

УДК 519.63

© *А. С. Караваяев, С. П. Копысов*

МЕТОД КОМПОЗИЦИИ РЕШЕНИЙ В КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧАХ С ТРЕНИЕМ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТЕЛ

Предложен новый итерационный метод решения статических контактных задач двух деформируемых тел, основанный на поочередном решении задачи одностороннего контакта для первого тела и задачи линейной теории упругости с естественными граничными условиями для второго тела. Выполнение условий закона трения Кулона достигнуто за счет коррекции касательных узловых сил в зоне скольжения и задания кинематических граничных условий в зоне сцепления на контактной границе первого тела. Постепенное выравнивание контактных нагрузок на взаимодействующих поверхностях осуществляется в процессе решения задачи линейной теории упругости для второго тела. Преимущества метода продемонстрированы на решении ряда модельных примеров, включая односторонний контакт линейно-упругой пластины с твердым основанием, двухсторонний контакт вдавливания деформируемого блока в основание, задачу Герца о контакте двух деформируемых цилиндров и др. Разработанный метод применим для решения контактных задач с плоскими и криволинейными границами взаимодействия.

Ключевые слова: контактная задача, закон трения Кулона, метод конечных элементов.

DOI: [10.35634/vm230408](https://doi.org/10.35634/vm230408)

Введение

Математическое моделирование процесса контакта с трением нескольких деформируемых тел имеет важное прикладное значение для многих инженерных расчетов, что обуславливает актуальность разработки эффективных вычислительных алгоритмов, учитывающих возможный нелинейный характер взаимодействия линейно-упругих тел [1]. При этом в последнее время все чаще возникает необходимость формулировки контактных взаимодействий с мягкими [2] и/или вязкоупругими материалами в связи с широким их применением [3]. Неизвестные граница и сила контактного взаимодействия требуют использования в процессе решения задачи нелинейных граничных условий. Важным компонентом также является обеспечение соблюдения контактных ограничений в используемой модели трения. Наиболее распространенная модель трения в механике деформируемого твердого тела основана на законе Кулона, где область контакта разделяется на зоны, находящиеся в состоянии сцепления либо скольжения, являющиеся, как правило, неизвестными до начала решения задачи. Алгоритмическая неустойчивость процесса определения указанных зон обусловлена наличием эффекта перехода участков контактной области из одного состояния в другое. Данная ситуация возникает в ходе корректировки касательной силы в зоне скольжения для установления ее линейной зависимости от силы нормальной реакции, при этом стабилизировать подвижную границу между зонами не всегда представляется возможным.

Во многих случаях алгоритмическая реализация контакта с трением основывается на аналогии с упругопластичностью [4, 5], что приводит к определяющим соотношениям для скорости сцепления и, таким образом, требует численного интегрирования. Тангенциальное скольжение разделяется на упругую составляющую и пластичную. Упругая составляющая определяет перемещение, которое можно рассматривать как сцепление, и связанные с этим деформации исчезают, как только нагрузка снимается. Тангенциальное пластическое скольжение выражается определяющим эволюционным уравнением, которое может

быть получено и с использованием понятий теории упругопластичности. Существующая аналогия между скольжением в задачах трения и пластической деформацией основывается на диссипативности механизмов, которые зависят от истории, а не от скорости нагружения. Строгого доказательства этому нет. Некоторые проблемы и перспективы использования методов и моделей упругопластичности в задачах с трением при различных режимах нагружения рассмотрены в [5] и цитируемой там литературы.

Современные численные методы решения контактных задач с трением основываются на различных вариантах пространственной дискретизации геометрии тел, которые включают метод конечных элементов (МКЭ) [6], метод граничных элементов [7] и бессеточные методы [8]. К наиболее широко используемому относится МКЭ, в рамках которого предложено много различных подходов. Современное их представление и применение можно найти в работах: метод штрафных функций [9]; метод множителей Лагранжа и расширенный метод Лагранжа [10]; метод решения задачи дополнительности [11]; барьерный метод [12]; методы декомпозиции (МДО) [13, 14].

Среди вышеперечисленных подходов наиболее часто используются метод штрафных функций и метод множителей Лагранжа. Однако точность вычислений первого метода сильно зависит от параметра штрафа и не может полностью удовлетворять закону трения, а в методе множителей Лагранжа увеличивается размер систем уравнений с дополнительными особенностями их решения. Метод решения задачи дополнительности и барьерный метод являются менее универсальными с точки зрения перечня типов решаемых контактных задач, что объясняется их меньшей популярностью в практических расчетах.

Методы декомпозиции показывают приемлемую точность решения и достаточно просты в реализации ввиду сохранения естественной контактной границы и отсутствия необходимости построения общей матрицы жесткости контактирующих тел. К числу их преимуществ также относится потенциальная возможность использования различных аппроксимаций краевой задачи для каждой подобласти. Однако при рассмотрении некоторых типов контактных задач таких, как задачи с учетом трения, указанные подходы показывают плохую сходимость итерационного процесса. В связи с этим перспективным направлением исследований является развитие методов на основе раздельного рассмотрения контактирующих тел с позиции расширения сферы их применимости.

В данной работе представляется метод вида предиктор–корректор, в котором одновременно формируются кинематические граничные условия в направлении нормали и силовые граничные условия (при отсутствии сцепления) в направлении касательной к контактной поверхности. Решение отдельных задач для контактирующих тел осуществляется с использованием МКЭ. Подобно методам декомпозиции области для каждого контактирующего тела вводится своя расчетная сеточная область и выбирается тот или иной вариант аппроксимации краевой задачи. Однако реализуется несколько иной композиционный подход [15], в котором задача Дирихле из МДО заменяется контактной задачей деформируемого тела с твердым основанием, при этом для второго тела на контактной границе продолжается решение задачи линейной теории упругости с естественными граничными условиями.

§ 1. Постановка задачи

Рассмотрим два однородных и изотропных линейно-упругих контактирующих тела, занимающих в пространстве области Ω^k , $k = 1, 2$, границы которых содержат три непересекающиеся части Γ_σ^k , Γ_u^k , Γ_c^k .

Контактирующие поверхности могут воспринимать только сжимающие напряжения, также на тела не действуют какие-либо объемные силы. Возникающие в области контакта силы трения подчиняются закону Кулона.

Зададим контактное непрерывное однозначное отображение $\pi^k: \Gamma_c^k \rightarrow \Gamma_c^s$, $k \neq s$, $s =$

$= 1, 2$, определяющее для каждой точки $\mathbf{x} \in \Gamma_c^k$ соответствующую сходную точку $\mathbf{y} = \pi^k(\mathbf{x})$ на контактной границе противоположного тела Γ_c^s .

Для каждой точки $\mathbf{x} \in \Gamma_c^k$ вычислим единичную внешнюю нормаль к границе противоположного тела

$$\mathbf{n}_\pi^k(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbf{y} - \mathbf{x} / \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|, & \mathbf{x} \neq \mathbf{y}; \\ \mathbf{n}^k(\mathbf{x}), & \mathbf{x} = \mathbf{y}. \end{cases}$$

Также определим начальное перекрытие и относительное перемещение контактных поверхностей вдоль нормальной и касательной составляющих:

$$\begin{aligned} \delta^k(\mathbf{x}) &= (\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot \mathbf{n}_\pi^k(\mathbf{x}), \\ [u_n^k(\mathbf{x})] &= (\mathbf{u}^k(\mathbf{x}) - \mathbf{u}^s(\mathbf{y})) \cdot \mathbf{n}_\pi^k(\mathbf{x}), \\ [u_\tau^k(\mathbf{x})] &= (\mathbf{u}^k(\mathbf{x}) - \mathbf{u}^s(\mathbf{y})) \cdot \boldsymbol{\tau}_\pi^k(\mathbf{x}), \end{aligned}$$

где $\boldsymbol{\tau}_\pi(\mathbf{x})$ — вектор касательной, вдоль которой направлены действующие в точке \mathbf{x} силы трения.

Проекции контактных нагрузок на нормаль и касательную получим из соотношений:

$$p_n^k(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^k(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}_\pi^k(\mathbf{x}), \quad p_\tau^k(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^k(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\tau}_\pi^k(\mathbf{x}).$$

Отыскиваемое векторное поле перемещений \mathbf{u}^k для каждого тела Ω^k удовлетворяет:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}^k &= 0, \quad \boldsymbol{\varepsilon}^k = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u}^k + (\nabla \mathbf{u}^k)^\top), \quad \boldsymbol{\sigma}^k = \mathbf{D}^k : \boldsymbol{\varepsilon}^k \quad \text{в } \Omega^k, \\ \mathbf{u}^k &= \bar{\mathbf{u}}^k \text{ на } \Gamma_u^k, \quad \boldsymbol{\sigma}^k \mathbf{n}^k = \bar{\mathbf{p}}^k \text{ на } \Gamma_\sigma^k, \\ \delta^k &\leq 0, \quad p_n^k \leq 0, \quad p_n^k ([u_n^k] - \delta^k) = 0 \text{ на } \Gamma_c^k, \end{aligned} \tag{1.1}$$

$$\mathbf{p}^1 = -\mathbf{p}^2 \text{ на } \Gamma_c^1 \cup \Gamma_c^2, \tag{1.2}$$

где касательные перемещения и нагрузки подчиняются закону Кулона с коэффициентом трения μ :

$$\begin{cases} p_\tau^k \leq \mu p_n^k, & [u_\tau^k] = 0; \\ p_\tau^k = \mu p_n^k, & [u_\tau^k] \neq 0. \end{cases} \tag{1.3}$$

$$\tag{1.4}$$

Изложенный далее метод решения контактной задачи реализован в рамках конечно-элементного анализа с линейной аппроксимацией неизвестных перемещений на ячейках шестигранной формы.

§ 2. Описание метода

Первоначальным этапом является формирование списка контактных узлов, куда попадают все узлы, находящиеся внутри другого тела, то есть существует некоторое начальное перекрытие тел. Далее для каждого узла в области контакта идет поиск сходной точки, которая находится на границе противоположного тела.

Поиск сходных точек для каждого из тел изображен на рис. 1. В случае тела Ω^1 сходная точка $\mathbf{y}^1 = \pi^1(\mathbf{x}^1)$ является пересечением перпендикуляра, опущенного из узла \mathbf{x}^1 к границе тела Ω^2 . Для второго тела поиск аналогичен.

Последующее определение вектора перемещений выполняется в два итерационных этапа.

Во внутреннем цикле по счетчику i осуществляется решение задачи одностороннего контакта при задании смешанных граничных условий (кинематических и силовых) для

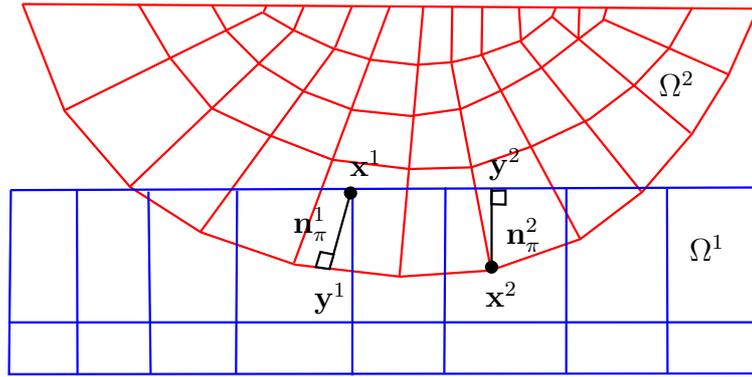


Рис. 1. Определение сходной точки $y^{(1)} \in \Gamma_C^2$ узла $x^1 \in \Gamma_C^1$ для тел на поверхностях областей контакта Γ_C^k

тела Ω^1 , при этом граница тела Ω^2 фиксируется и выступает как твердое основание. Таким образом обеспечивается выполнение условий непроникания на контактной границе (1.1) и закона Кулона (1.3), (1.4) для тела Ω^1 .

После выхода из данного цикла выполняется одна итерация внешнего цикла по счетчику j , где задаются контактные нагрузки для Ω^2 , вычисленные из реакции тела Ω^1 . В рамках этого этапа обеспечивается достижение условия равенства по контактным нагрузкам (1.2).

Задача контакта двух деформируемых тел считается решенной после прекращения внешнего цикла, что обеспечивает выполнение равенства перемещений и контактных нагрузок (1.1)–(1.2) на границе взаимодействия тел.

Алгоритм 1 Общая схема алгоритма решения контактной задачи

```

1: for  $j = 1, 2, 3 \dots$  do
2:   for  $i = 1, 2, 3 \dots$  do
3:     Отискать векторное поле перемещений  $u_i^1$ :
4:      $\text{div} \sigma_i^1 = f_i^1$ ,  $\varepsilon_i^1 = \frac{1}{2}(\nabla u_i^1 + (\nabla u_i^1)^T)$ ,  $\sigma_i^1 = D^1 : \varepsilon_i^1$  в  $\Omega^1$ ,
5:      $u_i^1 = \bar{u}^1$  на  $\Gamma_u^1$ ,  $\sigma_i^1 \mathbf{n} = \bar{p}^1$  на  $\Gamma_\sigma^1$ ,
6:     с заданием смешанных граничных условий на  $\Gamma_c^1$ .
7:     if  $\|u_i^1 - u_{i-1}^1\|_{L_2} / \|u_i^1\|_{L_2} < \epsilon$  на  $\Gamma_c^1$  then
8:       break
9:     end if
10:  end for
11:  Отискать векторное поле перемещений  $u_j^2$ :
12:   $\text{div} \sigma_j^2 = f_j^2$ ,  $\varepsilon_j^2 = \frac{1}{2}(\nabla u_j^2 + (\nabla u_j^2)^T)$ ,  $\sigma_j^2 = D^2 : \varepsilon_j^2$  в  $\Omega^2$ ,
13:   $u_j^2 = \bar{u}^2$  на  $\Gamma_u^2$ ,  $\sigma_j^2 \mathbf{n} = \bar{p}^2$  на  $\Gamma_\sigma^2$ ,
14:  с заданием естественных граничных условий на  $\Gamma_c^2$ .
15:  if  $\|u_j^2 - u_{j-1}^2\|_{L_2} / \|u_j^2\|_{L_2} < \epsilon$  на  $\Gamma_c^2$  then
16:    break
17:  end if
18: end for

```

Далее в обозначениях опустим верхний индекс тел k , кроме того, под обозначениями \mathbf{n} , $\boldsymbol{\tau}$ будем понимать вектора нормали и касательной к контактной границе противоположного тела, ранее обозначавшиеся \mathbf{n}_π , $\boldsymbol{\tau}_\pi$.

Вычисление вектора перемещений $\mathbf{u}(\mathbf{y})$ и контактной нагрузки $\mathbf{p}(\mathbf{y})$ в сходной точке \mathbf{y}

будем осуществлять интерполяцией по значениям окружающих ее узлов на границе противоположного тела [14].

Вектор касательной в узле определим как коллинеарный начальному относительному перемещению узла $[\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x})]$, вычисляемому из решения контактной задачи без трения:

$$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) = [\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x})] - (\mathbf{n}(\mathbf{x}) \cdot [\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x})])\mathbf{n}(\mathbf{x}), \quad \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x})/\|\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x})\|, \quad [\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x})] = \mathbf{u}(\mathbf{x}) - \mathbf{u}(\mathbf{y}).$$

В процессе решения задачи одностороннего контакта на каждой итерации i для тела Ω^1 строится система уравнений

$$\mathbf{K}\mathbf{u}_i = \mathbf{f}_i, \tag{2.1}$$

где \mathbf{K} , \mathbf{u}_i , \mathbf{f}_i — симметричная матрица жесткости и векторы неизвестных перемещений и задаваемых узловых сил.

При этом степени свободы, связанные с внутренними и контактными узлами, разделяются:

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{aa} & \mathbf{K}_{ac} \\ \mathbf{K}_{ca} & \mathbf{K}_{cc} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_i^a \\ \mathbf{u}_i^c \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{f}_i = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{f}} \\ 0 \end{pmatrix} \Big|_{\Gamma_\sigma} + \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{u}} \\ 0 \end{pmatrix} \Big|_{\Gamma_u} + \left[\begin{pmatrix} 0 \\ \bar{\mathbf{u}}_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{\mathbf{f}}_{\tau,i} \end{pmatrix} \right] \Big|_{\Gamma_c},$$

где индексы a , c относятся к внутренним и контактными узлам; вектор $\bar{\mathbf{u}}_i$ определяется задаваемыми условиями Дирихле для удовлетворения кинематическим условиям непроникания и сцепления (1.1), (1.3); вектор $\bar{\mathbf{f}}_{\tau,i}$ задается с целью обеспечения выполнения условия скольжения (1.4).

Необходимо отметить, что здесь и далее приведенное разделение матрицы жесткости на блоки условно и призвано более наглядно представить логику наложения граничных условий. В действительности узлы в матрице расположены в произвольном порядке, при этом в специальном массиве для каждого из них хранится признак того, является ли он контактным или нет.

Граничное условие непроникания для каждого контактного узла \mathbf{x} задается согласно формуле

$$\bar{\mathbf{u}}_i(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}_{j-1}(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) - \delta(\mathbf{x}). \tag{2.2}$$

При этом на первой итерации внутреннего цикла ($i = 1$) каждый узел в контактной области рассматривается в состоянии сцепления, что добавляет дополнительное условие по касательной компоненте перемещения

$$\bar{\mathbf{u}}_i(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}_{j-1}(\mathbf{y}) \cdot \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}). \tag{2.3}$$

На последующих итерациях ($i > 1$) для каждого контактного узла проверяется условие сцепления по закону Кулона (1.3). При его выполнении условие по касательной составляющей продолжается задаваться по формуле (2.3).

Несмотря на наличие большого числа исследований по разработке методов для решения контактных задач с трением, достижение сходимости может быть очень затратным при взаимодействии деформируемых тел сложной формы. В данной работе используем идею регуляризации закона трения из [16], предложенную для контакта с твердым основанием, сохранив ее ключевые преимущества и расширив область ее применения до контакта деформируемых тел, имеющих сложную (криволинейную) границу взаимодействия.

Для задания перехода вычислительного узла расчетной сетки в разряд скользящих, для которого обеспечивается выполнение равенства (1.4), сформируем соответствующий вектор

касательных узловых сил в виде:

$$\bar{\mathbf{f}}_{\tau,i}(\mathbf{x}) = \bar{f}_{\tau,i}(\mathbf{x})\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}), \quad (2.4)$$

$$\bar{f}_{\tau,i}(\mathbf{x}) = f_{\tau,i-1}(\mathbf{x}) \pm \frac{||p_{\tau,i-1}(\mathbf{x})| - |\mu p_{n,i-1}(\mathbf{x})||}{\max(|p_{\tau,i-1}(\mathbf{x})|, |\mu p_{n,i-1}(\mathbf{x})|)} \alpha |f_{\tau,i-1}(\mathbf{x})|, \quad (2.5)$$

где α — параметр из диапазона от 0 до 1; $f_{\tau,i-1}$ — величина касательной узловой силы с предыдущей итерации; $p_{n,i-1}$, $p_{\tau,i-1}$ — нормальная и касательная составляющие контактной нагрузки с предыдущей итерации.

Вектор контактных нагрузок в узлах определяется из решения системы уравнений

$$\left(\int_{\Gamma_c} \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Gamma \right) \mathbf{p}_{i-1} = \mathbf{f}_{i-1},$$

где \mathbf{N} — матрица функций форм четырехугольных ячеек в области контакта, \mathbf{f}_{i-1} — вектор контактных узловых сил, вычисляемый из соотношения

$$\mathbf{f}_{i-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{ca} & \mathbf{K}_{cc} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{i-1}^a \\ \mathbf{u}_{i-1}^c \end{pmatrix}.$$

Выбор знака перед вторым слагаемым в (2.5) осуществляется следующим образом:

$$\begin{cases} < - >, & \text{если } f_{\tau,i-1}(\mathbf{x}) > 0 \text{ и } |p_{\tau,i-1}(\mathbf{x})| > |\mu p_{n,i-1}(\mathbf{x})|; \\ < + >, & \text{если } f_{\tau,i-1}(\mathbf{x}) > 0 \text{ и } |p_{\tau,i-1}(\mathbf{x})| < |\mu p_{n,i-1}(\mathbf{x})|; \\ < + >, & \text{если } f_{\tau,i-1}(\mathbf{x}) < 0 \text{ и } |p_{\tau,i-1}(\mathbf{x})| > |\mu p_{n,i-1}(\mathbf{x})|; \\ < - >, & \text{если } f_{\tau,i-1}(\mathbf{x}) < 0 \text{ и } |p_{\tau,i-1}(\mathbf{x})| < |\mu p_{n,i-1}(\mathbf{x})|. \end{cases}$$

В общем случае, когда нормаль к поверхности тела в узле, в котором задаются смешанные граничные условия (2.2), (2.4), не совпадает по направлению с одной из осей глобальной системы координат, необходимо временно до решения системы уравнений (2.1) вводить в узле локальную систему координат, одна из осей которой совпадала бы с нормалью к поверхности в данном узле. Далее накладывать смешанные граничные условия, а затем, после решения (2.1), возвращать исходную систему координат с преобразованием вектора решения системы (2.1).

В этих целях для каждого контактного узла \mathbf{x} , имеющего нормаль \mathbf{n} и касательную $\boldsymbol{\tau}$, осуществляется построение локальной матрица поворота

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} \tau_1 & \tau_2 & \tau_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{pmatrix}, \quad (2.6)$$

где $\mathbf{q} = \boldsymbol{\tau} \times \mathbf{n}$, $q = \mathbf{q}/\|\mathbf{q}\|$.

Далее для контактных и внутренних узлов проводится сборка глобальной матрица поворота \mathbf{R} , имеющей диагональный вид. При этом для внутренних узлов на главной диагонали \mathbf{R} располагаются единицы, а для контактных узлов с индексами i_1, \dots, i_n строятся ортогональные матрицы поворота $\mathbf{r}_{i_1}, \dots, \mathbf{r}_{i_n}$ вида (2.6):

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & & \dots & & 0 \\ & \ddots & & & \\ \vdots & & \mathbf{r}_{i_1} & & \vdots \\ & & & \ddots & \\ 0 & & \dots & & \mathbf{r}_{i_n} \end{pmatrix}$$

В этом случае система (2.1) преобразуется к виду

$$\mathbf{R}\mathbf{K}\mathbf{u}_i = \mathbf{R}\mathbf{f}_i. \quad (2.7)$$

Ввиду того, что матрицы \mathbf{r} несимметричны, также несимметрична матрица $\mathbf{R}\mathbf{K}$. Рассмотрим способ приведения матрицы $\mathbf{R}\mathbf{K}$ к симметричному виду.

Для локальных матриц поворота справедливо

$$\mathbf{r}^T = \mathbf{r}^{-1}, \quad \mathbf{r}^T \mathbf{r} = \mathbf{E}.$$

Следовательно также

$$\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1}, \quad \mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{E}.$$

С учетом этого систему (2.7) можно преобразовать к виду

$$\hat{\mathbf{K}}\hat{\mathbf{u}}_i = \hat{\mathbf{f}}_i, \quad (2.8)$$

где

$$\hat{\mathbf{K}} = \mathbf{R}\mathbf{K}\mathbf{R}^T, \quad \hat{\mathbf{u}}_i = \mathbf{R}\mathbf{u}_i, \\ \hat{\mathbf{f}}_i = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{f}} \\ 0 \end{pmatrix} \Big|_{\Gamma_\sigma} + \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{u}} \\ 0 \end{pmatrix} \Big|_{\Gamma_u} + \mathbf{R} \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{\mathbf{u}}_i \end{pmatrix} \Big|_{\Gamma_c} + \mathbf{R} \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{\mathbf{f}}_{\tau,i} \end{pmatrix} \Big|_{\Gamma_c},$$

Матрица $\hat{\mathbf{K}}$, также как и \mathbf{K} , является симметричной, что позволяет использовать метод сопряженных градиентов при решении системы (2.8), который сходится за конечное число шагов и обладает высокой эффективностью.

В процессе выполнения итераций список контактных узлов постоянно корректируется и для каждого из них проверяется наличие сжимающей поверхностной нагрузки. Узел x исключается из рассмотрения на текущей итерации i , если

$$p_{n,i-1}(\mathbf{x}) > 0. \quad (2.9)$$

Условие выхода из итерационного процесса выполняется, когда отношение разности среднеквадратичных норм невязок в узлах контактной области между двумя соседними итерациями по перемещениям к их общей среднеквадратичной норме на текущей итерации меньше определенного заданного значения:

$$\frac{\sqrt{\sum_{\mathbf{x} \in \Gamma_c} (\mathbf{u}_i(\mathbf{x}) - \mathbf{u}_{i-1}(\mathbf{x}))^2}}{\sqrt{\sum_{\mathbf{x} \in \Gamma_c} (\mathbf{u}_i(\mathbf{x}))^2}} \leq \epsilon. \quad (2.10)$$

После решения задачи одностороннего контакта выполняется внешняя итерация по счетчику j с естественными граничными условиями на контактной области, где осуществляется решение системы уравнений для тела Ω^2 :

$$\mathbf{K}\mathbf{u}_j = \mathbf{f}_j.$$

При этом вектор правых частей принимает вид

$$\mathbf{f}_j = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{f}} \\ 0 \end{pmatrix} \Big|_{\Gamma_\sigma} + \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{u}} \\ 0 \end{pmatrix} \Big|_{\Gamma_u} + \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{\mathbf{f}}_j \end{pmatrix} \Big|_{\Gamma_c},$$

где вектор узловых сил $\bar{\mathbf{f}}_j$ задается для выполнения контактных условий (1.1), (1.2).

Вычисление $\bar{\mathbf{f}}_j$ выполняется с учетом линейной аппроксимации функции контактной нагрузки на взаимодействующих поверхностях:

$$\bar{\mathbf{f}}_j = \left(\int_{\Gamma_c} \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Gamma \right) \bar{\mathbf{p}}_j.$$

Для каждого узла компонента контактной нагрузки на итерации определяется следующим образом

$$\bar{\mathbf{p}}_j(\mathbf{x}) = \mathbf{p}_{j-1}(\mathbf{x}) - \theta_{j-1}(\mathbf{p}_{j-1}(\mathbf{x}) + \mathbf{p}(\mathbf{y})),$$

где $\mathbf{p}_{j-1}(\mathbf{x})$ — вектор контактной нагрузки в узле с предыдущей итерации $j - 1$; $\mathbf{p}(\mathbf{y})$ — вектор контактной нагрузки в сходной точке на теле $\Omega^{(1)}$, полученный по результатам решения задачи одностороннего контакта; θ_{j-1} — некий релаксирующий параметр в диапазоне от 0 до 1.

Во внешнем цикле условия корректировки списка контактных узлов и выхода из итерационного процесса аналогичны задаче одностороннего контакта (2.9) и (2.10).

§3. Тестовые примеры

Решена статическая задача контакта линейно-упругой пластины с твердым основанием из [17]. При заданных нагрузках состояние равновесия тела в горизонтальной плоскости достигалось только за счет возникающей в контактной области силы трения (рис. 2).

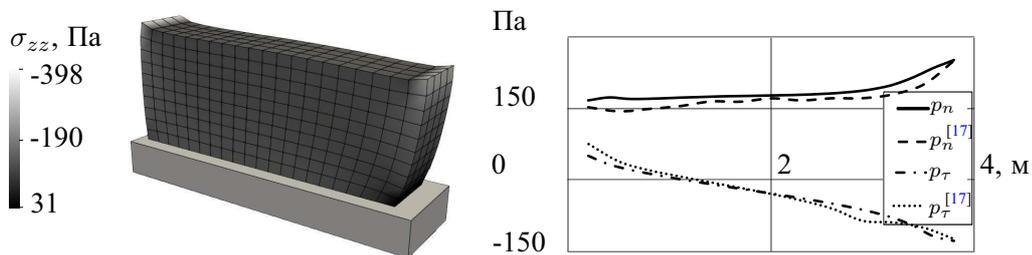


Рис. 2. Контакт пластины с основанием: напряжения σ_{zz} ; нормальная и касательная компонента контактного напряжения в разработанном методе и из [17]

Кроме того, рассмотрена квазистатическая задача одностороннего контакта деформируемого куба с твердым основанием [18], в рамках которой на верхнюю грань $ABCD$ куба, состоящего из восьми конечных шестигранных элементов, задавались условия Дирихле в течение 50-ти шагов с вертикальным или горизонтальным приращением. По графикам распределения значений компонент узловой силы в узлах F и H отчетливо видна граница зон сцепления и скольжения, находящаяся около 20-го шага нагружения (рис. 3).

Также метод применялся для решения двухстороннего статического контакта вдавливания прямоугольного блока в деформируемое основание (рис. 4, 5). Отмечается в целом хорошее согласование значений нормальной и касательной составляющих контактной нагрузки с теоретическими результатами решения указанной задачи, приведенными в работе [19]. Максимальные расхождения рассматриваемых значений не превышали 20%.

Проведена апробация метода для решения статической задачи Герца об одностороннем контакте цилиндра с твердым основанием [20]. Стабилизация размеров пятна контакта, а также зон сцепления и скольжения произошло за 18 контактных итераций (рис. 6).

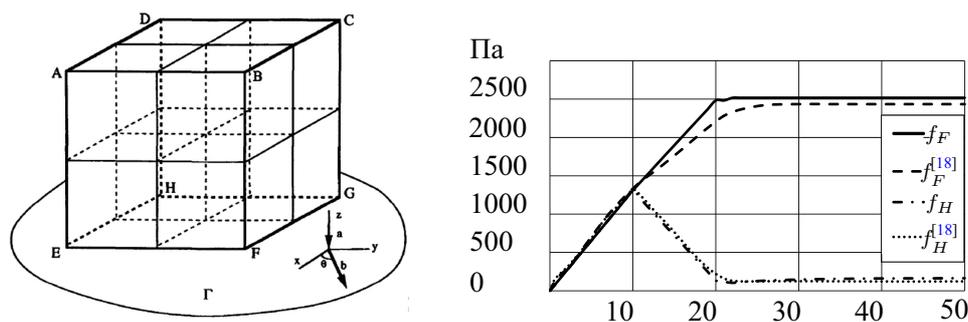


Рис. 3. Контакт куба с твердым основанием: схема задания граничных условий Дирихле на поверхность $ABDC$; распределение нормальной и касательной компонент узловой силы по шагам нагружения в узлах F и H в разработанном методе f_F, f_H и данные $f_F^{[18]}, f_H^{[18]}$ из [18]

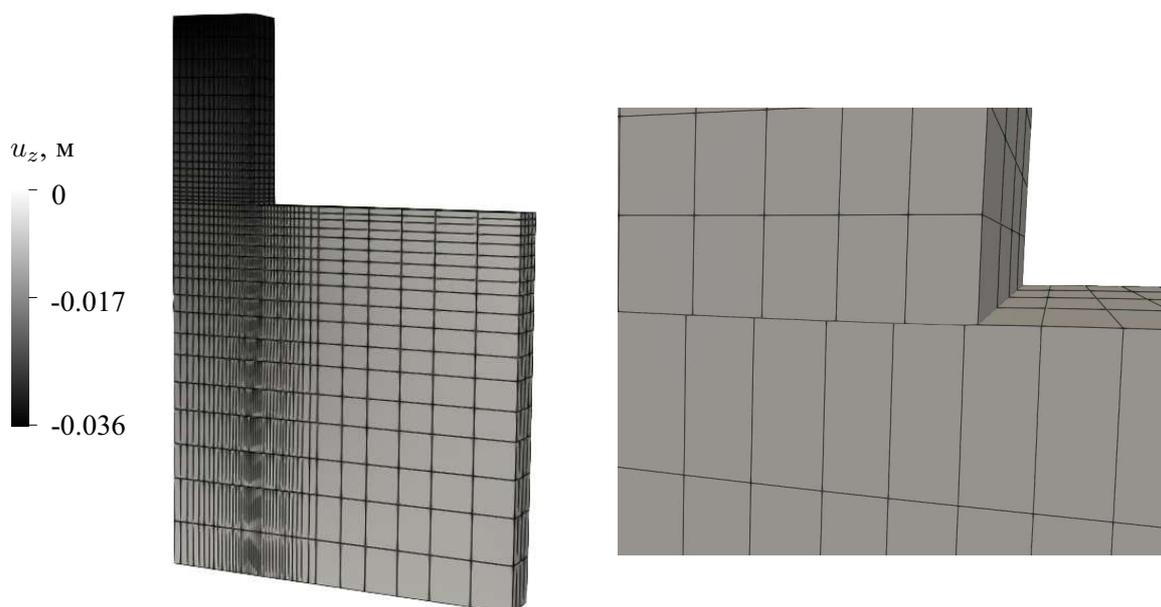


Рис. 4. Вдавливание прямоугольного блока в деформируемое основание. Значение компоненты u_z в деформируемых телах

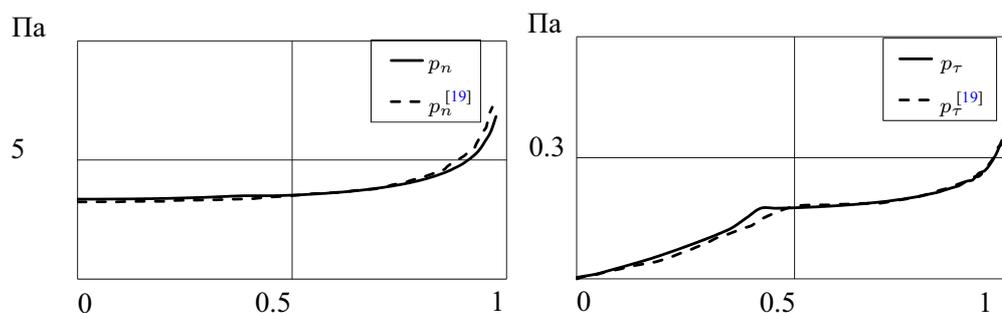


Рис. 5. Вдавливание блока в основание: нормальная $p_n, p_n^{[19]}$; и касательные $p_\tau, p_\tau^{[19]}$ компоненты касательных напряжений в разработанном методе и по данным работы [19]

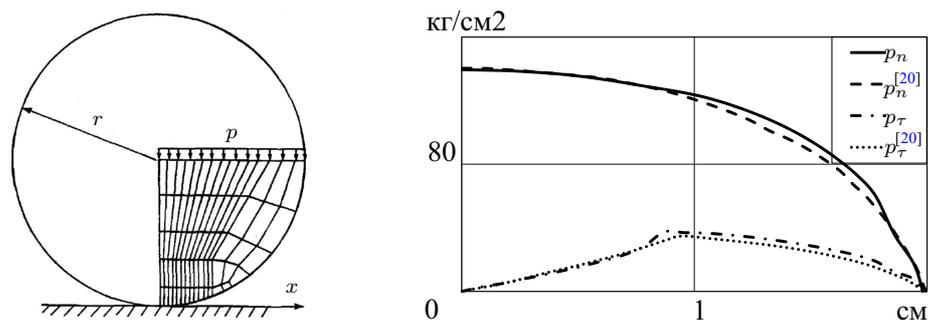


Рис. 6. Контакт цилиндра с основанием: задание граничных условий; нормальная p_n , $p_n^{[20]}$ и касательная p_τ , $p_\tau^{[20]}$ компоненты контактной нагрузки в разработанном методе и аналитическом решении из [20]

В дополнение рассмотрена задача Герца о контакте двух деформируемых цилиндров под действием вертикальной и горизонтальной нагрузки [21, 22]. Квазистатическая задача была решена в два шага с первоначальным вертикальным вдавливанием на 0.182 мм и последующим приложением горизонтального смещения в 0.03 мм.

Погрешность с теоретическими результатами решения в размерах пятна контакта составила $< 3\%$, по значениям нормальных и касательных контактных нагрузок $< 2\%$ и $< 5\%$ соответственно (рис. 7, 8).

Значения параметров α и θ , среднее число итераций внутреннего цикла N_{avr} и итоговая величина контактных итераций N_{tot} для каждой из задач приведены в таблице.

Таблица					
Параметр	Пластина	Куб	Блок и основание	Цилиндр	Два цилиндра
α	0.1	0.04	0.15	0.2	0.2
θ	-	-	0.8	-	0.5
N_{avr}	18	2	11	18	15
N_{tot}	18	100	12	18	148

§ 4. Заключение

Построен метод решения статических контактных задач с регуляризацией закона трения и отдельным рассмотрением деформируемых тел с криволинейной границей, основанный на комбинации решений более простых задач: одностороннего контакта с твердым основанием для первого из них и задачи линейной теории упругости с естественными граничными условиями для второго тела. Предложенный метод обладает всеми преимуществами характерными для семейства методов декомпозиции, при этом в отличие от них обеспечивает сходимость итерационного процесса в рамках рассмотренного типа контактного взаимодействия. Тестирование метода на решении задач о контакте двух деформируемых тел вдоль плоской либо криволинейной границы показало хорошее согласие полученных результатов с известными численными решениями других авторов.

Дальнейшее развитие метода будет связано с расширением спектра решаемых контактных задач, включающих динамические эффекты, большие деформации и взаимодействие многих тел.

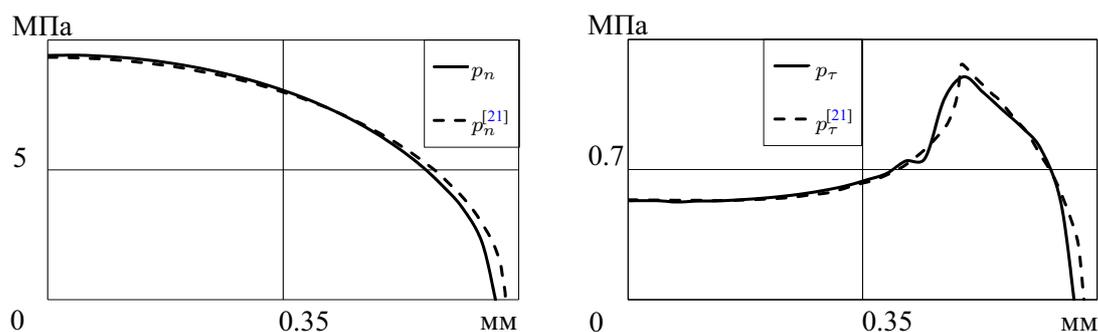


Рис. 7. Контакт двух деформируемых цилиндров: нормальная p_n , $p_n^{[21]}$; и касательные p_τ , $p_\tau^{[21]}$ компоненты контактной нагрузки в разработанном методе и аналитическом решении из [21]

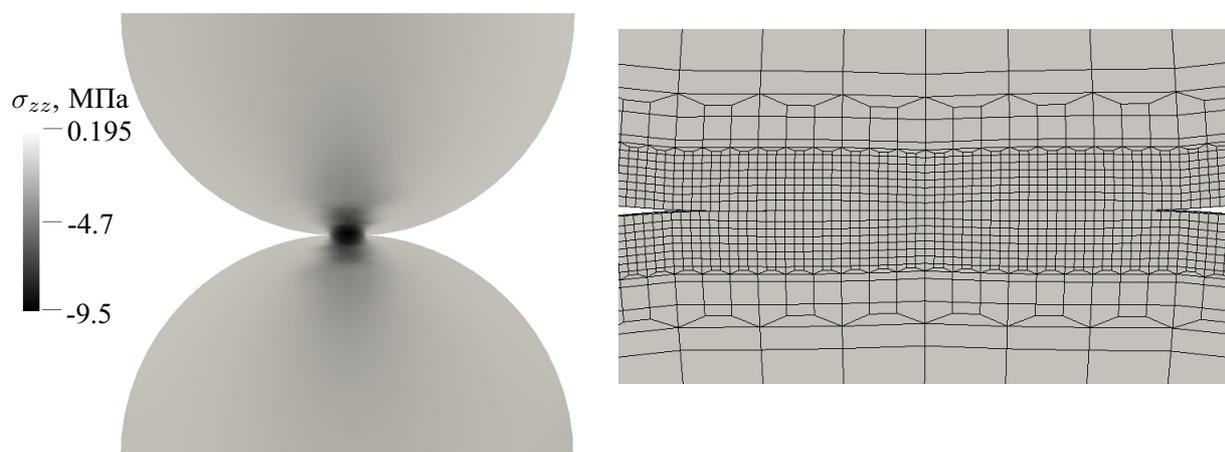


Рис. 8. Контакт двух деформируемых цилиндров. Значение компоненты σ_{zz} в деформируемых телах

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bonari J., Paggi M., Dini D. A new finite element paradigm to solve contact problems with roughness // International Journal of Solids and Structures. 2022. Vol. 253. 111643. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2022.111643>
2. Zimmerman B.K., Ateshian G.A. A surface-to-surface finite element algorithm for large deformation frictional contact in FEBIO // Journal of Biomechanical Engineering. 2018. Vol. 140. Issue 8. 081013. <https://doi.org/10.1115/1.4040497>
3. Wang Dongze, de Boer G., Neville A., Ghanbarzadeh A. A review on modelling of viscoelastic contact problems // Lubricants. 2022. Vol. 10. Issue 12. Article number: 358. <https://doi.org/10.3390/lubricants10120358>
4. Laursen T.A., Simo J.C. A continuum-based finite element formulation for the implicit solution of multibody, large deformation–frictional contact problems // International Journal for Numerical Methods in Engineering. 1993. Vol. 36. Issue 20. P. 3451–3485. <https://doi.org/10.1002/nme.1620362005>
5. Antoni N. A further analysis on the analogy between friction and plasticity in Solid Mechanics // International Journal of Engineering Science. 2017. Vol. 121. P. 34–51. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2017.08.012>
6. Liu Dongyu, van den Boom S.J., Simone A., Aragón A.M. An interface-enriched generalized finite element formulation for locking-free coupling of non-conforming discretizations and contact //

- Computational Mechanics. 2022. Vol. 70. Issue 3. P. 477–499.
<https://doi.org/10.1007/s00466-022-02159-w>
7. Vodička R., Mantič V., Roubíček T. Quasistatic normal-compliance contact problem of visco-elastic bodies with Coulomb friction implemented by QP and SGBEM // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2017. Vol. 315. P. 249–272. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2016.10.010>
 8. Nakamura K., Matsumura S., Mizutani T. Particle-to-surface frictional contact algorithm for material point method using weighted least squares // *Computers and Geotechnics*. 2021. Vol. 134. 104069. <https://doi.org/10.1016/j.compgeo.2021.104069>
 9. Benkhira El-H., Essoufi El-H., Fakhari R. On convergence of the penalty method for a static unilateral contact problem with nonlocal friction in electro-elasticity // *European Journal of Applied Mathematics*. 2016. Vol. 27. Issue 1. P. 1–22. <https://doi.org/10.1017/S0956792515000248>
 10. Burman E., Hansbo P., Larson M. G. The augmented Lagrangian method as a framework for stabilised methods in computational mechanics // *Archives of Computational Methods in Engineering*. 2023. Vol. 30. Issue 4. P. 2579–2604. <https://doi.org/10.1007/s11831-022-09878-6>
 11. Negrut D., Serban R., Tasora A. Posing multibody dynamics with friction and contact as a differential complementarity problem // *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*. 2018. Vol. 13. Issue 1. 014503. <https://doi.org/10.1115/1.4037415>
 12. Zhao Yidong, Choo Jinhyun, Jiang Yupeng, Li Minchen, Jiang Chenfanfu, Soga Kenichi. A barrier method for frictional contact on embedded interfaces // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2022. Vol. 393. 114820. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2022.114820>
 13. Bayada G., Sabil J., Sassi T. A Neumann–Neumann domain decomposition algorithm for the Signorini problem // *Applied Mathematics Letters*. 2004. Vol. 17. Issue 10. P. 1153–1159. <https://doi.org/10.1016/j.aml.2003.10.010>
 14. Караваев А. С., Копысов С. П. Пошаговый контактный алгоритм на основе метода декомпозиции Шварца для деформируемых тел // *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки*. 2017. Т. 27. Вып. 3. С. 396–413. <https://doi.org/10.20537/vm170309>
 15. Лебедев В. И. Функциональный анализ и вычислительная математика. М.: Физматлит, 2005.
 16. Станкевич И. В. Математическое моделирование контактных задач теории упругости с непрерывным односторонним контактом // *Математика и математическое моделирование. МГТУ имени Н. Э. Баумана. Электронный журнал*. 2015. № 5. С. 83–96. <https://doi.org/10.7463/mathm.0515.0812348>
 17. Oden J. T., Pires E. B. Algorithms and numerical results for finite element approximations of contact problems with non-classical friction laws // *Computers and Structures*. 1984. Vol. 19. Issues 1–2. P. 137–147. [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(84\)90212-8](https://doi.org/10.1016/0045-7949(84)90212-8)
 18. Feng Z.-Q. Some test examples of 2D and 3D contact problems involving Coulomb friction and large slip // *Mathematical and Computer Modelling*. 1998. Vol. 28. Issues 4–8. P. 469–477. [https://doi.org/10.1016/S0895-7177\(98\)00136-8](https://doi.org/10.1016/S0895-7177(98)00136-8)
 19. Olukoko O. A., Becker A. A., Fenner R. T. Three benchmark examples for frictional contact modelling using finite element and boundary elements methods // *The Journal of Strain Analysis for Engineering Design*. 1993. Vol. 28. Issue 4. P. 293–301. <https://doi.org/10.1243/03093247V284293>
 20. Lee Seok-Soon. A computational method for frictional contact problem using finite element method // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1994. Vol. 37. Issue 2. P. 217–228. <https://doi.org/10.1002/nme.1620370204>
 21. Gitterle M., Popp A., Gee M. W., Wall W. A. Finite deformation frictional mortar contact using a semi-smooth Newton method with consistent linearization // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2010. Vol. 84. Issue 5. P. 543–571. <https://doi.org/10.1002/nme.2907>
 22. Akula B. R., Vignollet J., Yastrebov V. A. MorteX method for contact along real and embedded surfaces: coupling X-FEM with the mortar method // *arXiv: 1902.04000v1 [cs.CE]*. 2019. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1902.04000>

Поступила в редакцию 20.09.2023

Принята к публикации 15.11.2023

Караваев Александр Сергеевич, к. ф.-м. н., научный сотрудник, кафедра вычислительной механики, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.

ORCID: <https://orcid.org/0009-0000-6510-8483>

E-mail: karavaev-alexander@yandex.ru

Копысов Сергей Петрович, д. ф.-м. н., профессор, кафедра вычислительной механики, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2511-5894>

E-mail: s.kopysov@gmail.com

Цитирование: А. С. Караваев, С. П. Копысов. Метод композиции решений в контактных задачах с трением деформируемых тел // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2023. Т. 33. Вып. 4. С. 659–674.

A. S. Karavaev, S. P. Kopysov

Method of solution composition in contact problems with friction of deformable bodies

Keywords: contact problem, Coulomb's friction law, finite element method.

MSC2020: 65N55

DOI: [10.35634/vm230408](https://doi.org/10.35634/vm230408)

A new iterative method for solving static contact problems of two deformable bodies is proposed. The method is based on alternately solving the unilateral contact problem for the first body and the linear elasticity problem with natural boundary conditions for the second body. Fulfillment of Coulomb's friction law involves correction of tangential nodal forces in the sliding area and setting kinematic boundary conditions in the sticking area for the contact boundary of the first body. The goal of solving the linear elasticity problem for the second body is to gradually equalize contact loads on the interacting surfaces. The advantages of the method are demonstrated by solving a number of model examples, including unilateral contact of a linear-elastic plate with a solid foundation, bilateral contact of pressing a deformable block into the foundation, the Hertz problem of contact of two deformable cylinders etc. The method can solve problems on flat and curvilinear contact boundaries.

REFERENCES

1. Bonari J., Paggi M., Dini D. A new finite element paradigm to solve contact problems with roughness, *International Journal of Solids and Structures*, 2022, vol. 253, 111643. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2022.111643>
2. Zimmerman B. K., Ateshian G. A. A surface-to-surface finite element algorithm for large deformation frictional contact in FEBIO, *Journal of Biomechanical Engineering*, 2018, vol. 140, issue 8, 081013. <https://doi.org/10.1115/1.4040497>
3. Wang Dongze, de Boer G., Neville A., Ghanbarzadeh A. A review on modelling of viscoelastic contact problems, *Lubricants*, 2022, vol. 10, issue 12, article number: 358. <https://doi.org/10.3390/lubricants10120358>
4. Laursen T. A., Simo J. C. A continuum-based finite element formulation for the implicit solution of multibody, large deformation–frictional contact problems, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1993, vol. 36, issue 20, pp. 3451–3485. <https://doi.org/10.1002/nme.1620362005>
5. Antoni N. A further analysis on the analogy between friction and plasticity in Solid Mechanics, *International Journal of Engineering Science*, 2017, vol. 121, pp. 34–51. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2017.08.012>
6. Liu Dongyu, van den Boom S. J., Simone A., Aragón A. M. An interface-enriched generalized finite element formulation for locking-free coupling of non-conforming discretizations and contact, *Computational Mechanics*, 2022, vol. 70, issue 3, pp. 477–499. <https://doi.org/10.1007/s00466-022-02159-w>
7. Vodička R., Mantič V., Roubíček T. Quasistatic normal-compliance contact problem of visco-elastic bodies with Coulomb friction implemented by QP and SGBEM, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2017, vol. 315, pp. 249–272. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2016.10.010>
8. Nakamura K., Matsumura S., Mizutani T. Particle-to-surface frictional contact algorithm for material point method using weighted least squares, *Computers and Geotechnics*, 2021, vol. 134, 104069. <https://doi.org/10.1016/j.compgeo.2021.104069>
9. Benkhira El-H., Essoufi El-H., Fakhra R. On convergence of the penalty method for a static unilateral contact problem with nonlocal friction in electro-elasticity, *European Journal of Applied Mathematics*, 2016, vol. 27, issue 1, pp. 1–22. <https://doi.org/10.1017/S0956792515000248>

10. Burman E., Hansbo P., Larson M. G. The augmented Lagrangian method as a framework for stabilised methods in computational mechanics, *Archives of Computational Methods in Engineering*, 2023, vol. 30, issue 4, pp. 2579–2604. <https://doi.org/10.1007/s11831-022-09878-6>
11. Negrut D., Serban R., Tasora A. Posing multibody dynamics with friction and contact as a differential complementarity problem, *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 2018, vol. 13, issue 1, 014503. <https://doi.org/10.1115/1.4037415>
12. Zhao Yidong, Choo Jinhyun, Jiang Yupeng, Li Minchen, Jiang Chenfanfu, Soga Kenichi. A barrier method for frictional contact on embedded interfaces, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2022, vol. 393, 114820. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2022.114820>
13. Bayada G., Sabil J., Sassi T. A Neumann–Neumann domain decomposition algorithm for the Signorini problem, *Applied Mathematics Letters*, 2004, vol. 17, issue 10, pp. 1153–1159. <https://doi.org/10.1016/j.aml.2003.10.010>
14. Karavaev A. S., Kopysov S. P. Space semidiscrete formulation of contact algorithm based on the Schwarz’s decomposition method for deformable bodies, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp’yuternye Nauki*, 2017, vol. 27, issue 3, pp. 396–413 (in Russian). <https://doi.org/10.20537/vm170309>
15. Lebedev V. I. *Funktsional’nyi analiz i vychislitel’naya matematika* (Functional analysis and computational mathematics), Moscow: Fizmatlit, 2005.
16. Stankevich I. V. Mathematical modeling of contact problems of elasticity theory with continuous unilateral contact, *Mathematics and Mathematical Modeling*, 2015, no. 5, pp. 83–96 (in Russian). <https://doi.org/10.7463/mathm.0515.0812348>
17. Oden J. T., Pires E. B. Algorithms and numerical results for finite element approximations of contact problems with non-classical friction laws, *Computers and Structures*, 1984, vol. 19, issues 1–2, pp. 137–147. [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(84\)90212-8](https://doi.org/10.1016/0045-7949(84)90212-8)
18. Feng Z.-Q. Some test examples of 2D and 3D contact problems involving Coulomb friction and large slip, *Mathematical and Computer Modelling*, 1998, vol. 28, issues 4–8, pp. 469–477. [https://doi.org/10.1016/S0895-7177\(98\)00136-8](https://doi.org/10.1016/S0895-7177(98)00136-8)
19. Olukoko O. A., Becker A. A., Fenner R. T. Three benchmark examples for frictional contact modelling using finite element and boundary elements methods, *The Journal of Strain Analysis for Engineering Design*, 1993, vol. 28, issue 4, pp. 293–301. <https://doi.org/10.1243/03093247V284293>
20. Lee Seok-Soon. A computational method for frictional contact problem using finite element method, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1994, vol. 37, issue 2, pp. 217–228. <https://doi.org/10.1002/nme.1620370204>
21. Gitterle M., Popp A., Gee M. W., Wall W. A. Finite deformation frictional mortar contact using a semi-smooth Newton method with consistent linearization, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2010, vol. 84, issue 5, pp. 543–571. <https://doi.org/10.1002/nme.2907>
22. Akula B. R., Vignollet J., Yastrebov V. A. MorteX method for contact along real and embedded surfaces: coupling X-FEM with the mortar method, *arXiv: 1902.04000v1 [cs.CE]*, 2019. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1902.04000>

Received 20.09.2023

Accepted 15.11.2023

Aleksandr Sergeevich Karavaev, Candidate of Physics and Mathematics, Researcher, Department of Computational Mechanics, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.

ORCID: <https://orcid.org/0009-0000-6510-8483>

E-mail: karavaev-alexander@yandex.ru

Sergey Petrovich Kopysov, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Department of Computational Mechanics, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2511-5894>

E-mail: s.kopysov@gmail.com

Citation: A. S. Karavaev, S. P. Kopysov. Method of solution composition in contact problems with friction of deformable bodies, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2023, vol. 33, issue 4, pp. 659–674.