
$$\leqslant (k-1)D(x^*) + \sum_{i=1}^{n} C_i x_i(0) = h\big(\overline{u}^*(k), x(0)\big).$$

Таким образом, $h\big(\overline{u}(k), x(0)\big) \leqslant h\big(\overline{u}^*(k), x(0)\big)$ для всех $\overline{u}(k) \in [0,1]^{kn}$. □

§ 3. Оптимальный режим эксплуатации для достижения наибольшей средней временной выгоды

Напомним, что стоимость ресурса, извлеченного за k изъятий, задается равенством

$$h\big(\overline{u}(k), x(0)\big) \doteq \sum_{j=0}^{k-1} z(j) = \sum_{j=0}^{k-1}\sum_{i=1}^{n} C_i x_i(j)u_i(j),$$

где $\overline{u}(k) \doteq (u(0),\ldots,u(k-1))$, $u(j) = (u_1(j),\ldots,u_n(j)) \in [0,1]^n$, $j = 0,1,\ldots,k-1$, $k = 1,2,\ldots$. Тогда из (1.3) следует, что $H\big(\overline{u},x(0)\big) = \underline{\lim\limits_{k\to\infty}} \dfrac{1}{k}\, h\big(\overline{u}(k),x(0)\big)$.

Теорема 2. *Предположим, что функция* $D(x) \doteq \sum\limits_{i=1}^{n} C_i\big(f_i(x)-x_i\big)$ *достигает максимального значения в единственной точке* $x^* \in \mathbb{R}^n_+$ *и* $x^*_i \leqslant f_i(x^*) \neq 0$ *для любого* $i = 1,\ldots,n$. *Тогда для любого* $x(0) \in \mathbb{R}^n_+$ *такого, что* $x_i(0) \geqslant x^*_i$, $i = 1,\ldots,n$, *функция* $H\big(\overline{u},x(0)\big)$ *достигает наибольшего значения*

$$H\big(\overline{u}^*,x(0)\big) = D(x^*) = \sum_{i=1}^{n} C_i\big(f_i(x^*)-x^*_i\big)$$

на множестве U *при следующем режиме эксплуатации:* $u^*(0) = \Big(1-\dfrac{x^*_1}{x_1(0)},\ldots,1-\dfrac{x^*_n}{x_n(0)}\Big)$, $u^*(k) = \Big(1-\dfrac{x^*_1}{f_1(x^*)},\ldots,1-\dfrac{x^*_n}{f_n(x^*)}\Big)$ *при всех* $k \geqslant 1$.

Доказательство. Пусть $x(0) \in \mathbb{R}^n_+$ таково, что $x_i(0) \geqslant x^*_i$ для всех $i = 1,\ldots,n$. Разделим (2.5) на k и перейдем к пределу при $k \to \infty$:

$$H\big(\overline{u},x(0)\big) \doteq \underline{\lim_{k\to\infty}} \frac{h\big(\overline{u}(k),x(0)\big)}{k} \leqslant \underline{\lim_{k\to\infty}} \frac{h\big(\overline{u}^*(k),x(0)\big)}{k} = \lim_{k\to\infty} \frac{h\big(\overline{u}^*(k),x(0)\big)}{k} =$$
$$= \lim_{k\to\infty} \frac{k-1}{k} D(x^*) + \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n} C_i x_i(0) = D(x^*).$$

Покажем, что при режиме эксплуатации $\overline{u}^*$, указанном в условии теоремы, выполнено равенство $H\big(\overline{u}^*,x(0)\big) = D(x^*)$. Действительно, аналогично (2.3), (2.4) получаем, что при данных управлениях $x(j) = F(x^*)$ (то есть $x_i(j) = f_i(x^*)$, $i = 1,\ldots,n$) для всех $j \geqslant 1$. Следовательно,

$$H\big(\overline{u}^*,x(0)\big) = \underline{\lim_{k\to\infty}} \frac{1}{k}\, h\big(\overline{u}^*(k),x(0)\big) =$$
$$= \underline{\lim_{k\to\infty}} \frac{1}{k}\left(\sum_{i=1}^{n} C_i x_i(0)\Big(1-\frac{x^*_i}{x_i(0)}\Big) + \sum_{j=1}^{k-1}\sum_{i=1}^{n} C_i x_i(j)\Big(1-\frac{x^*_i}{f_i(x^*)}\Big)\right) =$$
$$= 0 + \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k-1}\sum_{i=1}^{n} C_i\big(f_i(x^*)-x^*_i\big) = \lim_{k\to\infty}\frac{k-1}{k}\sum_{i=1}^{n} C_i\big(f_i(x^*)-x^*_i\big) = D(x^*).$$

Таким образом, $H\big(\overline{u},x(0)\big) \leqslant D(x^*) = H\big(\overline{u}^*,x(0)\big)$ для всех $\overline{u} \in U$. □

Теорема 3. *Предположим, что выполнены следующие условия:*

(1) *функция* $D(x) \doteq \sum\limits_{i=1}^{n} C_i\big(f_i(x)-x_i\big)$ *достигает максимального значения в единственной точке* $x^* \in \mathbb{R}^n_+$ *и* $x^*_i \leqslant f_i(x^*) \neq 0$ *для любого* $i = 1,\ldots,n$;

(2) *при* $u^0 = u^* = \Big(1-\dfrac{x^*_1}{f_1(x^*)},\ldots,1-\dfrac{x^*_n}{f_n(x^*)}\Big)$ *система* (1.4) *имеет асимптотически устойчивую неподвижную точку* $F(x^*)$.

Тогда для любого $x(0)$ *из некоторой окрестности точки* $F(x^*)$ *функция* $H\big(\overline{u},x(0)\big)$ *достигает максимального значения* $H\big(\overline{u}^*,x(0)\big) = D(x^*)$ *на множестве* U *при стационарном режиме эксплуатации* $\overline{u}^* = (u^*,\ldots,u^*,\ldots)$.

Доказательство. Рассмотрим множество $\mathfrak{M}(x^*) \doteq \big\{x \in \mathbb{R}^n_+ : x_i \geqslant x^*_i, i = 1,\ldots,n\big\}$. Из теоремы 2 следует, для каждой точки $x(0) \in \mathfrak{M}(x^*)$ наибольшее значение функции $H\big(\overline{u}, x(0)\big)$ равно $D(x^*)$; оно достигается при $u^*(0) = \Big(1 - \dfrac{x^*_1}{x_1(0)}, \ldots, 1 - \dfrac{x^*_n}{x_n(0)}\Big)$, $u^*(k) = u^*$, $k \geqslant 1$, то есть отличается от стационарного только при $k = 0$. Пусть $A\big(F(x^*)\big)$ — множество притяжения точки $F(x^*)$, тогда множество $\mathfrak{M}(x^*) \bigcap A\big(F(x^*)\big)$ непусто, так как содержит точку $F(x^*)$; кроме того, для каждой его точки $x(0) = x_0$ выполнено равенство

$$\lim_{k\to\infty} \big\|x(k, u^*, x_0) - F(x^*)\big\| = 0.$$

Покажем, что при стационарном режиме эксплуатации $\overline{u}^* = (u^*, \ldots, u^*, \ldots)$ для любой точки $x(0) = x_0 \in \mathfrak{M}(x^*) \bigcap A\big(F(x^*)\big)$ значение функции $H\big(\overline{u}^*, x(0)\big)$ также равно $D(x^*)$. Действительно, в силу утверждения 1 для любой начальной точки $x(0) \in A\big(F(x^*)\big)$ выполнено равенство

$$H\big(\overline{u}^*, x(0)\big) = \sum_{i=1}^{n} C_i f_i(x^*) u^*_i = \sum_{i=1}^{n} C_i f_i(x^*)\Big(1 - \frac{x^*_i}{f_i(x^*)}\Big) = D(x^*).$$

Далее, так как $x(0) \in \mathfrak{M}(x^*)$, из теоремы 2 следует, что данное значение является максимальным среди всех значений функции $H\big(\overline{u}, x(0)\big)$. □

§4. Об оптимальной эксплуатации однородной популяции

Рассмотрим теперь однородную популяцию, развитие которой при отсутствии эксплуатации определяется разностным уравнением

$$x(k+1) = f\big(x(k)\big), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{4.1}$$

где $x(k) \in \mathbb{R}_+$, $f \in C^2(\mathbb{R}_+)$ — вещественная неотрицательная функция, удовлетворяющая условию $f(0) = 0$. Также рассматриваем функции $f \in C^2(I)$, $I = [0, a]$, такие, что $f(0) = 0$ и $f(I) \subseteq I$. Модель эксплуатируемой однородной популяции соответственно имеет вид

$$x(k+1) = f\big((1 - u(k))x(k)\big), \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

где $x(k)$ — количество ресурса до сбора в момент k.

В случае $n = 1$ без ограничения общности можем полагать $C_1 = 1$, тогда стоимость ресурса, извлеченного за k изъятий $h\big(\overline{u}(k), x(0)\big) = \sum\limits_{j=0}^{k-1} x(j)u(j)$ и средняя временная выгода равна

$$H\big(\overline{u}, x(0)\big) = \varliminf_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} x(j)u(j).$$

Следствие 1. *Предположим, что $d(x) \doteq f(x) - x$ достигает максимального значения в единственной точке $x^* > 0$. Тогда для любого $x(0) \geqslant x^*$ функция $h\big(\overline{u}(k), x(0)\big)$ достигает наибольшего значения $h\big(\overline{u}^*(k), x(0)\big) = (k-1)\cdot d(x^*) + x(0)$ на множестве $[0,1]^k$ при следующем режиме эксплуатации:*

(1) *если $k = 1$, то $u^*(0) = 1$;*

(2) *если $k = 2$, то $u^*(0) = 1 - \dfrac{x^*}{x(0)}$, $u^*(1) = 1$;*

(3) *если $k \geqslant 3$, то $u^*(0) = 1 - \dfrac{x^*}{x(0)}$; $u^*(j) = 1 - \dfrac{x^*}{f(x^*)}$ при $j = 1, \ldots, k-2$; $u^*(k-1) = 1$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку $f(0) = 0$, то наибольшее значение функции $d(x)$ положительное, то есть $d(x^*) = f(x^*) - x^* > 0$, следовательно, $f(x^*) > x^*$. Таким образом, выполнены все условия теоремы 1 и данное утверждение является ее следствием в случае $n = 1$. □

Следствие 2. *Пусть $d(x) \doteq f(x) - x$ достигает максимального значения в единственной точке $x^* > 0$. Тогда для любого $x(0)$ из некоторой окрестности точки $f(x^*)$ максимальное значение функции $H\big(\overline{u}, x(0)\big)$ равно $H\big(\overline{u}^*, x(0)\big) = f(x^*) - x^*$ и достигается при стационарном режиме эксплуатации $u^*(k) = 1 - \dfrac{x^*}{f(x^*)}$, $k = 0, 1, \ldots$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В работе [15] показано, что в случае однородной популяции промысел с постоянной оптимальной долей изъятия $u^* = 1 - \dfrac{x^*}{f(x^*)}$ стабилизирует численность данной популяции. Это означает, что точка $f(x^*)$ является асимптотически устойчивой неподвижной точкой уравнения

$$x(k+1) = f\big((1 - u^*)x(k)\big), \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Таким образом, утверждение является следствием теоремы 3 для случая $n = 1$. □

Пример 1. Исследуем оптимальный режим эксплуатации однородной популяции, заданной уравнением

$$x(k+1) = 4(1 - u(k))x(k)\big(1 - (1 - u(k))x(k)\big), \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

где $x(0) \in [0, 1]$. Здесь $f(x) = 4x(1 - x)$; функция $d(x) = f(x) - x = 3x - 4x^2$ достигает наибольшего значения в точке $x^* = 0.375$. Согласно следствию 2, максимальное значение функции $H\big(\overline{u}, x(0)\big)$ равно $H\big(\overline{u}^*, x(0)\big) = f(x^*) - x^* = 0.5625$ и достигается при стационарном режиме эксплуатации $u^*(k) = 1 - \dfrac{x^*}{f(x^*)} = 0.6$ для всех $k = 0, 1, 2, \ldots$ и для всех $x(0)$ из некоторой окрестности точки $f(x^*) = 0.9375$.

Отметим, что то же самое значение $u^* = 0.6$ мы получим, если будем исследовать оптимальную эксплуатацию популяции только при стационарных режимах. Действительно, если $u^0 < 0.75$, то уравнение

$$x(k+1) = 4(1 - u^0)x(k)\big(1 - (1 - u^0)x(k)\big), \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

имеет две неподвижные точки — неустойчивую точку $\widehat{x} = 0$ и асимптотически устойчивую $\widehat{x}(u^0) = \dfrac{3 - 4u^0}{4(1 - u^0)^2}$, областью притяжения которой является $(0, 1]$ (если $u^0 \geqslant 0.75$, данное уравнение имеет одну асимптотически устойчивую неподвижную точку $\widehat{x} = 0$ и популяция вырождается). Следовательно, в силу утверждения 1, для любой начальной точки $x(0) \in (0, 1]$ при $u^0 < 0.75$ выполнено равенство

$$H\big(\overline{u}^0, x(0)\big) = \widehat{x}(u^0)u^0 = \frac{u^0(3 - 4u^0)}{4(1 - u^0)^2}, \quad \text{где} \quad \overline{u}^0 = (u^0, \ldots, u^0, \ldots).$$

Несложно посчитать, что данная функция достигает наибольшего значения 0.5625 при $u^0 = u^* = 0.6$. Таким образом, $H\big(\overline{u}^*, x(0)\big) = 0.5625$ для любой начальной точки $x(0) \in (0, 1]$.

§ 5. Численные примеры вычисления средней временной выгоды для модели популяции, состоящей из двух возрастных классов

Приведем примеры вычисления средней временной выгоды для системы, описывающей популяцию из двух возрастных классов, в которой промысловому изъятию подвергаются особи или младшей, или обеих возрастных групп.

Обозначим через $x_1(k)$ численность младшего возрастного класса (неполовозрелые особи) в момент k, через $x_2(k)$ — численность старшего возрастного класса, составляющего репродуктивную часть популяции в момент времени k, где k — номер периода размножения, $k = 0, 1, 2, \ldots$ и рассмотрим уравнения динамики двухвозрастной популяции, которые в отсутствии промысла имеют следующий вид (см. [3]):

$$\begin{cases} x_1(k+1) = ax_2(k) \cdot e^{-\alpha x_1(k) - \beta x_2(k)}, \\ x_2(k+1) = sx_1(k) + qx_2(k). \end{cases}$$

Здесь $a > 0$ — коэффициент рождаемости; $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ — коэффициенты, характеризующие интенсивности воздействия особей младшего и половозрелого возрастного класса на рождаемость особей; s и q — коэффициенты выживаемости особей младшей и старшей группы соответственно, $0 < s \leqslant 1$, $0 < q \leqslant 1$. В работе [3] подробно изучены режимы динамики данной популяции и показано, что изменения текущей численности могут привести к смене динамического режима.

При промысловом изъятии особей как из младшего, так и из старшего возрастных классов, уравнения динамики популяции принимают вид:

$$\begin{cases} x_1(k+1) = a(1-u_2(k))x_2(k) \cdot e^{-\alpha(1-u_1(k))x_1(k) - \beta(1-u_2(k))x_2(k)}, \\ x_2(k+1) = s(1-u_1(k))x_1(k) + q(1-u_2(k))x_2(k), \end{cases}$$

где $u_1(k)$, $u_2(k)$ — доли ежегодного промыслового изъятия для младшего и старшего возрастного класса соответственно.

Рассмотрим случай стационарного промысла $u_1(k) = u_1$, $u_2(k) = u_2$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, тогда при переходе к безразмерным переменным $s\beta x_1(k) \to x_1(k)$ и $\beta x_2(k) \to x_2(k)$ получим

$$\begin{cases} x_1(k+1) = r(1-u_2)x_2(k) \cdot e^{-\rho(1-u_1)x_1(k) - (1-u_2)x_2(k)}, \\ x_2(k+1) = (1-u_1)x_1(k) + q(1-u_2)x_2(k), \end{cases} \tag{5.1}$$

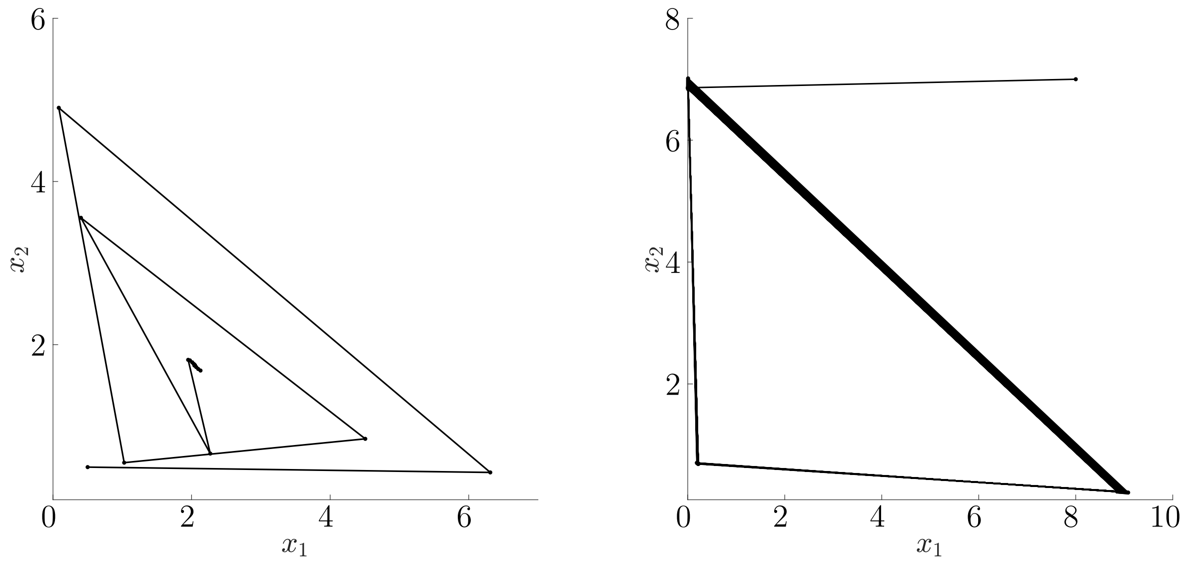
где r — репродуктивный потенциал популяции, $r = as$, ρ — относительный вклад младшей возрастной группы в лимитирование процесса воспроизводства, $\rho = \alpha/(s\beta)$.

5.1. Пример вычисления средней временной выгоды в случае, когда промысел производится только из младшей возрастной группы

Предположим, что изъятие происходит только из младшего возрастного класса, то есть $u_1(k) = u_1$, $u_2(k) = 0$ для всех $k = 0, 1, 2, \ldots$. Тогда система (5.1) примет вид

$$\begin{cases} x_1(k+1) = rx_2(k) \cdot e^{-\rho(1-u_1)x_1(k) - x_2(k)}, \\ x_2(k+1) = (1-u_1)x_1(k) + qx_2(k). \end{cases} \tag{5.2}$$

Построим численные примеры при следующих значениях параметров: $r = 30$, $\rho = 0.95$, $q = 0.1$, $u_1 = 0.23$, $C_1 = 1$, $C_2 = 5$. Покажем, что в зависимости от начальной точки $x(0) = (x_1(0), x_2(0))$ система может обладать различными динамическими режимами и посчитаем среднюю временную выгоду $H = H(\bar{u}, x(0))$ для каждого из них (см. рис. 1).



a) $x(0) = (0.5, 0.5)$, $H \approx 0.4703$ *b*) $x(0) = (8, 7)$, $H \approx 0.6939$

Рис. 1. Численные примеры с разными начальными значениями для системы (5.2)

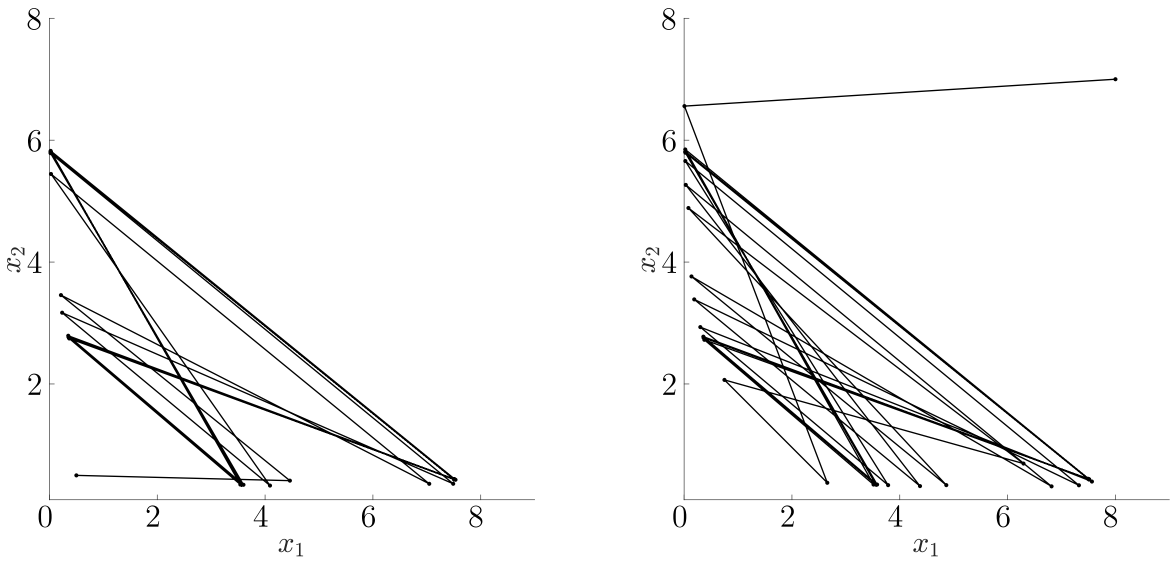
При данных параметрах и разных начальных значениях траектория либо асимптотически приближается к особой точке с координатами $(x_1^*, x_2^*) \approx (2.0448, 1.7494)$ (рис. 1, *a*), либо к циклу длины три (рис. 1, *b*).

5.2. Вычисление средней временной выгоды в случае, когда промысел производится из младшей и старшей возрастных групп

Рассмотрим случай, когда стационарное изъятие происходит из обоих возрастных классов $u_1(k) = u_1$, $u_2(k) = u_2$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Построим численные примеры со следующими параметрами: $r = 30$, $\rho = 0.95$, $q = 0.1$, $u_1 = 0.23$, $u_2 = 0.43$, $C_1 = 1$, $C_2 = 5$. Система имеет устойчивый цикл длины четыре (рис. 2, *a*, *b*) и для различных начальных точек из области притяжения этого цикла выполнено равенство $H(\overline{u}, x(0)) \approx 5.6875$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Leslie P.H. On the use of matrices in certain population mathematics // Biometrika. 1945. Vol. 33. Issue 3. P. 183–212. https://doi.org/10.1093/biomet/33.3.183
2. Логофет Д.О., Белова И.Н. Неотрицательные матрицы как инструмент моделирования динамики популяций: классические модели и современные обобщения // Фундаментальная и прикладная математика. 2007. Т. 13. № 4. С. 145–164. http://mi.mathnet.ru/fpm1068
3. Неверова Г.П., Абакумов А.И., Фрисман Е.Я. Влияние промыслового изъятия на режимы динамики лимитированной популяции: результаты моделирования и численного исследования // Математическая биология и биоинформатика. 2016. Т. 11. № 1. С. 1–13. https://doi.org/10.17537/2016.11.1
4. Ревуцкая О.Л., Фрисман Е.Я. Влияние равновесного промысла на сценарии развития двухвозрастной популяции // Информатика и системы управления. 2017. № 3 (53). С. 36–48. https://doi.org/10.22250/isu.2017.53.36-48
5. Ашихмина Е.В., Израильский Ю.Г. Оптимизации промысла популяций при циклическом изменении лимитирующих рост численности факторов среды // Информатика и системы управления. 2009. № 2. С. 11–18. https://elibrary.ru/item.asp?id=12511358
6. Неверова Г.П., Абакумов А.И., Фрисман Е.Я. Режимы динамики лимитированной структурированной популяции при избирательном промысле // Математическая биология и биоинформатика.



$a)$ $x(0) = (0.5, 0.5)$, $H \approx 5.6875$ $b)$ $x(0) = (8, 7)$, $H \approx 5.6875$

Рис. 2. Численные примеры с разными начальными значениями для системы (5.1)

2017. Т. 12. № 2. С. 327–342. https://doi.org/10.17537/2017.12.327
7. Беляков А.О., Давыдов А.А. Оптимизация эффективности циклического использования возобновляемого ресурса // Труды ИММ УрО РАН. 2016. Т. 22. № 2. С. 38–46. https://doi.org/10.21538/0134-4889-2016-22-2-38-46
8. Зеликин М.И., Локуциевский Л.В., Скопинцев С.В. Об оптимальном сборе ресурса на окружности // Математические заметки. 2017. Т. 102. № 4. С. 521–532. https://doi.org/10.4213/mzm11310
9. Belyakov A.O., Veliov V.M. On optimal harvesting in age-structured populations // Dynamic Perspectives on Managerial Decision Making. 2016. P. 149–166. https://doi.org/10.1007/978-3-319-39120-5_9
10. Фрисман Е.Я., Кулаков М.П., Ревуцкая О.Л., Жданова О.Л., Неверова Г.П. Основные направления и обзор современного состояния исследований динамики структурированных и взаимодействующих популяций // Компьютерные исследования и моделирование. 2019. Т. 11. № 1. С. 119–151. https://doi.org/10.20537/2076-7633-2019-11-1-119-151
11. Родина Л.И. Оптимизация средней временной выгоды для вероятностной модели популяции, подверженной промыслу // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2018. Т. 28. Вып. 1. С. 48–58. https://doi.org/10.20537/vm180105
12. Родина Л.И. Свойства средней временной выгоды в стохастических моделях сбора возобновляемого ресурса // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2018. Т. 28. Вып. 2. С. 213–221. https://doi.org/10.20537/vm180207
13. Свирежев Ю.М., Логофет Д.О. Устойчивость биологических сообществ. М.: Наука, 1978. 352 с.
14. Шарковский А.Н., Коляда С.Ф., Сивак А.Г., Федоренко В.В. Динамика одномерных отображений. Киев: Наукова думка, 1989. 216 с.
15. Фрисман Е.Я., Сычева Э.В., Израильский Ю.Г. Математическая модель динамики численности однородной промысловой популяции и анализ влияния промысла на характер динамики // Дальневосточный математический журнал. 2002. Т. 3. № 1. С. 108–122. http://mi.mathnet.ru/dvmg122

Поступила в редакцию 05.09.2019

Егорова Анастасия Владимировна, аспирант, Владимирский государственный университет, 600000, Россия, г. Владимир, ул. Горького, 87.
E-mail: nastik.e@bk.ru

Родина Людмила Ивановна, д. ф.-м. н., профессор, кафедра функционального анализа и его приложений, Владимирский государственный университет, 600000, Россия, г. Владимир, ул. Горького, 87; профессор, кафедра математики, Национальный исследовательский технологический университет «МИСиС», 119049, Россия, г. Москва, Ленинский проспект, 4.
E-mail: LRodina67@mail.ru

Цитирование: А. В. Егорова, Л. И. Родина. Об оптимальной добыче возобновляемого ресурса из структурированной популяции // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2019. Т. 29. Вып. 4. С. 501–517.

MATHEMATICS 2019. Vol. 29. Issue 4. Pp. 501–517.

A. V. Egorova, L. I. Rodina

On optimal harvesting of renewable resource from the structured population

Keywords: model of the population subject to harvesting, average time profit, optimal exploitation, modes of exploitation of the population.

MSC2010: 39A23, 39A99, 49N90, 93C55

DOI: 10.20537/vm190403

We consider the structured population which individuals are divided into age or typical groups, set by the normal independent system of difference equations. For the given population the problem of optimum harvesting of a renewed resource on finite or infinite time intervals is investigated. For the population maintained on a finite interval, we describe a craft strategy at which the greatest value of a total cost of a withdrawn resource is reached. If resource extraction occurs on an unlimited interval, we define average time profit and calculate its value at a stationary mode of operation; cases when the system has an asymptotically steady motionless point or a steady cycle are considered. A craft strategy which is optimum among other ways of operation is also described; it is shown, that under certain conditions it is stationary or differs from stationary only in value of control during the initial moment of time. The results of work are illustrated by an example of two-age exploited population in which individuals of either younger or both age groups are subject to trade.

REFERENCES

1. Leslie P.H. On the use of matrices in certain population mathematics, *Biometrika*, 1945, vol. 33, issue 3, pp. 183–212. https://doi.org/10.1093/biomet/33.3.183
2. Logofet D.O., Belova I.N. Nonnegative matrices as a tool to model population dynamics: classical models and contemporary expansions, *Journal of Mathematical Sciences*, 2008, vol. 155, no. 6, pp. 894–907. https://doi.org/10.1007/s10958-008-9249-2
3. Neverova G.P., Abakumov A.I., Frisman E.Ya. Dynamic modes of exploited limited population: results of modeling and numerical study, *Math. Biol. Bioinf.*, 2016, vol. 11, issue 1, pp. 1–13 (in Russian). https://doi.org/10.17537/2016.11.1
4. Revutskaya O.L., Frisman E.Ya. Influence of stationary harvesting on development of a two-age population scenario, *Informatika i Sistemy Upravleniya*, 2017, no. 3 (53), pp. 36–48 (in Russian). https://doi.org/10.22250/isu.2017.53.36-48
5. Ashikhmina E.V., Izrailsky Yu.G. Harvest optimization for population, when environment conditions limiting population growth change cyclically, *Informatika i Sistemy Upravleniya*, 2009, no. 2, pp. 11–18 (in Russian). https://elibrary.ru/item.asp?id=12511358
6. Neverova G.P., Abakumov A.I., Frisman E.Ya. Dynamic modes of limited structured population under age specific harvest, *Math. Biol. Bioinf.*, 2017, vol. 12, issue 2, pp. 327–342 (in Russian). https://doi.org/10.17537/2017.12.327
7. Belyakov A.O., Davydov A.A. Efficiency optimization for the cyclic use of a renewable resource, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2017, vol. 299, suppl. 1, pp. 14–21. https://doi.org/10.1134/S0081543817090036
8. Zelikin M.I., Lokutsievskiy L.V., Skopincev S.V. On optimal harvesting of a resource on a circle, *Mathematical Notes*, 2017, vol. 102, no. 4, pp. 521–532. https://doi.org/10.1134/S0001434617090243
9. Belyakov A.O., Veliov V.M. On optimal harvesting in age-structured populations, *Dynamic Perspectives on Managerial Decision Making*, 2016, pp. 149–166. https://doi.org/10.1007/978-3-319-39120-5_9
10. Frisman E.Ya., Kulakov M.P., Revutskaya O.L., Zhdanova O.L., Neverova G.P. The key approaches and review of current researches on dynamics of structured and interacting populations, *Computer*

Research and Modeling, 2019, vol. 11, issue 1, pp. 119–151 (in Russian). https://doi.org/10.20537/2076-7633-2019-11-1-119-151

11. Rodina L.I. Optimization of average time profit for a probability model of the population subject to a craft, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2018, vol. 28, issue 1, pp. 48–58 (in Russian). https://doi.org/10.20537/vm180105
12. Rodina L.I. Properties of average time prot in stochastic models of harvesting a renewable resource, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2018, vol. 28, issue 2, pp. 213–221 (in Russian). https://doi.org/10.20537/vm180207
13. Svirezhev Yu.M., Logofet D.O. *Ustoichivost' biologicheskikh soobshchestv* (Stability of biological communities), Moscow: Nauka, 1978.
14. Sharkovskii A.N., Kolyada S.F., Sivak A.G., Fedorenko V.V. *Dinamika odnomernykh otobrazhenii* (Dynamics of one-dimensional mappings), Kiev: Naukova dumka, 1989, 216 p.
15. Frisman E.Ya., Sycheva E.V., Izrailsky Yu.G. The mathematical model of the number dynamic for the homogeneous exploited population and analysis of the trade influence on the dynamic character, *Dal'nevost. Mat. Zh.* 2002, vol. 3, no. 1, pp. 108–122 (in Russian). http://mi.mathnet.ru/eng/dvmg122

Received 05.09.2019

Egorova Anastasiya Vladimirovna, Post-Graduate Student, Vladimir State University, ul. Gor'kogo, 87, Vladimir, 600000, Russia.
E-mail: nastik.e@bk.ru

Rodina Lyudmila Ivanovna, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Department of Functional Analysis and its Applications, Vladimir State University, ul. Gor'kogo, 87, Vladimir, 600000, Russia;
Professor, Department of Mathematics, National University of Science and Technology MISIS, Leninskii pr., 4, Moscow, 119049, Russia.
E-mail: LRodina67@mail.ru

Citation: A. V. Egorova, L. I. Rodina. On optimal harvesting of renewable resource from the structured population, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2019, vol. 29, issue 4, pp. 501–517.