ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ
МАТЕМАТИКА 2024. Т. 34. Вып. 4. С. 486–498.

УДК 512.546.8, 512.548.77, 517.986.6, 517.987.1

© *С. В. Людковский*

О СООТНОШЕНИЯХ ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ И АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ СТРУКТУР КВАЗИГРУПП

В данной статье исследуются специфические особенности соотношений между топологической и алгебраической структурами квазигрупп и луп. Исследуется измеримость подмножеств топологических квазигрупп и луп относительно инвариантных мер. Изучается семейство неизмеримых подмножеств в локально компактных недискретных лупах. Выясняется существование локально μ-нулевых подмножеств, не являющихся μ-нулевыми, в локально компактной левой квазигруппе, не являющейся σ-компактной. Исследуются факторпространства измеримых пространств на квазигруппах. Более того, изучаются однородные пространства квазигрупп, а также счетная отделимость подмножеств в них.

Ключевые слова: квазигруппа, топология, алгебра, однородное пространство, мера, измеримые пространства, факторпространство.

DOI: 10.35634/vm240402

Введение

Топологические группы играют большую роль в математике и ее приложениях (см., например, [1–11] и ссылки в них). Новые направления исследований связаны с неассоциативной алгеброй, некоммутативной геометрией, неассоциативной математической физикой, в которых часто появляются квазигруппы и лупы. Они являются неассоциативными аналогами групп (см. [12–15] и ссылки в них). Целесообразно отметить, что в последнее время квазигруппы активно используются в информатике и теории кодирования, так как они открывают новые возможности по сравнению с группами [16–19].

Однако гармонический анализ на квазигруппах и лупах остается еще не разработанным. Очень мало известно о соотношениях между топологиями и алгебраическими структурами квазигрупп по сравнению с группами. Ранее в [20] исследовалось существование лево- или право-инвариантной меры на топологической лупе. В ней был получен результат показывающий, что из существования лево- или право-инвариантной нетривиальной меры на топологической лупе следует, что она всюду плотна в локально компактной лупе. В частности, на локально компактных лупах со стержнем (core quasigroup) лево-инвариантные меры были построены в [21]. При этом лупы со стержнем являются частным случаем луп. В данной работе исследуются общие топологические квазигруппы, а также левые или правые квазигруппы и лупы. Следует отметить, что класс левых (или правых) квазигрупп (или луп) шире класса квазигрупп (или луп). Поэтому данная работа содержит новые аспекты в этой области.

Имеются специфические особенности топологических квазигрупп по сравнению с группами. Это вызвано тем, что в ассоциативном случае для топологической группы G существует лево- (или право-)инвариантная равномерность на G совместимая с ее топологией [3, 5, 22]. В общем случае для топологической квазигруппы из-за ее неассоциативности равномерность не обязана быть ни симметричной, ни лево-, ни право-инвариантной.

В данной статье изучаются специфические особенности топологий на квазигруппах и лупах в связи с их алгебраической структурой. Исследуется измеримость подмножеств топологических квазигрупп и луп. Изучаются квазиинвариантные меры на однородных пространствах квазигрупп, а также счетная отделимость подмножеств в них. В первом параграфе доказаны необходимые для дальнейшего теоремы о специфических особенностях топологий на квазигруппах. Замкнутые и открытые подмножества и (левые) подквазигруппы изучаются в теоремах 1.1, 1.2. Внутренности подквазигрупп и подквазигруппы, порожденные открытыми подмножествами, — в теореме 1.3 и следствии 1.1. Мощность открытого подмножества в недискретной локально счетно компактной левой лупе оценивается в теореме 1.4. Они используются во втором параграфе для исследования топологий и измеримых пространств на (левых) квазигруппах и их однородных пространствах. Семейство неизмеримых подмножеств в локально компактных недискретных лупах исследуется в предложениях 2.1, 2.2. Локально μ-нулевые подмножества, не являющиеся μ-нулевыми, в локально компактной левой квазигруппе, не являющейся σ-компактной, изучаются в предложении 2.3. Факторпространства измеримых пространств на квазигруппах исследуются в лемме 2.1 и теореме 2.1. Квазиинвариантные меры на однородных пространствах квазигрупп, а также счетная отделимость подмножеств в них исследуются в теореме 2.2.

Все главные результаты данной статьи получены впервые. Их приложения обсуждаются в заключении.

§ 1. Подквазигруппы топологических квазигрупп

Напомним определение во избежание недоразумений.

Определение 1.1. Предположим, что на множестве G задано умножение $m_G(a,b) = ab$ (то есть однозначная бинарная операция) $G^2 \ni (a,b) \mapsto ab \in G$ такая, что

(i) для любых a и b в G существует единственное $x \in G$, удовлетворяющее равенству $ax = b$.

Множество G с умножением, удовлетворяющее условию (i), называется левой квазигруппой. Если H — левая квазигруппа, содержащаяся в G, $H \subset G$, то она называется левой подквазигруппой в G. Симметрично рассматривается

(ii) для любых a и b в G существует единственное $y \in G$, удовлетворяющее равенству $ya = b$.

Тогда множество G с умножением, удовлетворяющее условию (ii), называется правой квазигруппой.

Отображения в (i) и (ii) обозначаются $x = a \setminus b = Div_l(a,b)$ и $y = b/a = Div_r(a,b)$ соответственно.

Если G является левой и правой квазигруппой, то оно называется квазигруппой.

Множество G с умножением называется группоидом.

Если существует нейтральный (то есть единичный) элемент $e_G = e \in G$: $eg = ge = g$ для любого $g \in G$, то группоид G называется унитальным.

Левая унитальная квазигруппа (или правая унитальная квазигруппа, или унитальная квазигруппа) также называется левой лупой (или правой лупой, или лупой соответственно).

Если G является левой (или правой) квазигруппой с топологией $\mathcal{T}(G) = \mathcal{T}_G$ на ней такой, что отображения m_G и Div_l (или Div_r соответственно) являются непрерывными по паре аргументов из $(G,\mathcal{T}_G) \times (G,\mathcal{T}_G)$ в $(G,\mathcal{T}_G)$, то G называется топологической левой (или правой соответственно) квазигруппой.

Если A и B являются подмножествами в G, то $A - B$ обозначает их разность: $A - B = \{a \in A\colon a \notin B\}$. Посредством $\mathrm{cl}_G B$ обозначается замыкание подмножества B в G, а $\mathrm{Int}_G H$ — внутренность H в G. Левая трансляция $L_x : G \to G$ задается формулой $L_x b = xb$ для любых $b \in G$, $x \in G$. Симметрично задается правая трансляция $R_x : G \to G$ формулой $R_x b = bx$ для любых $b \in G$, $x \in G$. Иногда их также называют операторами (обобщенного) сдвига. Обозначим через $\mathcal{Q}(U)$ минимальную подквазигруппу, содержащую U, если G — квазигруппа; а также через ${}_l\mathcal{Q}(U)$ минимальную левую подквазигруппу, содержащую U, если G — левая квазигруппа, где $U \subset G$.

Теорема 1.1. *Пусть G — топологическая T_1 левая квазигруппа, A и B — подмножества в G. Тогда* $(\mathrm{cl}_G A)(\mathrm{cl}_G B) \subseteq \mathrm{cl}_G(AB)$; $(\mathrm{cl}_G A) \setminus (\mathrm{cl}_G B) \subseteq \mathrm{cl}_G(A \setminus B)$; $x \,\mathrm{cl}_G B = \mathrm{cl}_G(xB)$; $x \setminus \mathrm{cl}_G B = \mathrm{cl}_G(x \setminus B)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x \in \mathrm{cl}_G A$, $y \in \mathrm{cl}_G B$. В силу теоремы 2.5 в [23] для любой открытой окрестности $U_{xy} \in \mathsf{B}_{xy}$ или $U_{x\setminus y} \in \mathsf{B}_{x\setminus y}$ существуют $U_x \in \mathsf{B}_x$ и $U_y \in \mathsf{B}_y$ такие, что $U_xU_y \subseteq U_{xy}$ или $U_x \setminus U_y \subseteq U_{x\setminus y}$ соответственно, где U_x обозначает окрестность точки x из G, принадлежащую базе B_x в x топологической левой квазигруппы G. Возьмем $a \in U_x$, $b \in U_y$, следовательно, $ab \in (AB) \cap U_{xy}$ или $a \setminus b \in (A \setminus B) \cap U_{x\setminus y}$ соответственно. Таким образом, $xy \in \mathrm{cl}_G(AB)$ или $x \setminus y \in \mathrm{cl}_G(A \setminus B)$ соответственно. Тогда $\mathrm{cl}_G(AB) \subseteq \mathrm{cl}_G((\mathrm{cl}_G A)(\mathrm{cl}_G B)) \subseteq$ $\subseteq \mathrm{cl}_G(AB)$, $\mathrm{cl}_G(A \setminus B) \subseteq \mathrm{cl}_G((\mathrm{cl}_G A) \setminus (\mathrm{cl}_G B)) \subseteq \mathrm{cl}_G(A \setminus B)$, так как $\mathrm{cl}_G(\mathrm{cl}_G C) = \mathrm{cl}_G C$ для любого $C \subseteq G$. Итак $\mathrm{cl}_G((\mathrm{cl}_G A)(\mathrm{cl}_G B)) = \mathrm{cl}_G(AB)$ и $\mathrm{cl}_G((\mathrm{cl}_G A) \setminus (\mathrm{cl}_G B)) = \mathrm{cl}_G(A \setminus B)$. Отсюда вытекает, что для любого $x \in G$ выполняется $x \,\mathrm{cl}_G B = \mathrm{cl}_G(xB)$ и $x \setminus \mathrm{cl}_G B =$ $= \mathrm{cl}_G(x \setminus B)$, так как $\mathrm{cl}_G((\mathrm{cl}_G\{x\})(\mathrm{cl}_G B)) = \mathrm{cl}_G(xB)$ и $\mathrm{cl}_G((\mathrm{cl}_G\{x\}) \setminus (\mathrm{cl}_G B)) = \mathrm{cl}_G(x \setminus B)$, $\mathrm{cl}_G(xB) \subseteq \mathrm{cl}_G((\mathrm{cl}_G\{x\})(\mathrm{cl}_G B)) \subseteq \mathrm{cl}_G(xB)$ и $\mathrm{cl}_G(x \setminus B) \subseteq \mathrm{cl}_G((\mathrm{cl}_G\{x\}) \setminus (\mathrm{cl}_G B)) \subseteq \mathrm{cl}_G(x \setminus B)$, а одноточечное подмножество $\{x\}$ замкнуто в топологическом T_1 пространстве. □

Теорема 1.2. *Пусть G — топологическая T_1 квазигруппа, а H — подквазигруппа в G. Если H открыта в G, то H также замкнута в G.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $G \neq H$, то рассмотрим $G - H$. Тогда $G - H$ замкнуто в G. Пусть $x \in G - H$. Предположим, что существует $u \in (Hx) \cap H$. Тогда существует $h \in H$ такое, что $u = hx$, следовательно, $x = h \setminus u \in H$, так как $h \in H$ и $u \in H$. Таким образом, $(Hx) \cap H = \emptyset$ для любого $x \in G - H$, следовательно, $H(G - H) \subseteq G - H$. Пусть $h \in H$, $x \in G - H$ и $h \setminus x = y$, тогда $y \in G - H$, так как $x = hy$ иначе принадлежал бы H. Поэтому $h \setminus (G - H) \subseteq G - H$ для любого $h \in H$, следовательно, $G - H \subseteq h(G - H)$. Таким образом, $G - H = H(G - H)$, то есть $G - H = \bigcup\{Hx\colon x \in G - H\}$. Отображение $R_x\colon G \to G$ является гомеоморфизмом G на G, где $R_x b = bx$ для любых b и x, принадлежащих G. Отсюда вытекает, что Hx открыто в G для любого x, следовательно, $\bigcup\{Hx\colon x \in G - H\} = G - H$ открыто в G. Таким образом, H замкнута в G. □

Теорема 1.3. *Пусть выполняется одно из следующих условий:*

(i) *H — подквазигруппа топологической T_1 квазигруппы G;*

(ii) *H — левая подквазигруппа топологической T_1 левой квазигруппы G, причем $(ab)H =$ $= a(bH)$ для любых a и b, принадлежащих G.*

Тогда внутренность H непуста в том и только том случае, когда H открыта в G.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Разбираются оба случая, чтобы избежать повторений. На соответствующих этапах даются отличительные особенности доказательств в этих случаях.

Если H открыта в G, то $\mathrm{Int}_G H = H$, где $\mathrm{Int}_G H$ — внутренность H в G.

Пусть теперь $U = \mathrm{Int}_G H \neq \emptyset$. Тогда возьмем минимальную подквазигруппу $S = \mathcal{Q}(U)$ содержащую U, если G — квазигруппа, либо минимальную левую подквазигруппу $P =$ $= {}_l\mathcal{Q}(U)$ содержащую U, если G — левая квазигруппа. При этом $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$, где $S_1 = U$, $S_{n+1} := (S_n \setminus S_n) \cup (S_nS_n) \cup (S_n/S_n) \cup S_n$ для любого $n \in \mathbf{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}$; либо $P = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n$, где $P_1 = U$, $P_{n+1} := (P_n \setminus P_n) \cup (P_nP_n) \cup P_n$ для любого $n \in \mathbf{N}$, где $A \setminus B := \bigcup\{a \setminus b\colon a \in A, b \in B\}$, $AB := \bigcup\{ab\colon a \in A, b \in B\}$, $A/B := \bigcup\{a/b\colon a \in A, b \in B\}$ для $A \subseteq G$, $B \subseteq G$. Для топологической левой квазигруппы отображения $L_x\colon G \to G$

и $L_x^{-1}\colon G\to G$ — гомеоморфизмы из G на G для любого $x\in G$ в силу теоремы 2.5 в [23], где $L_xb=xb$, $L_x^{-1}b=x\setminus b$ для любого $b\in G$. Симметрично для топологической правой квазигруппы отображения $R_x\colon G\to G$ и $R_x^{-1}\colon G\to G$ — гомеоморфизмы из G на G для любого $x\in G$, где $R_xb=bx$, $R_x^{-1}b=b/x$ для любого $x\in G$. Отсюда вытекает, что $AB=\bigcup_{a\in A}L_aB$, $A\setminus B=\bigcup_{a\in A}L_a^{-1}B$ открыты в топологической левой квазигруппе G, если B открыто в G. Симметрично $BA=\bigcup_{a\in A}R_aB$, $B/A=\bigcup_{a\in A}R_a^{-1}B$ открыты в топологической правой квазигруппе G, если B открыто в G. Таким образом, индукцией по n получается, что S_n или P_n открыты для любого $n\in\mathbf{N}$ в соответствующих случаях G. Следовательно, S или P открыто в G, причем $S\subseteq H$, $P\subseteq H$ по построению. Отсюда вытекает, что $\operatorname{Int}_G H=S$ или $\operatorname{Int}_G H=P$ является открытой подквазигруппой или левой подквазигруппой соответственно в G. Очевидно, что S или P открыто в G. Из теоремы 2.9 в [23] имеем, что P замкнута в H и в G, если G — топологическая левая квазигруппа, так как $b(b\setminus P)=P$, L_b^{-1} — гомеоморфизм из H на H для любого $b\in H$, или из G на G для любого $b\in G$. В случае топологической квазигруппы G подквазигруппа S замкнута в H и в G по теореме 1.2 выше. Таким образом, U — открытая и замкнутая подквазигруппа или левая подквазигруппа в H и в G. Из теоремы 2.5 в [23] вытекает, что $U=H$. $\square$

Следствие 1.1. *Пусть выполняется одно из следующих условий:*

(i) G *— топологическая квазигруппа,* V *— открытое подмножество в* G*;*

(ii) G *— топологическая левая квазигруппа,* V *— открытое подмножество в* G*, причем* $(ab)V=a(bV)$ *для любых* a *и* b *из* G.

Тогда $\mathcal{Q}(V)$ *— открыто-замкнутая подквазигруппа; соответственно* ${}_l\mathcal{Q}(V)$ *— открыто-замкнутая левая подквазигруппа в* G.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение этого следствия вытекает из доказательства теоремы 1.3 выше. $\square$

Теорема 1.4. *Пусть* G *— недискретная локально счетно компактная* T_1 *левая лупа,* U *— непустое открытое подмножество в* G*. Тогда* $\operatorname{card}(U)\geqslant\mathsf{c}$*, где* $\mathsf{c}=\operatorname{card}(\mathbf{R})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку G локально счетно компактна, то существует непустое открытое подмножество V в U такое, что $\operatorname{cl}_G V$ счетно компактно. Отображение $L_x\colon G\to G$ является гомеоморфизмом G на G для любого $x\in G$, так как G — топологическая левая лупа, где $L_xg=xg$ для всяких x и g в G. Из теоремы 2.3 в [23] следует, что левая лупа G является T_3-пространством, так как $H=\{e\}$ удовлетворяет условиям (ii) замечания 2.1 в [23]. Поэтому регулярность и недискретность G влечет, что $\operatorname{card}(V)\geqslant\aleph_0$. В силу теоремы 2.5 в [23] и предложения 1.5.5 в [22] существуют непустые открытые подмножества V_0 и V_1 в G такие, что $\operatorname{cl}_G V_0\cup\operatorname{cl}_G V_1\subseteq V$, $\operatorname{cl}_G V_0\cap\operatorname{cl}_G V_1=\emptyset$. Далее по индукции строятся открытые подмножества $V_{j(m)}$ в V, где $j(m)\in\{0,1\}^m$, $m\in\mathbf{N}$. Пусть $V_{j(m)}$ построено. Тогда существуют открытые подмножества $V_{j(m),0}$ и $V_{j(m),1}$ такие, что $\operatorname{cl}_G V_{j(m),0}\cup\operatorname{cl}_G V_{j(m),1}\subseteq V_{j(m)}$, $\operatorname{cl}_G V_{j(m),0}\cap\operatorname{cl}_G V_{j(m),1}=\emptyset$. Зададим $B_m:=\bigcup\{\operatorname{cl}_G V_{j(m)}\colon j(m)\in\{0,1\}^m\}$, $m\in\mathbf{N}$, следовательно, B_m замкнуто в G как конечное объединение замкнутых подмножеств. Возьмем $C:=\bigcap_{m=1}^\infty B_m$. Если $j=(j_1,j_2,\dots,j_m,\dots)\in\{0,1\}^{\mathbf{N}}$, то $\bigcap_{m=1}^\infty\operatorname{cl}_G V_{j(m)}=:E_j$ непусто и содержится в C, так как $\operatorname{cl}_G V$ счетно компактно, где $j(m)=(j_1,\dots,j_m)$. При этом $E_j\cap E_i=\emptyset$ для всяких $j\neq i$ из $\{0,1\}^{\mathbf{N}}$. Поэтому $\operatorname{card}(C)\geqslant\mathsf{c}$, следовательно, $\operatorname{card}(U)\geqslant\mathsf{c}$. $\square$

§ 2. Взаимосвязь топологических и алгебраических структур квазигрупп

Во избежание недоразумений сначала напоминается терминология и даются обозначения.

Определение 2.1. Мера $\mu\colon \mathcal{F} \to \bar{\mathbf{R}}$ или $\mu\colon \mathcal{F} \to \mathbf{C}$ на алгебре $\mathcal{F} = \mathcal{F}(X)$ подмножеств в множестве X с левым (или правым) действием на нём левой (или правой) квазигруппы G называется лево- (или право-)инвариантной относительно левой (правой) квазигруппы G, если $\mu(gV) = \mu(V)$ (или $\mu(Vg) = \mu(V)$ соответственно) для любых $V \in \mathcal{F}$ и $g \in G$, где $\bar{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Далее $\mathcal{B}(X)$ обозначает σ-алгебру всех борелевских подмножеств в топологическом пространстве X. Пусть $\mathcal{F} = \mathcal{B}(X)$, тогда $\mathcal{F}_\mu = \mathcal{F}_\mu(X)$ обозначает σ-алгебру, полученную с помощью пополнения $\mathcal{B}(X)$ относительно $|\mu|$, где $|\mu|$ обозначает вариацию меры μ.

В статье рассматриваются σ-аддитивные меры на σ-алгебрах, если не оговорено иное.

Мера λ на σ-алгебре $\mathcal{F}_\lambda = \mathcal{F}_\lambda(X)$ подмножеств топологического пространства X называется лево- (или право-)квазиинвариантной относительно G, если мера λ^{L_q} (или λ^{R_q} соответственно) эквивалентна мере λ для любого $q \in G$, где $\lambda(qA) =: \lambda^{L_q}(A)$ и $\lambda(Aq) =: \lambda^{R_q}(A)$ для всяких $q \in G$ и $A \in \mathcal{F}_\lambda$.

Под $\mathcal{F}_\lambda$ автоморфизмом θ топологической квазигруппы G подразумевается биективное (то есть инъективное и сюръективное) отображение $\theta\colon G \to G$ такое, что $\theta\colon \mathcal{F}_\lambda \to \mathcal{F}_\lambda$ и $\theta^{-1}\colon \mathcal{F}_\lambda \to \mathcal{F}_\lambda$, и $\theta(ab) = \theta(a)\theta(b)$, $\theta(a/b) = \theta(a)/\theta(b)$, $\theta(a \setminus b) = \theta(a) \setminus \theta(b)$ для всех a и b из G, где $\mathcal{F}_\lambda = \mathcal{F}_\lambda(G)$. Аналогично для левой (правой) лупы или квазигруппы.

Если $\psi\colon X \to X$ — это отображение такое, что $\psi^{-1}(B) \in \mathcal{F}_\lambda$ для любого $B \in \mathcal{F}_\lambda$, то $\psi(\lambda)$ обозначает меру, удовлетворяющую равенству $\psi(\lambda)(B) = \lambda(\psi^{-1}(B)) =: \lambda^{\psi^{-1}}(B)$ для любого $B \in \mathcal{F}_\lambda$, где $\mathcal{F}_\lambda = \mathcal{F}_\lambda(X)$.

Предложение 2.1. *Пусть G — локально компактная недискретная T_1-лупа, а μ — правоинвариантная нетривиальная неотрицательная мера на $\mathcal{F}_\mu$. Пусть G содержит нормальную подлупу H мощности $\aleph_0$. Тогда G содержит неизмеримое подмножество F относительно μ.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу леммы 1.1 в [23] существует левое трансверсальное множество $V = V_{G,H}$ для H в G. Возьмем открытую окрестность U для e в G.

Тогда существует открытая окрестность W для e в G такая, что $W(W \setminus W) \subset U$ согласно теореме 2.5 в [23]. Зададим $S = V \cap W$. Поскольку G является недискретной T_1-лупой, то G плотна в себе и $\operatorname{card}(W) \geqslant \mathfrak{c}$ по теореме 1.4, следовательно, $\operatorname{card}(S) \geqslant \mathfrak{c}$. При этом $S(H \cap (W \setminus W)) = \bigcup_{h \in H \cap (W \setminus W)} Sh$ и $\operatorname{card}(H \cap (W \setminus W)) = \aleph_0$. Поскольку $V = V_{G,H}$ — левое трансверсальное множество, то $(Vh_1) \cap (Vh_2) = \emptyset$ для любого $h_1 \neq h_2$ в H, так как H — нормальная подлупа в G, а $v_1q_1 = v_2q_2$ при некоторых q_1 и q_2 в H влечет $v_1 \in v_2H$, но $s_1H \cap s_2H = \emptyset$ для любых $s_1 \neq s_2$ из V. Если бы S было μ-измеримым, то либо $\mu(S(H \cap (W \setminus W))) = 0$, либо $\mu(S(H \cap (W \setminus W))) = \infty$, так как μ право-инвариантна. При этом $W \subset S(H \cap (W \setminus W)) \subset W(W \setminus W) \subset U$. С другой стороны, $\mu(W) > 0$ и $\mu(U) < \infty$, что приводит к противоречию. Таким образом, S не есть μ-измеримое подмножество в G. $\square$

Предложение 2.2. *Пусть G — компактная левая T_1-квазигруппа, μ — лево-инвариантная неотрицательная мера на G с $\mu(G) = 1$, H — левая подквазигруппа в G такая, что существует левое трансверсальное множество $V_{G,H}$ для H в G и $\operatorname{card}(V_{G,H}) = \aleph_0$. Тогда H не является μ-измеримой.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеется дизъюнктное разложение $G = \bigcup_{v \in V_{G,H}} vH$, $v_1H \cap v_2H = \emptyset$ для любых $v_1 \neq v_2$ из $V_{G,H}$. Если бы $H \in \mathcal{F}_\mu$, то $\mu(G) = \sum_{v \in V_{G,H}} \mu(vH) = \sum_{v \in V_{G,H}} \mu(H)$. Тогда либо $\mu(H) = 0$ и $\mu(G) = 0$, либо $\mu(H) > 0$ и $\mu(G) = +\infty$. Получается противоречие. Поэтому H не является μ-измеримой. $\square$

Предложение 2.3. *Предположим, что G — недискретная локально компактная левая T_1-квазигруппа, не являющаяся σ-компактной, а также G содержит открытое подмножество U с компактным замыкание такое, что $(ab)U = a(bU)$ для любых a и b из G; μ — неотрицательная нетривиальная лево-инвариантная мера на $\mathcal{B}(G)$. Тогда G содержит локально μ-нулевое подмножество, которое не есть μ-нулевое.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу следствия 1.1, G содержит открыто-замкнутую левую подквазигруппу H такую, что $(ab)H = a(bH)$ для любых a и b из G. Поэтому существует левое трансверсальное подмножество $V_{G,H}$ для H в G по лемме 1.1 в [23]. При этом любое компактное подмножество в $V_{G,H}$ конечно, следовательно, $V_{G,H}$ есть локально μ-нулевое подмножество в G, так как G — недискретная локально компактная левая T_1-квазигруппа. Возьмем произвольное открытое подмножество W в G такое, что $V_{G,H} \subset W$. Из левой инвариантности меры μ и $V_{G,H}H = G$ вытекает, что $\mu((gH) \cap W) > 0$ для любого $g \in G$, следовательно, $\mu(W) = \infty$ и $\mu(V_{G,H}) = \infty$. □

Определение 2.2. Пусть $(Q, \mathcal{F})$ — измеримое пространство, где Q — множество, $\mathcal{F} = \mathcal{F}(Q)$ — σ-алгебра подмножеств в Q. Если $(Q, \mathcal{F})$ изоморфно измеримому пространству $(H, \mathcal{B}(H))$, где H — борелевское подмножество некоторого полного сепарабельного метрического пространства X, $\mathcal{B}(H)$ — σ-алгебра борелевских подмножеств в H, то $(Q, \mathcal{F})$ называется стандартным.

Левая квазигруппа G с σ-алгеброй $\mathcal{F}$ подмножеств в G называется $\mathcal{F}$-измеримой (или кратко измеримой), если отображения $G^2 \ni (a,b) \mapsto ab \in G$ и $G^2 \ni (a,b) \mapsto a \setminus b \in G$ $\mathcal{F}$-измеримы.

Лемма 2.1. *Пусть G — топологическая метризуемая сепарабельная локально компактная левая квазигруппа. Предположим, что H — замкнутая подквазигруппа в G такая, что $(ab)H = a(bH)$ для любых a и b из G. Тогда существует $B \in \mathcal{B}(G)$ такое, что:*

(а) *B пересекает каждый левый класс смежности лишь в одной точке;*

(б) $\mathrm{cl}_G[\pi^{-1}(\pi(D)) \cap B]$ *компактно для всякого компактного подмножества D в G, где $\pi\colon G \to G/_cH$ обозначает факторное отображение, $G/_cH$ — факторпространство левых классов смежности для H в G.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем произвольное каноническое замкнутое компактное подмножество U в G. Если G связна, то ${}_l\mathcal{Q}(U) = G$ по следствию 1.1, так как $\mathrm{cl}_G \operatorname{Int}_G U = U$. Поэтому для любого компактного подмножества J в G существует $n \in \mathbf{N}$ такое, что $J \subseteq P_n$, где P_n заданы в доказательстве теоремы 1.3. Из компактности U вытекает, что P_n компактно для любого $n \in \mathbf{N}$, следовательно, G σ-компактна.

Если же G несвязна, то ${}_l\mathcal{Q}(U)$ — собственная открыто-замкнутая левая подквазигруппа в G. Если $b \in {}_l\mathcal{Q}(U)$, то $\mathsf{C}_b \subseteq {}_l\mathcal{Q}(U)$, где C_b — связная компонента элемента b в G. При этом $x\mathsf{C}_b = \mathsf{C}_{xb}$ для любого $x \in G$, так как $L_x\colon G \to G$ — гомеоморфизм. С другой стороны, $(\mathsf{C}_b \cap \mathsf{C}_y \neq \emptyset) \leftrightarrow (\mathsf{C}_b = \mathsf{C}_y)$ для любых b и y в G. Поэтому ${}_l\mathcal{Q}(U)$ представляется в виде дизъюнктного объединения ${}_l\mathcal{Q}(U) = \bigcup\{\mathsf{C}_b\colon b \in \Lambda\}$, $\Lambda \subseteq {}_l\mathcal{Q}(U)$, $(\mathsf{C}_b \cap \mathsf{C}_y = \emptyset)$ для любых $b \neq y$ из Λ. Аналогично для всей G. Отсюда вытекает, что существует факторпространство $G/_c({}_l\mathcal{Q}(U))$ левых классов смежности для ${}_l\mathcal{Q}(U)$ в G. Из сепарабельности и метризуемости G следует, что счетно факторпространство $G/_c({}_l\mathcal{Q}(U))$. Таким образом, в G существует счетное семейство $H_1 \subset H_2 \subset \dots$ компактных подмножеств такое, что для любого компактного подмножества W из G существует $j \in \mathbf{N}$ с $W \subseteq H_j$.

В силу леммы 1.1 в [23] существует T_1-факторпространство $G/_cH$ и $\pi\colon G \to G/_cH$ — факторное отображение. По теореме 4.1 в [24] или 6.9.14 в [25] для любого $m \in \mathbf{N}$ существует $B_m \in \mathcal{B}(G)$ такое, что $B_m \subset H_m$, $\pi(B_m) = \pi(H_m)$, $\pi|_{B_m}\colon B_m \to \pi(H_m)$ — биективно.

Зададим $D_1 = B_1$, $D_{m+1} = D_m \cup (B_m - \pi^{-1}(\pi(D_m)))$, тогда $D_m \subset D_{m+1}$ и $\pi\colon D_m \to \pi(H_m)$ — биекция для любого $m \in \mathbf{N}$. При этом $\pi\colon D_m \to \pi(D_m)$ непрерывно. В силу теорем 3.1.1 и 4.3.10 в [22], G — полное метрическое пространство. По индукции доказывается, что D_n — борелевское подмножество для любого $n \in \mathbf{N}$. При $n = 1$ это вытекает из того, что $D_1 = B_1$. Пусть D_m — борелевское подмножество. Тогда из леммы 1 в главе 2 в [24] или теоремы 6.8.6 в [25] вытекает, что $\pi(D_m)$ — борелевское подмножество для любого $m \in \mathbf{N}$, следовательно, D_{m+1} — борелевское подмножество. Поэтому $\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n =: B \in \mathcal{B}(G)$. Из построений выше следует, что B удовлетворяет (а) и (б). □

Теорема 2.1. *Пусть $(G, \mathcal{F})$ — измеримая левая квазигруппа, причем $(G, \mathcal{F})$ — стандартное измеримое пространство. Предположим, что отображение $f\colon G^2 \to G$ таково, что для любого $b \in G$, $f(\cdot, b)\colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ и $f(b, \cdot)\colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ — автоморфизмы σ-алгебры $\mathcal{F}$, а η — отношение эквивалентности на G такое, что $(b_1 \eta b_2) \leftrightarrow (\exists b \in G, f(b_1, b) = b_2)$. Измеримое факторпространство $(G, \mathcal{F})/\eta$ стандартно тогда и только тогда, когда существует подмножество $B \in \mathcal{F}$ в G такое, что пересечение B с каждым классом эквивалентности состоит из одной точки.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $J \in \mathcal{F}$ — подмножество в B, где $B \in \mathcal{F}$ — подмножество в G. Рассмотрим факторное отображение $\pi\colon (G, \mathcal{F}) \to (G, \mathcal{F})/\eta$. По построению π измеримо. Тогда $\pi^{-1}(\pi(J)) = f(J, G)$ и $f(J, G) \cap f((B - J), G) = \emptyset$. В силу теорем 2 и 3 в томе 1, главе 2, параграфа 31 в [26], $f(J, G)$ и $f((B - J, G)$ — счетно-порожденные подмножества в G, принадлежащие $\mathcal{F}$, так как $(G, \mathcal{F})$ — стандартное измеримое пространство. □

Теорема 2.2. *Пусть $\tilde{G}$ — локально компактная сепарабельная метризуемая квазигруппа, а G и H — ее подквазигруппы такие, что $H \subset G$, $(ab)H = a(bH)$ для любых a и b из G, $G \in \mathcal{B}(\tilde{G})$. Предположим, что на борелевской σ-алгебре $\mathcal{B}(\tilde{G})$ задана нетривиальная неотрицательная лево-квазиинвариантная мера μ относительно G и $\mu(G) > 0$, а на факторпространстве $G/_c H$ левых классов смежности для H в G задана фактор-алгебра $\mathcal{F}_\mu(G)/_c H$. Если H замкнута в G, то $\mathcal{B}(G)/_c H$ стандартна. Если $J \subset G/_c H$, $(G/_c H) - J$ счетно отделимо и $\mu(\pi^{-1}(J)) = 0$, где $\pi\colon G \to G/_c H$ — факторное отображение, то H замкнута в G.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По лемме 1.1 в [23] существует левое трансверсальное множество $V_{G,H}$ для H в G. Это индуцирует факторное отображение $\pi\colon G \to G/_c H$ из G на пространство $\{gH\colon g \in G\}$ левых классов смежности. При этом $\pi(V_{G,H}) = G/_c H$ и $\pi\colon V_{G,H} \to G/_c H$ биективно, так как $\bigcup_{v \in V_{G,H}} vH = G$, а $v_1 H \cap v_2 H = \emptyset$ для всяких различных $v_1 \neq v_2$ из $V_{G,H}$.

Для $\bar{G} = \mathrm{cl}_{\tilde{G}} G$ и $\bar{H} = \mathrm{cl}_{\tilde{G}} H$ имеется включение $\bar{H} \subset \bar{G}$, и выполняется равенство $(ab)\bar{H} = a(b\bar{H})$ для любых a и b из $\bar{G}$, так как $\bar{G}$ и $\bar{H}$ — топологические квазигруппы, G плотна в $\bar{G}$. Поэтому, согласно лемме 1.1 в [23] и лемме 2.1 выше, существует $B \in \mathcal{B}(\bar{G})$ такое, что $\bar{\pi}\colon B \to \bar{G}/_c \bar{H}$ биективно, $\bar{\pi}(B) = \bar{G}/_c \bar{H}$, где $\bar{\pi}\colon \bar{G} \to \bar{G}/_c \bar{H}$ — факторное отображение. При этом существуют факторалгебры $\mathcal{B}(\bar{G})/_c \bar{H}$ и $\mathcal{B}(G)/_c(\mathrm{cl}_G H)$ по теореме 2.5 в [23]. В силу теоремы 2.6 в [24] или 6.9.3, 6.9.7 в [25], $\mathcal{B}(\bar{G})/_c \bar{H}$ и $\mathcal{B}(G)/_c(\mathrm{cl}_G H)$ стандартны, так как $\mathcal{B}(\tilde{G})$ стандартна, а $G \in \mathcal{B}(\tilde{G})$.

Поскольку мера μ нетривиальна и неотрицательна, а $\tilde{G}$ — сепарабельная метризуемая локально компактная квазигруппа, то μ σ-конечна и эквивалентна некоторой вероятностной мере P на $\mathcal{F}_\mu(\tilde{G})$. В силу теоремы 6.5.7 в [25], $\mathcal{B}(G)/_c(\mathrm{cl}_G H)$ — счетно отделимая σ-алгебра, так как $G \in \mathcal{B}(\tilde{G})$. Из теоремы 10.6.6 в [25] (см. также теорему 10.4.8, следствие 10.4.10 и предложение 10.4.18) вытекает, что существуют меры $\nu_{(\mu)}\colon \mathcal{F}_\mu(G)/_c(\mathrm{cl}_G H) \to [0, +\infty]$ и $\lambda_{(\mu,b)}\colon \mathcal{F}_\mu(G) \to [0, +\infty]$ с носителем $\mathrm{supp}\,(\lambda_{(\mu,b)}) \subseteq \subseteq \breve{\pi}^{-1}(b)$ для любого $b \in S := G/_c(\mathrm{cl}_G H)$, где $\breve{\pi}\colon G \to S$ — факторное отображение, такие, что $\mu(U) = \int_S \lambda_{(\mu,b)}(U) d\nu_{(\mu)}(b)$ для любого $U \in \mathcal{F}_\mu(G)$.

Пусть $\xi\colon \mathcal{F}_\mu(G) \to [0,+\infty]$ — нетривиальная мера лево-квазиинвариантная относительно G. Зададим $X = S \times G$, $\pi_X\colon G^2 \to X$, $\tilde{L}\colon G^2 \to G^2$, $\pi_X(x,y) = (\check{\pi}(x),y)$, $\tilde{L}(x,y) = (L_y x, y)$ для всяких x и y из G. Тогда $\lambda_{(\mu\times\xi,(b,y))} = \lambda_{(\mu,b)} \times \lambda_{(\xi,y)}$, $\lambda_{(\xi,y)}(\{y\}) = 1$, $\lambda_{(\xi,y)}(G - \{y\}) = 0$ для любых $b \in S$, $y \in G$; $d\nu_{(\mu\times\xi)}(b,y) = (d\nu_{(\mu)}(b))(d\nu_{(\xi)}(y))$, $\nu_{(\xi)} = \xi$. Поэтому $\lambda^{\tilde{L}}_{(\mu\times\xi,(b,y))} = \lambda^{L_y}_{(\mu,b)} \times \lambda_{(\xi,y)}$. С другой стороны, мера $(\mu\times\xi)^{\tilde{L}}$ эквивалентна $\mu\times\xi$, так как μ и ξ — лево-квазиинвариантные меры относительно G, $\tilde{L}^{-1}(x,y) = (y \setminus x, y)$ — гомеоморфизм из G^2 на G^2, где x и y принадлежат G.

Тогда для любых функций $f \in L^1(X, \nu_{(\mu\times\xi)}, \mathbf{R})$ и ограниченной $\mu\times\xi$-измеримой $h\colon G^2 \to \mathbf{R}$ выполняется уравнение

$$\int_G f(\check{\pi}(x),y)\biggl(\int_G h(x,y)\,d\lambda_{(\mu\times\xi,(\check{\pi}(x),y))}(x,y)\biggr)d\nu_{(\mu\times\xi)}(\check{\pi}(x),y) = \\ = \int_{G^2} f(\pi_X(x,y))h(x,y)(d\mu(x))(d\xi(y))$$

в силу теоремы Фубини (3.4.4 в [25]). Поэтому по теореме Радона–Никодима (3.2.2 в [25])

$$\int_{G^2} f(\pi_X(x,y))h(x,y)\frac{d\mu^{L_y}(x)}{d\mu(x)}(d\mu(x))(d\xi(y)) = \\ = \int_G f(\check{\pi}(x),y)\biggl(\int_G h(x,y)\frac{d\lambda^{L_y}_{(\mu,\check{\pi}(x))}(x)}{d\lambda_{(\mu,\check{\pi}(x))}(x)}(d\lambda_{(\mu,\check{\pi}(x))}(x))(d\lambda_{(\xi,y)}(y))\biggr)(d\nu_{(\mu)}(\check{\pi}(x))(d\xi(y)) = \\ = \int_G f(\check{\pi}(x),y)\biggl(\int_G h(x,y)d\lambda^{\tilde{L}}_{(\mu\times\xi,(\check{\pi}(x),y))}(x,y)\biggr)d\nu_{(\mu\times\xi)}(\check{\pi}(x),y),$$

где $\dfrac{d\mu^{L_y}(x)}{d\mu(x)}$ обозначает производную Радона–Никодима. Итак, $\lambda_{(\mu,b)}$ лево-квазиинвариантна относительно $\mathrm{cl}_G H$ для $\nu_{(\mu)}$-почти всех $b \in S$, так как $L_y \,\mathrm{cl}_G H = y(\mathrm{cl}_G H)$, $(xy)\,\mathrm{cl}_G H = x(y(\mathrm{cl}_G H))$ для всех x и y из G, $(\mathrm{cl}_G H)(\mathrm{cl}_G H) = \mathrm{cl}_G H$.

Из доказанного выше и условий теоремы вытекает, что

$$\Lambda_0 := \{x \in G\colon \lambda_{(\mu,\check{\pi}(x))}((L_x \,\mathrm{cl}_G H) \cap \check{\pi}^{-1}(J)) = 0\,\& \\ \&\ \lambda_{(\mu,\check{\pi}(x))}\ \text{лево-квазиинвариантна относительно}\ \mathrm{cl}_G H\}$$

— непустое множество. Поскольку $L_y\colon G \to G$ — гомеоморфизм для любого $y \in G$, то $(x\check{\pi}^{-1}(J)) \cap \mathrm{cl}_G H \in \mathcal{B}(\mathrm{cl}_G H) \subset \mathcal{B}(G)$ для всякого $x \in \Lambda_0$. По условиям теоремы $(G/_c H) - J$ счетно отделимо, следовательно, для фиксированного $x \in \Lambda_0$ существует $\check{J} \subset (\mathrm{cl}_G H)/_c H$ такое, что $\pi^{-1}(\check{J}) = (x\pi^{-1}(J)) \cap \mathrm{cl}_G H$ и $\check{J} \in \mathcal{F}_\mu(G)/_c H$, так как $J \subset G/_c H$ и $\mu(\pi^{-1}(J)) = 0$. Поэтому $((\mathrm{cl}_G H)/_c H) - \check{J}$ счетно отделимо.

Возьмем характеристическую функцию χ_W для $W = \pi^{-1}(U)$ с $U \in \mathcal{F}_\mu(G)/_c H$, где $\chi_W(y) = 1$ при $y \in W$, $\chi_W(y) = 0$ при $y \notin W$. Существует подмножество $S_W \subset V_{G,H}$ такое, что $S_W H = W$, так как $V_{G,H}$ — левое трансверсальное множество для H в G. При этом $(S_W H)H = S_W H$, так как $(ab)H = a(bH)$ для всех a и b из G. Поэтому $\chi_W(xy) = \chi_W(x)$ для любого $y \in H$. Для любой $\nu_{(\mu)} \times \lambda_{(\mu,b)}$-измеримой функции $f\colon (G/_c(\mathrm{cl}_G H)) \times G \to \mathbf{R}$ с $\int_{G/_c(\mathrm{cl}_G H)} \Bigl(\int_G |f(b,x)|(d\lambda_{(\mu,b)}(x))\Bigr)(d\nu_{(\mu)}(b)) < \infty$ тогда выполняется уравнение

$$\int_{G/_c(\mathrm{cl}_G H)} \biggl(\int_G f(b,x)\chi_W(xy)(d\lambda_{(\mu,b)}(x))\biggr)(d\nu_{(\mu)}(b)) = \\ = \int_{G/_c(\mathrm{cl}_G H)} \biggl(\int_G f(b,x)\chi_W(x)(d\lambda_{(\mu,b)}(x))\biggr)(d\nu_{(\mu)}(b))$$

для любых $y \in H$. Поскольку H плотно в $\mathrm{cl}_G H$, то предел по $y \in H$ дает, что последнее уравнение выполняется для всех $y \in \mathrm{cl}_G H$, так как G — топологическая квазигруппа. Итак, $\chi_W(xy) = \chi_W(x)$ для μ-почти всех $x \in G$ для любого $y \in \mathrm{cl}_G H$, так как это выполняется для $\lambda_{(\mu,b)}$-почти всех $x \in \breve{\pi}^{-1}(b)$ и $\nu_{(\mu)}$-почти всех $b \in G/_c(\mathrm{cl}_G H)$. Поэтому $\lambda_{(\mu,b)}(W)\lambda_{(\mu,b)}((\mathrm{cl}_G H) - W) = 0$ для $\nu_{(\mu)}$-почти всех $b \in G/_c(\mathrm{cl}_G H)$.

Пусть $\{A_j \colon j \in \mathbf{N}\}$ — счетное отделяющее семейство для $((\mathrm{cl}_G H)/_c H)) - \check{J}$, которое существует по доказанному выше. Если xH не содержится в $\pi^{-1}(\check{J})$, то $xH = \bigcap_{xH \subseteq B_j} B_j$ и $\mu(xH) = \lim_{n\to\infty} \mu(\bigcap\{B_j \colon xH \subseteq B_j, j \leqslant n\})$, где $B_j = \pi^{-1}(A_j)$. Если $H \neq \mathrm{cl}_G H$, то существует $x \in \mathrm{cl}_G H$ такое, что $\lambda_{(\mu,b)}(xH) = 0$ для $\nu_{(\mu)}$-почти всех $b \in G/_c(\mathrm{cl}_G H)$ согласно доказанному выше, так как $\mu(\pi^{-1}(J)) = 0$. Поэтому $\nu_{(\mu)}(\{b \in G/_c(\mathrm{cl}_G H) \colon \lambda_{(\mu,b)}(\pi^{-1}(b)) \neq 0\} = 0$ в силу левой квазиинвариантности меры μ. Но тогда

$$\mu(G) = \int_{G/_c(\mathrm{cl}_G H)} \left(\int_{\pi^{-1}(b)} (d\lambda_{(\mu,b)}(x)) \right) d\nu_{(\mu)}(b)) = 0,$$

что противоречит условию теоремы. Итак, $\mathrm{cl}_G H = H$. □

Замечание 2.1. Теорему 2.2 можно обобщить вместо борелевской σ-алгебры $\mathcal{B}(\tilde{G})$ на $\mathcal{F}_\mu(\tilde{G})$, но тогда с точностью до множеств меры нуль, если воспользоваться теоремами 9.1.1, 9.1.7, 9.2.2 из [25].

§ 3. Заключение

Результаты данной статьи можно использовать для дальнейшего изучения структуры топологических квазигрупп и луп, однородных пространств и некоммутативных многообразий связанных с квазигруппами и лупами [14, 15]. Кроме приложений лево- или правоинвариантных или квазиинвариантных мер на квазигруппах и лупах, отмеченных во введении, интересно отметить возможные приложения к математическому анализу информационных процессов, протекающих в сетях с нерегулярной структурой [16, 18, 27, 28], так как они часто основаны на тополого-алгебраических бинарных системах и мерах. Другие очень важные приложения заключаются в теории представлений квазигрупп и луп, гармоническом анализе на квазигруппах и лупах [1–3, 5–11], математической физике и т. д.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Adhikari A., Adhikari M. R. Basic topology. Vol. 1. Metric spaces and general topology. Singapore: Springer, 2022. https://doi.org/10.1007/978-981-16-6509-7
2. Arhancet C., Kriegler C. Projections, multipliers and decomposable maps on noncommutative L^p-spaces // Mémoires de la Société Mathématique de France. 2023. Vol. 177. P. 1–185. https://doi.org/10.24033/msmf.485
3. Arhangel'skii A., Tkachenko M. Topological groups and related structures, an introduction to topological algebra. Paris: Atlantis Press, 2008. https://doi.org/10.2991/978-94-91216-35-0
4. Cohn D. L. Measure theory. New York: Birkhäuser, 2013. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-6956-8
5. Fell J. M. G., Doran R. S. Representations of *-algebras, locally compact groups, and Banach *-algebraic bundles. Vol. 1, 2. Boston: Academic Press, 1988.
6. Farashahi A. G. Classical harmonic analysis over spaces of complex measures on coset spaces of compact subgroups // Analysis Mathematica. 2017. Vol. 43. Issue 3. P. 461–473. https://doi.org/10.1007/s10476-017-0205-6
7. Losert V. The derivation problem for group algebras // Annals of Mathematics. 2008. Vol. 168. Issue 1. P. 221–246. https://doi.org/10.4007/annals.2008.168.221
8. Ludkovsky S. V. Topological transformation groups of manifolds over non-Archimedean fields, their representations, and quasi-invariant measures. I // Journal of Mathematical Sciences. 2007. Vol. 147. No. 3. P. 6703–6846. https://doi.org/10.1007/s10958-007-0507-5

9. Ludkovsky S. V. Topological transformation groups of manifolds over non-Archimedean fields, their representations, and quasi-invariant measures, II // Journal of Mathematical Sciences. 2008. Vol. 150. No. 4. P. 2123–2223. https://doi.org/10.1007/s10958-008-0127-8
10. Ludkovsky S. V. Stochastic processes on geometric loop groups, diffeomorphism groups of connected manifolds, and associated unitary representations // Journal of Mathematical Sciences. 2007. Vol. 141. No. 3. P. 1331–1384. https://doi.org/10.1007/s10958-007-0044-2
11. Ludkovsky S. V. Meta-centralizers of non locally compact group algebras // Glasgow Mathematical Journal. 2015. Vol. 57. Issue 2. P. 349–364. https://doi.org/10.1017/S0017089514000330
12. Herfort W., Plaumann P. Boolean and profinite loops // Topology Proceedings. 2011. Vol. 37. P. 233–237. https://zbmath.org/1201.20067
13. Kakkar V. Boolean loops with compact left inner mapping groups are profinite // Topology and its Applications. 2018. Vol. 244. P. 51–54. https://doi.org/10.1016/j.topol.2018.06.002
14. Smith J. D. H. An introduction to quasigroups and their representations. New York: Chapman and Hall/CRC, 2006. https://doi.org/10.1201/9781420010633
15. Sabinin L. V. Smooth quasigroups and loops. Dordrecht: Springer, 1999. https://doi.org/10.1007/978-94-011-4491-9
16. Blahut R. E. Algebraic codes for data transmission. Cambridge: Cambridge University Press, 2003. https://doi.org/10.1017/CBO9780511800467
17. Гонсалес С., Коусело Е., Марков В. Т., Нечаев А. А. Групповые коды и их неассоциативные обобщения // Дискретная математика. 2004. Т. 16. Вып. 1. С. 146–156. https://doi.org/10.4213/dm149
18. Markov V. T., Mikhalev A. V., Nechaev A. A. Nonassociative algebraic structures in cryptography and coding // Journal of Mathematical Sciences. 2020. Vol. 245. No. 2. P. 178–196. https://doi.org/10.1007/s10958-020-04685-5
19. Plotkin B. Universal algebra, algebraic logic, and databases. Dordrecht: Springer, 1994. https://doi.org/10.1007/978-94-011-0820-1
20. Ludkovsky S. V. Existence of an invariant measure on a topological quasigroup // Topology and its Applications. 2020. Vol. 275. 107147. https://doi.org/10.1016/j.topol.2020.107147
21. Ludkowski S. V. Left invariant measures on locally compact nonassociative core quasigroups // Southeast Asian Bulletin of Mathematics. 2022. Vol. 46. No. 3. P. 365–404. https://zbmath.org/1513.43001
22. Engelking R. General topology. Berlin: Heldermann, 1989. https://zbmath.org/0684.54001
23. Людковский С. В. Факторные и трансверсальные отображения топологических квазигрупп // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2023. Т. 33. Вып. 3. С. 497–522. https://doi.org/10.35634/vm230308
24. Christensen J. P. R. Topology and Borel structure. Amsterdam: North-Holland, 1974.
25. Bogachev V. I. Measure theory. Berlin: Springer, 2007. https://doi.org/10.1007/978-3-540-34514-5
26. Куратовский К. Топология. Т. 1. М.: Мир, 1966.
27. Крамаров С. О., Попов О. Р., Джариев И. Э., Петров Е. А. Динамика формирования связей в сетях, структурированных на основе прогностических терминов // Российский технологический журнал. 2023. Т. 11. № 3. С. 17–29. https://doi.org/10.32362/2500-316X-2023-11-3-17-29
28. Shum K. P., Ren Xueming, Wang Yanhui. Semigroups on semilattice and the constructions of generalized cryptogroups // Southeast Asian Bulletin of Mathematics. 2014. Vol. 38. No. 5. P. 719–730. https://zbmath.org/1324.20038

Поступила в редакцию 26.04.2024
Принята к публикации 08.10.2024

Людковский Сергей Викторович, д. ф.-м. н., профессор, кафедра прикладной математики, МИРЭА — Российский технологический университет, 119454, Россия, Москва, просп. Вернадского, д. 78.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4733-8151
E-mail: sludkowski@mail.ru

Цитирование: С. В. Людковский. О соотношениях топологической и алгебраической структур квазигрупп // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2024. Т. 34. Вып. 4. С. 486–498.

VESTNIK UDMURTSKOGO UNIVERSITETA. MATEMATIKA. MEKHANIKA. KOMP'YUTERNYE NAUKI
MATHEMATICS 2024. Vol. 34. Issue 4. Pp. 486–498.

S. V. Ludkovsky

On relations between topological and algebraic structures of quasigroups

Keywords: quasigroup, topology, algebra, homogeneous space, measure, measurable spaces, quotient space

MSC2020: 43A10, 28A05, 54B05, 20N05, 22A30

DOI: 10.35634/vm240402

In this paper we study specific features of the relations between topological and algebraic structures of quasigroups and loops. We study the measurability of subsets of topological quasigroups and loops with respect to invariant measures. We study the family of non-measurable subsets in locally compact non-discrete loops. We find out the existence of locally μ-zero subsets that are not μ-zero in a locally compact left quasigroup that is not σ-compact. We study quotient spaces of measurable spaces on quasigroups. Moreover, we study homogeneous spaces of quasigroups and countable separability of subsets in them.

REFERENCES

1. Adhikari A., Adhikari M. R. *Basic topology. Vol. 1. Metric spaces and general topology*, Singapore: Springer, 2022. https://doi.org/10.1007/978-981-16-6509-7
2. Arhancet C., Kriegler C. Projections, multipliers and decomposable maps on noncommutative L^p-spaces, *Mémoires de la Société Mathématique de France*, 2023, vol. 177, pp. 1–185. https://doi.org/10.24033/msmf.485
3. Arhangel'skii A., Tkachenko M. *Topological groups and related structures, an introduction to topological algebra*, Paris: Atlantis Press, 2008. https://doi.org/10.2991/978-94-91216-35-0
4. Cohn D. L. *Measure theory*, New York: Birkhäuser, 2013. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-6956-8
5. Fell J. M. G., Doran R. S. *Representations of *-algebras, locally compact groups, and Banach *-algebraic bundles. Vol. 1, 2*, Boston: Academic Press, 1988.
6. Farashahi A. G. Classical harmonic analysis over spaces of complex measures on coset spaces of compact subgroups, *Analysis Mathematica*, 2017, vol. 43, issue 3, pp. 461–473. https://doi.org/10.1007/s10476-017-0205-6
7. Losert V. The derivation problem for group algebras, *Annals of Mathematics*, 2008, vol. 168, issue 1, pp. 221–246. https://doi.org/10.4007/annals.2008.168.221
8. Ludkovsky S. V. Topological transformation groups of manifolds over non-Archimedean fields, their representations, and quasi-invariant measures. I, *Journal of Mathematical Sciences*, 2007, vol. 147, no. 3, pp. 6703–6846. https://doi.org/10.1007/s10958-007-0507-5
9. Ludkovsky S. V. Topological transformation groups of manifolds over non-Archimedean fields, their representations, and quasi-invariant measures, II, *Journal of Mathematical Sciences*, 2008, vol. 150, no. 4, pp. 2123–2223. https://doi.org/10.1007/s10958-008-0127-8
10. Ludkovsky S. V. Stochastic processes on geometric loop groups, diffeomorphism groups of connected manifolds, and associated unitary representations, *Journal of Mathematical Sciences*, 2007, vol. 141, no. 3, pp. 1331–1384. https://doi.org/10.1007/s10958-007-0044-2
11. Ludkovsky S. V. Meta-centralizers of non locally compact group algebras, *Glasgow Mathematical Journal*, 2015, vol. 57, issue 2, pp. 349–364. https://doi.org/10.1017/S0017089514000330
12. Herfort W., Plaumann P. Boolean and profinite loops, *Topology Proceedings*, 2011, vol. 37, pp. 233–237. https://zbmath.org/1201.20067
13. Kakkar V. Boolean loops with compact left inner mapping groups are profinite, *Topology and its Applications*, 2018, vol. 244, pp. 51–54. https://doi.org/10.1016/j.topol.2018.06.002
14. Smith J. D. H. *An introduction to quasigroups and their representations*, New York: Chapman and Hall/CRC, 2006. https://doi.org/10.1201/9781420010633
15. Sabinin L. V. *Smooth quasigroups and loops*, Dordrecht: Springer, 1999. https://doi.org/10.1007/978-94-011-4491-9

16. Blahut R. E. *Algebraic codes for data transmission*, Cambridge: Cambridge University Press, 2003. https://doi.org/10.1017/CBO9780511800467
17. Gonzalez S., Couselo E., Markov V., Nechaev A. Loop codes, *Discrete Mathematics and Applications*, 2004, vol. 14, issue 2, pp. 163–172. https://doi.org/10.1515/156939204872347
18. Markov V. T., Mikhalev A. V., Nechaev A. A. Nonassociative algebraic structures in cryptography and coding, *Journal of Mathematical Sciences*, 2020, vol. 245, no. 2, pp. 178–196. https://doi.org/10.1007/s10958-020-04685-5
19. Plotkin B. *Universal algebra, algebraic logic, and databases*, Dordrecht: Springer, 1994. https://doi.org/10.1007/978-94-011-0820-1
20. Ludkovsky S. V. Existence of an invariant measure on a topological quasigroup, *Topology and its Applications*, 2020, vol. 275, 107147. https://doi.org/10.1016/j.topol.2020.107147
21. Ludkowski S. V. Left invariant measures on locally compact nonassociative core quasigroups, *Southeast Asian Bulletin of Mathematics*, 2022, vol. 46, no. 3, pp. 365–404. https://zbmath.org/1513.43001
22. Engelking R. *General topology*, Berlin: Heldermann, 1989. https://zbmath.org/0684.54001
23. Ludkovsky S. V. Quotient and transversal mappings for topological quasigroups, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2023, vol. 33, issue 3, pp. 497–522 (in Russian). https://doi.org/10.35634/vm230308
24. Christensen J. P. R. *Topology and Borel structure*, Amsterdam: North-Holland, 1974.
25. Bogachev V. I. *Measure theory*, Berlin: Springer, 2007. https://doi.org/10.1007/978-3-540-34514-5
26. Kuratowski K. *Topology. Vol. 1*, Academic Press, 1966. https://doi.org/10.1016/C2013-0-11022-7
27. Kramarov S. O., Popov O. R., Dzhariev I. E., Petrov E. A. Dynamics of link formation in networks structured on the basis of predictive terms, *Russian Technological Journal*, 2023, vol. 11, no. 3, pp. 17–29 (in Russian). https://doi.org/10.32362/2500-316X-2023-11-3-17-29
28. Shum K. P., Ren Xueming, Wang Yanhui. Semigroups on semilattice and the constructions of generalized cryptogroups, *Southeast Asian Bulletin of Mathematics*, 2014, vol. 38, no. 5, pp. 719–730. https://zbmath.org/1324.20038

Received 26.04.2024
Accepted 08.10.2024

Sergey Victorovich Ludkovsky, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Department of Applied Mathematics, MIREA — Russian Technological University, pr. Vernadskogo, 78, Moscow, 119454, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4733-8151
E-mail: sludkowski@mail.ru

Citation: S. V. Ludkovsky. On relations between topological and algebraic structures of quasigroups, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2024, vol. 34, issue 4, pp. 486–498.