ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ
МАТЕМАТИКА 2024. Т. 34. Вып. 4. С. 518–540.

УДК 519.8

© *А. Г. Ченцов, П. А. Ченцов*

НЕКОТОРЫЕ КОНСТРУКЦИИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ МАРШРУТИЗАЦИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ДЕКОМПОЗИЦИЙ И ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ЦЕЛЕВЫХ МНОЖЕСТВ

Рассматриваются вопросы, связанные с решением аддитивной задачи последовательного обхода множеств с ограничениями предшествования и функциями стоимости, допускающими зависимость от списка заданий. В качестве базового метода используется широко понимаемое динамическое программирование (ДП), дополняемое в случае задач ощутимой размерности декомпозициями семейства заданий и преобразованием параметров исходной задачи. Возможные применения связаны, в частности, с задачей управления инструментом при фигурной листовой резке деталей на машинах с ЧПУ. В этой задаче важным обстоятельством является учет условий предшествования, имеющих, в частности, следующий смысл: в случае детали с отверстиями резка каждого из внутренних контуров (отвечающих отверстиям) должна предшествовать резке внешнего контура. Сам критерий качества в данной задаче, как правило, является аддитивным. Другой тип ограничений касается избежания термических деформаций деталей. При использовании подхода с применением штрафов за нарушение условий, связанных с эффективным отводом тепла при выполнении врезки, возникают функции стоимости, допускающие зависимость от списка заданий, выполненных на текущий момент времени. Заметим, что в другой прикладной задаче, а именно в задаче о демонтаже радиационно опасных объектов, возникают функции стоимости с зависимостью от списка заданий, не выполненных на данный момент (а, следовательно, касающихся недемонтированных объектов). В итоге мы приходим к очень общей задаче с ограничениями предшествования и функциями стоимости с зависимостью от списка заданий. Применяемая в случае ощутимой размерности декомпозиция с последующей реализацией ДП требует, с одной стороны, разработки методов кластеризации, а, с другой, построения адекватной конструкции распределения глобальных условий предшествования по кластерам. В теоретической части работы обсуждается случай двух кластеров, который позволяет охватить единой схемой целый ряд практически интересных задач диапазонного (в смысле размерности) типа. Указан алгоритм построения композиционного решения, включающий этап обучения кластеризации на основе жадного алгоритма. Данный «композиционный» алгоритм реализован на ПЭВМ; проведен вычислительный эксперимент.

Ключевые слова: динамическое программирование, маршрут, условия предшествования.

DOI: 10.35634/vm240404

Введение

Задачи с элементами маршрутизации возникают в самых различных областях человеческой деятельности. Отметим только некоторые актуальные инженерные задачи: проблема, связанная с демонтажом радиационно опасных объектов (имеются в виду аварии, подобные Чернобылю и Фукусиме, задача демонтажа энергоблока АЭС, выведенного из эксплуатации), задача управления инструментом при фигурной листовой резке деталей на машинах с ЧПУ, транспортные задачи. Возникающие при этом математические постановки имеют своим прототипом известную труднорешаемую задачу коммивояжера (ЗК); см. [1–7] и др. Вместе с тем имеются и существенные особенности: наличие ограничений, усложнение функций стоимости и др. Упомянутые инженерные (по своей сути) задачи имеют диапазонный (в смысле размерности) характер, а потому положения асимптотического характера, относящиеся к ситуации с неограниченно возрастающей размерностью, могут не соответствовать существу дела. Представляется, что здесь требуется разработка специализированных методов; важным обстоятельством является при этом требование, заключающееся в построении решения конкретной задачи за приемлемое время. Упомянутые обстоятельства обусловили широкое применение эвристик. В частности, это касается задач, связанных с листовой резкой на машинах с ЧПУ (см. [8–13]). Отметим в этой связи монографию [14]. По поводу вопросов, связанных с маршрутизацией демонтажа радиационно опасных объектов, см. [15]. Наконец, в [16–18] рассматривались некоторые методы решения задач транспортного типа, ориентированные на проблемы логистики в малой авиации (см. в этой связи монографию [19], посвященную задачам маршрутизации с неаддитивным агрегированием затрат).

Следует отметить, что размерность упомянутых прикладных задач (особенно задач, связанных с резкой) может все же быть достаточно большой, что приводит к затруднениям при вычислительной реализации. В связи с этим в [20–22] была разработана схема решения по методу ДП с применением декомпозиции. Ограничиваясь сейчас простейшим вариантом декомпозиции с использованием двух кластеров, отметим, что в ряде случаев это отвечает самой логике инженерной задачи. Так, в случае термической резки на машинах с ЧПУ процесс резки следует начинать с длинномерных [14, с. 46] деталей, расположенных вблизи узкой границы материала, поскольку заготовки таких деталей в максимальной степени подвержены тепловым деформациям. В этом случае выделение длинномерных (и, возможно, каких-то еще) деталей в кластер первоочередных является не огрублением, а, напротив, полезным уточнением математической постановки, поскольку вполне соответствует технологическим условиям. В этом случае мы имеем достаточно понятное правило кластеризации (развитием данного правила является резка зонами, где число кластеров может быть больше двух, см. [14, § 1.3.3]).

С другой стороны, возможна ситуация, когда правило кластеризации не является столь понятным по той причине, что (до решения задачи) нет каких-либо «внешних» оснований для выделения части заданий в кластер первоочередных, а размерность задачи достаточно велика, что не позволяет реализовать ранее разработанные [23–26] конструкции на основе ДП для построения оптимальных решений. В этом случае мы сознательно идем на декомпозицию полной задачи с последующим раздельным применением ДП в интересах вычислительной реализации; однако, выбор кластеризации здесь уже не столь очевиден. В настоящей работе мы рассматриваем один из подходов, в основе которого находится своеобразное обучение кластеризации с использованием жадного алгоритма. Применяя данный алгоритм, мы находим (достаточно быстро) последовательность заданий, каждое из которых состоит в обслуживании мегаполиса (непустого конечного множества). Мегаполисы в получившейся очередности мы распределяем в пределах двух кластеров, получая вариант декомпозиции исходной задачи. Затем используется метод [20–22] оптимизации композиционного решения. Важным обстоятельством при этом является адекватное преобразование исходных условий предшествования и их декомпозиция, поскольку [27, § 4.9] эти условия удается использовать в положительном направлении в части снижения сложности вычислений. Итак, в статье построен алгоритм, предусматривающий декомпозицию маршрутной задачи ощутимой размерности, определяемую на основе жадной эвристики, с последующей оптимизацией на получающемся множестве композиционных решений, включающих каждое точку старта, перестановку индексов мегаполисов (то есть маршрут) и траекторию перемещения по мегаполисам, занумерованным с помощью упомянутой перестановки.

Данный алгоритм реализован на ПЭВМ; проведенный вычислительный эксперимент показал возможность решения задач ощутимой размерности за приемлемое время.

§ 1. Общие сведения

Ниже используется обычная теоретико-множественная символика (кванторы, пропозициональные связки и т. п.), $\varnothing$ — пустое множество, $\triangleq$ — равенство по определению, def заменяет фразу «по определению». Множество, все элементы которого множества, называем семейством. Объектам x и y сопоставляем непустое множество $\{x;y\}$, содержащее x, y и не содержащее никаких других элементов. Тогда для каждого объекта z в виде $\{z\} \triangleq \{z;z\}$ имеем синглетон, содержащий z: $z \in \{z\}$. Множества — объекты, а потому для любых двух объектов p и q полагаем, следуя [28, с. 67], что $(p,q) \triangleq \{\{p\};\{p;q\}\}$ есть упорядоченная пара (у. п.) с первым элементом p и вторым элементом q. Если же h есть у. п., то через $\mathrm{pr}_1(h)$ и $\mathrm{pr}_2(h)$ обозначаем соответственно первый и второй элементы h, однозначно определяемые равенством $h = (\mathrm{pr}_1(h), \mathrm{pr}_2(h))$. Для трех произвольных объектов x, y и z полагаем, как обычно (см. [29, с. 17]), что $(x,y,z) \triangleq ((x,y),z)$. В этой связи напомним, что, если A, B и C — множества, то [29, с. 17] $A \times B \times C \triangleq (A \times B) \times C$; тогда при $u \in A \times B$ и $v \in C$ имеем $(u,v) \in A \times B \times C$. Множеству H сопоставляем семейство $\mathcal{P}(H)$ всех подмножеств (п/м) H и семейство $\mathcal{P}'(H) \triangleq \mathcal{P}(H) \setminus \{\varnothing\}$, а также семейство $\mathrm{Fin}(H)$ всех конечных множеств из $\mathcal{P}'(H)$, то есть семейство всех непустых конечных п/м H (если H конечно, то $\mathcal{P}'(H) = \mathrm{Fin}(H)$). Для любых непустых множеств A и B через B^A обозначаем, следуя [28, гл. II], множество всех функций из A в B; при $g \in B^A$ и $a \in A$ в виде $g(a) \in B$ имеем, конечно, значение функции g в точке a. Используем обычное понятие образа множества: если A и B — непустые множества, $h \in B^A$ и $C \in \mathcal{P}(A)$, то $h^1(C) \triangleq \{\, h(x) \colon x \in C\} \in \mathcal{P}(B)$ есть образ C при действии h, см. [28, § 7].

Пусть $\mathbb{R}_+ \triangleq \{\xi \in \mathbb{R} | 0 \leqslant \xi\} = [0,\infty[$ ($\mathbb{R}$ — вещественная прямая), $\mathbb{N} \triangleq \{1;2;\ldots\}$ (натуральный ряд), $\mathbb{N}_0 \triangleq \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0;1;2;\ldots\}$, $\overline{p,q} \triangleq \{k \in \mathbb{N}_0 | (p \leqslant k) \& (k \leqslant q)\}$ $\forall p \in \mathbb{N}_0$ $\forall q \in \mathbb{N}_0$ (тогда $\overline{1,0} = \varnothing$, $\overline{1,m} = \{k \in \mathbb{N} | k \leqslant m\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{N})$ при $m \in \mathbb{N}$). При $K \in \mathcal{P}'(\mathbb{N})$ и $s \in \mathbb{N}$ в виде $K \oplus s \triangleq \{k + s \colon k \in K\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{N})$ имеем сдвиг множества K на s. Непустому конечному множеству K сопоставляется его мощность $|K| \in \mathbb{N}$ и непустое конечное множество $(\mathrm{bi})[K]$ всех биекций [30, с. 87] дискретного интервала $\overline{1,|K|}$ на K. Полагаем, как обычно, что $|\varnothing| \triangleq 0$. Перестановка непустого множества $\mathbb{A}$ есть [30, с. 87] биекция $\mathbb{A}$ на себя; если α — перестановка $\mathbb{A}$, то определена обратная (по отношению к α) перестановка α^{-1} того же множества $\mathbb{A}$ со свойствами

$$\alpha^{-1}(\alpha(x)) = \alpha(\alpha^{-1}(x)) = x \quad \forall x \in \mathbb{A}. \tag{1.1}$$

Непустому множеству S сопоставляем множество $\mathcal{R}_+[S]$ всех неотрицательных вещественнозначных (в/з) функций на S: $h(s) \in \mathbb{R}_+$ при $h \in \mathcal{R}_+[S]$ и $s \in S$.

§ 2. Задача маршрутизации (содержательная постановка)

Фиксируем непустое множество X, а также $X^0 \in \mathrm{Fin}(X)$. Далее, фиксируем $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$ со свойством $4 \leqslant \mathbf{n}$, а также множества

$$\tilde{M}_1 \in \mathrm{Fin}(X), \quad \tilde{M}_2 \in \mathrm{Fin}(X), \quad \ldots, \quad \tilde{M}_{\mathbf{n}} \in \mathrm{Fin}(X), \tag{2.1}$$

именуемые ниже мегаполисами. Кроме того, фиксируем (непустые) отношения

$$\tilde{\mathbb{M}}_1 \in \mathcal{P}'(\tilde{M}_1 \times \tilde{M}_1), \quad \tilde{\mathbb{M}}_2 \in \mathcal{P}'(\tilde{M}_2 \times \tilde{M}_2), \quad \ldots, \quad \tilde{\mathbb{M}}_{\mathbf{n}} \in \mathcal{P}'(\tilde{M}_{\mathbf{n}} \times \tilde{M}_{\mathbf{n}}). \tag{2.2}$$

Рассматривается задача о посещении мегаполисов (2.1) со стартом в X^0. Отношения (2.2), элементы которых суть у. п., определяют возможные (и зачастую взаимосвязанные) пункты прибытия и отправления для каждого мегаполиса из (2.1). Полагаем

$$(X^0 \cap \tilde{M}_j = \varnothing \quad \forall j \in \overline{1,\mathbf{n}}) \,\&\, (\tilde{M}_p \cap \tilde{M}_q = \varnothing \quad \forall p \in \overline{1,\mathbf{n}} \quad \forall q \in \overline{1,\mathbf{n}} \setminus \{p\}). \tag{2.3}$$

Итак, $\mathcal{M} \overset{\triangle}{=} \{\tilde{M}_i \colon i \in \overline{1,\mathbf{n}}\}$ есть семейство всех мегаполисов, подлежащих посещению. Кроме того, фиксируем далее $N \in \overline{2,\mathbf{n}-2}$ в качестве параметра. Сейчас рассмотрим весьма общую задачу, для которой наши построения будут содержательными при достаточно большом значении $\mathbf{n}$, то есть в случае ощутимой размерности. Итак, при $j \in \overline{1,\mathbf{n}}$ пусть $(\tilde{\mathfrak{M}}_j \overset{\triangle}{=} \{\mathrm{pr}_1(z) \colon z \in \tilde{\mathbb{M}}_j\}) \,\&\, (\tilde{\mathbf{M}}_j \overset{\triangle}{=} \{\mathrm{pr}_2(z) \colon z \in \tilde{\mathbb{M}}_j\})$; ясно, что $\tilde{\mathfrak{M}}_j \in \mathrm{Fin}(\tilde{M}_j)$ и $\tilde{\mathbf{M}}_j \in \mathrm{Fin}(\tilde{M}_j)$. Пусть также $\mathbb{P} \overset{\triangle}{=} (\mathrm{bi})[\overline{1,\mathbf{n}}]$. Будем при $\varkappa \in \mathbb{P}$ рассматривать перемещения

$$\begin{gathered}(x \in X^0) \to (\mathrm{pr}_1(z_1) \in \tilde{\mathfrak{M}}_{\varkappa(1)} \rightsquigarrow \mathrm{pr}_2(z_1) \in \tilde{\mathbf{M}}_{\varkappa(1)}) \to \ldots \\ \ldots \to (\mathrm{pr}_1(z_{\mathbf{n}}) \in \tilde{\mathfrak{M}}_{\varkappa(\mathbf{n})} \rightsquigarrow \mathrm{pr}_2(z_{\mathbf{n}}) \in \tilde{\mathbf{M}}_{\varkappa(\mathbf{n})}),\end{gathered} \tag{2.4}$$

$$z_1 \in \tilde{\mathbb{M}}_{\varkappa(1)}, \quad z_2 \in \tilde{\mathbb{M}}_{\varkappa(2)}, \quad \ldots, \quad z_{\mathbf{n}} \in \tilde{\mathbb{M}}_{\varkappa(\mathbf{n})}. \tag{2.5}$$

В (2.4) прямые стрелки соответствуют внешним перемещениям (между мегаполисами), а волнистые — перемещениям при выполнении (внутренних) работ, связанных с посещением мегаполисов. С учетом (2.4), (2.5) логично рассматривать траектории процесса как перемещения по отношениям из (2.2), занумерованным посредством $\varkappa$. В дальнейшем перестановки $\varkappa \in \mathbb{P}$ именуем маршрутами. Для каждого такого маршрута имеется много вариантов реализации (2.5), то есть существует много траекторий, согласованных с маршрутом $\varkappa$ при данном старте. Это будет отмечено далее на строгом уровне, а сейчас мы обсудим условия предшествования, полагая заданным множество

$$\mathbf{K} \in \mathcal{P}(\overline{1,\mathbf{n}} \times \overline{1,\mathbf{n}}) \tag{2.6}$$

(случай $\mathbf{K} = \varnothing$ не исключается и соответствует отсутствию условий предшествования), элементы которого называем адресными парами; всюду в дальнейшем полагаем, что

$$\forall \mathbf{K}_0 \in \mathcal{P}'(\mathbf{K}) \quad \exists z_0 \in \mathbf{K}_0 \colon \mathrm{pr}_1(z_0) \neq \mathrm{pr}_2(z) \quad \forall z \in \mathbf{K}_0. \tag{2.7}$$

Условие (2.7) исключает зацикливание маршрутов, допустимых по предшествованию; множество всех таких (допустимых) маршрутов есть

$$\mathcal{A} \overset{\triangle}{=} \{\alpha \in \mathbb{P} \mid \alpha^{-1}(\mathrm{pr}_1(z)) < \alpha^{-1}(\mathrm{pr}_2(z)) \quad \forall z \in \mathbf{K}\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{P}). \tag{2.8}$$

Итак (при условии (2.7), см. [27, часть 2]), $\mathcal{A} \neq \varnothing$, то есть допустимые по предшествованию маршруты существуют. Рассмотрим траектории со стартом в $x \in X^0$ и согласованные с маршрутом $\varkappa \in \mathbb{P}$: при $\mathfrak{Z} \overset{\triangle}{=} (X \times X)^{\overline{0,\mathbf{n}}}$

$$\tilde{\mathfrak{Z}}_{\varkappa}[x] \overset{\triangle}{=} \{(z_t)_{t \in \overline{0,\mathbf{n}}} \in \mathfrak{Z} \mid (z_0 = (x,x)) \,\&\, (z_\tau \in \tilde{\mathbb{M}}_{\varkappa(\tau)} \quad \forall \tau \in \overline{1,\mathbf{n}})\} \in \mathrm{Fin}(\mathfrak{Z}) \tag{2.9}$$

есть как раз множество всех траекторий упомянутого типа. При $x \in X^0$

$$\mathbf{D}_0[x] \overset{\triangle}{=} \{(\varkappa, \mathbf{z}) \in \mathcal{A} \times \mathfrak{Z} \mid \mathbf{z} \in \tilde{\mathfrak{Z}}_{\varkappa}[x]\} \in \mathrm{Fin}(\mathcal{A} \times \mathfrak{Z}) \tag{2.10}$$

есть множество всех допустимых решений (ДР) с фиксированным стартом x. Наконец,

$$\mathbb{D}^0 \overset{\triangle}{=} \{(\alpha, \mathbf{z}, x) \in \mathcal{A} \times \mathfrak{Z} \times X^0 \mid (\alpha, \mathbf{z}) \in \mathbf{D}_0[x]\} \in \mathrm{Fin}(\mathcal{A} \times \mathfrak{Z} \times X^0) \tag{2.11}$$

есть множество всех ДР в задаче с нефиксированным стартом; элементы $\mathbb{D}^0$ (2.11) называем маршрутными процессами (МП).

Функции стоимости и аддитивный критерий. Используем ниже множества

$$\Big(\mathfrak{X}_0 \triangleq \Big(\bigcup_{i=1}^{\mathbf{n}} \tilde{\mathbf{M}}_i\Big) \cup X^0 \in \mathrm{Fin}(X)\Big) \;\&\; \Big(\mathfrak{X}^0 \triangleq \bigcup_{i=1}^{\mathbf{n}} \tilde{\mathfrak{M}}_i \in \mathrm{Fin}(X)\Big) \;\&\; \big(\mathfrak{N} \triangleq \mathcal{P}'(\overline{1,\mathbf{n}})\big). \quad (2.12)$$

В терминах множеств (2.12) вводим следующие в/з функции:

$$\mathbf{c} \in \mathcal{R}_+[\mathfrak{X}_0 \times \mathfrak{X}^0 \times \mathfrak{N}], \quad c_1 \in \mathcal{R}_+[\tilde{\mathbb{M}}_1 \times \mathfrak{N}], \quad c_2 \in \mathcal{R}_+[\tilde{\mathbb{M}}_2 \times \mathfrak{N}], \quad \ldots, \quad c_{\mathbf{n}} \in \mathcal{R}_+[\tilde{\mathbb{M}}_{\mathbf{n}} \times \mathfrak{N}],$$
$$f \in \mathcal{R}_+[\bigcup_{i=1}^{\mathbf{n}} \tilde{\mathbf{M}}_i];$$

$\mathbf{c}$ оценивает внешние перемещения, c_1, c_2, $\ldots$, $c_{\mathbf{n}}$ — внутренние работы при посещении мегаполисов, а f — терминальное состояние. При $x \in X^0$, $\varkappa \in \mathbb{P}$ и $(z_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}}} \in \tilde{\mathfrak{Z}}_\varkappa[x]$

$$\tilde{\mathfrak{C}}_\varkappa\big[(z_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}}}\big] \triangleq \sum_{t=1}^{\mathbf{n}} \Big[\mathbf{c}\big(\mathrm{pr}_2(z_{t-1}), \mathrm{pr}_1(z_t), \varkappa^1(\overline{t,\mathbf{n}})\big) + c_{\varkappa(t)}\big(z_t, \varkappa^1(\overline{t,\mathbf{n}})\big)\Big] + f\big(\mathrm{pr}_2(z_{\mathbf{n}})\big) \in \mathbb{R}_+. \quad (2.13)$$

Разумеется, (2.13) определено при $x \in X^0$ и $(\varkappa, (z_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}}}) \in \mathbf{D}_0[x]$. Рассматривая (2.13) как аддитивный критерий, мы при $x \in X^0$ получаем задачу

$$\tilde{\mathfrak{C}}_\varkappa[\mathbf{z}] \longrightarrow \min, \quad (\varkappa, \mathbf{z}) \in \mathbf{D}_0[x],$$

которой сопоставляется экстремум и (непустое) экстремальное множество решений:

$$V_0[x] \triangleq \min_{(\varkappa,\mathbf{z})\in\mathbf{D}_0[x]} \tilde{\mathfrak{C}}_\varkappa[\mathbf{z}] \in \mathbb{R}_+, \quad (2.14)$$
$$(\mathrm{sol})_0[x] \triangleq \big\{(\alpha, \mathbf{z}) \in \mathbf{D}_0[x] \mid \tilde{\mathfrak{C}}_\varkappa[\mathbf{z}] = V_0[x]\big\} \in \mathcal{P}'\big(\mathbf{D}_0[x]\big).$$

Кроме того (см. (2.10), (2.11), (2.13)), $\tilde{\mathfrak{C}}_\varkappa[\mathbf{z}]$ определено при $(\varkappa, \mathbf{z}, x) \in \mathbb{D}^0$. В задаче

$$\tilde{\mathfrak{C}}_\varkappa[\mathbf{z}] \longrightarrow \min, \quad (\varkappa, \mathbf{z}, x) \in \mathbb{D}^0,$$

рассматриваемой в качестве основной, определены

$$\tilde{\mathbb{V}} \triangleq \min_{(\varkappa,\mathbf{z},x)\in\mathbb{D}^0} \tilde{\mathfrak{C}}_\varkappa[\mathbf{z}] = \min_{x\in X^0} V_0[x] \in \mathbb{R}_+, \quad (2.15)$$
$$\mathbb{SOL} \triangleq \{(\varkappa, \mathbf{z}, x) \in \mathbb{D}^0 | \tilde{\mathfrak{C}}_\varkappa[\mathbf{z}] = \tilde{\mathbb{V}}\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{D}^0). \quad (2.16)$$

Элементы множества (2.16) суть оптимальные МП и только они. Однако, конкретное нахождение (2.15) и какого-либо МП из $\mathbb{SOL}$ (2.16) связано с серьезными трудностями при вычислительной реализации. Далее будет предложена эвристика, ориентированная на последующее применение декомпозиции с использованием двух кластеров заданий.

§ 3. Жадный алгоритм как средство обучения кластеризации

Имея в виду подход [27, § 4.9], введем оператор вычеркивания (заданий из списка): полагаем, что (см. [27, часть 2]) $\mathbf{I} \in \mathfrak{N}^{\mathfrak{N}}$ определяется условиями: при $K \in \mathfrak{N}$

$$\mathbf{I}(K) \triangleq K \setminus \big\{\mathrm{pr}_2(z)\colon z \in \Sigma_0[K]\big\},$$

где $\Sigma_0[K] \triangleq \{z \in \mathbf{K} \mid (\mathrm{pr}_1(z) \in K)\,\&\,(\mathrm{pr}_2(z) \in K)\}$. Корректность данного определения обоснована в [27, раздел 2.2]. Далее, следуя [27, раздел 2.2], введем

$$(\mathbf{I}-\mathrm{bi})[\overline{1,\mathbf{n}}] \triangleq \{\alpha \in \mathbb{P} \mid \alpha(k) \in \mathbf{I}(\alpha^1(\overline{k,\mathbf{n}})) \quad \forall k \in \overline{1,\mathbf{n}}\},$$

получая множество всех маршрутов, допустимых по вычеркиванию (заданий из списков). При этом (см. [27, (2.2.3), теорема 2.2.1])

$$\mathcal{A} = (\mathbf{I}-\mathrm{bi})[\overline{1,\mathbf{n}}] = \{\alpha \in \mathbb{P} \mid (\alpha(1) \in \mathbf{I}(\overline{1,\mathbf{n}}))\,\&\,(\alpha(s) \in \mathbf{I}(\overline{1,\mathbf{n}}\setminus\alpha^1(\overline{1,s-1})) \ \ \forall s \in \overline{2,\mathbf{n}})\}. \quad (3.1)$$

итак, «запас» маршрутов, допустимых по предшествованию и по вычеркиванию, является одним и тем же. Учитывая (3.1), введем жадный алгоритм формирования ДР в задачах с фиксированным стартом. Итак, пусть $x_* \in X^0$. Полагаем $\mathbf{z}_0 \triangleq (x_*, x_*)$, получая, в частности, что $\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}_0) = x_* \in \mathfrak{X}_0$. Рассмотрим (локальную) задачу

$$\mathbf{c}\big(x_*, \mathrm{pr}_1(z), \overline{1,\mathbf{n}}\big) + c_j(z, \overline{1,\mathbf{n}}) \longrightarrow \min, \quad j \in \mathbf{I}(\overline{1,\mathbf{n}}), \quad z \in \tilde{\mathbb{M}}_j. \quad (3.2)$$

Выбираем $\mathbf{r}_1 \in \mathbf{I}(\overline{1,\mathbf{n}})$ и $\mathbf{z}_1 \in \tilde{\mathbb{M}}_{\mathbf{r}_1}$ в виде компонентов решения задачи (3.2):

$$\mathbf{c}\big(x_*, \mathrm{pr}_1(\mathbf{z}_1), \overline{1,\mathbf{n}}\big) + c_{\mathbf{r}_1}(\mathbf{z}_1, \overline{1,\mathbf{n}}) = \min_{j \in \mathbf{I}(\overline{1,\mathbf{n}})} \min_{z \in \tilde{\mathbb{M}}_j} \big[\mathbf{c}(x_*, \mathrm{pr}_1(z), \overline{1,\mathbf{n}}) + c_j(z, \overline{1,\mathbf{n}})\big]. \quad (3.3)$$

В частности, $\mathbf{r}_1 \in \overline{1,\mathbf{n}}$ и $\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}_1) \in \tilde{\mathbf{M}}_{\mathbf{r}_1}$; как следствие, $\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}_1) \in \mathfrak{X}_0$. Имеем задачу

$$\mathbf{c}\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}_1), \mathrm{pr}_1(z), \overline{1,\mathbf{n}}\setminus\{\mathbf{r}_1\}\big) + c_j\big(z, \overline{1,\mathbf{n}}\setminus\{\mathbf{r}_1\}\big) \longrightarrow \min, \quad j \in \mathbf{I}\big(\overline{1,\mathbf{n}}\setminus\{\mathbf{r}_1\}\big), \quad z \in \tilde{\mathbb{M}}_j; \quad (3.4)$$

здесь учитывается, что $3 \leqslant |\overline{1,\mathbf{n}} \setminus \{\mathbf{r}_1\}| = \mathbf{n} - 1$. Находим $\mathbf{r}_2 \in \mathbf{I}\big(\overline{1,\mathbf{n}} \setminus \{\mathbf{r}_1\}\big)$ и $\mathbf{z}_2 \in \tilde{\mathbb{M}}_{\mathbf{r}_2}$ в виде компонентов решения задачи (3.4), то есть в виде

$$\begin{gathered}\mathbf{c}\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}_1), \mathrm{pr}_1(\mathbf{z}_2), \overline{1,\mathbf{n}} \setminus \{\mathbf{r}_1\}\big) + c_{\mathbf{r}_2}\big(\mathbf{z}_2, \overline{1,\mathbf{n}} \setminus \{\mathbf{r}_1\}\big) = \\ = \min_{j \in \mathbf{I}(\overline{1,\mathbf{n}}\setminus\{\mathbf{r}_1\})} \min_{z \in \tilde{\mathbb{M}}_j} \Big[\mathbf{c}\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}_1), \mathrm{pr}_1(z), \overline{1,\mathbf{n}} \setminus \{\mathbf{r}_1\}\big) + c_j\big(z, \overline{1,\mathbf{n}} \setminus \{\mathbf{r}_1\}\big)\Big].\end{gathered} \quad (3.5)$$

Тогда $\mathbf{r}_2 \in \overline{1,\mathbf{n}} \setminus \{\mathbf{r}_1\}$ и $\mathbf{pr}_2(\mathbf{z}_2) \in \tilde{\mathbf{M}}_{\mathbf{r}_2}$, а потому $\mathbf{pr}_2(\mathbf{z}_2) \in \mathfrak{X}_0$. Построены кортежи

$$(\mathbf{r}_i)_{i\in\overline{1,2}} \colon \overline{1,2} \longrightarrow \overline{1,\mathbf{n}}, \quad (\mathbf{z}_i)_{i\in\overline{0,2}} \colon \overline{0,2} \longrightarrow X \times X \quad (3.6)$$

со свойствами (3.3), (3.5). Пусть вообще $\nu \in \overline{2,\mathbf{n}-1}$ таково, что уже построены кортежи

$$(\mathbf{r}_i)_{i\in\overline{1,\nu}} \colon \overline{1,\nu} \longrightarrow \overline{1,\mathbf{n}}, \quad (\mathbf{z}_i)_{i\in\overline{0,\nu}} \colon \overline{0,\nu} \longrightarrow X \times X, \quad (3.7)$$

для которых справедливы следующие свойства (1)–(3):

(1) $\big(\mathbf{z}_0 = (x_*, x_*)\big)\,\&\,\big(\mathbf{z}_t \in \tilde{\mathbb{M}}_{\mathbf{r}_t} \quad \forall t \in \overline{1,\nu}\big)$;

(2) $\mathbf{r}_t \in \mathbf{I}\big(\overline{1,\mathbf{n}} \setminus \{\mathbf{r}_s \colon s \in \overline{1,t-1}\}\big) \quad \forall t \in \overline{1,\nu}$;

(3) $$\begin{gathered}\mathbf{c}\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}_{t-1}), \mathrm{pr}_1(\mathbf{z}_t), \overline{1,\mathbf{n}} \setminus \{\mathbf{r}_s \colon s \in \overline{1,t-1}\}\big) + c_{\mathbf{r}_t}\big(\mathbf{z}_t, \overline{1,\mathbf{n}} \setminus \{\mathbf{r}_s \colon s \in \overline{1,t-1}\}\big) = \\ = \min_{j \in \mathbf{I}(\overline{1,\mathbf{n}}\setminus\{\mathbf{r}_s \colon s\in\overline{1,t-1}\})} \min_{z \in \tilde{\mathbb{M}}_j} \Big[\mathbf{c}\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}_{t-1}), \mathrm{pr}_1(z), \overline{1,\mathbf{n}} \setminus \{\mathbf{r}_s \colon s \in \overline{1,t-1}\}\big) + \\ + c_j\big(z, \overline{1,\mathbf{n}} \setminus \{\mathbf{r}_s \colon s \in \overline{1,t-1}\}\big)\Big] \quad \forall t \in \overline{1,\nu}.\end{gathered}$$

Отметим, что возможны следующие случаи:

$$(\nu \in \overline{2, \mathbf{n}-2}) \vee (\nu = \mathbf{n}-1). \tag{3.8}$$

Замечание 1. Проверим, что при $\nu = 2$ построенные ранее кортежи (3.6) удовлетворяют условиям (1)–(3). Итак, пусть сейчас $\nu = 2$. В этой связи напомним прежде всего, что кортежи $\big((\mathbf{r}_i)_{i\in\overline{1,2}} = (\mathbf{r}_i)_{i\in\overline{1,\nu}}\big) \,\&\, \big((\mathbf{z}_i)_{i\in\overline{0,2}} = (z_i)_{i\in\overline{0,\nu}}\big)$ уже построены, $\mathbf{r}_1 \in \overline{1,\mathbf{n}}$ и $\mathbf{r}_2 \in \overline{1,\mathbf{n}}$, причем $\mathbf{r}_1 \neq \mathbf{r}_2$. Далее, в наших предыдущих построениях $\mathbf{z}_0 = (x_*, x_*)$, $\mathbf{z}_1 \in \tilde{\mathbb{M}}_{\mathbf{r}_1}$, $\mathbf{z}_2 \in \tilde{\mathbb{M}}_{\mathbf{r}_2}$. Поэтому (при $\nu = 2$) имеет место (1). Далее, из (3.3) и (3.5) вытекает (3), где учитывается, что $\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}_0) = x_*$,

$$\overline{1,\mathbf{n}} \setminus \{\mathbf{r}_s \colon s \in \overline{1,0}\} = \overline{1,\mathbf{n}} \setminus \varnothing = \overline{1,\mathbf{n}}, \quad \overline{1,\mathbf{n}} \setminus \{\mathbf{r}_s \colon s \in \overline{1,1}\} = \overline{1,\mathbf{n}} \setminus \{\mathbf{r}_1\}.$$

Тогда по выбору $\mathbf{r}_1$ имеем, что $\mathbf{r}_1 \in \mathbf{I}\big(\overline{1,\mathbf{n}} \setminus \{\mathbf{r}_s \colon s \in \overline{1,0}\}\big)$. Аналогично, по выбору $\mathbf{r}_2$ получаем включение $\mathbf{r}_2 \in \mathbf{I}\big(\overline{1,\mathbf{n}} \setminus \{\mathbf{r}_s \colon s \in \overline{1,1}\}\big)$. Таким образом, истинно (2), если $\nu = 2$. Итак, при $\nu = 2$ все условия (1)–(3) выполнены.

Вернемся к (3.8). Оба случая в (3.8) рассмотрим отдельно.

а) Пусть $\nu \in \overline{2,\mathbf{n}-2}$. Тогда $\nu+1 \in \overline{3,\mathbf{n}-1}$. Согласно (3.7), $\mathbf{r}_\nu \in \overline{1,\mathbf{n}}$ и $\mathbf{z}_\nu \in X \times X$. В силу (1) имеем, что $\mathbf{z}_\nu \in \tilde{\mathbb{M}}_{\mathbf{r}_\nu}$, где $\tilde{\mathbb{M}}_{\mathbf{r}_\nu} \in \mathcal{P}'(M_{\mathbf{r}_\nu} \times M_{\mathbf{r}_\nu})$. При этом $\tilde{\mathbf{M}}_{\mathbf{r}_\nu} = \{\mathrm{pr}_2(z) \colon z \in \tilde{\mathbb{M}}_{\mathbf{r}_\nu}\}$, а потому $\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}_\nu) \in \tilde{\mathbf{M}}_{\mathbf{r}_\nu}$. В частности, имеем задачу:

$$\begin{gathered}\mathbf{c}\big(\mathbf{pr}_2(\mathbf{z}_\nu), \mathrm{pr}_1(z), \overline{1,\mathbf{n}} \setminus \{\mathbf{r}_s \colon s \in \overline{1,\nu}\}\big) + c_j\big(z, \overline{1,\mathbf{n}} \setminus \{\mathbf{r}_s \colon s \in \overline{1,\nu}\}\big) \longrightarrow \min, \\ j \in \mathbf{I}\big(\overline{1,\mathbf{n}} \setminus \{\mathbf{r}_s \colon s \in \overline{1,\nu}\}\big), \quad z \in \tilde{\mathbb{M}}_j.\end{gathered} \tag{3.9}$$

Выбираем решение (3.9): $\mathbf{r}_{\nu+1} \in \mathbf{I}\big(\overline{1,\mathbf{n}} \setminus \{\mathbf{r}_s \colon s \in \overline{1,\nu}\}\big)$, $\mathbf{z}_{\nu+1} \in \tilde{\mathbb{M}}_{\mathbf{r}_{\nu+1}}$ со свойством

$$\begin{gathered}\mathbf{c}\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}_\nu), \mathrm{pr}_1(\mathbf{z}_{\nu+1}), \overline{1,\mathbf{n}} \setminus \{\mathbf{r}_s \colon s \in \overline{1,\nu}\}\big) + c_{\mathbf{r}_{\nu+1}}\big(\mathbf{z}_{\nu+1}, \overline{1,\mathbf{n}} \setminus \{\mathbf{r}_s \colon s \in \overline{1,\nu}\}\big) = \\ = \min_{j \in \mathbf{I}(\overline{1,\mathbf{n}} \setminus \{\mathbf{r}_s \colon s \in \overline{1,\nu}\})} \min_{z \in \tilde{\mathbb{M}}_j} \Big[\mathbf{c}\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}_\nu), \mathrm{pr}_1(z), \overline{1,\mathbf{n}} \setminus \{\mathbf{r}_s \colon s \in \overline{1,\nu}\}\big) + \\ + c_j\big(z, \overline{1,\mathbf{n}} \setminus \{\mathbf{r}_s \colon s \in \overline{1,\nu}\}\big)\Big].\end{gathered} \tag{3.10}$$

Тогда $\mathbf{r}_{\nu+1} \in \overline{1,\mathbf{n}}$ и $\mathbf{z}_{\nu+1} \in \tilde{M}_{\mathbf{r}_\nu+1} \times \tilde{M}_{\mathbf{r}_\nu+1}$. Получили кортежи

$$(\mathbf{r}_i)_{i\in\overline{1,\nu+1}} \colon \overline{1,\nu+1} \longrightarrow \overline{1,\mathbf{n}}, \quad (\mathbf{z}_i)_{i\in\overline{0,\nu+1}} \colon \overline{0,\nu+1} \longrightarrow X \times X. \tag{3.11}$$

При этом согласно (1) и по выбору $\mathbf{z}_{\nu+1}$ имеем, что

(1′) $\big(\mathbf{z}_0 = (x_*, x_*)\big) \,\&\, (\mathbf{z}_t \in \tilde{\mathbb{M}}_{\mathbf{r}_t} \quad \forall t \in \overline{1,\nu+1})$.

Далее, из (2) имеем по выбору $\mathbf{r}_{\nu+1}$, что справедливо свойство

(2′) $\mathbf{r}_t \in \mathbf{I}\big(\overline{1,\mathbf{n}} \setminus \{\mathbf{r}_s \colon s \in \overline{1,t-1}\}\big) \quad \forall t \in \overline{1,\nu+1}$.

Наконец, из (3) и (3.10) получаем следующее свойство:

(3′) $$\begin{gathered}\mathbf{c}\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}_{t-1}), \mathrm{pr}_1(\mathbf{z}_t), \overline{1,\mathbf{n}} \setminus \{\mathbf{r}_s \colon s \in \overline{1,t-1}\}\big) + c_{\mathbf{r}_t}\big(\mathbf{z}_t, \overline{1,\mathbf{n}} \setminus \{\mathbf{r}_s \colon s \in \overline{1,t-1}\}\big) = \\ = \min_{j \in \mathbf{I}(\overline{1,\mathbf{n}} \setminus \{\mathbf{r}_s \colon s \in \overline{1,t-1}\})} \min_{z \in \tilde{\mathbb{M}}_j} \Big[\mathbf{c}\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}_{t-1}), \mathrm{pr}_1(z), \overline{1,\mathbf{n}} \setminus \{\mathbf{r}_s \colon s \in \overline{1,t-1}\}\big) + \\ + c_j\big(z, \overline{1,\mathbf{n}} \setminus \{\mathbf{r}_s \colon s \in \overline{1,t-1}\}\big)\Big] \quad \forall t \in \overline{1,\nu+1}.\end{gathered}$$

Итак, мы смогли продолжить каждый из кортежей (3.7) на один шаг (см. (3.11)) с сохранением трех основных свойств: (1) $\to$ (1′), (2) $\to$ (2′), (3) $\to$ (3′). Исследование случая а) завершено: мы располагаем возможностью продолжения кортежей (3.7) до (3.11) с сохранением всех основных свойств.

б) Пусть теперь у нас справедливо равенство $\nu = \mathbf{n} - 1$. Тогда, в частности, в силу (1) $\mathbf{z}_\nu = \mathbf{z}_{\mathbf{n}-1} \in \tilde{\mathbb{M}}_{\mathbf{r}_\nu}$. Поскольку $\mathbf{r}_\nu = \mathbf{r}_{\mathbf{n}-1} \in \overline{1,\mathbf{n}}$, имеем $\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}_\nu) = \mathrm{pr}_2(\mathbf{z}_{\mathbf{n}-1}) \in \tilde{\mathbf{M}}_{\mathbf{n}-1}$; в частности, $\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}_\nu) = \mathrm{pr}_2(\mathbf{z}_{\mathbf{n}-1}) \in \mathfrak{X}_0$. Далее, при $j \in \mathbf{I}\big(\overline{1,\mathbf{n}} \setminus \{\mathbf{r}_s\colon s \in \overline{1,\mathbf{n}-1}\}\big)$ и $z \in \tilde{\mathbb{M}}_j$ реализуется $\mathrm{pr}_1(z) \in \tilde{\mathfrak{M}}_j$ и, в частности, $\mathrm{pr}_1(z) \in \mathfrak{X}^0$ (см. (2.12)). Получаем задачу

$$\begin{aligned}\mathbf{c}\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}_{\mathbf{n}-1}), \mathrm{pr}_1(z), \overline{1,\mathbf{n}} \setminus \{\mathbf{r}_s\colon s \in \overline{1,\mathbf{n}-1}\}\big) + c_j\big(z, \overline{1,\mathbf{n}} \setminus \{\mathbf{r}_s\colon s \in \overline{1,\mathbf{n}-1}\}\big) +\\ + f\big(\mathrm{pr}_2(z)\big) \longrightarrow \min, \quad j \in \mathbf{I}\big(\overline{1,\mathbf{n}} \setminus \{\mathbf{r}_s\colon s \in \overline{1,\mathbf{n}-1}\}\big), \quad z \in \tilde{\mathbb{M}}_j.\end{aligned} \tag{3.12}$$

Находим решение задачи (3.12): выбираем $\mathbf{r}_\mathbf{n} \in \mathbf{I}\big(\overline{1,\mathbf{n}} \setminus \{\mathbf{r}_s\colon s \in \overline{1,\mathbf{n}-1}\}\big)$ и $\mathbf{z}_\mathbf{n} \in \tilde{\mathbb{M}}_{\mathbf{r}_\mathbf{n}}$, для которых

$$\begin{aligned}&\mathbf{c}\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}_{\mathbf{n}-1}), \mathrm{pr}_1(\mathbf{z}_\mathbf{n}), \overline{1,\mathbf{n}} \setminus \{\mathbf{r}_s\colon s \in \overline{1,\mathbf{n}-1}\}\big) + c_{\mathbf{r}_\mathbf{n}}\big(\mathbf{z}_\mathbf{n}, \overline{1,\mathbf{n}} \setminus \{\mathbf{r}_s\colon s \in \overline{1,\mathbf{n}-1}\}\big) +\\ &+ f\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}_\mathbf{n})\big) = \min_{j \in \mathbf{I}(\overline{1,\mathbf{n}} \setminus \{\mathbf{r}_s\colon s \in \overline{1,\mathbf{n}-1}\})} \min_{z \in \tilde{\mathbb{M}}_j} \Big[\mathbf{c}\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}_{\mathbf{n}-1}), \mathrm{pr}_1(z), \overline{1,\mathbf{n}} \setminus \{\mathbf{r}_s\colon s \in \overline{1,\mathbf{n}-1}\}\big) +\\ &+ c_j\big(z, \overline{1,\mathbf{n}} \setminus \{\mathbf{r}_s\colon s \in \overline{1,\mathbf{n}-1}\}\big) + f\big(\mathrm{pr}_2(z)\big)\Big].\end{aligned} \tag{3.13}$$

Теперь мы имеем (полные) кортежи $(\mathbf{r}_i)_{i \in \overline{1,\mathbf{n}}}\colon \overline{1,\mathbf{n}} \longrightarrow \overline{1,\mathbf{n}}$, $(\mathbf{z}_i)_{i \in \overline{0,\mathbf{n}}}\colon \overline{0,\mathbf{n}} \longrightarrow X \times X$, для которых (см. (1)–(3), а также свойства $\mathbf{r}_\mathbf{n}$ и $\mathbf{z}_\mathbf{n}$)

$$\big(\mathbf{z}_0 = (x_*, x_*)\big) \,\&\, \big(\mathbf{z}_t \in \tilde{\mathbb{M}}_{\mathbf{r}_t} \quad \forall t \in \overline{1,\mathbf{n}}\big). \tag{3.14}$$

Кроме того, имеем теперь, что (см. (2), а также свойства $\mathbf{r}_\mathbf{n}$)

$$\mathbf{r}_t \in \mathbf{I}\big(\overline{1,\mathbf{n}} \setminus \{\mathbf{r}_s\colon s \in \overline{1,t-1}\}\big) \quad \forall t \in \overline{1,\mathbf{n}}. \tag{3.15}$$

Заметим, что комбинация (3) и (3.13), как легко видеть, реализует фактически свойство жадного алгоритма (в рассматриваемом случае $\nu = \mathbf{n} - 1$). Из (3.15) вытекает, что

$$\mathbf{r}_t \in \overline{1,\mathbf{n}} \setminus \{\mathbf{r}_s\colon s \in \overline{1,t-1}\} \quad \forall t \in \overline{1,\mathbf{n}}. \tag{3.16}$$

В свою очередь, из (3.16) следует инъективность, а, следовательно (см. [31, с. 53]), и биективность кортежа индексов, то есть $\rho_* \triangleq (\mathbf{r}_t)_{t \in \overline{1,\mathbf{n}}} \in \mathbb{P}$. С учетом (3.1) и (3.15) получаем теперь, что

$$\rho_* \in \mathcal{A}. \tag{3.17}$$

С учетом (2.9) и (3.14) получаем также, что $(\mathbf{z}_t)_{t \in \overline{0,\mathbf{n}}} \in \tilde{\mathfrak{Z}}_{\rho_*}[x_*]$. Итак, после исполнения $\mathbf{n}$ шагов типа а) и финального шага б) будут реализованы допустимый по предшествованию маршрут ρ_* (3.17) и согласованная с ним траектория со стартом в x_*.

Данные построения, осуществлявшиеся при произвольном выборе $x_* \in X^0$, мы реализуем для всех $x \in X^0$ (напомним, что X^0 — конечное множество и при фиксации старта из X^0 мы использовали жадный и, стало быть, достаточно быстрый алгоритм). Итак, при $x \in X^0$ мы осуществляем построение маршрута $\rho[x] \in \mathcal{A}$ и траектории $\big(\mathbf{z}_t^{(x)}\big)_{t \in \overline{0,\mathbf{n}}} \in \tilde{\mathfrak{Z}}_{\rho[x]}[x]$

со следующими свойствами:

$$\Big(\mathbf{c}\big(\mathrm{pr}_2\big(\mathbf{z}_{\tau-1}^{(x)}\big), \mathrm{pr}_1\big(\mathbf{z}_{\tau}^{(x)}\big), \overline{1,\mathbf{n}} \setminus \{\rho[x](s)\colon s \in \overline{1,\tau-1}\}\big) +$$
$$+ c_{\rho[x](\tau)}\big(\mathbf{z}_{\tau}^{(x)}, \overline{1,\mathbf{n}} \setminus \{\rho[x](s)\colon s \in \overline{1,\tau-1}\}\big) =$$
$$= \min_{j \in \mathbf{I}(\overline{1,\mathbf{n}} \setminus \{\rho[x](s)\colon s \in \overline{1,\tau-1}\})} \min_{z \in \tilde{\mathbb{M}}_j} \Big[\mathbf{c}\big(\mathrm{pr}_2\big(\mathbf{z}_{\tau-1}^{(x)}\big), \mathrm{pr}_1(z), \overline{1,\mathbf{n}} \setminus \{\rho[x](s)\colon s \in \overline{1,\tau-1}\}\big) +$$
$$+ c_j\big(z, \overline{1,\mathbf{n}} \setminus \{\rho[x](s)\colon s \in \overline{1,\tau-1}\}\big)\Big] \quad \forall \tau \in \overline{1,\mathbf{n}-1}\Big) \,\&$$
$$\& \,\Big(\mathbf{c}\big(\mathrm{pr}_2\big(\mathbf{z}_{\mathbf{n}-1}^{(x)}\big), \mathrm{pr}_1\big(\mathbf{z}_{\mathbf{n}}^{(x)}\big), \{\rho[x](\mathbf{n})\}\big) + c_{\rho[x](\mathbf{n})}\big(\mathbf{z}_{\mathbf{n}}^{(x)}, \{\rho[x](\mathbf{n})\}\big) + f\big(\mathrm{pr}_2\big(\mathbf{z}_{\mathbf{n}}^{(x)}\big)\big) =$$
$$+ \min_{z \in \tilde{\mathbb{M}}_{\rho[x](\mathbf{n})}} \Big[\mathbf{c}\big(\mathrm{pr}_2\big(\mathbf{z}_{\mathbf{n}-1}^{(x)}\big), \mathrm{pr}_1(z), \{\rho[x](\mathbf{n})\}\big) + c_{\rho[x](\mathbf{n})}\big(z, \{\rho[x](\mathbf{n})\}\big) + f\big(\mathrm{pr}_2(z)\big)\Big]\Big).$$

Теперь для всех $x \in X^0$ определены значения $\tilde{\mathfrak{C}}_{\rho[x]}[(\mathbf{z}_t^{(x)})_{t\in\overline{0,\mathbf{n}}}] \in \mathbb{R}_+$. Поэтому определено $\mathbf{m} \triangleq \min_{x\in X^0} \tilde{\mathfrak{C}}_{\rho[x]}\Big[\big(\mathbf{z}_t^{(x)}\big)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}}}\Big] \in \mathbb{R}_+$ и следующее множество экстремальных точек старта: $\tilde{X}^0_{\mathrm{opt}} \triangleq \big\{x \in X^0 \mid \tilde{\mathfrak{C}}_{\rho[x]}\Big[\big(\mathbf{z}_t^{(x)}\big)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}}}\Big] = \mathbf{m}\big\} \in \mathcal{P}'(X^0)$. В частности, $\tilde{X}^0_{\mathrm{opt}} \neq \varnothing$. С учетом этого выбираем точку $\tilde{x}^0 \in \tilde{X}^0_{\mathrm{opt}}$ и фиксируем ее в дальнейшем, получая при этом маршрут

$$\rho \triangleq \rho[\tilde{x}^0] \in \mathcal{A}. \tag{3.18}$$

С учетом (3.18) полагаем, что $\forall j \in \overline{1,\mathbf{n}}$

$$(M_j \triangleq \tilde{M}_{\rho(j)}) \,\&\, (\mathbb{M}_j \triangleq \tilde{\mathbb{M}}_{\rho(j)}). \tag{3.19}$$

Тем самым реализуется биективная перенумерация мегаполисов и связанных с ними отношений. Напомним, что у нас фиксировано $N \in \overline{2,\mathbf{n}-2}$ в качестве параметра алгоритма (конкретное значение N выбирается из условий, связанных с вычислительной реализацией композиционных решений). Полагаем далее, что

$$\big(\mathcal{M}_1 \triangleq \{M_i\colon i \in \overline{1,N}\}\big) \,\&\, \big(\mathcal{M}_2 \triangleq \{M_i\colon i \in \overline{N+1,\mathbf{n}}\}\big), \tag{3.20}$$

получая два непустых семейства мегаполисов основной задачи; эти семейства отвечают декомпозиции данной задачи в духе [20–22]. Заметим, однако, что в [20–22] предполагалось, что условия предшествования, играющие важную роль при построении алгоритма, раздельно задаются в предваряющей $\mathcal{M}_1$-задаче и в финальной $\mathcal{M}_2$-задаче. В нашем же случае (см. (2.6)–(2.8)) они заданы в основной $\mathcal{M}$-задаче, где

$$\mathcal{M} = \{\tilde{M}_i\colon i \in \overline{1,\mathbf{n}}\} = \{M_i\colon i \in \overline{1,\mathbf{n}}\} \tag{3.21}$$

(учитываем (3.18)). В силу (2.3), (3.19)–(3.21) семейства (3.20) образуют разбиение $\mathcal{M}$:

$$\big(\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2\big) \,\&\, \big(\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2 = \varnothing\big). \tag{3.22}$$

§ 4. Декомпозиция условий предшествования

В связи с (3.19)–(3.22) и построениями [20–22] рассмотрим вопросы, связанные с выделением условий предшествования для $\mathcal{M}_1$- и $\mathcal{M}_2$-задачи. Для этого предварительно введем в рассмотрение множество

$$\mathbb{K} \triangleq \big\{\big(\rho^{-1}(\mathrm{pr}_1(z)), \rho^{-1}(\mathrm{pr}_2(z))\big)\colon z \in \mathbf{K}\big\} \in \mathcal{P}\big(\overline{1,\mathbf{n}} \times \overline{1,\mathbf{n}}\big), \tag{4.1}$$

получающееся несущественным преобразованием $\mathbf{K}$ (2.6) в связи с перенумерацией мегаполисов на основе (3.18). В целях согласования (4.1) с $\mathcal{M}_1$-и $\mathcal{M}_2$-задачами введем также множества

$$\mathbf{K}_1 \triangleq \{z \in \mathbb{K} \mid \big(\mathrm{pr}_1(z) \in \overline{1,N}\big) \,\&\, \big(\mathrm{pr}_2(z) \in \overline{1,N}\big)\} \in \mathcal{P}\big(\overline{1,N} \times \overline{1,N}\big), \tag{4.2}$$

$$\mathbf{K}_2' \triangleq \{z \in \mathbb{K} \mid \big(\mathrm{pr}_1(z) \in \overline{N+1,\mathbf{n}}\big) \,\&\, \big(\mathrm{pr}_2(z) \in \overline{N+1,\mathbf{n}}\big)\} \in \mathcal{P}\big(\overline{N+1,\mathbf{n}} \times \overline{N+1,\mathbf{n}}\big). \tag{4.3}$$

Множество (4.3) целесообразно преобразовать (см. [20–22]) к виду

$$\mathbf{K}_2 \triangleq \{\big(\mathrm{pr}_1(z) - N, \mathrm{pr}_2(z) - N\big) \colon z \in \mathbf{K}_2'\} \in \mathcal{P}\big(\overline{1,\mathbf{n}-N} \times \overline{1,\mathbf{n}-N}\big). \tag{4.4}$$

Будем использовать (4.2) и (4.4) для формализации условий предшествования в предваряющей и финальной задачах соответственно (см. [20–22]).

Предложение 1. *Если* $\mathbf{K}_0 \in \mathcal{P}'(\mathbf{K}_1)$, *то*

$$\exists z_0 \in \mathbf{K}_0 \colon \mathrm{pr}_1(z_0) \neq \mathrm{pr}_2(z) \quad \forall z \in \mathbf{K}_0.$$

Доказательство. Пусть $\mathbf{K}_0 \in \mathcal{P}'(\mathbf{K}_1)$. Для вспомогательного множества

$$\tilde{\mathbf{K}}_0 \triangleq \{z \in \mathbf{K} \mid \big(\rho^{-1}(\mathrm{pr}_1(z)), \rho^{-1}(\mathrm{pr}_2(z))\big) \in \mathbf{K}_0\} \in \mathcal{P}'(\mathbf{K}) \tag{4.5}$$

имеем в силу (2.7), что для некоторого $\tilde{z}_0 \in \tilde{\mathbf{K}}_0$

$$\mathrm{pr}_1(\tilde{z}_0) \neq \mathrm{pr}_2(z) \quad \forall z \in \tilde{\mathbf{K}}_0. \tag{4.6}$$

С учетом (4.1) и (4.5) имеем, в частности, что $\hat{z}_0 \triangleq \big(\rho^{-1}(\mathrm{pr}_1(\tilde{z}_0)), \rho^{-1}(\mathrm{pr}_2(\tilde{z}_0))\big) \in \mathbb{K}$. При этом в силу (4.5) реализуется включение $\hat{z}_0 \in \mathbf{K}_0$. Выберем произвольно $z_* \in \mathbf{K}_0$. Тогда $z_* \in \mathbb{K}$ (см. (4.2)) и для некоторого $z^* \in \mathbf{K}$ $z_* = \big(\rho^{-1}(\mathrm{pr}_1(z^*)), \rho^{-1}(\mathrm{pr}_2(z^*))\big)$, то есть $\mathrm{pr}_1(z_*) = \rho^{-1}(\mathrm{pr}_1(z^*))$ и $\mathrm{pr}_2(z_*) = \rho^{-1}(\mathrm{pr}_2(z^*))$. Получили, что

$$z^* \in \mathbf{K} \colon \big(\rho^{-1}(\mathrm{pr}_1(z^*)), \rho^{-1}(\mathrm{pr}_2(z^*))\big) = z_* \in \mathbf{K}_0.$$

Из (4.5) вытекает, что $z^* \in \tilde{\mathbf{K}}_0$ и согласно (4.6) $\mathrm{pr}_1(\tilde{z}_0) \neq \mathrm{pr}_2(z^*)$. Поскольку $\rho \in \mathbb{P}$ (см. (2.8), (3.18)), то $\rho^{-1} \in \mathbb{P}$ и, как следствие, $\rho^{-1}(\mathrm{pr}_1(\tilde{z}_0)) \neq \rho^{-1}(\mathrm{pr}_2(z^*))$. Получаем теперь (по определению $\hat{z}_0$), что $\mathrm{pr}_1(\hat{z}_0) \neq \mathrm{pr}_2(z_*)$. Поскольку выбор z_* был произвольным, установлено, что $\hat{z}_0 \in \mathbf{K}_0$: $\mathrm{pr}_1(\hat{z}_0) \neq \mathrm{pr}_2(z)$ $\forall z \in \mathbf{K}_0$. $\square$

Предложение 2. *Если* $\mathbf{K}^0 \in \mathcal{P}'(\mathbf{K}_2)$, *то непременно*

$$\exists z^0 \in \mathbf{K}^0 \colon \mathrm{pr}_1(z^0) \neq \mathrm{pr}_2(z) \quad \forall z \in \mathbf{K}^0.$$

Доказательство. Фиксируем $\mathbf{K}^0 \in \mathcal{P}'(\mathbf{K}_2)$. Тогда, в частности, $\mathbf{K}^0 \subset \overline{1,\mathbf{n}-N} \times \overline{1,\mathbf{n}-N}$. Из (4.4) вытекает (по выбору $\mathbf{K}^0$), что

$$\forall z' \in \mathbf{K}^0 \ \exists z'' \in \mathbf{K}_2' \colon z' = \big(\mathrm{pr}_1(z'') - N, \mathrm{pr}_2(z'') - N\big). \tag{4.7}$$

С учетом (4.1), (4.3) и (4.7) получаем теперь, что $\forall z' \in \mathbf{K}^0$ $\exists z \in \mathbf{K}$: $z' = \big(\rho^{-1}(\mathrm{pr}_1(z)) - N, \rho^{-1}(\mathrm{pr}_2(z)) - N\big)$. Введем теперь в рассмотрение следующее множество:

$$\tilde{\mathbf{K}}^0 \triangleq \{z \in \mathbf{K} \mid \big(\rho^{-1}(\mathrm{pr}_1(z)) - N, \rho^{-1}(\mathrm{pr}_2(z)) - N\big) \in \mathbf{K}^0\} \in \mathcal{P}'(\mathbf{K}). \tag{4.8}$$

Тогда в силу (2.7) для некоторого $\tilde{z}^0 \in \tilde{\mathbf{K}}^0$ реализуется свойство

$$\mathrm{pr}_1(\tilde{z}^0) \neq \mathrm{pr}_2(z) \quad \forall z \in \tilde{\mathbf{K}}^0. \tag{4.9}$$

Ясно, что (см. (4.8)) $\tilde{z}^0 \in \mathbf{K}$ и, в частности, $\tilde{z}^0 \in \overline{1,\mathbf{n}} \times \overline{1,\mathbf{n}}$. Из (4.8) имеем по выбору $\tilde{z}^0$, что

$$\hat{z}^0 \triangleq \big(\rho^{-1}(\mathrm{pr}_1(\tilde{z}^0)) - N, \rho^{-1}(\mathrm{pr}_2(\tilde{z}^0)) - N\big) \in \mathbf{K}^0. \tag{4.10}$$

При этом, конечно, $\mathrm{pr}_1(\hat{z}^0) = \rho^{-1}(\mathrm{pr}_1(\tilde{z}^0)) - N$ и $\mathrm{pr}_2(\hat{z}^0) = \rho^{-1}(\mathrm{pr}_2(\tilde{z}^0)) - N$, а потому $\tilde{z}^0 = \big(\rho(\mathrm{pr}_1(\hat{z}^0) + N), \rho(\mathrm{pr}_2(\hat{z}^0) + N)\big)$. Выберем произвольно $z^* \in \mathbf{K}^0$. Тогда $z^* \in \mathbf{K}_2$ и согласно (4.4) для некоторого $\tilde{z}^* \in \mathbf{K}_2'$

$$z^* = \big(\mathrm{pr}_1(\tilde{z}^*) - N, \mathrm{pr}_2(\tilde{z}^*) - N\big). \tag{4.11}$$

Ясно, что $z^* \in \overline{1,\mathbf{n} - N} \times \overline{1,\mathbf{n} - N}$, причем в силу (4.11)

$$\tilde{z}^* = \big(\mathrm{pr}_1(\tilde{z}^*), \mathrm{pr}_2(\tilde{z}^*)\big) = \big(\mathrm{pr}_1(z^*) + N, \mathrm{pr}_2(z^*) + N\big).$$

Заметим, что $\tilde{z}^* \in \mathbb{K}$ и при этом справедливы свойства $\big(\mathrm{pr}_1(\tilde{z}^*) = \mathrm{pr}_1(z^*) + N \in \overline{N+1,\mathbf{n}}\big)$ & & $\big(\mathrm{pr}_2(\tilde{z}^*) = \mathrm{pr}_2(z^*) + N \in \overline{N+1,\mathbf{n}}\big)$. Тогда согласно (4.1) для некоторого $z_* \in \mathbf{K}$ реализуется равенство

$$\tilde{z}^* = \big(\rho^{-1}(\mathrm{pr}_1(z_*)), \rho^{-1}(\mathrm{pr}_2(z_*))\big). \tag{4.12}$$

С учетом (4.11) получаем равенство $z^* = \big(\rho^{-1}(\mathrm{pr}_1(z_*)) - N, \rho^{-1}(\mathrm{pr}_2(z_*)) - N\big) \in \mathbf{K}^0$. Из (4.8) получаем теперь очевидное включение $z_* \in \tilde{\mathbf{K}}^0$. Поэтому согласно (4.9) имеем свойство $\mathrm{pr}_1(\tilde{z}^0) \neq \mathrm{pr}_2(z_*)$. Тогда $\mathrm{pr}_1(\tilde{z}^0) \neq \rho\big(\rho^{-1}(\mathrm{pr}_2(z_*))\big)$, а потому (см. (4.12)) $\mathrm{pr}_1(\tilde{z}^0) \neq$ $\neq \rho(\mathrm{pr}_2(\tilde{z}^*))$. Поскольку $\rho^{-1} \in \mathbb{P}$, получаем, как следствие, что $\rho^{-1}\big(\mathrm{pr}_1(\tilde{z}^0)\big) \neq \mathrm{pr}_2(\tilde{z}^*)$. Тогда $\mathrm{pr}_2(z^*) + N \neq \rho^{-1}\big(\mathrm{pr}_1(\tilde{z}^0)\big)$. Из (4.10) получаем теперь, что $\mathrm{pr}_1(\hat{z}_0) \neq \mathrm{pr}_2(z^*)$. Поскольку выбор z^* был произвольным, установлено, что (см. (4.10)) $\hat{z}_0 \in \mathbf{K}^0$: $\mathrm{pr}_1(\hat{z}_0) \neq \mathrm{pr}_2(z)$ $\forall z \in \mathbf{K}^0$. □

Из предложений 1 и 2 вытекает, что

$$\begin{aligned} &\big(\forall \mathbf{K}_0 \in \mathcal{P}'(\mathbf{K}_1)\ \exists z_0 \in \mathbf{K}_0 \colon \mathrm{pr}_1(z_0) \neq \mathrm{pr}_2(z) \quad \forall z \in \mathbf{K}_0\big)\ \& \\ &\&\ \big(\forall \mathbf{K}^0 \in \mathcal{P}'(\mathbf{K}_2)\ \exists z^0 \in \mathbf{K}^0 \colon \mathrm{pr}_1(z^0) \neq \mathrm{pr}_2(z) \quad \forall z \in \mathbf{K}^0\big). \end{aligned} \tag{4.13}$$

В силу (4.13) в рассматриваемом варианте $\mathbf{K}_1$ и $\mathbf{K}_2$ выполнено условие [21, (2.5)], касающееся условий предшествования в $\mathcal{M}_1$- и в $\mathcal{M}_2$-задаче.

§ 5. Согласованность условий предшествования

Рассматриваем далее предваряющую, финальную и основную задачи маршрутизации (две первых задачи возникают в результате применения жадного алгоритма в основной задаче); в (3.20), (3.21) указаны соответствующие двум первым задачам наборы мегаполисов. Введем в рассмотрение

$$\big(\mathbb{P}_1 \triangleq (\mathrm{bi})[\overline{1,N}]\big)\ \&\ \big(\mathbb{P}_2 \triangleq (\mathrm{bi})[\overline{1,\mathbf{n} - N}]\big), \tag{5.1}$$

после чего рассмотрим непустые (см. (4.13), [27, часть 2]) множества

$$\mathcal{A}_1 \triangleq \big\{\alpha \in \mathbb{P}_1 \mid \alpha^{-1}(\mathrm{pr}_1(z)) < \alpha^{-1}(\mathrm{pr}_2(z)) \quad \forall z \in \mathbf{K}_1\big\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{P}_1), \tag{5.2}$$

$$\mathcal{A}_2 \triangleq \big\{\beta \in \mathbb{P}_2 \mid \beta^{-1}(\mathrm{pr}_1(z)) < \beta^{-1}(\mathrm{pr}_2(z)) \quad \forall z \in \mathbf{K}_2\big\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{P}_2) \tag{5.3}$$

маршрутов, допустимых по предшествованию в предваряющей и финальной задачах соответственно. Следуя [20–22], при $\alpha \in \mathbb{P}_1$ и $\beta \in \mathbb{P}_2$ определяем склеенный маршрут $\alpha \diamond \beta \in \mathbb{P}$ по правилу

$$\big((\alpha \diamond \beta)(k) \triangleq \alpha(k) \quad \forall k \in \overline{1, N}\big) \,\&\, \big((\alpha \diamond \beta)(l) \triangleq \beta(l - N) + N \quad \forall l \in \overline{N+1, \mathbf{n}}\big). \tag{5.4}$$

В частности, (5.4) можно применять к маршрутам из множеств (5.2), (5.3); элементы

$$\mathbf{P} \triangleq \big\{\mathrm{pr}_1(h) \diamond \mathrm{pr}_2(h) \colon h \in \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2\big\} = \big\{\alpha \diamond \beta \colon \alpha \in \mathcal{A}_1,\ \beta \in \mathcal{A}_2\big\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{P}) \tag{5.5}$$

рассматриваем в качестве (допустимых) композиционных маршрутов. Всюду в дальнейшем $\circ$ используется при обозначении композиции (суперпозиции) отображений.

Предложение 3. *Если* $\gamma \in \mathbf{P}$, *то* $\rho \circ \gamma \in \mathcal{A}$.

Доказательство. Пусть $\gamma \in \mathbf{P}$. В силу (5.5) можно указать $\alpha \in \mathcal{A}_1$ и $\beta \in \mathcal{A}_2$ со свойством $\gamma = \alpha \diamond \beta$, а потому согласно (5.4)

$$\big(\gamma(k) = \alpha(k) \quad \forall k \in \overline{1, N}\big) \,\&\, \big(\gamma(l) = \beta(l - N) + N \quad \forall l \in \overline{N+1, \mathbf{n}}\big). \tag{5.6}$$

Заметим, в частности, что $\alpha \in \mathbb{P}_1$ и $\beta \in \mathbb{P}_2$, см. (5.1). Кроме того, в силу (5.2)

$$\alpha^{-1}(\mathrm{pr}_1(z)) < \alpha^{-1}(\mathrm{pr}_2(z)) \quad \forall z \in \mathbf{K}_1.$$

Аналогичным образом из (5.3) вытекает, что

$$\beta^{-1}(\mathrm{pr}_1(z)) < \beta^{-1}(\mathrm{pr}_2(z)) \quad \forall z \in \mathbf{K}_2.$$

Здесь же отметим, что из (2.8) и (3.18), в частности, следует, что $\rho \in \mathbb{P}$ и $\rho^{-1} \in \mathbb{P}$, а потому согласно (1.1) имеем при $s \in \overline{1, \mathbf{n}}$ цепочку равенств $\rho^{-1}(\rho(s)) = \rho(\rho^{-1}(s)) = s$. Заметим, что $\rho \circ \gamma = \rho(\gamma(s))_{s \in \overline{1,\mathbf{n}}} \in \mathbb{P}$ и при этом $(\rho \circ \gamma)^{-1} \in \mathbb{P}$ обладает представлением

$$(\rho \circ \gamma)^{-1}(s) = \gamma^{-1}(\rho^{-1}(s)) \quad \forall s \in \overline{1, \mathbf{n}}. \tag{5.7}$$

Иными словами, $(\rho \circ \gamma)^{-1} = \gamma^{-1} \circ \rho^{-1}$. Выберем произвольно $p \in \overline{1, N}$, получая, что

$$\big(\gamma(p) = \alpha(p)\big) \,\&\, \big(\alpha^{-1}(p) \in \overline{1, N}\big) \,\&\, \big(\gamma^{-1}(p) \in \overline{1, \mathbf{n}}\big). \tag{5.8}$$

Из (1.1), (5.4), (5.6) и (5.8) вытекает, что $\big(\gamma(\alpha^{-1}(p)) = \alpha(\alpha^{-1}(p)) = p\big) \,\&\, \big(\gamma(\gamma^{-1}(p)) = p\big)$. Тогда $\gamma(\gamma^{-1}(p)) = p = \gamma(\alpha^{-1}(p))$, где $\alpha^{-1}(p) \in \overline{1, \mathbf{n}}$. Поэтому $\gamma^{-1}(p) = \alpha^{-1}(p)$ в силу инъективности γ. Поскольку выбор p был произвольным, установлено

$$\gamma^{-1}(j) = \alpha^{-1}(j) \quad \forall j \in \overline{1, N}. \tag{5.9}$$

Выберем произвольно $q \in \overline{N+1, \mathbf{n}}$, получая включение $q - N \in \overline{1, \mathbf{n} - N}$. Тогда

$$\big(\gamma(q) \in \overline{1, \mathbf{n}}\big) \,\&\, \big(\beta(q - N) \in \overline{1, \mathbf{n} - N}\big) \,\&\, \big(\gamma(q) = \beta(q - N) + N\big). \tag{5.10}$$

При этом $\gamma(q) - N = \beta(q - N) \in \overline{1, \mathbf{n} - N}$. Заметим, что $\beta^{-1} \in \mathbb{P}_2$, а тогда определено $\beta^{-1}(q - N) + N \in \overline{N+1, \mathbf{n}}$. Далее учитываем (1.1), (5.10) и получаем, в частности, следующее равенство $q = \beta(\beta^{-1}(q - N)) + N$, а потому имеем с очевидностью цепочку равенств

$\gamma(\gamma^{-1}(q)) = q = \beta(\beta^{-1}(q-N)) + N$ и, кроме того, согласно (5.4) $\gamma(\beta^{-1}(q-N)+N) = \beta(\beta^{-1}(q-N)) + N = q - N + N = q$. Из двух последних положений извлекается равенство $\gamma(\gamma^{-1}(q)) = \gamma(\beta^{-1}(q-N)+N)$, что в силу инъективности γ означает: $\gamma^{-1}(q) = \beta^{-1}(q-N)+N$. Поскольку выбор q был произвольным, имеем

$$\gamma^{-1}(j) = \beta^{-1}(j-N) + N \quad \forall j \in \overline{N+1,\mathbf{n}}. \tag{5.11}$$

Выберем произвольно $z_* \in \mathbf{K}$. Тогда (см. (2.6)) $\mathrm{pr}_1(z_*) \in \overline{1,\mathbf{n}}$ и $\mathrm{pr}_2(z_*) \in \overline{1,\mathbf{n}}$. Далее, из (2.8) и (3.18) получаем неравенство

$$\rho^{-1}(\mathrm{pr}_1(z_*)) < \rho^{-1}(\mathrm{pr}_2(z_*)). \tag{5.12}$$

Полагаем $z^* \triangleq \big(\rho^{-1}(\mathrm{pr}_1(z_*)), \rho^{-1}(\mathrm{pr}_2(z_*))\big)$; в силу (4.1) $z^* \in \mathbb{K}$ и при этом (см. (5.12))

$$\mathrm{pr}_1(z^*) < \mathrm{pr}_2(z^*). \tag{5.13}$$

С учетом (5.7) имеем теперь следующие два очевидные равенства

$$\big((\rho\circ\gamma)^{-1}(\mathrm{pr}_1(z_*)) = \gamma^{-1}(\mathrm{pr}_1(z^*))\big) \,\&\, \big((\rho\circ\gamma)^{-1}(\mathrm{pr}_2(z_*)) = \gamma^{-1}(\mathrm{pr}_2(z^*))\big), \tag{5.14}$$

где $\mathrm{pr}_1(z^*) \in \overline{1,\mathbf{n}}$ и $\mathrm{pr}_2(z^*) \in \overline{1,\mathbf{n}}$. Учтем равенство $\overline{1,\mathbf{n}} = \overline{1,N} \cup \overline{N+1,\mathbf{n}}$. Тогда, поскольку $z^* = \big(\mathrm{pr}_1(z^*), \mathrm{pr}_2(z^*)\big)$, имеем, что

$$\begin{gathered}\big(z^* \in \overline{1,N}\times\overline{1,N}\big) \vee \big(z^* \in \overline{N+1,\mathbf{n}}\times\overline{N+1,\mathbf{n}}\big) \vee \\ \vee \big((\mathrm{pr}_1(z^*) \in \overline{1,N}) \,\&\, (\mathrm{pr}_2(z^*) \in \overline{N+1,\mathbf{n}})\big) \vee \\ \vee \big((\mathrm{pr}_1(z_*) \in \overline{N+1,\mathbf{n}}) \,\&\, (\mathrm{pr}_2(z^*) \in \overline{1,N})\big).\end{gathered} \tag{5.15}$$

Однако, в случае $\big(\mathrm{pr}_1(z_*) \in \overline{N+1,\mathbf{n}}\big) \,\&\, \big(\mathrm{pr}_2(z^*) \in \overline{1,N}\big)$ реализуется цепочка неравенств $\mathrm{pr}_2(z^*) \leqslant N < N+1 \leqslant \mathrm{pr}_1(z^*)$ и, как следствие, $\mathrm{pr}_2(z^*) < \mathrm{pr}_1(z^*)$, что невозможно (см. (5.13)); поэтому упомянутый случай невозможен и, стало быть (см. (5.15)),

$$\begin{gathered}\big(z^* \in \overline{1,N}\times\overline{1,N}\big) \vee \big(z^* \in \overline{N+1,\mathbf{n}}\times\overline{N+1,\mathbf{n}}\big) \vee \\ \vee \big((\mathrm{pr}_1(z^*) \in \overline{1,N}) \,\&\, (\mathrm{pr}_2(z^*) \in \overline{N+1,\mathbf{n}})\big).\end{gathered} \tag{5.16}$$

1) Пусть $z^* \in \overline{1,N}\times\overline{1,N}$, то есть $z^* \in \mathbb{K}$: $\big(\mathrm{pr}_1(z^*) \in \overline{1,N}\big) \,\&\, \big(\mathrm{pr}_2(z^*) \in \overline{1,N}\big)$. Поэтому в силу (4.2) $z^* \in \mathbf{K}_1$; тогда согласно (5.2) имеем по выбору α неравенство

$$\alpha^{-1}(\mathrm{pr}_1(z^*)) < \alpha^{-1}(\mathrm{pr}_2(z^*)), \tag{5.17}$$

где $\alpha^{-1}(\mathrm{pr}_1(z^*)) = \gamma^{-1}(\mathrm{pr}_1(z^*))$ и $\alpha^{-1}(\mathrm{pr}_2(z^*)) = \gamma^{-1}(\mathrm{pr}_2(z^*))$, см. (5.9). С учетом (5.17) получаем неравенство $\gamma^{-1}(\mathrm{pr}_1(z^*)) < \gamma^{-1}(\mathrm{pr}_2(z^*))$. Итак,

$$\big(z^* \in \overline{1,N}\times\overline{1,N}\big) \Longrightarrow \big(\gamma^{-1}(\mathrm{pr}_1(z^*)) < \gamma^{-1}(\mathrm{pr}_2(z^*))\big). \tag{5.18}$$

2) Пусть $z^* \in \overline{N+1,\mathbf{n}}\times\overline{N+1,\mathbf{n}}$, то есть $z^* \in \mathbb{K}$: $\big(\mathrm{pr}_1(z^*) \in \overline{N+1,\mathbf{n}}\big) \,\&\, \big(\mathrm{pr}_2(z^*) \in \overline{N+1,\mathbf{n}}\big)$. Это означает, что (см. (4.3)) $z^* \in \mathbf{K}_2'$ и согласно (4.4) $(\mathrm{pr}_1(z^*)-N, \mathrm{pr}_2(z^*)-N) \in \mathbf{K}_2$. В силу (5.3) имеем по выбору β неравенство $\beta^{-1}(\mathrm{pr}_1(z^*)-N) < \beta^{-1}(\mathrm{pr}_2(z^*)-N)$. С учетом (5.11) получаем, что $\gamma^{-1}(\mathrm{pr}_1(z^*)) < \gamma^{-1}(\mathrm{pr}_2(z^*))$. Следовательно,

$$\big(z^* \in \overline{N+1,\mathbf{n}}\times\overline{N+1,\mathbf{n}}\big) \Longrightarrow \big(\gamma^{-1}(\mathrm{pr}_1(z^*)) < \gamma^{-1}(\mathrm{pr}_2(z^*))\big). \tag{5.19}$$

3) Пусть теперь $\big(\mathrm{pr}_1(z^*) \in \overline{1,N}\big) \,\&\, \big(\mathrm{pr}_2(z^*) \in \overline{N+1,\mathbf{n}}\big)$. Тогда в силу (5.9) $\gamma^{-1}(\mathrm{pr}_1(z^*)) = \alpha^{-1}(\mathrm{pr}_1(z^*)) \in \overline{1,N}$ и согласно (5.11) справедливо следующее равенство: $\gamma^{-1}(\mathrm{pr}_2(z^*)) = \beta^{-1}(\mathrm{pr}_2(z^*) - N) + N \in \overline{N+1,\mathbf{n}}$ (учитываем, что $\alpha^{-1} \in \mathbb{P}_1$ и $\beta^{-1} \in \mathbb{P}_2$ по выбору α и β; см. (1.1)). В итоге $\gamma^{-1}(\mathrm{pr}_1(z^*)) \leqslant N < N+1 \leqslant \gamma^{-1}(\mathrm{pr}_2(z^*))$. Итак,

$$((\mathrm{pr}_1(z^*) \in \overline{1,N}) \& ((\mathrm{pr}_2(z^*) \in \overline{N+1,\mathbf{n}})) \Longrightarrow (\gamma^{-1}(\mathrm{pr}_1(z^*)) < \gamma^{-1}(\mathrm{pr}_2(z^*))). \tag{5.20}$$

Из (5.16), (5.18)–(5.20) следует, что во всех возможных случаях выполнено неравенство $\gamma^{-1}(\mathrm{pr}_1(z^*)) < \gamma^{-1}(\mathrm{pr}_2(z^*))$. С учетом (5.14) получаем неравенство $(\rho \circ \gamma)^{-1}(\mathrm{pr}_1(z_*)) < (\rho \circ \gamma)^{-1}(\mathrm{pr}_2(z_*))$. Поскольку z_* выбиралось произвольно, установлено, что $\rho \circ \gamma \in \mathbb{P}$: $(\rho \circ \gamma)^{-1}(\mathrm{pr}_1(z)) < (\rho \circ \gamma)^{-1}(\mathrm{pr}_2(z))\ \forall z \in \mathbf{K}$. Из (2.8) вытекает теперь требуемое свойство $\rho \circ \gamma \in \mathcal{A}$. $\square$

Таким образом, установлено следующее свойство:

$$\rho \circ \gamma \in \mathcal{A} \ \ \forall \gamma \in \mathbf{P}. \tag{5.21}$$

Свойство (5.21) характеризует естественную согласованность условий предшествования и допустимых маршрутов в частичных и в основной задаче.

§ 6. Композиционное решение основной задачи

Свойство (5.21) позволяет использовать допустимые маршруты частичных задач по схеме работ [20–22]. Рассмотрим в этой связи вопрос о представлении траекторий. Напомним соответствующее определение [21, (2.10)]: при $x \in X^0$ и $\gamma \in \mathbf{P}$

$$\mathcal{Z}_\gamma[x] \triangleq \big\{(z_t)_{t \in \overline{0,\mathbf{n}}} \in \mathfrak{Z} \mid \big(z_0 = (x,x)\big) \,\&\, \big(z_t \in \mathbb{M}_{\gamma(t)} \quad \forall t \in \overline{1,\mathbf{n}}\big)\big\} \in \mathrm{Fin}(\mathfrak{Z}); \tag{6.1}$$

разумеется, в (6.1) рассматриваются траектории посещения мегаполисов из $\mathcal{M}$ (3.21). С учетом (2.9), (3.19) и (5.21) получаем, однако, что при $x \in X^0$ и $\gamma \in \mathbf{P}$

$$\tilde{\mathfrak{Z}}_{\rho\circ\gamma}[x] = \big\{(z_t)_{t \in \overline{0,\mathbf{n}}} \in \mathfrak{Z} \mid \big(z_0 = (x,x)\big) \,\&\, \big(z_t \in \tilde{\mathbb{M}}_{\rho(\gamma(t))} \quad \forall t \in \overline{1,\mathbf{n}}\big)\big\} = \mathcal{Z}_\gamma[x]. \tag{6.2}$$

В связи с (6.1), (6.2) полезно отметить, что

$$(\rho \circ \gamma, \mathbf{z}) \in \mathbf{D}_0[x] \quad \forall x \in X^0 \quad \forall \gamma \in \mathbf{P} \quad \forall \mathbf{z} \in \mathcal{Z}_\gamma[x]. \tag{6.3}$$

Наконец, из (2.11) и (6.3) вытекает следующее свойство: при $x \in X^0$, $\gamma \in \mathbf{P}$ и $\mathbf{z} \in \mathcal{Z}_\gamma[x]$

$$(\rho \circ \gamma, \mathbf{z}, x) \in \mathbb{D}^0. \tag{6.4}$$

Поэтому (см. (2.13), (6.2)–(6.4)) при $x \in X^0$, $\gamma \in \mathbf{P}$ и $(z_t)_{t \in \overline{0,\mathbf{n}}} \in \mathcal{Z}_\gamma[x]$ определено $\tilde{\mathfrak{C}}_{\rho\circ\gamma}\big[(z_t)_{t \in \overline{0,\mathbf{n}}}\big] = \sum\limits_{t=1}^{\mathbf{n}} \big[\mathbf{c}\big(\mathrm{pr}_2(z_{t-1}), \mathrm{pr}_1(z_t), (\rho \circ \gamma)^1(\overline{t,\mathbf{n}})\big) + c_{(\rho\circ\gamma)(t)}\big(z_t, (\rho \circ \gamma)^1(\overline{t,\mathbf{n}})\big)\big] + f(\mathrm{pr}_2(z_{\mathbf{n}})) \in \mathbb{R}_+$. Отметим здесь же, что последнее выражение легко преобразуется к виду

$$\tilde{\mathfrak{C}}_{\rho\circ\gamma}\big[(z_t)_{t \in \overline{0,\mathbf{n}}}\big] = \sum_{t=1}^{\mathbf{n}} \big[\mathbf{c}\big(\mathrm{pr}_2(z_{t-1}), \mathrm{pr}_1(z_t), \rho^1(\gamma^1(\overline{t,\mathbf{n}}))\big) + c_{\rho(\gamma(t))}\big(z_t, \rho^1(\gamma^1(\overline{t,\mathbf{n}}))\big)\big] + f(\mathrm{pr}_2(z_{\mathbf{n}})). \tag{6.5}$$

Следуя конструкциям [20–22], введем при $x \in X^0$ в рассмотрение множество

$$\tilde{\mathbf{D}}_0[x] \triangleq \big\{(\gamma, \mathbf{z}) \in \mathbf{P} \times \mathfrak{Z} \mid \mathbf{z} \in \mathcal{Z}_\gamma[x]\big\} \in \mathrm{Fin}(\mathbf{P} \times \mathfrak{Z}) \tag{6.6}$$

всех ДР задачи с $(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$-декомпозицией и стартом в x. Наконец, $\mathbf{D} \triangleq \{(\gamma, \mathbf{z}, x) \in \mathbf{P} \times \mathfrak{Z} \times \times X^0 \mid (\gamma, \mathbf{z}) \in \tilde{\mathbf{D}}_0[x]\} \in \mathrm{Fin}(\mathbf{P} \times \mathfrak{Z} \times X^0)$ есть множество всех композиционных маршрутных процессов (МП). Введем ряд вспомогательных множеств, используемых в [20–22]. Так, при $j \in \overline{1, \mathbf{n}}$ $\big(\mathfrak{M}_j \triangleq \{\mathrm{pr}_1(z) \colon z \in \mathbb{M}_j\} \in \mathcal{P}'(M_j)\big)$ & $\big(\mathbf{M}_j \triangleq \{\mathrm{pr}_2(z) \colon z \in \mathbb{M}_j\} \in \mathcal{P}'(M_j)\big)$; с учетом (3.19) получаем равенства $\mathfrak{M}_j = \tilde{\mathfrak{M}}_{\rho(j)}$ и $\mathbf{M}_j = \tilde{\mathbf{M}}_{\rho(j)}$, а из (2.12) имеем, как следствие, вложения $\big(\mathfrak{M}_j \subset \mathfrak{X}^0\big)$ & $\big(\mathbf{M}_j \subset \mathfrak{X}_0\big)$. Более того, поскольку $\rho \in \mathbb{P}$, имеем из (2.12) следующие равенства $\left(\mathfrak{X}^0 = \bigcup\limits_{i=1}^{\mathbf{n}} \mathfrak{M}_i\right)$ & $\left(\mathfrak{X}_0 = \left(\bigcup\limits_{i=1}^{\mathbf{n}} \mathbf{M}_i\right) \cup X^0\right)$. Теперь введем естественный вариант функций стоимости, учитывающий эффект перенумерации заданий посредством ρ. Итак, вводим $\bar{\mathbf{c}} \in \mathcal{R}_+\big[\mathfrak{X}_0 \times \mathfrak{X}^0 \times \mathfrak{N}\big]$, $\bar{c}_1 \in \mathcal{R}_+\big[\mathbb{M}_1 \times \mathfrak{N}\big], \ldots, \bar{c}_{\mathbf{n}} \in \mathcal{R}_+\big[\mathbb{M}_{\mathbf{n}} \times \mathfrak{N}\big]$; а именно: полагаем, что

$$\begin{gathered}\big(\bar{\mathbf{c}}(z, K) \triangleq \mathbf{c}(z, \rho^1(K)) \quad \forall z \in \mathfrak{X}_0 \times \mathfrak{X}^0 \quad \forall K \in \mathfrak{N}\big) \ \& \\ \& \ \big(\bar{c}_j(z, K) \triangleq c_{\rho(j)}(z, \rho^1(K)) \quad \forall j \in \overline{1, \mathbf{n}} \quad \forall z \in \mathbb{M}_j \quad \forall K \in \mathfrak{N}\big).\end{gathered} \tag{6.7}$$

Мы сохраняем терминальную компоненту f критерия (2.13), учитывая равенство $\bigcup\limits_{i=1}^{\mathbf{n}} \tilde{\mathbf{M}}_i = \bigcup\limits_{i=1}^{\mathbf{n}} \mathbf{M}_i$. С учетом (6.5) получаем теперь при $x \in X^0$, $\gamma \in \mathbf{P}$ и $(z_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}}} \in \mathcal{Z}_\gamma[x]$, что

$$\begin{gathered}\mathfrak{C}_\gamma\big[(z_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}}}\big] \triangleq \sum_{t=1}^{\mathbf{n}} \big[\bar{\mathbf{c}}\big(\mathrm{pr}_2(z_{t-1}), \mathrm{pr}_1(z_t), \gamma^1(\overline{t, \mathbf{n}})\big) + \bar{c}_{\gamma(t)}\big(z_t, \gamma^1(\overline{t, \mathbf{n}})\big)\big] + f(\mathrm{pr}_2(z_{\mathbf{n}})) = \\ = \sum_{t=1}^{\mathbf{n}} \big[\mathbf{c}\big(\mathrm{pr}_2(z_{t-1}), \mathrm{pr}_1(z_t), \rho^1(\gamma^1(\overline{t, \mathbf{n}}))\big) + c_{\rho(\gamma(t))}\big(z_t, \rho^1(\gamma^1(\overline{t, \mathbf{n}}))\big)\big] + f(\mathrm{pr}_2(z_{\mathbf{n}})) = \\ = \tilde{\mathfrak{C}}_{\rho \circ \gamma}\big[(z_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}}}\big],\end{gathered} \tag{6.8}$$

где учитываются (2.13), (6.5) и (6.7). Из (6.8) и предложения 3 следует, в частности, что

$$\forall x \in X^0 \quad \forall \gamma \in \mathbf{P} \quad \forall \mathbf{z} \in \mathcal{Z}_\gamma[x] \quad \exists \gamma' \in \mathcal{A} \quad \exists \mathbf{z}' \in \tilde{\mathfrak{Z}}_{\gamma'}[x] \colon \mathfrak{C}_\gamma[\mathbf{z}] = \tilde{\mathfrak{C}}_{\gamma'}[\mathbf{z}'].$$

Это означает (см. (2.10), (6.6)) справедливость следующего положения:

$$\forall x \in X^0 \quad \forall (\gamma, \mathbf{z}) \in \tilde{\mathbf{D}}_0[x] \quad \exists (\gamma', \mathbf{z}') \in \mathbf{D}_0[x] \colon \mathfrak{C}_\gamma[\mathbf{z}] = \tilde{\mathfrak{C}}_{\gamma'}[\mathbf{z}'].$$

С учетом (2.14) получаем, конечно, что $\forall x \in X^0$ $\forall (\gamma, \mathbf{z}) \in \tilde{\mathbf{D}}_0[x]$

$$V_0[x] \leqslant \mathfrak{C}_\gamma[\mathbf{z}]. \tag{6.9}$$

Из (6.9) имеем теперь (см. (6.6)) при $x \in X^0$ очевидное неравенство

$$V_0[x] \leqslant \min_{(\gamma, \mathbf{z}) \in \tilde{\mathbf{D}}_0[x]} \mathfrak{C}_\gamma[\mathbf{z}].$$

Используя (2.15), получаем с очевидностью, что

$$\tilde{\mathbb{V}} \leqslant \min_{(\gamma, \mathbf{z}) \in \tilde{\mathbf{D}}_0[x]} \mathfrak{C}_\gamma[\mathbf{z}] \quad \forall x \in X^0. \tag{6.10}$$

Как следствие из (6.10) извлекается следующее финальное неравенство:

$$\tilde{\mathbb{V}} \leqslant \min_{x \in X^0} \min_{(\gamma, \mathbf{z}) \in \tilde{\mathbf{D}}_0[x]} \mathfrak{C}_\gamma[\mathbf{z}]. \tag{6.11}$$

Теперь, обращаясь к [20–22], заметим, что в правой части (6.11) задействован на самом деле $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$-композиционный экстремум: оптимизируя $(\gamma, \mathbf{z}, x) \in \mathbf{D}$ (или, что то же самое, последовательно $x \in X^0$, $(\gamma, \mathbf{z}) \in \tilde{\mathbf{D}}_0[x]$), мы реализуем $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$-композиционное решение в виде (композиционного) МП, доставляющего значение правой части (6.11).

Сейчас мы совсем кратко напомним основные понятия, связанные с постановкой композиционной задачи, для которой точный алгоритм решения указан в [20–22]. Итак, здесь мы используем критерий (6.8). Тогда при $x \in X^0$ рассматриваем задачу

$$\mathfrak{C}_\gamma[\mathbf{z}] \longrightarrow \min, \quad (\gamma, \mathbf{z}) \in \tilde{\mathbf{D}}_0[x],$$

с фиксированным стартом; этой задаче сопоставляется экстремум

$$\tilde{V}[x] \triangleq \min_{(\gamma,\mathbf{z}) \in \tilde{\mathbf{D}}_0[x]} \mathfrak{C}_\gamma[\mathbf{z}] \in \mathbb{R}_+, \tag{6.12}$$

а также (непустое) экстремальное множество

$$(\mathrm{sol})[x] \triangleq \big\{(\gamma, \mathbf{z}) \in \tilde{\mathbf{D}}_0[x] \mid \mathfrak{C}_\gamma[\mathbf{z}] = \tilde{V}[x]\big\} \in \mathcal{P}'(\tilde{\mathbf{D}}_0[x]).$$

В качестве основной композиционной задачи рассматриваем следующую:

$$\mathfrak{C}_\gamma[\mathbf{z}] \longrightarrow \min, \quad (\gamma, \mathbf{z}, x) \in \mathbf{D}; \tag{6.13}$$

задаче (6.13) сопоставляется (подробнее см. в [20–22]) экстремум $\mathbb{V}$ и (непустое) экстремальное множество $\mathbf{SOL}$:

$$\mathbb{V} \triangleq \min_{(\gamma,\mathbf{z},x) \in \mathbf{D}} \mathfrak{C}_\gamma[\mathbf{z}] = \min_{x \in X^0} \tilde{V}[x] \in \mathbb{R}_+, \tag{6.14}$$

$$\mathbf{SOL} \triangleq \{(\gamma, \mathbf{z}, x) \in \mathbf{D} | \mathfrak{C}_\gamma[\mathbf{z}] = \mathbb{V}\} \in \mathcal{P}'(\mathbf{D}).$$

Напомним, наконец, задачу оптимизации старта

$$\tilde{V}[x] \longrightarrow \min, \quad x \in X^0,$$

с экстремумом $\mathbb{V}$ и экстремальным множеством

$$X^0_{\mathrm{opt}} \triangleq \big\{x \in X^0 \mid \tilde{V}[x] = \mathbb{V}\big\} \in \mathcal{P}'(X^0).$$

Из (6.10) и (6.12) получаем, что $V_0[x] \leqslant \tilde{V}[x]$ $\forall x \in X^0$. Далее, из (6.11) и (6.14) имеем очевидное неравенство $\tilde{\mathbb{V}} \leqslant \mathbb{V}$.

Для решения композиционной задачи (6.13) был использован алгоритм [21, раздел 4], основанный на раздельном применении ДП в предваряющей и финальной задачах маршрутизации. Мы ограничимся сейчас рассмотрением двух примеров применения комбинированного алгоритма настоящей работы (включая обучение декомпозиции и последующую оптимизацию композиционного МП) в задаче управления инструментом при фигурной листовой резке деталей на машинах с ЧПУ.

Итак, полагаем далее, что X — невырожденный прямоугольник на плоскости $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, получая случай плоской задачи. Мегаполисы получаются дискретизацией эквидистант контуров, содержащихся в X (по сути — самих контуров, поскольку эквидистанты полагаются очень близкими к упомянутым контурам). Условия предшествования в рассматриваемых примерах соответствуют естественному для инженерной практики требованию: для каждой детали резка ее внутренних контуров должна предшествовать резке внешнего контура. Мы будем рассматривать случай деталей с отверстиями; данным отверстиям как раз и отвечают внутренние контуры (полагаем для простоты, что деталей, вложенных в другие детали, у нас нет). В обоих примерах $\mathbf{n} = 40$ и $N = 20$. Множество $\mathbf{K}$ выбиралось по разному; при этом в первом примере $|\mathbf{K}| = 20$, а во втором — $|\mathbf{K}| = 30$. Было проведено три типа расчетов.

1. Рассматривался случай, когда кластеры $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ задавались «вручную», после чего применялось ДП.

2. Применялось построение кластеров на основе жадного алгоритма; в рамках данных построений также осуществлялась (частичная) оптимизация МП, включая выбор точки старта.

3. Полное решение комбинированным алгоритмом с обучением кластеризации и последующим применением ДП, что соответствует основному содержанию настоящей работы.

Во всех случаях, наряду с условиями предшествования, учитывались ограничения теплового характера, что достигалось применением конструкций работы [32], связанных с введением штрафов. Последнее приводило к появлению функций стоимости, допускающих зависимость от списка заданий. Эти функции отождествлялись (в отсутствии штрафов) всякий раз с временем выполнения соответствующей операции (время холостого хода при внешних перемещениях, время рабочего хода при выполнении внутренних работ, связанных с резкой). Терминальная компонента критерия (функция f) определяется временем холостого хода при возвращении в начало координат (точка парковки инструмента) и пропорциональна, следовательно, соответствующему значению евклидовой нормы. В случаях 1, 3 построен оптимальный композиционный МП. В случае 2 указано (также в виде МП) жадное решение.

В первом примере множество X^0 было получено дискретизацией границы прямоугольника с вершинами (далее размеры даются в мм) $(0, 0)$, $(0, 943)$, $(1167, 943)$, $(1167, 0)$, точки, формирующие X^0, выбирались с шагом 100. При этом $|\mathcal{M}_1| = |\mathcal{M}_2|$ (N выбиралось только из соображений выравнивания размерности частичных задач). В случае 1 был получен экстремум $\mathbb{V} = 89.4$ (здесь и далее время в секундах) и найдена точка старта $(0, 700)$. Время счета 39 сек. В случае 2 получено значение критерия 92.4 при той же точке старта. Наконец, в случае 3 (композиционное решение с кластеризацией, найденной в случае 2 на основе жадного алгоритма) получено $\mathbb{V} = 88$ при точке старта $(0, 800)$. Время счета 38 сек.

Во втором примере было увеличено число адресных пар (как уже отмечалось, $|\mathbf{K}| = 30$) при тех же $\mathbf{n}$ и N. Прямоугольник, определяющий построение X^0 путем дискретизации с шагом 100, здесь задается вершинами $(0, 0)$, $(0, 1930)$, $(3560, 1930)$, $(3560, 0)$. Здесь также исследовались варианты 1–3. В случае 1 найдены оптимальный композиционный МП, $\mathbb{V} = 105.1$ и точка старта $(1480, 0)$. Время счета 1 мин. 1 сек. Для варианта 2 получено значение критерия 109.9 и точка старта $(3560, 1220)$. Время счета 38 сек. Главным итогом процедуры здесь является построение кластеров $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$. С их использованием в случае варианта 3 построен (в условиях $(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$-декомпозиции) оптимальный МП, найдены $\mathbb{V} = 102.7$ и точка старта $(3560, 1220)$. Время счета 1 мин. 10 сек.

Итак, в обоих примерах вариант 3 характеризуется улучшением достигаемого результата при вполне удовлетворительном времени счета (на рис. 1, 2 иллюстрируется случай 3).

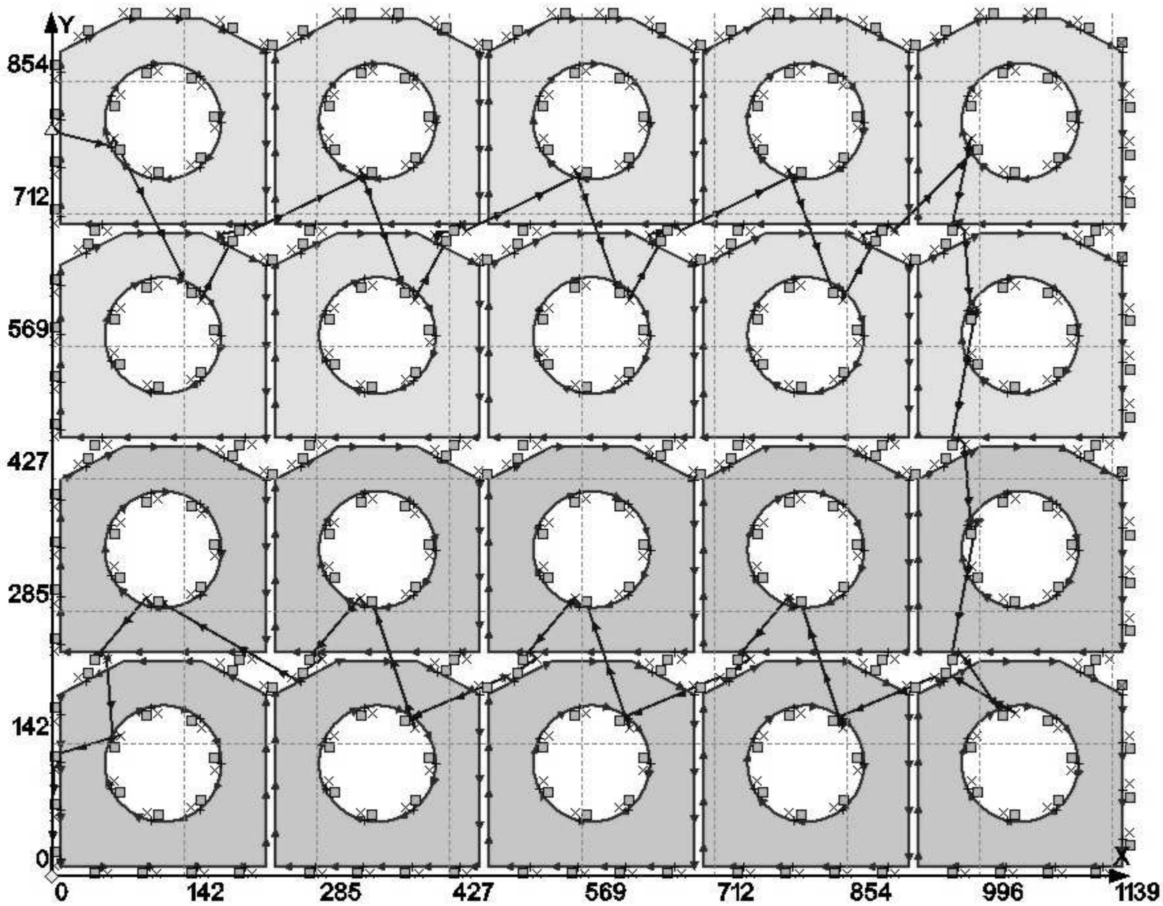

Рис. 1. Маршрут и трасса обхода множеств для первого примера

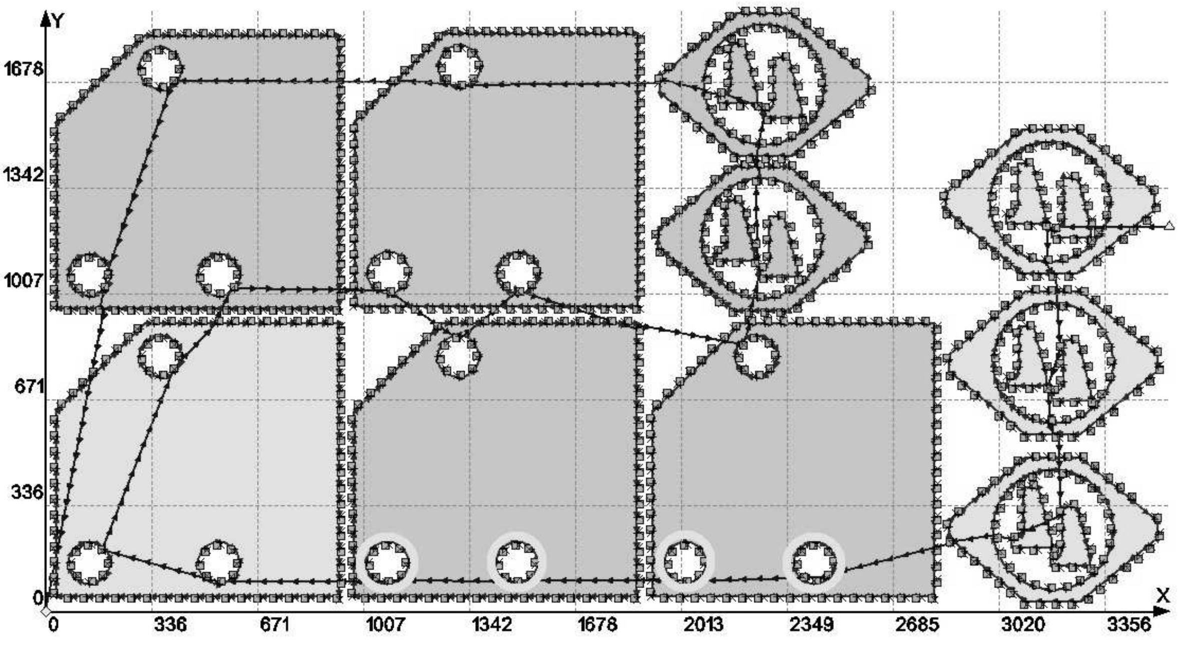

Рис. 2. Маршрут и трасса обхода множеств для второго примера

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Меламед И. И., Сергеев С. И., Сигал И. Х. Задача коммивояжера. Вопросы теории // Автоматика и телемеханика. 1989. Вып. 9. С. 3–33. https://www.mathnet.ru/rus/at6414
2. Gutin G., Punnen A. P. The traveling salesman problem and its variations. New York: Springer, 2007. https://doi.org/10.1007/b101971
3. Cook W. J. In pursuit of the traveling salesman. Mathematics at the limits of computation. Princeton: Princeton University Press, 2012. https://zbmath.org/1236.00007
4. Гимади Э. Х., Хачай М. Ю. Экстремальные задачи на множествах перестановок. Екатеринбург: УМЦ УПИ, 2016.
5. Беллман Р. Применение динамического программирования к задаче о коммивояжере // Кибернетический сборник. М.: Мир, 1964. Т. 9. С. 219–228.
6. Хелд М., Карп Р. М. Применение динамического программирования к задачам упорядочения // Кибернетический сборник. М.: Мир, 1964. Т. 9. С. 202–218.
7. Литтл Дж., Мурти К., Суини Д., Кэрел К. Алгоритм для решения задачи о коммивояжере // Экономика и математические методы. 1965. Т. 1. Вып. 1. С. 94–107.
8. Lee Moon-Kyu, Kwon Ki-Bum. Cutting path optimization in CNC cutting processes using a two-step genetic algorithm // International Journal of Production Research. 2006. Vol. 44. Issue 24. P. 5307–5326. https://doi.org/10.1080/00207540600579615
9. Yu Wenchao, Lu Linji. A route planning strategy for the automatic garment cutter based on genetic algorithm // 2014 IEEE Congress on Evolutionary Computation (CEC). IEEE, 2014. P. 379–386. https://doi.org/10.1109/CEC.2014.6900425
10. Dewil R., Vansteenwegen P., Cattrysse D. Construction heuristics for generating tool paths for laser cutters // International Journal of Production Research. 2014. Vol. 52. Issue 20. P. 5965–5984. https://doi.org/10.1080/00207543.2014.895064
11. Петунин А. А. О некоторых стратегиях формирования маршрута инструмента при разработке управляющих программ для машин термической резки материала // Вестник Уфимского государственного авиационного технического университета. Сер. Управление, вычислительная техника и информатика. 2009. Т. 13. № 2 (35). С. 280–286. https://elibrary.ru/item.asp?id=15134316
12. Петунин А. А., Ченцов А. Г., Ченцов П. А. К вопросу о маршрутизации движения инструмента в машинах листовой резки с числовым программным управлением // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. Информатика. Телекоммуникации. Управление. 2013. Вып. 2 (169). С. 103–111.
13. Petunin A. A. General model of Tool Path Problem for the CNC sheet cutting machines // IFAC-PapersOnline. 2019. Vol. 52. Issue 13. P. 2662–2667. https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2019.11.609
14. Петунин А. А., Ченцов А. Г., Ченцов П. А. Оптимальная маршрутизация инструмента машин фигурной листовой резки с числовым программным управлением. Математические модели и алгоритмы. Екатеринбург: УрФУ, 2020.
15. Коробкин В. В., Сесекин А. Н., Ташлыков О. Л., Ченцов А. Г. Методы маршрутизации и их приложения в задачах повышения эффективности и безопасности эксплуатации атомных станций. М.: Новые технологии, 2012.
16. Ченцов А. Г. Задача маршрутизации «на узкие места» с системой первоочередных заданий // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2023. Т. 61. С. 156–186. https://doi.org/10.35634/2226-3594-2023-61-09
17. Ченцов А. Г., Ченцов А. А. Динамическое программирование и вопросы разрешимости задачи маршрутизации «на узкие места» с ресурсными ограничениями // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2022. Т. 32. Вып. 4. С. 569–592. https://doi.org/10.35634/vm220406
18. Ченцов А. Г., Ченцов А. А., Ченцов П. А. Задача маршрутизации «на узкие места» (оптимизация в пределах зон) // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2024. Т. 34. Вып. 2. С. 267–285. https://doi.org/10.35634/vm240206

19. Ченцов А. Г., Ченцов А. А., Сесекин А. Н. Задачи маршрутизации перемещений с неаддитивным агрегированием затрат. М.: URSS, 2020.
20. Ченцов А. Г., Ченцов П. А. Экстремальная двухэтапная задача маршрутизации и процедуры на основе динамического программирования // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2022. Т. 28. № 2. С. 215–248. https://doi.org/10.21538/0134-4889-2022-28-2-215-248
21. Ченцов А. Г., Ченцов П. А. Двухэтапное динамическое программирование в задаче маршрутизации с элементами декомпозиции // Автоматика и телемеханика. 2023. Вып. 5. С. 133–164. https://doi.org/10.31857/S0005231023050070
22. Ченцов А. Г., Ченцов П. А. Динамическое программирование в задаче маршрутизации: декомпозиционный вариант // Вестник российских университетов. Математика. 2022. Т. 27. Вып. 137. С. 95–124. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2022-27-137-95-124
23. Ченцов А. А., Ченцов А. Г., Ченцов П. А. Экстремальная задача маршрутизации с внутренними потерями // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14. № 3. С. 183–201. https://www.mathnet.ru/rus/timm52
24. Ченцов А. Г. Об оптимальной маршрутизации в условиях ограничений // Доклады Академии наук. 2008. Т. 423. № 3. С. 303–307. https://elibrary.ru/item.asp?id=11602272
25. Ченцов А. Г., Ченцов А. А. Задачи маршрутизации с ограничениями, зависящими от списка заданий // Доклады Академии наук. 2015. Т. 465. № 2. С. 154–158. https://doi.org/10.7868/s0869565215320043
26. Ченцов А. Г. Задача последовательного обхода мегаполисов с условиями предшествования // Автоматика и телемеханика. 2014. Вып. 4. С. 170–190. https://www.mathnet.ru/rus/at7539
27. Ченцов А. Г. Экстремальные задачи маршрутизации и распределения заданий: вопросы теории. М.-Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, Ижевский институт компьютерных исследований, 2008.
28. Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств. М.: Мир, 1970.
29. Дьедонне Ж. Основы современного анализа. М.: Мир, 1964.
30. Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р. Алгоритмы: построение и анализ. М.: МЦНМО, 2000.
31. Ченцов А. Г. Множества, события, вероятность (основные структуры). Екатеринбург: Уральский государственный технический университет — УПИ, 2006.
32. Ченцов А. Г., Ченцов П. А. Маршрутизация в условиях ограничений: задача о посещении мегаполисов // Автоматика и телемеханика. 2016. Вып. 11. С. 96–117. https://www.mathnet.ru/rus/at14599

Поступила в редакцию 19.09.2024
Принята к публикации 04.11.2024

Ченцов Александр Георгиевич, д. ф.-м. н., член-корреспондент РАН, главный научный сотрудник, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, 620108, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16;
профессор, Уральский федеральный университет, 620002, Россия, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19.
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-6568-0703
E-mail: chentsov@imm.uran.ru

Ченцов Павел Александрович, к. ф.-м. н., старший научный сотрудник, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, 620108, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16;
старший научный сотрудник, Уральский федеральный университет, 620002, Россия, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19.
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-3595-0607
E-mail: chentsov.p@mail.ru

Цитирование: А. Г. Ченцов, П. А. Ченцов. Некоторые конструкции решения задач маршрутизации с использованием декомпозиций и преобразований целевых множеств // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2024. Т. 34. Вып. 4. С. 518–540.

VESTNIK UDMURTSKOGO UNIVERSITETA. MATEMATIKA. MEKHANIKA. KOMP'YUTERNYE NAUKI

MATHEMATICS 2024. Vol. 34. Issue 4. Pp. 518–540.

A. G. Chentsov, P. A. Chentsov

Some constructions for solving routing problems using decompositions and transformations of target sets

Keywords: dynamic programming, route, precedence conditions.

MSC2020: 49L20, 90C39

DOI: 10.35634/vm240404

Issues related to solving the additive problem of sequential traversal of sets with precedence restrictions and cost functions that allow dependence on the list of tasks are considered. The basic method is a broadly understood dynamic programming (DP), supplemented in the case of problems of appreciable dimension by decompositions of the family of tasks and transformation of the parameters of the original problem. Possible applications are related, in particular, to the problem of tool control in figured sheet cutting of parts on CNC machines. In this problem, an important circumstance is taking into account the precedence conditions, which have, in particular, the following meaning: in the case of a part with holes, cutting of each of the internal contours (corresponding to the holes) should precede cutting of the external contour. The quality criterion itself in this problem, as a rule, is additive. Another type of constraints concerns avoiding thermal deformations of parts. When using the approach with penalties for violating the conditions associated with effective heat dissipation during cutting, cost functions arise that allow dependence on the list of tasks completed to date. Note that in another applied problem, namely, in the problem of dismantling radiation hazardous objects, cost functions arise with dependence on the list of tasks that have not been completed at the moment (and, consequently, concern the objects that have not been dismantled). As a result, we arrive at a very general problem with precedence constraints and cost functions with dependence on the list of tasks. The decomposition applied in the case of a noticeable dimensionality with subsequent implementation of the DP requires, on the one hand, the development of clustering methods, and, on the other, the construction of an adequate structure for distributing global precedence conditions among clusters. In the theoretical part of the work, the case of two clusters is discussed, which makes it possible to cover with a single scheme a number of practically interesting problems of a range (in terms of dimensionality) type. An algorithm for constructing a composite solution is indicated, including a stage of clustering training based on a greedy algorithm. This "composite" algorithm is implemented on a PC; a computational experiment was carried out.

REFERENCES

1. Melamed I. I., Sergeev S. I., Sigal I. Kh. The traveling salesman problem. I: Theoretical issues, *Automation and Remote Control*, 1989, vol. 50, no. 9, pp. 1147–1173. https://zbmath.org/0705.90070
2. Gutin G., Punnen A. P. *The traveling salesman problem and its variations*, New York: Springer, 2007. https://doi.org/10.1007/b101971
3. Cook W. J. *In pursuit of the traveling salesman. Mathematics at the limits of computation*, Princeton: Princeton University Press, 2012. https://zbmath.org/1236.00007
4. Gimadi E. Kh., Khachai M. Yu. *Ekstremal'nye zadachi na mnozhestvakh perestanovok* (Extreme problems on sets of permutations), Yekaterinburg: UMC UPI, 2016.
5. Bellman R. Dynamic programming treatment of the travelling salesman problem, *Journal of the ACM*, 1962, vol. 9, issue 1, pp. 61–63. https://doi.org/10.1145/321105.321111
6. Held M., Karp R. M. A dynamic programming approach to sequencing problems, *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, 1962, vol. 10, issue 1, pp. 196–210. https://doi.org/10.1137/0110015
7. Little J. D. C., Murty K. G., Sweeney D. W., Karel C. An algorithm for the traveling salesman problem, *Operations Research*, 1963, vol. 11, no. 6, pp. 972–989. https://doi.org/10.1287/opre.11.6.972

8. Lee Moon-Kyu, Kwon Ki-Bum. Cutting path optimization in CNC cutting processes using a two-step genetic algorithm, *International Journal of Production Research*, 2006, vol. 44, issue 24, pp. 5307–5326. https://doi.org/10.1080/00207540600579615
9. Yu Wenchao, Lu Linji. A route planning strategy for the automatic garment cutter based on genetic algorithm, *2014 IEEE Congress on Evolutionary Computation (CEC)*, IEEE, 2014, pp. 379–386. https://doi.org/10.1109/CEC.2014.6900425
10. Dewil R., Vansteenwegen P., Cattrysse D. Construction heuristics for generating tool paths for laser cutters, *International Journal of Production Research*, 2014, vol. 52, issue 20, pp. 5965–5984. https://doi.org/10.1080/00207543.2014.895064
11. Petunin A. A. About some strategies of the programming of tool route by developing of control programs for thermal cutting machines, *Vestnik Ufimskogo Gosudarstvennogo Aviatsionnogo Tekhnicheskogo Universiteta. Seriya: Upravlenie, Vychislitel'naya Tekhnika i Informatika*, 2009, vol. 13, no. 2 (35), pp. 280–286 (in Russian). https://elibrary.ru/item.asp?id=15134316
12. Petunin A. A., Chentsov A. G., Chentsov P. A. On routing tool motion on the sheet cutting NPC machines, *St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Computer Science. Telecommunication and Control Systems*, 2013, issue 2 (169), pp. 103–111 (in Russian).
13. Petunin A. A. General model of Tool Path Problem for the CNC sheet cutting machines, *IFAC-PapersOnline*, 2019, vol. 52, issue 13, pp. 2662–2667. https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2019.11.609
14. Petunin A. A., Chentsov A. G., Chentsov P. A. *Optimal'naya marshrutizatsiya instrumenta mashin figurnoi listovoi rezki s chislovym programmnym upravleniem. Matematicheskie modeli i algoritmy* (Optimal tool routing on CNC sheet cutting machines. Mathematical models and algorithms), Yekaterinburg: Ural Federal University, 2020.
15. Korobkin V. V., Sesekin A. N., Tashlykov O. L., Chentsov A. G. *Metody marshrutizatsii i ikh prilozheniya v zadachakh povysheniya bezopasnosti i effektivnosti ekspluatatsii atomnykh stantsii* (Routing methods and their applications in problems of improving the safety and efficiency of operation of nuclear power plants), Moscow: Novye Tekhnologii, 2012.
16. Chentsov A. G. A bottleneck routing problem with a system of priority tasks, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2023, vol. 61, pp. 156–186 (in Russian). https://doi.org/10.35634/2226-3594-2023-61-09
17. Chentsov A. G., Chentsov A. A. Dynamic programming and questions of solvability of route bottleneck problem with resource constraints, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2022, vol. 32, issue 4, pp. 569–592 (in Russian). https://doi.org/10.35634/vm220406
18. Chentsov A. G., Chentsov A. A., Chentsov P. A. The routing bottlenecks problem (optimization within zones), *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2024, vol. 34, issue 2, pp. 267–285 (in Russian). https://doi.org/10.35634/vm240206
19. Chentsov A. G., Chentsov A. A., Sesekin A. N. *Zadachi marshrutizatsii peremeshchenii s neadditivnym agregirovaniem zatrat* (Routing problems with non-additive cost aggregation), Moscow: URSS, 2020.
20. Chentsov A. G., Chentsov P. A. An extremal two-stage routing problem and procedures based on dynamic programming, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2022, vol. 28, no. 2, pp. 215–248 (in Russian). https://doi.org/10.21538/0134-4889-2022-28-2-215-248
21. Chentsov A. G., Chentsov P. A. Two-stage dynamic programming in the routing problem with decomposition, *Automation and Remote Control*, 2023, vol. 84, issue 5, pp. 609–632. https://doi.org/10.25728/arcRAS.2023.10.71.001
22. Chentsov A. G., Chentsov P. A. Dynamic programming in the routing problem: decomposition variant, *Russian Universities Reports. Mathematics*, 2022, vol. 27, issue 137, pp. 95–124 (in Russian). https://doi.org/10.20310/2686-9667-2022-27-137-95-124
23. Chentsov A. G., Chentsov A. A., Chentsov P. A. Extremal routing problem with internal losses, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2009, vol. 264, suppl. 1, pp. S87–S106. https://doi.org/10.1134/S0081543809050071

24. Chentsov A. G. Constrained optimal routing, *Doklady Mathematics*, 2008, vol. 78, issue 3, pp. 859–863. https://doi.org/10.1134/S106456240806015X
25. Chentsov A. G., Chentsov A. A. Route problem with constraints depending on a list of tasks, *Doklady Mathematics*, 2015, vol. 92, issue 3, pp. 685–688. https://doi.org/10.1134/S1064562415060083
26. Chentsov A. G. Problem of successive megalopolis traversal with the precedence conditions, *Automation and Remote Control*, 2014, vol. 75, issue 4, pp. 728–744. https://doi.org/10.1134/S0005117914040122
27. Chentsov A. G. *Ekstremal'nye zadachi marshrutizatsii i raspredeleniya zadaniy: voprosy teorii* (Extreme tasks of routing and distribution of tasks: theory questions), Moscow–Izhevsk: Regular and Chaotic Dynamics, Institute of Computer Science, 2008.
28. Kuratowski K., Mostowski A. *Set theory*, Amsterdam: North-Holland, 1967.
29. Dieudonné J. *Foundations of modern analysis*, New York: Academic Press, 1960.
30. Cormen T. H., Leiserson C. E., Rivest R. L. *Introduction to algorithms*, New York: McGraw-Hill, 1990. https://zbmath.org/1158.68538
31. Chentsov A. G. *Mnozhestva, sobytiya, veroyatnost' (osnovnye struktury)* (Sets, events, probability (basic structures)), Yekaterinburg: Ural State Technical University — UPI, 2006.
32. Chentsov A. G., Chentsov P. A. Routing under constraints: Problem of visit to megalopolises, *Automation and Remote Control*, 2016, vol. 77, issue 11, pp. 1957–1974. https://doi.org/10.1134/S0005117916110060

Received 19.09.2024
Accepted 04.11.2024

Aleksandr Georgievich Chentsov, Doctor of Physics and Mathematics, Corresponding Member, Russian Academy of Science, Chief Researcher, N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620219, Russia;
Professor, Ural Federal University, ul. Mira, 19, Yekaterinburg, 620002, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-6568-0703
E-mail: chentsov@imm.uran.ru

Pavel Aleksandrovich Chentsov, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher, N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620219, Russia;
Senior Researcher, Ural Federal University, ul. Mira, 19, Yekaterinburg, 620002, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-3595-0607
E-mail: chentsov.p@mail.ru

Citation: A. G. Chentsov, P. A. Chentsov. Some constructions for solving routing problems using decompositions and transformations of target sets, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2024, vol. 34, issue 4, pp. 518–540.