МАТЕМАТИКА 2023. Т. 33. Вып. 4. С. 625–641.

УДК 517.98

© *Д. О. Цветков*

НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ВЯЗКОЙ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ

В работе рассматривается задача о малых движениях вязкой стратифицированной жидкости, частично заполняющей контейнер, который равномерно вращается вокруг оси, сонаправленной с действием силы тяжести. Задача исследуется на основе подхода, связанного с применением так называемой теории операторных матриц. С этой целью вводятся гильбертовы пространства и некоторые их подпространства, а также вспомогательные краевые задачи. Исходная начально-краевая задача сводится к задаче Коши для дифференциального уравнения первого порядка в некотором гильбертовом пространстве. После детального изучения свойств операторных коэффициентов доказана теорема о разрешимости полученной задачи Коши. На этой основе найдены достаточные условия существования решения начально-краевой задачи, описывающей эволюцию исходной гидросистемы.

Ключевые слова: эффект стратификации в вязких жидкостях, дифференциальное уравнение в гильбертовом пространстве, задача Коши.

DOI: 10.35634/vm230406

Введение

С развитием прикладных наук возрастает интерес к изучению динамических характеристик жидкостей, обладающих различными специфическими свойствами. К таким жидкостям, в частности, относятся стратифицированные жидкости. Этот интерес обусловлен не только практическими потребностями, но и теоретическим содержанием возникающих здесь проблем. Во многих случаях математические модели таких проблем существенно нелинейны и поддаются исследованию лишь численными методами. Однако ряд интересных и полезных задач можно рассматривать в рамках линейных моделей, приводящих к неклассическим начально-краевым задачам. Это, безусловно, определяет самостоятельный математический интерес к таким проблемам.

Вопросы динамики внутренних волн во вращающихся и стратифицированных идеальных жидкостях подробно изучены в монографиях С. А. Габова и А. Г. Свешникова [1, 2]. В частности, ими были изучены задачи динамики однородной вращающейся жидкости, сжимаемой стратифицированной жидкости без учета вращения и экспоненциально стратифицированной вращающейся идеальной жидкости. Дальнейшее изучение идеальных стратифицированных жидкостей проводилось в работах С. Е. Холодовой и С. И. Перегудина [3, 4], в которых исследовались уравнения динамики сжимаемой идеальной стратифицированной вращающейся жидкости с произвольным распределением стратификации. На основе введения двух потенциальных функций основные уравнения гидродинамики приводятся к скалярному уравнению, исследование которого может позволить установить разрешимость всех возникающих начально-краевых задач теории волн в идеальных стратифицированных вращающихся жидкостях.

Если теория динамических свойств стратифицированной идеальной жидкости сравнительно хорошо разработана, то это нельзя сказать о вязкой стратифицированной жидкости. К настоящему времени разработаны различные аналитические и численные подходы к изучению колебаний вязкой вращающейся жидкости в ограниченном объеме [5–10]. Однако, исследование многих задач гидродинамики жидкости проводится и методами функционального анализа, с помощью которых удается установить ряд чрезвычайно общих и тонких результатов для некоторых классов задач математической физики. Например, в ряде недавних работах Д. А. Закоры изучались задачи о колебаниях вязкой релаксирующей жидкости [11], сжимаемой вязкоупругой жидкости Олдройта [12], рассматривались спектральные вопросы, имеющие отношение к колебаниям смеси вязких сжимаемых жидкостей [13]. В работе его ученицы К. В. Фордук [14] найдены достаточные условия существования решения начально-краевой задачи, связанной с колебаниями системы твердых тел, частично заполненных вязкими жидкостями, под действием упругодемпфирующего устройства. Отметим цикл работ автора, в которых изучаются задачи со свободной поверхностью, частично покрытой крошеным и упругим льдом [15–17], а также задача о колебаниях вязкой стратифицированной жидкости с упругой мембраной [18, 19]. Общие идеи применяемых методов можно найти, например, в монографиях [20, 21].

В представленной работе рассматривается задача о малых движениях вязкой стратифицированной жидкости, частично заполняющей некоторый контейнер, который равномерно вращается вокруг оси, сонаправленной с действием силы тяжести. Предполагается, что состояние относительного равновесия устойчиво по линейному приближению. Путем проектирования уравнений полученной начально-краевой задачи на специальные функциональные подпространства осуществлен переход к дифференциально-операторному уравнению первого порядка в некотором гильбертовом пространстве. Далее, с полученным уравнением ассоциируется аналогичное уравнение с замкнутым оператором. Применение метода операторных блок-матриц, а также абстрактных дифференциально-операторных уравнений [22] позволило доказать теорему о сильной разрешимости полученной задачи Коши. Кроме того, используя теорию аналитических полугрупп [23], удается ослабить условие на правую часть полученного уравнения (данный факт вносит новый содержательный вклад по сравнению с результатами [18]). Затем путем выбора начальных условий из области незамкнутого оператора удается показать, что соответствующее решение также лежит в области определения этого оператора.

§ 1. Постановка начально-краевой задачи

Рассмотрим контейнер, равномерно вращающийся вокруг оси, сонаправленной с действием силы тяжести, и частично заполненный вязкой стратифицированной несжимаемой жидкостью. Будем считать, что в состоянии относительного равновесия жидкость занимает область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, ограниченную твердой стенкой S и равновесной поверхностью Γ. Введем систему координат $Ox_1x_2x_3$, жестко связанную с контейнером, таким образом, что ось Ox_3 совпадает с осью вращения и направлена против действия силы тяжести, а начало координат находится на равновесной поверхности Γ. В этом случае равномерная скорость вращения контейнера запишется в виде $\vec{\omega}_0 = \omega_0\vec{e}_3$, где $\vec{e}_3$ — орт оси вращения Ox_3 и $\omega_0 > 0$. Отметим также, что стационарное распределение плотности жидкости зависит от формы параболоида свободного вращения, то есть является функцией всех координат: $\rho_0 = \rho_0(x_1, x_2, x_3)$. Введем неподвижную систему координат $O'x_1'x_2'x_3'$ так, что ось $O'x_3'$ совпадает с осью Ox_3 и направлена в ту же сторону. В неподвижной системе координат уравнение движения жидкости представляет собой уравнение Навье–Стокса:

$$\frac{d'\vec{v}}{dt} = -\frac{1}{\widehat{\rho}'}\nabla' P' + \frac{\mu}{\widehat{\rho}'}\Delta'\vec{v} + \vec{F}' \quad (\text{в } \Omega).$$

Здесь $\vec{v}$ — это абсолютная скорость жидкости в области Ω, $\widehat{\rho}'(t, x')$ и $P'(t, x')$ — это поле плотности и поле давления в жидкости соответственно, $\vec{F}'(t, x')$ — заданное поле массовых внешних сил, $\mu = \text{const} > 0$ — коэффициент динамической вязкости. Штрихом обозначены символы в неподвижной системе координат. Преобразуем данное уравнение к уравнению в подвижной системе координат, представив поле абсолютной скорости жидкости в виде $\vec{v} = \vec{\omega}_0 \times \vec{r} + \vec{u}(t,x)$, где $\vec{u}(t,x)$ — поле относительной скорости жидкости в Ω, то есть поле скорости жидкости в подвижной системе координат. Найдем выражение для $d'\vec{v}/dt$:

$$\frac{d'\vec{v}}{dt} = \frac{d'}{dt}(\vec{\omega}_0 \times \vec{r} + \vec{u}) = \frac{d'}{dt}(\vec{\omega}_0 \times \vec{r}) + \frac{d'\vec{u}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega}_0 \times \vec{r}) + \vec{\omega}_0 \times (\vec{\omega}_0 \times \vec{r}) + \frac{d\vec{u}}{dt} + \vec{\omega}_0 \times \vec{u} =$$
$$= \vec{\omega}_0 \times \frac{d\vec{r}}{dt} + \vec{\omega}_0 \times (\vec{\omega}_0 \times \vec{r}) + \frac{d\vec{u}}{dt} + \vec{\omega}_0 \times \vec{u} = 2\vec{\omega}_0 \times \vec{u} + \vec{\omega}_0 \times (\vec{\omega}_0 \times \vec{r}) + \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u}.$$

Воспользовавшись инвариантностью операций div, ∇, Δ при линейных заменах переменных, из последнего соотношения получим уравнение движения в подвижной системе координат $Ox_1x_2x_3$:

$$2\vec{\omega}_0 \times \vec{u} + \vec{\omega}_0 \times (\vec{\omega}_0 \times \vec{r}) + \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} = -\frac{1}{\widehat{\rho}}\nabla P + \frac{\mu}{\widehat{\rho}}\Delta\vec{u} + \vec{F} \quad (\text{в } \Omega). \tag{1.1}$$

Преобразуем уравнение (1.1), представив давление, плотность и поле массовых внешних сил в виде: $P(t,x) = P_0(x) + p(t,x)$, $\widehat{\rho}(t,x) = \rho_0(x) + \rho(t,x)$, $\vec{F}(t,x) = -g\vec{e}_3 + \vec{f}(t,x)$, где $p(t,x)$ — отклонение поле давления от равновесного $P_0(x)$, $\rho(t,x)$ — отклонение поля плотности от исходного поля $\rho_0(x)$ и $\vec{f}(t,x)$ — это малое поле внешних массовых сил. Подставив последние представления в уравнения (1.1), получим

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} + 2\vec{\omega}_0 \times \vec{u} + \vec{\omega}_0 \times (\vec{\omega}_0 \times \vec{r}) =$$
$$= -(\rho_0 + \rho)^{-1}\nabla(P_0(x) + p) + (\rho_0 + \rho)^{-1}\mu\Delta\vec{u} - g\vec{e}_3 + \vec{f}. \tag{1.2}$$

Предположим теперь, что система находится в состоянии относительного равновесия и на нее не действуют никакие внешние силы, кроме силы тяжести. Это означает, что $\vec{u} = \vec{0}$ и $\vec{F} = -g\vec{e}_3$. Тогда (1.2) принимает вид: $\nabla P_0(x) = \rho_0(-\vec{\omega}_0 \times (\vec{\omega}_0 \times \vec{r}) - g\vec{e}_3)$. Проверяется, что $-\vec{\omega}_0 \times (\vec{\omega}_0 \times \vec{r}) = 1/2 \cdot \nabla(\vec{\omega}_0 \times \vec{r})^2$, тогда

$$\nabla P_0(x) = \rho_0(x)(1/2 \cdot \nabla(\vec{\omega}_0 \times \vec{r})^2 - g\vec{e}_3) = \rho_0(x)\nabla(1/2 \cdot \omega_0^2(x_1^2 + x_2^2) - gx_3) =: \rho_0 \nabla U_0.$$

Так как $\operatorname{rot} \nabla P_0 = \vec{0} = \rho_0 \operatorname{rot} \nabla U_0 + \nabla\rho_0 \times \nabla U_0$, то необходимое условие равновесия принимает вид:

$$\nabla U_0 \times \nabla \rho_0 = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \nabla U_0 = h(x)\nabla\rho_0, \tag{1.3}$$

где $h(x)$ — некоторое скалярное поле. Далее предполагаем, что условие (1.3) выполнено, а поле $h(x)$ известно.

С учетом сказанного, линеаризация уравнения (1.2) приводит к соотношению:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} - 2\omega_0(\vec{u} \times \vec{e}_3) = \rho_0^{-1}(-\nabla p + \rho\nabla U_0 + \mu\Delta\vec{u}) + \vec{f} \quad (\text{в } \Omega).$$

В дальнейшем будем рассматривать лишь основной случай устойчивой стратификации по плотности:

$$0 < N_{\min}^2 \le N^2(x) \le N_{\max}^2 =: N_0^2 < \infty,$$
$$N^2(x) := \frac{\nabla U_0 \cdot \nabla \rho_0}{\rho_0(x)} = \frac{h(x)|\nabla\rho_0|^2}{\rho_0(x)},$$

где $N^2(x)$ — квадрат частоты Вяйсяля–Брента (частоты плавучести), так что для устойчивости необходимо условие $h(x) > 0$.

Малые движения исходной системы описываются следующей начально-краевой задачей

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} - 2\omega_0(\vec{u} \times \vec{e}_3) = \rho_0^{-1}(x)(-\nabla p + \mu\Delta\vec{u} + \rho\nabla U_0) + \vec{f} \quad (\text{в } \Omega), \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\rho_0 \cdot \vec{u} = 0 \quad \operatorname{div}\vec{u} = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \vec{u} = \vec{0} \quad (\text{на } S), \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \vec{u} \cdot \vec{n} \quad (\text{на } \Gamma), \quad \int_\Gamma \zeta\, d\Gamma = 0, \tag{1.6}$$

$$\mu(u_{k,3} + u_{3,k}) = 0 \quad (k = 1, 2, \text{ на } \Gamma), \quad -p + 2\mu u_{3,3} = a\zeta \quad (\text{на } \Gamma), \tag{1.7}$$

$$\vec{u}(0, x) = \vec{u}^0(x), \quad \rho(0, x) = \rho^0(x) \quad (x \in \Omega), \quad \zeta(0, \hat{x}) = \zeta^0(\hat{x}) \quad (\hat{x} \in \Gamma). \tag{1.8}$$

Чтобы система уравнений была замкнута, к уравнению (1.4) добавлено уравнение неразрывности и условие несжимаемости жидкости, которые после линеаризации имеют вид первого и второго уравнения (1.5). На границе S задано условие прилипания жидкости, которое в терминах вектора скорости имеет вид третьего уравнения (1.5). Кинематические и динамические условия на поверхности Γ удобно записать в криволинейной системе координат $\widetilde{O}\xi^1\xi^2\xi^3$, в которой уравнение равновесной поверхности Γ имеет вид $\xi^3 = 0$, а коэффициент Ламе $h_3|_\Gamma = 1$. Тогда, считая, что свободная движущаяся поверхность $\Gamma(t)$ описывается уравнением $\xi^3 = \zeta(t, \xi^1, \xi^2)$, приходим к линеаризованному кинематическому условию (1.6) (первое уравнение), где $\vec{n}$ — единичный вектор, нормальный к границы области Ω и направленный вне Ω; второе уравнение (1.6) есть условие сохранения объема. Динамические условия на $\Gamma(t)$ состоят в равенстве нулю касательных напряжений и в равенстве нормального напряжения скачку давлений, возникающему вследствие действия центробежных и гравитационных сил. После линеаризации они принимают вид (1.7), где $a = a(\widehat{\xi}) = (\nabla P_0, \vec{n})|_\Gamma$, $\widehat{\xi} = (\xi^1, \xi^2)$. Последние три условия — это начальные условия, которые добавлены к задаче для полноты ее формулировки.

Отметим, что эта задача рассматривается в области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с границей $\partial\Omega$, состоящей из двух частей: равновесной поверхности Γ, которую можно считать достаточно гладкой (бесконечно дифференцируемой), а также твердой стенки S, которую будем считать липшицевой.

§ 2. Проектирование уравнения движения. Вспомогательные краевые задачи

Исследование сформулированной проблемы будем проводить методами функционального анализа и теории уравнений в частных производных. Для перехода к операторной формулировке задачи введем разложение пространства векторных полей $\vec{L}_2(\Omega, \rho_0)$ в ортогональную сумму (см. подробнее, например, [18]):

$$\vec{L}_2(\Omega, \rho_0) = \vec{J}_0(\Omega, \rho_0) \oplus \vec{G}_{h,S}(\Omega, \rho_0) \oplus \vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega, \rho_0).$$

Введем ортопроекторы $P_{0,S}$ и $P_{0,\Gamma}$ на подпространства $\vec{J}_{0,S}(\Omega, \rho_0) = \vec{J}_0(\Omega, \rho_0) \oplus G_{h,S}(\Omega, \rho_0)$ и $\vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega, \rho_0)$ соответственно ($P_{0,S} + P_{0,\Gamma} = I$). В силу условия соленоидальности и условия прилипания, считаем, что

$$\vec{u}(t, x) \in \vec{J}_{0,S}(\Omega, \rho_0) = \{\vec{u} \in \vec{L}_2(\Omega, \rho_0)|\ \operatorname{div}\vec{u} = 0 \ (\text{в } \Omega),\ u_n = 0 \ (\text{на } S)\},$$

$$\rho_0^{-1}\nabla p(t, x) = \rho_0^{-1}\nabla\varphi + \rho_0^{-1}\nabla\widetilde{p} \in \vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega, \rho_0) \oplus \vec{G}_{h,S}(\Omega, \rho_0) =: \vec{G}(\Omega, \rho_0) =$$
$$= \{\vec{v} \in \vec{L}_2(\Omega, \rho_0)|\ \vec{v} \in \rho_0^{-1}\nabla p \ (\text{в } \Omega),\ \int_\Gamma p\, d\Gamma = 0\}.$$

Применим ортопроекторы $P_{0,\Gamma}$ и $P_{0,S}$ к первому уравнению (1.4):

$$\vec{0} = -\rho_0^{-1}\nabla\varphi + P_{0,\Gamma}(\rho_0^{-1}\rho\nabla U_0) + P_{0,\Gamma}(\rho_0^{-1}\mu\Delta\vec{u}) + P_{0,\Gamma}\vec{f}(t,x), \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} - 2\omega_0 P_{0,S}(\vec{u}\times\vec{e}_3) = -\rho_0^{-1}\nabla\widetilde{p} + P_{0,S}(\rho_0^{-1}\rho\nabla U_0) + P_{0,S}(\rho_0^{-1}\mu\Delta\vec{u}) + P_{0,S}\vec{f}(t,x). \tag{2.2}$$

Соотношение (2.1) показывает, что $\rho_0^{-1}\nabla\varphi(t,x)$ может быть найдено, если известно решение $(\vec{u},\rho)$. Поэтому в дальнейшем достаточно ограничиться рассмотрением соотношения (2.2), а также условий из (1.7) с соответствующей заменой $p\to\widetilde{p}$, так как

$$p = \widetilde{p} + \varphi, \quad \varphi = 0 \quad (\text{на } \Gamma).$$

Условимся называть решения уравнения (2.1) тривиальными.

Наряду с введенными пространствами рассмотрим также пространство $L_2(\Gamma)$ — гильбертово пространство со скалярным произведением:

$$(\eta,\zeta)_0 = \int_\Gamma \rho_0(\hat{x})\eta(\hat{x})\overline{\zeta(\hat{x})}\,d\Gamma, \quad \hat{x}\in\Gamma.$$

Из второго условия (1.6) следует, что функция $\zeta(t,\hat{x})$ при каждом t должна принадлежать гильбертовому пространству $H_0 = L_2(\Gamma)\ominus\{1_\Gamma\}$ функций из $L_2(\Gamma)$, которые ортогональны к функции 1_Γ, тождественно равной единице.

Замечание 2.1. Будем предполагать в дальнейшем, что состояние относительного равновесия вращающейся жидкости в сосуде статически устойчиво по линейному приближению. Это условие означает, что $a(\widehat{\xi}) \geqslant a_0 > 0$ $(\widehat{\xi}\in\Gamma)$. Обозначим через B_0 оператор, определенный по закону $B_0 = P_\Gamma a(\widehat{\xi})P_\Gamma$, где через P_Γ обозначен ортопроектор на H_0. Так как $a(\widehat{\xi})$ — непрерывная на Γ функция, то B_0 — ограниченный самосопряженный оператор, действующий в H_0. Кроме того, из предположения выше следует, что оператор B_0 положительно определен в H_0.

Замечание 2.2. Введем в пространстве H_0 его оснащение в виде

$$H_+\subset H_0\subset H_-, \quad H_+ = H^{1/2}(\Gamma)\cap H_0 =: H_\Gamma^{1/2}, \quad H_- = (H_+)^* =: \widetilde{H}_\Gamma^{-1/2}.$$

Здесь через $\widetilde{H}_\Gamma^{-1/2}$ обозначено пространство, сопряженное с $H_\Gamma^{1/2}$ с центральным пространством H_0. В частности, $\widetilde{H}_\Gamma^{-1/2}$ состоит из тех элементов из $H^{-1/2}(\Gamma)$, которые продолжимы нулем в классе $H^{-1/2}(\partial\Omega)$ (см. [24]).

Вспомогательная задача I. По заданной функции $\psi=\psi(\hat{x})$, $\hat{x}\in\Gamma$, найти функцию $p_1 = p_1(x)$, $x\in\Omega$, являющуюся решением задачи

$$\nabla\cdot(\rho_0^{-1}(x)\nabla p_1) = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \rho_0^{-1}(x)\nabla p_1\cdot\vec{n} = 0 \quad (\text{на } S),$$
$$(\rho_0^{-1}|_{\hat{x}\in\Gamma})p_1 = \psi \quad (\text{на } \Gamma), \quad \int_\Gamma \psi\,d\Gamma = 0.$$

Это аналог известной задачи Заремба для уравнения Лапласа (при $\rho_0=\text{const}$). Если $p_1(x)$ — решение задачи I для $\psi\in H_\Gamma^{1/2}$, то (см. подробнее [18], а также [20, с. 103–107]) $\rho_0^{-1}\nabla p_1(x) = G\psi \in \vec{G}_{h,S}(\Omega,\rho_0)$, где $G\colon H_\Gamma^{1/2}\to\vec{G}_{h,S}(\Omega,\rho_0)$ есть линейный ограниченный оператор.

Вспомогательная задача II. По заданной функции $\vec{f}_1$ найти функции $\vec{u} = \vec{u}(x)$ и $p_2 = p_2(x)$, являющиеся решением краевой задачи

$$\begin{gathered}\rho_0^{-1}\nabla p_2 - P_{0,S}(\rho_0^{-1}\mu\Delta\vec{u}) = \vec{f}_1, \quad \operatorname{div}\vec{u} = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \vec{u} = \vec{0} \quad (\text{на } S),\\ \mu(u_{i,3} + u_{3,i}) = 0 \quad (i = 1, 2, \text{ на } \Gamma), \quad -p_2 + 2\mu u_{3,3} = 0 \quad (\text{на } \Gamma).\end{gathered}$$

Известно (см. подробнее, например, [18]), что эта задача имеет единственное решение $\vec{u} = \mu^{-1}A^{-1}\vec{f}_1$ для $\vec{f}_1 \in \vec{J}_{0,S}(\Omega, \rho_0)$, где A — оператор вспомогательной задачи II. Оператор A есть неограниченный самосопряженный положительно определенный оператор, обладающий следующими свойствами.

1. $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(A^{1/2}) = \vec{J}^1_{0,S}(\Omega, \rho_0) \subset \vec{J}_{0,S}(\Omega, \rho_0)$, $\overline{\mathcal{D}(A)} = \vec{J}_{0,S}(\Omega, \rho_0)$. Отметим, что подпространство $\vec{J}_{0,S}(\Omega, \rho_0)$ связано с кинетической энергией жидкости в открытом сосуде, плотным множеством в нем является подпространство $\vec{J}^1_{0,S}(\Omega, \rho_0)$ функций с конечной скоростью диссипации энергии (см. подробнее, например, [20, с. 132]).

2. Обратный оператор A^{-1} есть компактный и положительный, действующий в пространстве $\vec{J}_{0,S}(\Omega, \rho_0)$.

С учетом вышесказанного вернемся к начально-краевой задаче (1.4)–(1.8), точнее, после отделения тривиального решения (2.1), к соответствующей начально-краевой задаче для уравнения (2.2). Представим $\rho_0^{-1}\nabla\widetilde{p} \in \vec{G}_{h,S}(\Omega, \rho_0)$ в виде

$$\rho_0^{-1}\nabla\widetilde{p} = \rho_0^{-1}\nabla p_1 + \rho_0^{-1}\nabla p_2, \quad \rho_0^{-1}\nabla p_i \in \vec{G}_{h,S}(\Omega, \rho_0) \quad (i = 1, 2)$$

и будем считать, что p_1 есть решение вспомогательной задачи I для $\psi = B_0\zeta$, а p_2 — функция из вспомогательной задачи II, тогда имеем

$$\begin{aligned}&\rho_0^{-1}\nabla p_2 - P_{0,S}(\rho_0^{-1}\mu\Delta\vec{u}) = \vec{f}_1 = -\frac{d\vec{u}}{dt} - GB_0\zeta +\\ &\qquad\qquad + 2\omega_0 P_{0,S}(\vec{u}\times\vec{e}_3) + P_{0,S}(\rho_0^{-1}\rho\nabla U_0) + P_{0,S}\vec{f} \quad (\text{в } \Omega),\\ &\vec{u} = \vec{0} \ (\text{на } S), \quad \mu(u_{i,3} + u_{3,i}) = 0 \ (i = 1, 2, \text{ на } \Gamma), \quad -p_2 + 2\mu u_{3,3} = 0 \ (\text{на } \Gamma).\end{aligned} \tag{2.3}$$

Отметим, что (для классического решения) все слагаемые справа в уравнении являются непрерывными функциями t со значениями в пространстве $\vec{J}_{0,S}(\Omega, \rho_0)$. Очевидно, (2.3) есть вторая вспомогательная задача с $\vec{f}_1 \in \vec{J}_{0,S}(\Omega, \rho_0)$. Поэтому ее решение имеет вид

$$\vec{u} = \mu^{-1}A^{-1}\vec{f}_1 = \mu^{-1}A^{-1}\Big(-\frac{d\vec{u}}{dt} - gGB_0\zeta + 2\omega_0 P_{0,S}(\vec{u}\times\vec{e}_3) + P_{0,S}(\rho_0^{-1}\rho\nabla U_0) + P_{0,S}\vec{f}\Big).$$

Итогом проведенных преобразований является следующая теорема.

Теорема 2.1. *Классическое решение начально-краевой задачи* (1.4)–(1.8) *есть решение задачи Коши для системы дифференциально операторных уравнений*

$$\begin{cases}\dfrac{d\vec{u}}{dt} - 2\omega_0 P_{0,S}(\vec{u}\times\vec{e}_3) + GB_0\zeta + \mu A\vec{u} - P_{0,S}(\rho_0^{-1}\rho\nabla U_0) = P_{0,S}\vec{f} =: \vec{f}_{0,S},\\ \dfrac{d\zeta}{dt} - \gamma_n\vec{u} = 0, \quad \dfrac{d\rho}{dt} + \nabla\rho_0\cdot\vec{u} = 0, \quad \vec{u}(0) = \vec{u}^0, \quad \zeta(0) = \zeta^0, \quad \rho(0) = \rho^0.\end{cases} \tag{2.4}$$

и уравнения (2.1). *Здесь G есть оператор задачи I, A — оператор, связанный с задачей II, B_0 определен в замечании* 2.1, *γ_n — оператор следа: $\gamma_n\vec{u} = (\vec{u}\cdot\vec{n})_\Gamma$, $\vec{u} \in \vec{J}^1_{0,S}(\Omega, \rho_0)$, а $\vec{u}$, ζ и ρ считаются функциями t со значениями в соответствующих гильбертовых пространствах.*

Лемма 2.1. *Имеют место свойства $\mathcal{D}(\gamma_n) \subset \mathcal{D}(G^*)$, $G^*|_{\mathcal{D}(\gamma_n)} = \gamma_n$.*

Доказательство. Пусть $\vec{v} \in \vec{J}^1_{0,S}(\Omega, \rho_0)$, $\psi \in H_\Gamma^{\frac{1}{2}}$. Тогда

$$(\rho_0^{-1}\nabla p_1, \vec{v}) = \int_\Omega \nabla p_1 \cdot \overline{\vec{v}}\, d\Omega = \int_\Omega \operatorname{div}(p_1 \overline{\vec{v}})\, d\Omega = \int_{\partial\Omega} p_1 \overline{v_n}\, dS = \int_\Gamma p_1 \overline{v_n}\, d\Gamma = \int_\Gamma \rho_0 \psi \overline{v_n}\, d\Gamma =$$
$$= (\psi, \gamma_n \vec{v})_0 \quad \Rightarrow \quad (G\psi, \vec{v}) = (\psi, \gamma_n \vec{v})_0, \quad \psi \in H_\Gamma^{1/2}, \quad \vec{v} \in \vec{J}^1_{0,S}(\Omega, \rho_0), \quad (2.5)$$

следовательно, $\mathcal{D}(\gamma_n) \subset \mathcal{D}(G^*)$, $G^*|_{\mathcal{D}(\gamma_n)} = \gamma_n$. Лемма доказана. □

Замечание 2.3. Из леммы 2.1 следует, что оператор γ_n может быть расширен до оператора $\widetilde{\gamma}_n$ с областью определения $\mathcal{D}(\widetilde{\gamma}_n) = \vec{J}_{0,S}(\Omega, \rho_0)$. Действительно, соотношение (2.5) выполняется, когда в правой части имеем $(\psi, \widetilde{\gamma}_n \vec{v})_0$ для $\psi \in H_\Gamma^{1/2}$, $\widetilde{\gamma}_n \vec{v} \in \widetilde{H}_\Gamma^{-1/2}$. Эта ситуация имеет место для $\vec{v} \in \vec{J}_{0,S}(\Omega, \rho_0)$. При этом получаем, что на множестве $\vec{J}_0(\Omega, \rho_0)$ оператор $\widetilde{\gamma}_n$ равен нулевому оператору, то есть $\ker \widetilde{\gamma}_n = \vec{J}_0(\Omega, \rho_0)$. Так как имеют место вложения $H_\Gamma^{1/2} \subset H_0 \subset \widetilde{H}_\Gamma^{-1/2}$, то, очевидно, $\gamma_n \subset G^* \subset \widetilde{\gamma}_n$. Обозначим через $\widehat{\gamma}_n$ такое расширение γ_n, для которого область значений совпадает с H_0. Тогда $\widehat{\gamma}_n = G^*$, при этом $\mathcal{D}(G^*) = \{\vec{v} \in \vec{J}_{0,S}(\Omega, \rho_0) |\ \gamma_n \vec{v} \in L_2(\Gamma)\}$. В дальнейшем вместо $\widehat{\gamma}_n$ для простоты снова будем писать γ_n.

Как следствие из леммы 2.1 и замечания 2.3 получаем такое утверждение.

Лемма 2.2. *Для операторов A и γ_n выполнены следующие включения:*

$$\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(A^{1/2}) = \vec{J}^1_{0,S}(\Omega, \rho_0) \subset \mathcal{D}(\gamma_n).$$

Введем далее следующие операторы

$$C\rho = -P_{0,S}(\rho_0^{-1}\rho \nabla U_0), \quad C^*\vec{u} = -\nabla\rho_0 \cdot \vec{u}, \quad S_0 \vec{u} = iP_{0,S}(\vec{u} \times \vec{e}_3), \qquad (2.6)$$

а также гильбертово пространство $\mathfrak{L}_2(\Omega)$ скалярных функций со скалярным произведением:

$$(\varphi, \psi)_{\mathfrak{L}_2(\Omega)} = \int_\Omega \rho_0 \frac{N^2(x)}{|\nabla\rho_0|^2} \varphi(x) \overline{\psi(x)}\, d\Omega.$$

Лемма 2.3. *Операторы $C\colon \mathfrak{L}_2(\Omega) \to \vec{J}_{0,S}(\Omega, \rho_0)$ и $C^*\colon \vec{J}_{0,S}(\Omega, \rho_0) \to \mathfrak{L}_2(\Omega)$, определенные соотношениями (2.6), взаимно сопряжены и $\|C\| = \|C^*\| \leqslant N_0$. Оператор S_0 (который естественно назвать гироскопическим, или кориолисовым оператором) обладает следующими свойствами: $S_0 = S_0^*$, $\|S_0\| = 1$.*

Доказательство. Доказательство первой части леммы непосредственно следует из тождества

$$(C\rho, \vec{u}) = (\rho, C^*\vec{u}) = -\int_\Omega \rho\, \nabla U_0\, \vec{u}\, d\Omega, \quad \forall \vec{u} \in \vec{J}_{0,S}(\Omega, \rho_0), \quad \forall \rho \in \mathfrak{L}_2(\Omega),$$

которое выводится с использованием определений скалярных произведений, величины $N^2(x)$ и обозначений (2.6). Доказательство второй части леммы (о свойствах оператора S_0) проводится аналогично по схеме, изложенной в [20, п. 6.1.3]. □

С целью получения более симметричного вида операторной матрицы, отвечающей исходной задаче, введем в (2.4) замену $B_0^{1/2}\zeta = \widehat{\zeta}$ и применим (положительно определенный и ограниченный) оператор $B_0^{1/2}$ к обеим частям второго уравнения системы (2.4).

Таким образом, начально-краевая задача (1.4)–(1.8) распадается на тривиальное соотношение (2.1) и задачу Коши для системы дифференциально операторных уравнений, которые могут быть переписаны в виде:

$$\frac{dx}{dt} + \mathcal{A}x = \mathcal{F}, \quad x(0) = x^0, \tag{2.7}$$

$$x = \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \widehat{\zeta} \\ \rho \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A} = \begin{pmatrix} \mu A + 2i\omega_0 S_0 & GB_0^{1/2} & C \\ -B_0^{1/2}G^* & 0 & 0 \\ -C^* & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{F} = \begin{pmatrix} \vec{f}_{0,S} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь $\vec{u} = \vec{u}(t)$, $\widehat{\zeta} = \widehat{\zeta}(t)$, $\rho = \rho(t)$ — неизвестные функции со значениями в $\vec{J}_{0,S}(\Omega, \rho_0)$, H_0 и $\mathfrak{L}_2(\Omega)$ соответственно.

Определение 2.1. Назовем сильным решением исходной начально-краевой задачи (1.4)—(1.8) такие функции $\vec{u}$, ζ, ρ и ∇p, для которых функция $x = x(t)$ является сильным решением задачи (2.7) в пространстве $\mathcal{H} = \vec{J}_{0,S}(\Omega, \rho_0) \oplus H_0 \oplus \mathfrak{L}_2(\Omega)$. В свою очередь сильным решением задачи (2.7) назовем функцию $x(t)$ такую, что $x(t) \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ для любого t из $\mathbb{R}_+ = [0; +\infty)$, $\mathcal{A}x(t) \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{H})$, выполнены начальные условия и уравнение из (2.7) для любого $t \in \mathbb{R}_+$.

§ 3. О разрешимости начально-краевой задачи

Свяжем с задачей (2.7) (для простоты рассмотрим задачу при $\mu = \text{const}$, что равносильно замене $\mu A \to A$) оператор-матрицу

$$\mathcal{A}_0 = \begin{pmatrix} A & GB_0^{1/2} & C \\ -B_0^{1/2}G^* & 0 & 0 \\ -C^* & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

которая имеет плотную в $\mathcal{H}$ область определения $\mathcal{D}(\mathcal{A}_0) = \mathcal{D}(A) \oplus \mathcal{D}(GB_0^{1/2}) \oplus \mathfrak{L}_2(\Omega)$.

Легко проверить, что оператор $\mathcal{A}_0$ с указанной областью определения есть аккретивный оператор, то есть для любых $x = (\vec{u}; \widehat{\zeta}; \rho)^\tau \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_0)$ выполнено неравенство

$$\mathrm{Re}(\mathcal{A}_0 x, x)_{\mathcal{H}} = (A\vec{u}, \vec{u}) \geqslant 0.$$

Отметим, что оператор $\mathcal{A}_0$ не является максимальным аккретивным оператором. Для перехода к максимальному аккретивному оператору представим:

$$\vec{u}(t) = e^{at}\vec{v}(t), \quad \widehat{\zeta}(t) = e^{at}\eta(t), \quad \rho(t) = e^{at}\sigma(t), \quad a > 0, \tag{3.1}$$

где $\vec{v}(t)$, $\eta(t)$ и $\sigma(t)$ — новые искомые функции.

Подставляя (3.1) в (2.7), получим следующую задачу Коши

$$\frac{dy}{dt} + \mathcal{A}_a y + \mathcal{S}y = f(t), \quad y(0) = y^0, \tag{3.2}$$

$$y = y(t) = (\vec{v}(t); \eta(t); \sigma(t))^\tau, \quad f(t) = (\vec{f}_{0,S}(t); 0; 0)^\tau e^{-at}, \quad \mathcal{S} = \mathrm{diag}(2i\omega_0 S_0; 0; 0),$$

$$\mathcal{A}_a = \mathcal{A}_0 + a\mathcal{I} = \begin{pmatrix} A_a & GB_0^{1/2} & C \\ -B_0^{1/2}G^* & aI & 0 \\ -C^* & 0 & aI \end{pmatrix}, \quad A_a = A + aI,$$

$\mathcal{I}$ — единичный оператор в $\mathcal{H}$, а индекс $(\ldots)^\tau$ означает операцию транспонирования матрицы. Очевидно, оператор $\mathcal{A}_a$ равномерно аккретивный: $\operatorname{Re}(\mathcal{A}_a y, y)_{\mathcal{H}} \geqslant a\|y\|^2_{\mathcal{H}}$, а потому существует обратный оператор $\mathcal{A}_a^{-1}$ с нормой $\|\mathcal{A}_a^{-1}\| \leqslant a^{-1}$.

Обозначим

$$Q_1 = B_0^{1/2} G^* A_a^{-1/2}, \quad Q_1^+ = A_a^{-1/2} G B_0^{1/2}, \quad \mathcal{D}(Q_1^+) = \mathcal{D}(G B_0^{1/2}).$$

Лемма 3.1. $Q_1^+ \subset Q_1^*,\ Q_1^+ = Q_1^*|_{\mathcal{D}(GB_0^{1/2})},\ \overline{Q_1^+} = Q_1^*$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для любого $\vec{u} \in \vec{J}_{0,S}(\Omega, \rho_0)$ и $\eta \in H_0$, $B_0^{1/2}\eta \in \mathcal{D}(G)$, имеем

$$(Q_1\vec{v}, \eta)_{H_0} = (B_0^{1/2} G^* A_a^{-1/2}\vec{v}, \eta)_{H_0} = (\vec{v}, A_a^{-1/2} G B_0^{1/2}\eta)_{\vec{J}_{0,S}(\Omega,\rho_0)} = (\vec{v}, Q_1^+\eta)_{\vec{J}_{0,S}(\Omega,\rho_0)}.$$

Таким образом, $Q_1^+ \subset Q_1^*$ и $Q_1^+ = Q_1^*|_{\mathcal{D}(GB_0^{1/2})}$. Докажем, что оператор Q_1^+ ограничен на $\mathcal{D}(GB_0^{1/2})$. Покажем, что Q_1 ограниченно действует из $\vec{J}_{0,S}(\Omega, \rho_0)$ в H_0. Действительно, оператор $A_a^{-1/2}$ отображает $\vec{J}_{0,S}(\Omega, \rho_0)$ на $\vec{J}^1_{0,S}(\Omega, \rho_0)$, оператор $\gamma_n = G^*$, согласно теореме о следах, компактен как оператор из $\vec{J}^1_{0,S}(\Omega, \rho_0)$ в H_0 и оператор $B_0^{1/2}$ ограниченно действует из H_0 в H_0. Таким образом, оператор Q_1 ограничен (даже компактен). Отсюда следует, что оператор Q_1^* тоже ограничен. Тогда для любого $\eta \in D(GB_0^{1/2})$ справедливо неравенство:

$$\|Q_1^+\eta\|_{\vec{J}_{0,S}(\Omega,\rho_0)} = \|Q_1^*\eta\|_{\vec{J}_{0,S}(\Omega,\rho_0)} \leqslant \|Q_1^*\| \cdot \|\eta\|_{H_0}.$$

Следовательно, Q_1^+ ограничен на $\mathcal{D}(GB_0^{1/2})$, а поэтому расширяется по непрерывности до ограниченного оператора Q_1^*, то есть $\overline{Q_1^+} = Q_1^*$. $\square$

Лемма 3.2. *Замыкание* $\widehat{\mathcal{A}} = \overline{\mathcal{A}_a}$ *оператора* $\mathcal{A}_a$ *есть максимальный равномерный аккретивный оператор, при этом* $\mathcal{D}(\widehat{\mathcal{A}}) = \{\, y = (\vec{v}; \eta; \sigma)^\tau \in \mathcal{H} \mid \vec{v} + A_a^{-1/2} Q_1^* \eta \in \mathcal{D}(A_a)\,\}$ *и справедливы следующие факторизации:*

(а) *с симметрическим окаймлением:*

$$\widehat{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} A_a^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & I_\Gamma & 0 \\ 0 & 0 & I_{\mathfrak{L}_2(\Omega)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & Q_1^* & Q_2^* \\ -Q_1 & aI_\Gamma & 0 \\ -Q_2 & 0 & aI_{\mathfrak{L}_2(\Omega)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_a^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & I_\Gamma & 0 \\ 0 & 0 & I_{\mathfrak{L}_2(\Omega)} \end{pmatrix};$$

(б) *с треугольным окаймлением:*

$$\widehat{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ -Q_1 A_a^{-1/2} & I_\Gamma & 0 \\ -Q_2 A_a^{-1/2} & 0 & I_{\mathfrak{L}_2(\Omega)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_a & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{W}_1 & Q_1 Q_2^* \\ 0 & Q_2 Q_1^* & \mathcal{W}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & A_a^{-1/2} Q_1^* & A_a^{-1/2} Q_2^* \\ 0 & I_\Gamma & 0 \\ 0 & 0 & I_{\mathfrak{L}_2(\Omega)} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ T_1 & I_\Gamma & 0 \\ T_2 & 0 & I_{\mathfrak{L}_2(\Omega)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_a & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{W}_1 & Q_1 Q_2^* \\ 0 & Q_2 Q_1^* & \mathcal{W}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & T_3 & T_4 \\ 0 & I_\Gamma & 0 \\ 0 & 0 & I_{\mathfrak{L}_2(\Omega)} \end{pmatrix}, \tag{3.3}$$

$$Q_2 = C^* A_a^{-1/2}, \quad Q_2^* = A_a^{-1/2} C, \quad T_1 = -Q_1 A_a^{-1/2}, \quad T_2 = -Q_2 A_a^{-1/2},$$
$$T_3 = A_a^{-1/2} Q_1^*, \quad T_4 = A_a^{-1/2} Q_2^*, \quad \mathcal{W}_1 = aI_\Gamma + Q_1 Q_1^*, \quad \mathcal{W}_2 = aI_{\mathfrak{L}_2(\Omega)} + Q_2 Q_2^*.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. *I этап.* Нетрудно проверить, что оператор $\mathcal{A}_a$ представим в виде:

$$\mathcal{A}_a = \begin{pmatrix} A_a^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & I_\Gamma & 0 \\ 0 & 0 & I_{\mathfrak{L}_2(\Omega)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I & Q_1^+ & Q_2^* \\ -Q_1 & aI_\Gamma & 0 \\ -Q_2 & 0 & aI_{\mathfrak{L}_2(\Omega)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_a^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & I_\Gamma & 0 \\ 0 & 0 & I_{\mathfrak{L}_2(\Omega)} \end{pmatrix}.$$

Замыкание $\widehat{\mathcal{A}}$ оператора $\mathcal{A}_a$ состоит в замене в среднем блоке оператора Q_1^+ на Q_1^*. Действительно, после такого замыкания оператор $\widehat{\mathcal{A}}$ представим в виде произведения $\widehat{\mathcal{A}} = H_1 H_2 H_1$ замкнутых операторов. При этом H_1^{-1} ограничен, так как оператор $A_a^{-1/2}$ ограничен. Нетрудно проверить, что H_2^{-1} представим в виде

$$H_2^{-1} = \begin{pmatrix} M & -a^{-1}MQ_1^* & -a^{-1}MQ_2^* \\ a^{-1}Q_1M & a^{-1} - a^{-2}Q_1MQ_1^* & -a^{-2}Q_1MQ_2^* \\ a^{-1}Q_2M & -a^{-2}Q_2MQ_1^* & a^{-1} - a^{-2}Q_2MQ_2^* \end{pmatrix},$$

где $M = (I + a^{-1}Q_1^*Q_1 + a^{-1}Q_2^*Q_2)^{-1}$. Все элементы данной блок-матрицы являются ограниченными операторами, а значит H_2^{-1} ограничен. Таким образом, оператор $\widehat{\mathcal{A}}$ замкнут. Из предыдущих рассуждений последует, что $\widehat{\mathcal{A}}$ будет максимально аккретивным оператором.

Найдем область определения $\mathcal{D}(\widehat{\mathcal{A}})$ оператора $\widehat{\mathcal{A}}$. Прежде всего, из представления для оператора $\widehat{\mathcal{A}}$ следует, что $\vec{v} \in \mathcal{D}(A_a^{1/2})$. Далее, должно иметь смысл следующее выражение:

$$\begin{pmatrix} A_a^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & I_\Gamma & 0 \\ 0 & 0 & I_{\mathfrak{L}_2(\Omega)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_a^{1/2}\vec{v} + Q_1^*\eta + Q_2^*\sigma \\ -Q_1A_a^{1/2}\vec{v} + a\eta \\ -Q_2A_a^{1/2}\vec{v} + a\sigma \end{pmatrix},$$

то есть $A_a^{1/2}\vec{v} + Q_1^*\eta + Q_2^*\sigma \in \mathcal{D}(A_a^{1/2})$ или $\vec{v} + A_a^{-1/2}Q_1^*\eta \in \mathcal{D}(A_a)$, так как $A^{-1}C\sigma \in \mathcal{D}(A_a)$, таким образом, $\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \{\, (\vec{v}, \eta, \sigma)^\tau |\ \vec{v} + A_a^{-1/2}Q_1^*\eta \in \mathcal{D}(A_a)\,\}$. Заметим, что из последнего следует свойство $\vec{v} \in \mathcal{D}(A_a^{1/2})$. Действительно, так как область определения линейного оператора есть линейное множество, $\mathcal{D}(A_a) \subset \mathcal{D}(A_a^{1/2})$ и $A_a^{-1/2}Q_1^*\eta \in \mathcal{D}(A_a^{1/2})$ для любого $\eta \in H_0$, то $\vec{v}$ также принадлежит $\mathcal{D}(A_a^{1/2})$.

II этап. Проверяется непосредственно, что оператор $\mathcal{A}_a$ представим в виде

$$\mathcal{A}_a = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ -Q_1A_a^{-1/2} & I_\Gamma & 0 \\ -Q_2A_a^{-1/2} & 0 & I_{\mathfrak{L}_2(\Omega)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_a & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{W}_1^+ & Q_1Q_2^* \\ 0 & Q_2Q_1^+ & \mathcal{W}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & A_a^{-1/2}Q_1^+ & A_a^{-1/2}Q_2^* \\ 0 & I_\Gamma & 0 \\ 0 & 0 & I_{\mathfrak{L}_2(\Omega)} \end{pmatrix},$$

где $\mathcal{W}_1^+ = aI_\Gamma + Q_1Q_1^+$. Замыкание $\widehat{\mathcal{A}}$ оператора $\mathcal{A}_a$ состоит в замене оператора Q_1^+ на Q_1^*. Действительно, после такого замыкания оператор $\widehat{\mathcal{A}}$ представим в виде произведения $\widehat{\mathcal{A}} = H_1 W_A H_2$ замкнутых операторов. При этом операторы H_i^{-1} $(i = 1, 2)$ ограничены, так как операторы $A_a^{-1/2}$, Q_1 и Q_2 ограничены. Если показать, что W_A^{-1} ограничен, то отсюда будет следовать, что оператор $\widehat{\mathcal{A}}$ замкнут.

Найдем W_A^{-1}, для этого рассмотрим уравнение

$$\begin{pmatrix} A_a & 0 & 0 \\ 0 & aI_\Gamma + Q_1Q_1^* & Q_1Q_2^* \\ 0 & Q_2Q_1^* & aI_{\mathfrak{L}_2(\Omega)} + Q_2Q_2^* \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{v} \\ \eta \\ \sigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{v}_1 \\ \eta_1 \\ \sigma_1 \end{pmatrix},$$

которое равносильно системе трех уравнений

$$A_a\vec{v} = \vec{v}_1, \quad (aI_\Gamma + Q_1Q_1^*)\eta + Q_1Q_2^*\sigma = \eta_1, \quad Q_2Q_1^*\eta + (aI_{\mathfrak{L}_2(\Omega)} + Q_2Q_2^*)\sigma = \sigma_1.$$

Оператор $aI_\Gamma + Q_1Q_1^*$ является положительно определенным, поэтому существует ограниченный обратный к нему оператор: $M = (aI_\Gamma + Q_1Q_1^*)^{-1}$. Следовательно, из второго уравнения имеем $\eta = M\eta_1 - MQ_1Q_2^*\sigma$. Подставим полученный результат в третье уравнение:

$$Q_2Q_1^*M\eta_1 + \left(aI_{\mathfrak{L}_2(\Omega)} + Q_2Q_2^* - Q_2Q_1^*MQ_1Q_2^*\right)\sigma = \sigma_1.$$

Покажем, что оператор $F = aI_{\mathfrak{L}_2(\Omega)} + Q_2Q_2^* - Q_2Q_1^*MQ_1Q_2^*$ является положительно определенным. Предварительно отметим, что нормы операторов Q_i $(i = 1, 2)$ равномерно ограничены по a. Действительно, рассмотрим, например, оператор Q_1:

$$\|Q_1\| = \|G^*A_a^{-1/2}\| = \|G^*A_\varepsilon^{-1/2}A_\varepsilon^{1/2}A_a^{-1/2}\|, \tag{3.4}$$

где $A_\varepsilon = A + \varepsilon I$. При этом для любого $\varepsilon \leqslant a$ имеем

$$\|A_\varepsilon^{1/2}A_a^{-1/2}u\|^2 = \Big\|\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda_k+\varepsilon}{\lambda_k+a}\right)^{1/2}(u,u_k)u_k\Big\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda_k+\varepsilon}{\lambda_k+a}\right)\|(u,u_k)\|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=1}^{\infty}|(u,u_k)|^2 = \|u\|^2 \qquad \Longrightarrow \qquad \|A_\varepsilon^{1/2}A_a^{-1/2}\| \leqslant 1. \tag{3.5}$$

Подставим оценку (3.5) в (3.4):

$$\|Q_1\| = \|G^*A_\varepsilon^{-1/2}A_\varepsilon^{1/2}A_a^{-1/2}\| \leqslant \|G^*A_\varepsilon^{-1/2}\| \cdot \|A_\varepsilon^{1/2}A_a^{-1/2}\| \leqslant c = \text{const}.$$

Отсюда следует, что норма оператора Q_1 равномерно ограничена по a. Аналогично проверяется равномерная ограниченность по a для оператора Q_2. Таким образом, для любого $u \in \mathfrak{L}_2(\Omega)$ имеем

$$(Ku,u) = \left(\left(aI_{\mathfrak{L}_2(\Omega)} + Q_2Q_2^* - Q_1Q_1^*\left(aI_\Gamma + Q_2Q_1^*\right)^{-1}Q_1Q_2^*\right)u,u\right) =$$
$$= a(u,u) + \|Q_2^*u\|^2 - \left(\left(\left(aI_\Gamma + Q_1Q_1^*\right)^{-1}Q_1Q_2^*\right)u, Q_1Q_2^*u\right) \geqslant a(u,u) -$$
$$- \|\left(aI_\Gamma + Q_1Q_1^*\right)^{-1}\| \cdot \|Q_1Q_2^*u\|^2 \geqslant a(u,u) - a^{-1}\cdot\|Q_1Q_2^*u\|^2 \geqslant \left(a - a^{-1}\cdot\|Q_1Q_2^*\|^2\right)\|u\|^2.$$

Остается выбрать a так, чтобы $\|Q_1Q_2^*\| < a$.

С учетом выше сказанного,

$$W_A^{-1} = \begin{pmatrix} A_a^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & M + MQ_1Q_2^*K^{-1}Q_2Q_1^*M & -MQ_1Q_2^*K^{-1} \\ 0 & K^{-1}Q_2Q_1^*M & K^{-1} \end{pmatrix}.$$

Все элементы обратной матрицы являются ограниченными операторами, а значит W_A^{-1} ограничен и поэтому оператор $\widehat{\mathcal{A}}$ замкнут. □

Вместо задачи (3.2) рассмотрим задачу Коши для замкнутого оператора:

$$\frac{dy}{dt} + (\widehat{\mathcal{A}} + \mathcal{S})y = f(t), \quad y(0) = y^0. \tag{3.6}$$

Используя факторизацию (3.3) для оператора $\widehat{\mathcal{A}}$, осуществим замену

$$\widetilde{T}y = y_1, \quad y_1 = (\vec{v}_1, \eta_1, \sigma_1)^\tau, \quad \widetilde{T} = \begin{pmatrix} I & T_3 & T_4 \\ 0 & I_\Gamma & 0 \\ 0 & 0 & I_{\mathfrak{L}_2(\Omega)} \end{pmatrix},$$

и применим к (3.6) слева оператор $\widetilde{T}$.

В результате приходим к следующей задаче:

$$\frac{dy_1}{dt} + (\mathcal{I} + \mathcal{T})\mathcal{A}_\omega y_1 + \widetilde{\mathcal{S}} y_1 = f(t), \quad y_1(0) = y_1^0, \tag{3.7}$$

$$\mathcal{I} + \mathcal{T} = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I_\Gamma & 0 \\ 0 & 0 & I_{\mathfrak{L}_2(\Omega)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} T_3T_1 + T_4T_2 & T_3 & T_4 \\ T_1 & 0 & 0 \\ T_2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{A}_\omega = \begin{pmatrix} A_a & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{W}_1 & Q_1Q_2^* \\ 0 & Q_2Q_1^* & \mathcal{W}_2 \end{pmatrix}, \qquad \widetilde{\mathcal{S}} = \begin{pmatrix} 2i\omega_0 S_0 & -2i\omega_0 S_0 T_3 & -2i\omega_0 S_0 T_4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

При этом оператор $\mathcal{T}$ — компактный, $\widetilde{\mathcal{S}}$ — ограниченный, а оператор $\mathcal{A}_\omega$ есть самосопряженный положительно определенный оператор. Для доказательства последнего факта достаточно показать, что оператор

$$\begin{pmatrix} \mathcal{W}_1 & Q_1Q_2^* \\ Q_2Q_1^* & \mathcal{W}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aI_\Gamma & 0 \\ 0 & aI_{\mathfrak{L}_2(\Omega)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Q_1Q_1^* & Q_1Q_2^* \\ Q_2Q_1^* & Q_2Q_2^* \end{pmatrix} = a\mathcal{I} + \mathcal{N}_Q$$

является положительно определенным. Предварительно заметим, что норма оператора $\mathcal{N}_Q$ равномерно ограничена по a. Действительно

$$\|\mathcal{N}_Q\| \leqslant \max\bigl\{\|Q_1Q_1^*\|,\ \|Q_1Q_2^*\|,\ \|Q_2Q_1^*\|,\ \|Q_2Q_2^*\|\bigr\} \leqslant \\ \leqslant \max\bigl\{\|Q_1\|^2,\ \|Q_2\|^2,\ \|Q_1\|\cdot\|Q_2\|\bigr\} \leqslant c = \text{const},$$

так как нормы операторов Q_i $(i = 1, 2)$ равномерно ограничены по a (см. лемму 3.2). Рассмотрим квадратичную форму оператора $a\mathcal{I} + \mathcal{N}_Q$. Для любого u из $H_0 \oplus \mathfrak{L}_2(\Omega)$ имеем

$$\bigl((a\mathcal{I} + \mathcal{N}_Q)u, u\bigr) = a\|u\|^2 + (\mathcal{N}_Q u, u) \geqslant a\|u\|^2 - \|\mathcal{N}_Q\|\cdot\|u\|^2 = (a - \|\mathcal{N}_Q\|)\,\|u\|^2.$$

Выбирая теперь a так, чтобы $a > \|\mathcal{N}_Q\|$, приходим к положительной определенности оператора $a\mathcal{I} + \mathcal{N}_Q$ и следовательно, к положительной определенности оператора $\mathcal{A}_\omega$.

Так как для оператора $(-\mathcal{A}_\omega)$ уравнение $dy_1/dt + \mathcal{A}_\omega y_1 = 0$ является абстрактным параболическим (см. [22, с. 104, 121]), и соответствующая полугрупп аналитична в секторе, содержащем положительную полуось, то (см., например, [22, с. 183], [21, с. 248]) уравнение

$$\frac{dy_1}{dt} + \Bigl(\mathcal{I} + (\mathcal{T} + \widetilde{\mathcal{S}}\mathcal{A}_\omega^{-1})\Bigr)\mathcal{A}_\omega y_1 = 0$$

будет также абстрактным параболическим (см. [22, с. 181]). Соответствующая полугруппа аналитична в секторе, содержащем положительную полуось.

Таким образом, если в уравнении (3.7), принимающем вид

$$\frac{dy_1}{dt} + (\mathcal{T} + \widetilde{\mathcal{S}}\mathcal{A}_\omega^{-1})\mathcal{A}_\omega y_1 = f(t),$$

функция $f(t)$ удовлетворяет условию Гёльдера $\bigl($будем писать $f(t) \in C^k(\mathbb{R}_+; \vec{L}_2(\Omega, \rho_0))\bigr)$, то есть для каждого $\tau \in \mathbb{R}_+$ найдутся такие числа $K = K(\tau) > 0$, $k = k(\tau) \in (0, 1]$, что

$$\|f(t) - f(s)\| \leqslant K|t - s|^k \quad \text{при} \quad 0 \leqslant s, t \leqslant \tau, \tag{3.8}$$

тогда, с учетом замены, задача (3.6) (см. [23, с. 130]) имеет единственное сильное решение (в смысле определения 2.1) при $y^0 \in \mathcal{D}(\widehat{\mathcal{A}})$.

Для $y(t) = (\vec{v}(t); \eta(t); \sigma(t))^\tau$ уравнение (3.6) выполнено для любого t, то есть следующие уравнения и начальные данные имеют место (используем факторизацию с симметрическим окаймлением):

$$d\vec{v}/dt + A_a(\vec{v} + A_a^{-1/2}Q_1^*\eta) + C\sigma + 2iw_0S_0\vec{v} = \vec{f}_{0,S}(t)e^{-at}, \quad \vec{v}(0) = \vec{u}^0, \tag{3.9}$$
$$d\eta/dt - Q_1A_a^{1/2}\vec{v} + a\eta = 0,\ \eta(0) = B_0^{1/2}\zeta^0, \quad d\sigma/dt - Q_2A_a^{1/2}\vec{v} + a\sigma = 0,\ \sigma(0) = \rho^0.$$

Учитывая определение $\mathcal{D}(\widehat{\mathcal{A}})$, отметим что скобки в первом уравнении раскрыть нельзя, так как каждое слагаемое в скобках может принадлежать $\mathcal{D}(A_a^{1/2})$ и только сумма попадает в $\mathcal{D}(A_a)$. Поэтому цель дальнейших преобразований — избавиться от упомянутого затруднения и перейти от (3.9) к системе уравнений, отвечающей не замкнутому оператору $\widehat{\mathcal{A}}$, а его сужению $\mathcal{A}_a$. Для этого умножим второе уравнение системы на e^{at}, тогда $d/dt\,(e^{at}\eta(t)) = e^{at}Q_1A_a^{1/2}\vec{v}(t)$. Таким образом, $\eta(t)$ выражается по формуле

$$\eta(t) = \eta^0e^{-at} + \int_0^t e^{-a(t-s)}Q_1A_a^{1/2}\vec{v}(s)ds, \quad \eta^0 = \widehat{\zeta}^0 = B_0^{1/2}\zeta^0.$$

Подставляя полученное выражение в первое уравнение (3.9), получаем

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + A_a\vec{v}_a(t) + C\sigma + 2iw_0S_0\vec{v} = \vec{f}_{0,S}(t)e^{-at}, \tag{3.10}$$
$$\vec{v}_a(t) := \vec{v}(t) + e^{-at}A_a^{-1/2}Q_1^*\eta^0 + A_a^{-1/2}Q_1^*\int_0^t e^{-a(t-s)}Q_1A_a^{1/2}\vec{v}(s)ds \in C(\mathbb{R}_+;\mathcal{D}(A_a)). \tag{3.11}$$

По условию теоремы $B_0^{1/2}\eta^0 \in \mathcal{D}(G)$, следовательно (согласно лемме 3.1) $Q_1^*\eta^0 = Q_1^+\eta^0$ и поэтому $A_a^{-1/2}Q_1^*\eta^0 = A_a^{-1}GB_0^{1/2}\eta^0 \in \mathcal{D}(A_a)$.

Рассмотрим оператор $P = A_a^{-1/2}Q_1^*Q_1A_a^{1/2} = A_a^{-1/2}Q_1^*B_0^{1/2}\gamma_n$, $\mathcal{D}(P) = \mathcal{D}(A_a^{1/2})$. Введем $\mathcal{D}(A_a)$ как гильбертово пространство с нормой графика $\|\vec{v}\|_{\mathcal{D}(A_a)} := \|A_a\vec{v}\|$. Тогда сужение $P_a := P|_{\mathcal{D}(A_a)}$ есть линейный ограниченный оператор, действующий в $\mathcal{D}(A_a)$. Этот факт позволяет рассмотреть соотношение (3.11) как интегральное уравнение Вольтерра второго рода в пространстве $\mathcal{D}(A_a)$. Здесь функция

$$\vec{v}_a(t) - e^{-at}A_a^{-1/2}Q_1^*\eta^0 \in C(\mathbb{R}_+; D(A_a))$$

и ядро $P_ae^{-a(t-s)}$ интегрального оператора непрерывно по t, s на $\mathcal{D}(A_a)$. Поэтому задача (3.11) имеет единственное решение $\vec{v}(t) \in C(\mathbb{R}_+;\mathcal{D}(A_a))$ и каждое слагаемое в (3.11) есть элемент из $C(\mathbb{R}_+;\mathcal{D}(A_a))$. Таким образом, в уравнении (3.10) и потому в первом уравнении (3.9) можно раскрыть скобки. Следовательно, для функции $y(t) = (\vec{v}(t); \eta(t); \sigma(t))^\tau$ выполнено уравнение (3.2) с незамкнутым оператором $\mathcal{A}_a$.

Итогом рассуждений является следующая теорема.

Теорема 3.1. *Пусть выполнены условия*

$$\vec{u}^0 \in \mathcal{D}(A), \quad B_0\zeta^0 \in \mathcal{D}(G) = H_\Gamma^{1/2}, \quad \rho^0 \in \mathfrak{L}_2(\Omega), \quad \vec{f}(t) \in C^k(\mathbb{R}_+; \vec{L}_2(\Omega, \rho_0))$$

для задачи Коши (2.7) (*см. подробнее обозначение* (3.8)). *Тогда она имеет единственное сильное решение* (*в смысле определения* 2.1).

Заключение

В параграфе 1 приведена математическая постановка задачи о малых движениях вязкой стратифицированной жидкости, частично заполняющей некоторый контейнер, который равномерно вращается вокруг оси, сонаправленной с действием силы тяжести. Предполагается, что состояние относительного равновесия устойчиво по линейному приближению.

В параграфе 2 исходная начально-краевая задача приводится к дифференциально-операторному уравнению первого порядка в некотором гильбертовом пространстве, где основной оператор аккретивен. Далее, с полученным уравнением ассоциируется аналогичное уравнение с максимально аккретивным оператором. Применение метода операторных блок-матриц, а также абстрактных дифференциально-операторных уравнений, позволило доказать в параграфе 3 теорему о разрешимости полученной задачи Коши. Затем путем выбора начальных условий из области определения незамкнутого оператора удается доказать, что соответствующее решение также лежит в области определения данного оператора.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Габов С. А., Свешников А. Г. Задачи динамики стратифицированных жидкостей. М.: Наука, 1986.
2. Габов С. А., Свешников А. Г. Линейные задачи теории нестационарных внутренних волн. М.: Наука, 1990.
3. Холодова С. Е. Волновые движения в сжимаемой стратифицированной вращающейся жидкости // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2007. Т. 47. № 12. С. 2101–2109. http://mi.mathnet.ru/zvmmf214
4. Перегудин С. И., Холодова С. Е. Моделирование и анализ течений и волн в жидких и сыпучих средах. СПб.: Изд-во Санкт-Петербургского государственного ун-та, 2009.
5. Демиденко Г. В., Успенский С. В. Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. Новосибирск: Научная книга, 1998.
6. Щипицын В. Д. Колебания неосесимметричного цилиндра в заполненной жидкостью полости, совершающей вращательные осцилляции // Письма в журнал технической физики. 2020. Т. 46. Вып. 15. С. 43–46. https://doi.org/10.21883/PJTF.2020.15.49749.18349
7. Дерендяев Н. В. Исследование устойчивости вращения роторных систем с жидкостью // Автоматика и телемеханика. 2020. № 8. С. 106–118. https://doi.org/10.31857/S0005231020080085
8. Amaouche M., Abderrahmane H. A. An exact eigenfrequency equation for the oscillations of a viscous fluid contained in an open and rectangular vessel with a flexible wall // European Journal of Mechanics – B/Fluids. 2018. Vol. 70. P. 1–5. https://doi.org/10.1016/j.euromechflu.2018.02.001
9. Базаркина О. А., Тактаров Н. Г. Вращательные колебания пористой сферической оболочки с непроницаемым ядром в вязкой жидкости // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2020. № 1 (53). С. 73–87. https://doi.org/10.21685/2072-3040-2020-1-6
10. Кравцов А. В. Асимптотическое решение задачи о вынужденных колебаниях вязкой стратифицированной жидкости // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1997. Т. 37. № 12. С. 1498–1505. http://mi.mathnet.ru/zvmmf1985
11. Zakora D. A. On properties of root elements in the problem on small motions of viscous relaxing fluid // Журнал математической физики, анализа, геометрии. 2017. Т. 13. № 4. С. 402–413. https://doi.org/10.15407/mag13.04.402
12. Закора Д. А. Модель сжимаемой жидкости Олдройта // Труды Крымской осенней математической школы-симпозиума. Современная математика. Фундаментальные направления. Т. 61. М.: РУДН, 2016. С. 41–66. https://www.mathnet.ru/rus/cmfd301
13. Закора Д. А. Спектральные свойства оператора в задаче о колебании смеси вязких сжимаемых жидкостей // Дифференциальные уравнения. 2023. Т. 59. № 4. С. 467–482. https://www.elibrary.ru/item.asp?id=51700364

14. Фордук К. В. Колебания системы твёрдых тел, частично заполненных вязкими жидкостями, под действием упругодемпфирующего устройства // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2022. Т. 42. С. 103–120. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2022.42.103
15. Цветков Д. О. Колебания стратифицированной жидкости, частично покрытой льдом (общий случай) // Математические заметки. 2020. Т. 107. Вып. 1. С. 130–144. https://doi.org/10.4213/mzm12340
16. Tsvetkov D. O. Oscillations of a liquid partially covered with ice // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2021. Vol. 42. No. 5. С. 1078–1093. https://doi.org/10.1134/S199508022105019X
17. Tsvetkov D. O. Crumbled ice on the surface of a multilayered fluid // Сибирские электронные математические известия. 2020. Т. 17. С. 777–801. https://doi.org/10.33048/semi.2020.17.056
18. Цветков Д. О. Об одной начально-краевой задаче, возникающей в динамике вязкой стратифицированной жидкости // Известия вузов. Математика. 2020. № 8. С. 59–73. https://doi.org/10.26907/0021-3446-2020-8-59-73
19. Цветков Д. О. Задача о нормальных колебаниях вязкой стратифицированной жидкости с упругой мембраной // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2021. Т. 31. Вып. 2. С. 311–330. https://doi.org/10.35634/vm210211
20. Kopachevsky N. D., Krein S. G. Operator approach to linear problems of hydrodynamics. Vol. 1: Self-adjoint problems for an ideal fluid. Basel: Birkhäuser, 2001. https://doi.org/10.1007/978-3-0348-8342-9
21. Копачевский Н. Д., Азизов Т. Я., Закора Д. А., Цветков Д. О. Операторные методы в прикладной математике. Т. 2. Основные курсы. Симферополь: Ариал, 2022. https://elibrary.ru/item.asp?id=49376993
22. Крейн С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховых пространствах. М.: Наука, 1967.
23. Голдстейн Дж. Полугруппы линейных операторов и их приложения. К.: Выща школа, 1989.
24. Копачевский Н. Д. Об абстрактной формуле Грина для тройки гильбертовых пространств и полуторалинейных форм // Труды Крымской осенней математической школы-симпозиума. Современная математика. Фундаментальные направления. Т. 57. М.: РУДН, 2015. С. 71–107. https://mi.mathnet.ru/cmfd273

Поступила в редакцию 25.09.2023

Принята к публикации 06.11.2023

Цветков Денис Олегович, к. ф.-м. н., доцент, кафедра математического анализа, Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского, Физико-технический институт, 295007, Россия, г. Симферополь, пр. Вернадского, 4.
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-1068-0102
E-mail: tsvetdo@gmail.com

Цитирование: Д. О. Цветков. Начально-краевая задача для уравнений динамики вращающейся вязкой стратифицированной жидкости // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2023. Т. 33. Вып. 4. С. 625–641.

MATHEMATICS 2023. Vol. 33. Issue 4. Pp. 625–641.

D. O. Tsvetkov

Initial-boundary value problem for the equations of dynamics of a rotating viscous stratified fluid

Keywords: stratification effect in viscous fluids, differential equation in Hilbert space, Cauchy problem.

MSC2020: 76D50, 34G10, 47B25, 76U05

DOI: 10.35634/vm230406

We study the problem of small motions of a viscous stratified fluid partially filling a container that uniformly rotates around an axis co-directed by gravity. The problem is studied on the basis of an approach related to the application of the so-called operator matrix theory. To this end, we introduce Hilbert spaces and some their subspaces, as well as auxiliary boundary value problems. The original initial-boundary value problem is reduced to the Cauchy problem for a first-order differential equation in some Hilbert space. After a detailed study of the properties of the operator coefficients corresponding to the resulting system of equations, we prove a theorem on the solvability of the Cauchy problem. On this basis, we find sufficient conditions for the existence of a solution of the original initial-boundary value problem describing the evolution of the hydro-system.

REFERENCES

1. Gabov S. A., Sveshnikov A. G. *Zadachi dinamiki stratifitsirovannykh zhidkostei* (Problems of dynamics of stratified fluids), Moscow: Nauka, 1986.
2. Gabov S. A., Sveshnikov A. G. *Lineinye zadachi teorii nestatsionarnykh vnutrennikh voln* (Linear problems in the theory of nonstationary internal waves), Moscow: Nauka, 1990.
3. Kholodova S. E. Wave motions in a compressible stratified rotating fluid, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2007, vol. 47, issue 12, pp. 2014–2022. https://doi.org/10.1134/S0965542507120111
4. Peregudin S. I., Kholodova S. E. *Modelirovanie i analiz techenii i voln v zhidkikh i sypuchikh sredakh* (Modeling and analysis of flows and waves in liquid and granular media), Saint Petersburg: Saint Petersburg University, 2009.
5. Demidenko G. V., Upsenskii S. V. *Partial differential equations and systems not solvable with respect to the highest-order derivative*, CRC Press, 2003. https://doi.org/10.1201/9780203911433
6. Shchipitsyn V. D. Vibrations of a nonaxisymmetric cylinder in a cavity filled with liquid and performing rotational oscillations, *Technical Physics Letters*, 2020, vol. 46, issue 8, pp. 771–774. https://doi.org/10.1134/S1063785020080143
7. Derendyaev N. V. A study of stability of rotation for rotary systems with liquid, *Automation and Remote Control*, 2020, vol. 81, issue 8, pp. 1450–1460. https://doi.org/10.1134/S000511792008007X
8. Amaouche M., Abderrahmane H. A. An exact eigenfrequency equation for the oscillations of a viscous fluid contained in an open and rectangular vessel with a flexible wall, *European Journal of Mechanics – B/Fluids*, 2018, vol. 70, pp. 1–5. https://doi.org/10.1016/j.euromechflu.2018.02.001
9. Bazarkina O. A., Taktarov N. G. Rotary vibrations of a porous spherical shell with an impermeable core in a viscous liquid, *University Proceedings. Volga Region. Physical and Mathematical Sciences*, 2020, no. 1 (53), pp. 73–87 (in Russian). https://doi.org/10.21685/2072-3040-2020-1-6
10. Kravtsov A. V. Asymptotic solution of the problem of forced oscillation of viscous stratified fluid, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1997, vol. 37, no. 12, pp. 1452–1459. https://www.mathnet.ru/eng/zvmmf1985
11. Zakora D. A. On properties of root elements in the problem on small motions of viscous relaxing fluid, *Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry*, 2017, vol. 13, no. 4, pp. 402–413. https://doi.org/10.15407/mag13.04.402
12. Zakora D. A. Oldroyd model for compressible fluids, *Journal of Mathematical Sciences*, 2019, vol. 239, issue 5, pp. 582–607. https://doi.org/10.1007/s10958-019-04317-7

13. Zakora D. A. Spectral properties of the operator in the problem of oscillations in a mixture of viscous compressible fluids, *Differential Equations*, 2023, vol. 59, no. 4, pp. 473–490. https://doi.org/10.1134/S0012266123040043
14. Forduk K. V. Oscillations of a system of rigid bodies partially filled with viscous fluids under the action of an elastic damping device, *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2022, vol. 42, pp. 103–120 (in Russian). https://doi.org/10.26516/1997-7670.2022.42.103
15. Tsvetkov D. O. Oscillations of a stratified liquid partially covered with ice (general case), *Mathematical Notes*, 2020, vol. 107, issue 1, pp. 160–172. https://doi.org/10.1134/S0001434620010150
16. Tsvetkov D. O. Oscillations of a liquid partially covered with ice, *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2021, vol. 42, no. 5, pp. 1078–1093. https://doi.org/10.1134/S199508022105019X
17. Tsvetkov D. O. Crumbled ice on the surface of a multilayered fluid, *Sibirskie Èlektronnye Matematicheskie Izvestiya*, 2020, vol. 17, pp. 777–801. https://doi.org/10.33048/semi.2020.17.056
18. Tsvetkov D. O. On an initial-boundary value problem which arises in the dynamics of a viscous stratified fluid, *Russian Mathematics*, 2020, vol. 64, no. 8, pp. 50–63. https://doi.org/10.3103/S1066369X20080071
19. Tsvetkov D. O. The problem of normal oscillations of a viscous stratified fluid with an elastic membrane, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2021, vol. 31, issue 2, pp. 311–330. https://doi.org/10.35634/vm210211
20. Kopachevsky N. D., Krein S. G. *Operator approach to linear problems of hydrodynamics. Vol. 1: Self-adjoint problems for an ideal fluid*, Basel: Birkhäuser, 2001. https://doi.org/10.1007/978-3-0348-8342-9
21. Kopachevsky N. D., Azizov T. Ya., Zakora D. A., Tsvetkov D. O. *Operatornye metody v prikladnoi matematike. T. 2. Osnovnye kursy* (Operator methods in applied mathematics. Vol. 2. Basic courses), Simferopol: Arial, 2022. https://elibrary.ru/item.asp?id=49376993
22. Krein S. G. *Linear differential equations in Banach spaces*, Boston: Birkhäuser, 1982. https://doi.org/10.1007/978-1-4684-8068-9
23. Goldstein J. A. *Semigroups of linear operators and applications*, Oxford and New York: Oxford University Press, 1985.
24. Kopachevsky N. D. Abstract Green formulas for triples of Hilbert spaces and sesquilinear forms, *Journal of Mathematical Sciences*, 2017, vol. 225, issue 2, pp. 226–264. https://doi.org/10.1007/s10958-017-3470-9

Received 25.09.2023

Accepted 06.11.2023

Denis Olegovich Tsvetkov, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Mathematical Analysis, V. I. Vernadsky Crimean Federal University, Institute of Physics and Technology, pr. Vernadskogo, 4, Simferopol, 295007, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-1068-0102
E-mail: tsvetdo@gmail.com

Citation: D. O. Tsvetkov. Initial-boundary value problem for the equations of dynamics of a rotating viscous stratified fluid, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2023, vol. 33, issue 4, pp. 625–641.