ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ
МАТЕМАТИКА 2024. Т. 34. Вып. 4. С. 541–562.

УДК 517.957, 517.988, 517.977.56

© *А. В. Чернов*

О СОХРАНЕНИИ ГЛОБАЛЬНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ И ОЦЕНКЕ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Пусть U — множество допустимых управлений, $T > 0$ и задана шкала банаховых пространств $W[0;\tau]$, $\tau \in (0;T]$, такая, что множество сужений функций из $W = W[0;T]$ на $[0;\tau]$ совпадает с $W[0;\tau]$; $F[.;u]\colon W \to W$ — управляемый вольтерров оператор, $u \in U$. Ранее для операторного уравнения $x = F[x;u]$, $x \in W$, автором была введена система сравнения в форме функционально-интегрального уравнения в пространстве $\mathbf{C}[0;T]$. Было установлено, что для сохранения (относительно малых вариаций правой части) глобальной разрешимости операторного уравнения достаточно сохранения глобальной разрешимости указанной системы сравнения, а также установлены соответствующие достаточные условия. В данной статье рассматриваются дальнейшие примеры приложения этой теории: нелинейное волновое уравнение, сильно нелинейное волновое уравнение, нелинейное уравнение теплопроводности, сильно нелинейное параболическое уравнение.

Ключевые слова: эволюционное вольтеррово уравнение второго рода общего вида, функционально-интегральное уравнение, система сравнения, сохранение глобальной разрешимости, единственность решения, нелинейное волновое уравнение, нелинейное параболическое уравнение.

DOI: 10.35634/vm240405

Введение

Пусть U — множество допустимых управлений, $T > 0$ и задана шкала банаховых пространств $W[0;\tau]$, $\tau \in (0;T]$, такая, что множество сужений функций из $W = W[0;T]$ на $[0;\tau]$ совпадает с $W[0;\tau]$, $F[.;u]\colon W \to W$ — управляемый вольтерров оператор, $u \in U$. Ранее в работе [1] для операторного уравнения $x = F[x;u]$, $x \in W$, автором была введена система сравнения в форме функционально-интегрального уравнения в пространстве $\mathbf{C}[0;T]$. Было установлено, что для сохранения (относительно малых вариаций правой части) глобальной разрешимости операторного уравнения достаточно сохранения глобальной разрешимости указанной системы сравнения, а также установлены соответствующие достаточные условия. В [1] см. также историю вопроса и соответствующий обзор. Об актуальности проблемы сохранения глобальной разрешимости — иначе говоря, устойчивости существования глобальных решений (УСГР) — и истории вопроса см. также в [2, введение]; [3–5]. Что касается условий глобальной разрешимости функционально-интегральных уравнений, см., например, [7–19].

В данной статье рассматриваются дальнейшие примеры приложения теории УСГР, развитой в [1]: нелинейное волновое уравнение, сильно нелинейное волновое уравнение, нелинейное уравнение теплопроводности, сильно нелинейное параболическое уравнение. Указанные примеры конструируются по следующей общей схеме. В качестве основы построения берется то или иное конкретное нелинейное уравнение из хорошо известной монографии [20] Ж.-Л. Лионса с правой частью, которую мы всюду далее обозначаем буквой z. Особо отметим, что в [20] правая часть z не зависит ни от управления u, ни от состояния x. Это важно понимать для оценки новизны получаемых результатов. При фиксированном z (из подходящего функционального класса) в [20] доказаны соответствующие результаты о существовании глобального решения для начально-краевых задач, связанных с упомянутыми уравнениями (то есть теоремы существования решения). Далее мы правую часть z заменяем на действие оператора $f(u)[x]$, то есть на управляемую нелинейность от состояния x. Таким образом, по сравнению с [20], производится *существенное усложнение* (и без того уже) нелинейной задачи. Практическая мотивация изучения полученных описанным способом усложненных задач (по ранее уже использованной автором терминологии, *задач с добавленной нелинейностью*) на самом деле довольно прозрачна. Действительно, внешняя сила f может зависеть от текущего состояния системы. Добавочные нелинейности могут порождаться такими физическими аспектами, как специальные характеристики сопротивления среды, дополнительные потоки вещества или энергии, наличие примесей, активно взаимодействующих с изучаемой субстанцией и т. д. Кроме того, выражение $f(u)[x]$ само по себе можно понимать как шаблон управления с обратной связью, что именно с практической точки зрения намного интереснее, чем просто программное управление. Однако совершенно очевидно, что для задач с добавленной (по сравнению с [20]) нелинейностью существование глобального решения, вообще говоря, не гарантировано. Вместе с тем, при исследовании ряда проблем теории управления (выводе необходимых условий оптимальности, вычислении производных функционалов по управлению, обосновании локальной сходимости численных методов оптимизации и т. д.) достаточно обеспечить лишь возможность построения малых вариаций искомого управления (для которого, по естественному предположению, соответствующее глобальное решение управляемой задачи существует). В связи с этим, актуальной является упомянутая выше проблема сохранения глобальной разрешимости управляемой задачи: исходя из того, что уравнение имеет глобальное решение $\overline{x}$ для данного управления $\overline{u}$, требуется доказать, что глобальная разрешимость *сохраняется* и для всех управлений, в определенном смысле мало отличающихся от $\overline{u}$. Именно получению достаточных условий сохранения глобальной разрешимости конкретных задач с добавленной нелинейностью, порожденных задачами из [20], и посвящена данная статья. Общая идея используемого подхода родственна классической теореме Уинтнера (известной для обыкновенных дифференциальных уравнений в $\mathbb{R}^n$) в смысле построения так называемой системы сравнения для исходного управляемого уравнения: если известно, что система сравнения разрешима, то делается вывод, что исходное управляемое уравнение тоже разрешимо для всех управлений из заданного множества. В качестве системы сравнения у нас выступает функционально-интегральное уравнение в пространстве $\mathbb{R}$. Понятно, что исследование такой системы заведомо проще, чем исследование уравнения в частных производных. Используемый способ построения системы сравнения и результаты о ее разрешимости см. в [1]. Отметим, наконец, что используемый подход позволяет нам также получать оценку нормы отклонения решения x, отвечающего управлению u, от $\overline{x}$. Очевидно, что такая оценка сама по себе важна для практических приложений – как для оценки последствий управления, так и для установления факта непрерывной зависимости от управления. Обозначенные моменты кратко отражены в названии статьи.

Во избежание возможных недоразумений отметим также следующие обстоятельства.

Относительно $f(u)[x]$ мы каждый раз предполагаем, что это оператор Немыцкого с естественными свойствами в смысле отображения пространств и что выполняется аналог локального условия Липшица по x, что тоже естественно. Если нет зависимости от x, то соответствующие предположения выполняются автоматически. Далее, на основе этих предположений, мы устанавливаем выполнение предположений работы [1] (далее мы их обозначаем как $\mathbf{F}_1$)–$\mathbf{F}_5$)), что позволяет нам использовать полученные в ней общие абстрактные результаты о сохранении глобальной разрешимости в применении к исследуемым нами конкретным задачам с добавленной нелинейностью. Таким образом, для понимания результатов данной статьи необходимо иметь под рукой работу [1]. Но, поскольку работа находится в свободном доступе, вряд ли можно усмотреть в этом какую-либо проблему.

Касательно обозначений § 1. Мы опираемся здесь на обозначения [20], с незначительной модификацией либо для большей краткости, либо для удобства совмещения с работой [1]. Так, например, в [20] используются обозначения $H_0^1(\Omega)$ и $V = H_0^1(\Omega) \cap L_p(\Omega)$, $p = \rho+2$. Мы для краткости обозначаем $V = H_0^1(\Omega)$ и $V_0 = H_0^1(\Omega) \cap L_p(\Omega)$. Дополнительные обозначения понадобились в связи с необходимостью получения новых, необходимых нам, оценок и использования результатов работы [1] и теорем Лионса–Темама и Реллиха–Кондрашова.

Ситуация, изучаемая в § 4, принципиально отличается от рассматриваемых в предыдущих параграфах. Рассматривается постановка задачи, более частная по сравнению с постановкой § 3. Отличие в том, что оператор A главной части на этот раз берется линейным (так получается при конкретном значении параметра $p = 2$). При этом (линейный) оператор A оказывается сильно монотонным. Этот факт позволяет ослабить требования к добавленной нелинейности $f(u)[x]$. Своеобразной «расплатой» за такое ослабление требований является то, что функция $R(s)$, входящая в мажорантное функционально-интегральное уравнение, перестает быть линейной: вместо $R(s) = s$ в предыдущих параграфах получаем $R(s) = \sigma_1\sqrt{s}$. Это обстоятельство создает дополнительные трудности при обосновании разрешимости мажорантного уравнения. Значительная часть § 4 посвящена преодолению этих трудностей.

§ 1. Нелинейное волновое уравнение

Пусть $T > 0$, $\rho \geqslant 0$ — заданные числа, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область переменных $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, $Q = \Omega \times (0;T)$, $V = H_0^1(\Omega)$, $\widetilde{V} = L_2(\Omega)$, $V_0 = H_0^1(\Omega) \cap L_{\rho+2}(\Omega)$, $x_0 \in V_0$, $x_1 \in \widetilde{V}$, $z \in L_2(Q) = L_2(0,T;\widetilde{V})$. Следуя [20, глава 1, § 1.3], рассмотрим задачу в цилиндре Q:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - \Delta\, x + |x|^\rho x = z, \tag{1.1}$$

$$x(0) = x_0, \quad \frac{\partial x}{\partial t}(0) = x_1, \quad x\big|_{\partial\Omega\times(0;T)} = 0. \tag{1.2}$$

Как указано в [20, глава 1, § 1.1], уравнение (1.1) возникает в релятивистской квантовой механике. Производные по времени здесь понимаются в смысле распределений. Пусть $p, q \in (1;+\infty)$. Определим пространства

$$W = \bigl\{x \in L_\infty(0,T;V)\colon x' \in L_\infty(0,T;\widetilde{V}\bigr\}, \quad \widetilde{W} = \bigl\{x \in L_p(0,T;V)\colon x' \in L_q(0,T;\widetilde{V})\bigr\},$$

с нормами: $\|x\|_W = \|x\|_{L_\infty(0,T;V)} + \|x'\|_{L_\infty(0,T;\widetilde{V})}$, $\|x\|_{\widetilde{W}} = \|x\|_{L_p(0,T;V)} + \|x'\|_{L_q(0,T;\widetilde{V})}$. Следуя [20, глава 1, § 1.2], для функции $z \in L_2(\Omega)$ будем использовать обозначение $|z| = \|z\|_{L_2(\Omega)}$.

Кроме того, будем обозначать через $\mathbf{C}(0,T;V)$ пространство функций со значениями в V, непрерывных на отрезке $[0;T]$. Очевидно, что $W \subset \widetilde{W}$, и аналогично [21, глава IV, § 1, лемма 1.11, с. 173], $\widetilde{W} \subset \mathbf{C}(0,T;\widetilde{V})$; оба вложения непрерывны. Аналогично [21, глава IV, § 1, теорема 1.16, с. 173], устанавливается, что W и $\widetilde{W}$ — банаховы пространства.

Начальные условия x_0, x_1 будем считать фиксированными. Непосредственно из [20, глава 1, § 1.3, теорема 1.1, с. 20; § 1.5, теорема 1.2, с. 27] вытекает

Лемма 1. *Если* $\rho \leqslant \dfrac{2}{n-2}$ *(при* $n = 2$: $\rho \in [0;+\infty]$*), то задача* (1.1)*,* (1.2) *имеет единственное решение* $x = x[z] \in W$.

Замечание 1. На самом деле в [20, глава 1, § 1.3, теорема 1.1] существование решения доказывается в пространстве

$$W_0 = \big\{x \in L_\infty(0,T;V_0)\colon x' \in L_\infty(0,T;\widetilde{V}\big\}.$$

Но, как видно из доказательства [20, глава 1, § 1.5, теорема 1.2], единственность решения устанавливается в пространстве W, а уже из этого следует единственность и в более узком пространстве W_0. Заметим, кроме того, что при выполнении условий соответствующей теоремы вложения С. Л. Соболева относительно области Ω при $\rho \leqslant \dfrac{2}{n-2}$, и вообще, при $\rho \leqslant \dfrac{4}{n-2}$, имеет место совпадение пространств $V = V_0$, и соответственно, $W = W_0$. Как видно из [22, глава I, §§ 8–11], в зависимости от величины ρ, либо сама область Ω должна быть звездной относительно некоторого шара, либо должна представлять собой объединение конечного числа ограниченных областей, звездных относительно своего шара.

Далее будем считать, что $\rho \leqslant \dfrac{2}{n-2}$, $n \geqslant 3$. Тем самым, формулой $x = \mathcal{F}[z]$ определен оператор $\mathcal{F}\colon L_2(0,T;\widetilde{V}) \to W$. Соответственно, если задан управляемый вольтерров оператор $f[u]\colon W \to L_2(0,T;\widetilde{V})$, то задача (1.2) для управляемого уравнения

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - \Delta\, x + |x|^\rho x = f[u](x)$$

переписывается в виде уравнения

$$x = F[x;u], \quad x \in W, \tag{1.3}$$

при $F[x;u] = \mathcal{F}f[u](x)$. Далее мы будем предполагать, что управлению $u = \overline{u} \in U$ отвечает решение $x = \overline{x} \in W$ уравнения (1.3).

Вольтерровость оператора $\mathcal{F}$ вытекает из [6, леммы 6–8].

Далее мы получим необходимые нам оценки оператора $\mathcal{F}$. Следуя [20, глава 1, § 1.4, с. 22], определим билинейную форму

$$a(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Omega} \frac{\partial x}{\partial \xi_i}\frac{\partial y}{\partial \xi_i}\, d\xi, \quad x,y \in V.$$

Как указано в [20, глава 1, § 1.4, с. 23], $\|x\|_a = \sqrt{a(x,x)}$ есть эквивалентная норма в V. Для краткости будем обозначать $\|.\|_{\widetilde{V}} = |.|$, V_a — пространство V, снабженное нормой $\|.\|_a$.

В [6, лемма 9] доказано следующее утверждение.

Лемма 2. *Существует константа $c > 0$ такая, что для всех $z_i \in L_2(Q) = L_2(0,T;\widetilde{V})$, $x_i = \mathcal{F}[z_i]$, $i = 1,2$, $t \in [0;T]$ имеем:*

$$\|x_1 - x_2\|_{L_\infty(0,t;V_a)} \leqslant 2e^{ct}\int\limits_0^t \big|z_1(s) - z_2(s)\big|\, ds, \quad \|x_1' - x_2'\|_{L_\infty(0,t;\widetilde{V})} \leqslant 2e^{ct}\int\limits_0^t \big|z_1(s) - z_2(s)\big|\, ds.$$

Непосредственно из леммы 2 получаем (с точностью до эквивалентной нормы):

$$\big\|\mathcal{F}[z_1] - \mathcal{F}[z_2]\big\|_{W[0;t]} \leqslant 4e^{cT}\int\limits_0^t \big|z_1(s) - z_2(s)\big|\, ds. \tag{1.4}$$

Далее будем предполагать, что оператор $f[u]$ является оператором Немыцкого:

$$(f[u]x)(\xi,t) = f[u]\big(\xi,t,x(\xi,t),x'(\xi,t)\big)$$

и удовлетворяет неравенству:

$$\Big|f[u]\big(.,t,x_1(.,t),x_1'(.,t)\big) - f[u]\big(.,t,x_2(.,t),x_2'(.,t)\big)\Big| \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{4}e^{-cT}\mathcal{N}_0\Big(t,\max\big\{\|x_1\|_{W[0;t]},\|x_2\|_{W[0;t]}\big\}\Big)\|x_1-x_2\|_{W[0;t]},$$

с функцией $\mathcal{N}_0(t,s)$, удовлетворяющей условию

$\mathbf{N}_1$) функция $\mathcal{N}_0(t,s)$ измерима по $t\in[0;T]$, непрерывна по $s\in\mathbb{R}$ и такова, что: $\mathcal{N}_0\big(.,x(.)\big)\in L_1[0;T]$ для всех $x\in L_\infty[0;T]$,

и неубывающей по $s\geqslant 0$, при п. в. $t\in[0;T]$ и всех $x_i\in W$, $i=1,2$.

Тогда для всех $x_i\in W$, $\|x_i\|_{W[0;t]}\leqslant\gamma(t)$, $i=1,2$, с учетом (1.4), получаем:

$$\begin{aligned}\big\|F[x_1;u]-F[x_2;u]\big\|_{W[0;t]} &\leqslant \int\limits_0^t \chi_h(s)\,\mathcal{N}_1[\gamma](s)\|x_1-x_2\|_{W[0;s]}\,ds \leqslant \\ &\leqslant \int\limits_0^t \chi_h(s)\,\mathcal{N}_1[\gamma](s)\,ds\|x_1-x_2\|_{W[0;t]},\end{aligned} \tag{1.5}$$

где $\mathcal{N}_1[\gamma](s)=\mathcal{N}_0\big(s,\gamma(s)\big)$, $h=h[x_1,x_2]$ — это отрезок $[0;t]$, за вычетом (с точностью до множества нулевой меры) максимального подотрезка $[0;s]\subset[0;t]$, на котором x_1 и x_2 совпадают.

Следующее утверждение известно как теорема Лионса–Темама (J. L. Lions–R. Temam) [20, глава 1, теорема 5.1, с. 70].

Лемма 3. *Пусть $V,\widetilde{V}$ — рефлексивные банаховы пространства, H — банахово пространство, $V\subset H$ компактно, $H\subset\widetilde{V}$ непрерывно, $p,q\in(1;+\infty)$. Тогда пространство*

$$W=\big\{z\in L_p(0,T;V)\colon z'\in L_q(0,T;\widetilde{V}\big\}$$

с нормой $\|z\|_W=\|z\|_{L_p(0,T;V)}+\|z'\|_{L_q(0,T;\widetilde{V})}$ является рефлексивным банаховым пространством, непрерывно вложенным в $\mathbf{C}(0,T;\widetilde{V})$ и компактно вложенным в $L_p(0,T;H)$.

В свою очередь, чтобы установить компактное вложение $V\subset H$, в случае соболевского пространства V, можно воспользоваться следующим вариантом теоремы Реллиха–Кондрашова [22, § I.11.5, с. 106].

Лемма 4. *Если $1<p<\infty$, $n\geqslant\ell p$, $q<\dfrac{np}{n-\ell p}$, область $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ представляет объединение конечного числа ограниченных областей, каждая из которых звездна относительно своего шара, то вложение $W_p^\ell(\Omega)\subset L_q(\Omega)$ компактно.*

Установим компактное вложение $W\subset L_q(0,T;H)$ при некотором $V\subset H\subset\widetilde{V}$. Пусть область Ω удовлетворяет условиям леммы 4. Заметим, что при $n\geqslant 2$ в любом случае выполняется неравенство $2<\dfrac{2n}{n-2}$. Поэтому, согласно лемме 4 (при $p=2$, $\ell=1$) для всякого $r\in\Big[2;\dfrac{2n}{n-2}\Big)$ и $H=L_r(\Omega)$ имеет место компактное вложение $V\subset H$, и очевидно, справедливо непрерывное вложение $H \subset \widetilde{V}$. В таком случае, в соответствии с леммой 3, имеем компактное вложение $\widetilde{W} \subset L_p(0,T;H)$. Учитывая, что W непрерывно вложено в $\widetilde{W}$, то вложение $W \subset L_p(0,T;H)$ будет, очевидно, компактным (поскольку множество, ограниченное в W, будет ограниченным и в $\widetilde{W}$). Таким образом, получаем компактное вложение $W \subset Z$, $Z = L_p(0,T;H)$.

Исходя из проведенных выше рассуждений, получаем, что выполняются следующие условия.

- $\mathbf{F}_1$) Для всех $u \in U, t \in (0;T], \Delta x \in W, \beta \in \mathbf{C}[0;T]$ таких, что $\|\Delta x\|_{W[0;s]} \leqslant \beta(s)$, $s \in [0;t]$, имеем: $\big\|F[\overline{x}+\Delta x;u] - F[\overline{x};u]\big\|_{W[0;t]} \leqslant R\Big[\big\|\mathcal{N}\big(.,\beta(.)\big)\beta(.)\big\|_{L_1[0;t]}\Big]$, где $R\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ — непрерывная строго возрастающая функция, $R(0)=0$.

- $\mathbf{F}_2$) Пространство W компактно вложено в Z; $\|.\|_Z \leqslant C\|.\|_W$.

Здесь $\mathcal{N}(t,s) = \mathcal{N}_0\big(t, \|\overline{x}\|_W + s\big)$, $R(s) = s$.

Предположим, что оператор $f[u](x)$ можно рассматривать как ограниченный и непрерывный оператор $L_p(0,T;H) \to L_2(0,T;\widetilde{V}) = L_2(Q)$. Тогда, с учетом (1.4), получаем, что выполнено также следующее условие

- $\mathbf{F}_3$) Оператор F допускает расширение до ограниченного оператора $Z \to W$ и непрерывного оператора $Z \to Z$.

Принимая в расчет соотношение (1.5) и [6, лемма 7], получаем, что при $K(s) = s$ выполнены следующие условия.

- $\mathbf{F}_4$) Для всех $u \in U$, $t \in [0;T]$, $x_1, x_2 \in W[0;t]$, $\|x_i\|_{W[0;s]} \leqslant \gamma(s)$, $s \in [0;t]$, $y_i = F_{[0;t]}[x_i;u]$, $i=1,2$, при $\gamma \in \mathbf{C}[0;T]$, имеем:

$$\|y_1 - y_2\|_{W[0;t]} \leqslant K\Big(\big\|\chi_h \mathcal{N}_1[\gamma]\big\|_{L_1[0;t]}\Big)\|x_1 - x_2\|_{W[0;t]}, \quad \mathcal{N}_1[\gamma] \in L_1[0;T],$$

  где $K \in \mathbf{C}(\mathbb{R}_+)$, $K(0)=0$, $h = h[x_1,x_2]$ — множество, не содержащее никакого отрезка вида $[0;s] \subset [0;t]$, для которого $x_1\big|_{[0;s]} = x_2\big|_{[0;s]}$.

- $\mathbf{F}_5$) Для всех $0 < t_1 < t_2 \leqslant T$, $x \in W[0;t_1]$ существует продолжение $\widetilde{x} \in W[0;t_2]$, $\widetilde{x}\big|_{[0;t_1]} = x$, сохраняющее норму: $\|\widetilde{x}\|_{W[0;t_2]} = \|x\|_{W[0;t_1]}$.

Выполнение условий $\mathbf{F}_1$)–$\mathbf{F}_3$), см. также [1, замечание 1], означает, что можно пользоваться результатами [1, § 2]. Отсюда вытекает справедливость следующего утверждения.

Теорема 1. *Пусть управлению $u = \overline{u} \in U$ отвечает решение $x = \overline{x}$ уравнения* (1.3). *Тогда существует константа $C > 0$ такая, что для всех управлений $u \in U$ при достаточно малом $\alpha \equiv \big\|F[\overline{x};u] - F[\overline{x};\overline{u}\big\|_W$ уравнение* (1.3) *имеет по крайней мере одно решение $x = x[u] \in W$, удовлетворяющее оценке:*

$$\|x - \overline{x}\|_Z \leqslant C\|\beta\|_{\mathbf{C}[0;T]},$$

где $\beta \in \mathbf{C}[0;T]$ есть любое (существующее для всех достаточно малых $\alpha \geqslant 0$) решение уравнения:

$$\beta(t) = \alpha + R\left(\int_0^t \Big|\mathcal{N}\big(s,\beta(s)\big)\,\beta(s)\Big|\,ds\right), \quad t \in [0;T]. \tag{1.6}$$

Выполнение условий $\mathbf{F}_1$), $\mathbf{F}_4$), $\mathbf{F}_5$) означает, что можно пользоваться также и результатами [1, § 3]. Отсюда вытекает справедливость следующего утверждения.

Теорема 2. *Пусть управлению $u = \overline{u} \in U$ отвечает решение $x = \overline{x}$ уравнения* (1.3). *Тогда для всех $u \in U$ при достаточно малом $\alpha \equiv \big\|F[\overline{x};u] - F[\overline{x};\overline{u}]\big\|_W$ уравнение* (1.3) *имеет единственное решение $x = x[u] \in W$, и справедлива оценка: $\|x - \overline{x}\|_{W[0;t]} \leqslant \beta(t)$ при $t \in [0;T]$; а стало быть, $\|x - \overline{x}\|_W \leqslant \|\beta\|_{\mathbf{C}[0;T]}$, где $\beta \in \mathbf{C}[0;T]$ есть любое* (*существующее для всех достаточно малых $\alpha \geqslant 0$*) *решение уравнения* (1.6).

Отметим, что в силу установленных выше свойств оператора F, на самом деле решение $x[u] \in W_0$.

§ 2. Сильно нелинейное волновое уравнение

Пусть $T > 0$, $\rho > 0$ — заданные числа, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с гладкой границей переменных $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, $Q = \Omega \times (0;T)$, $V = H_0^1(\Omega)$, $V_1 = V \cap H^2(\Omega)$, $\widetilde{V} = L_2(\Omega)$,

$$W_0 = \big\{x \in L_\infty(0,T;V_1)\colon x' \in L_\infty(0,T;V) \cap L_{\rho+2}(Q),\ x'' \in L_\infty(0,T;\widetilde{V})\big\},$$
$$Z = \big\{z \in L_2(0,T;V)\colon z' \in L_2(Q)\big\};$$

$x_0 \in V_1$, $x_1 \in V \cap L_{2\rho+2}(\Omega)$, $z \in Z$. Следуя [20, глава 1, § 3.1], рассмотрим задачу в цилиндре Q:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - \Delta\, x + |x'|^\rho x' = z, \tag{2.7}$$

$$x(0) = x_0, \quad \frac{\partial x}{\partial t}(0) = x_1, \quad x\big|_{\partial\Omega\times(0;T)} = 0. \tag{2.8}$$

Производные по времени здесь понимаются в смысле распределений. В качестве рабочего пространства примем

$$W = \big\{x \in L_\infty(0,T;V)\colon x' \in L_\infty(0,T;\widetilde{V})\big\}$$

с нормами

$$\|x\|_W = \|x\|_{L_\infty(0,T;V)} + \|x'\|_{L_\infty(0,T;\widetilde{V})}, \qquad \|x\|_V = \left(\int\limits_\Omega (\nabla x)^2\, d\xi\right)^{1/2}.$$

Справедливо следующее утверждение [20, глава 1, § 3.1, теорема 3.1].

Лемма 5. *Для любых $z \in Z$, $x_0 \in V_1$, $x_1 \in V \cap L_{2\rho+2}(\Omega)$ задача* (2.7), (2.8) *имеет единственное решение $x = x[z] \in W_0$.*

Замечание 2. На самом деле в [20, глава 1, § 3.1, теорема 3.1] единственность решения устанавливается по норме пространства W, а уже из этого следует единственность и в более узком пространстве W_0. Элементы $x_0 \in V_1$, $x_1 \in V \cap L_{2\rho+2}(\Omega)$ далее будем считать фиксированными. Соответственно, обозначим $x = \mathcal{F}[z]$ — решение задачи (2.7), (2.8), отвечающее функции $z \in Z$. В силу указанных выше обстоятельств, определен однозначный оператор $\mathcal{F}\colon Z \to W_0$, который можно рассматривать также и как оператор $\mathcal{F}\colon Z \to W$, поскольку $W_0 \subset W$.

Далее будем считать, что задан управляемый вольтерров оператор $f[u]\colon W \to Z$. Тогда задача (2.8) для управляемого уравнения

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - \Delta\, x + |x'|^\rho x' = f[u](x),$$

переписывается в виде операторного уравнения

$$x = F[x;u], \quad x \in W, \tag{2.9}$$

при $F[x;u] = \mathcal{F} f[u](x)$. Далее мы будем предполагать, что управлению $u = \overline{u} \in U$ отвечает решение $x = \overline{x} \in W$ уравнения (2.9).

Вольтерровость оператора $\mathcal{F}$ вытекает из [6, леммы 6–8]. Далее мы получим необходимые нам оценки оператора $\mathcal{F}$.

Лемма 6. *Для всех $z_i \in Z$, $x_i = \mathcal{F}[z_i]$, $i = 1, 2$, $t \in [0;T]$ имеем:*

$$\|x_1 - x_2\|_{L_\infty(0,t;V)} \leqslant 2\int\limits_0^t \bigl|z_1(s) - z_2(s)\bigr|\, ds, \quad \|x_1' - x_2'\|_{L_\infty(0,t;\widetilde{V})} \leqslant 2\int\limits_0^t \bigl|z_1(s) - z_2(s)\bigr|\, ds.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим $w = x_1 - x_2$. Аналогично доказательству [20, глава 1, § 3.2, теорема 3.1, с. 53] получаем:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Bigl(\bigl\|w(t)\bigr\|^2 + \bigl|w'(t)\bigr|^2\Bigr) + \mathcal{A}[x_1, x_2](t) = \int\limits_\Omega \bigl(z_1(t) - z_2(t)\bigr)\, w'(t)\, d\xi,$$

где

$$\mathcal{A}[x_1, x_2](t) = \int\limits_\Omega \Bigl\{\bigl|x_1'(t)\bigr|^\rho x_1'(t) - \bigl|x_2'(t)\bigr|^\rho x_2'(t)\Bigr\}\, w'(t)\, d\xi \geqslant 0,$$

см. [20, глава 1, (3.14)]. Положим $\Phi(t) = \bigl\|w(t)\bigr\|^2 + \bigl|w'(t)\bigr|^2$. Таким образом, $\Phi(0) = 0$,

$$G(t) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\,\Phi(t) \leqslant \int\limits_\Omega \bigl(z_1(t) - z_2(t)\bigr)\, w'(t)\, d\xi \leqslant \bigl|z_1(t) - z_2(t)\bigr|\,\bigl|w'(t)\bigr|,$$

согласно неравенству Гёльдера. Ясно, что функция $\Phi(t)$ является решением задачи Коши

$$\Phi'(t) = 2G(t), \quad \Phi(0) = 0,$$

откуда получаем:

$$\Phi(t) = 2\int\limits_0^t G(s)\, ds \leqslant 2\int\limits_0^t \max\bigl\{0, G(s)\bigr\}\, ds \leqslant 2\int\limits_0^t \bigl|z_1(s) - z_2(s)\bigr|\,\bigl|w'(s)\bigr|\, ds.$$

Таким образом,

$$\bigl\|w(t)\bigr\|^2 + \bigl|w'(t)\bigr|^2 \leqslant 2\|w'\|_{L_\infty(0,t;\widetilde{V})}\int\limits_0^t \bigl|z_1(s) - z_2(s)\bigr|\, ds.$$

Следовательно,

$$\|w\|^2_{L_\infty(0,t;V)} + \|w'\|^2_{L_\infty(0,t;\widetilde{V})} \leqslant 2\|w'\|_{L_\infty(0,t;\widetilde{V})} \int\limits_0^t \big|z_1(s) - z_2(s)\big|\, ds.$$

В частности,

$$\|w'\|_{L_\infty(0,t;\widetilde{V})} \leqslant 2 \int\limits_0^t \big|z_1(s) - z_2(s)\big|\, ds.$$

Следовательно,

$$\|w\|^2_{L_\infty(0,t;V)} \leqslant 4 \left(\int\limits_0^t \big|z_1(s) - z_2(s)\big|\, ds \right)^2 . \qquad \square$$

Непосредственно из леммы 6 получаем:

$$\big\|\mathcal{F}[z_1] - \mathcal{F}[z_2]\big\|_{W[0;t]} \leqslant 4 \int\limits_0^t \big|z_1(s) - z_2(s)\big|\, ds. \tag{2.10}$$

Далее будем предполагать, что оператор $f[u]$ является оператором Немыцкого:

$$(f[u]x)(\xi,t) = f[u]\big(\xi, t, x(\xi,t), x'(\xi,t)\big)$$

и удовлетворяет неравенству:

$$\big|f[u]\big(.,t,x_1(.,t),x_1'(.,t)\big) - f[u]\big(.,t,x_2(.,t),x_2'(.,t)\big)\big| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{4}\mathcal{N}_0\Big(t, \max\big\{\|x_1\|_{W[0;t]}, \|x_2\|_{W[0;t]}\big\}\Big)\|x_1 - x_2\|_{W[0;t]},$$

с функцией $\mathcal{N}_0(t,s)$, удовлетворяющей условию $\mathbf{N}_1$) и неубывающей по $s \geqslant 0$, при п. в. $t \in [0;T]$ и всех $x_i \in W$, $i = 1, 2$.

Тогда для всех $x_i \in W$, $\|x_i\|_{W[0;t]} \leqslant \gamma(t)$, $i = 1, 2$, с учетом (2.10), получаем:

$$\big\|F[x_1;u] - F[x_2;u]\big\|_{W[0;t]} \leqslant \int\limits_0^t \chi_h(s)\,\mathcal{N}_1[\gamma](s)\|x_1 - x_2\|_{W[0;s]}\, ds \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_0^t \chi_h(s)\,\mathcal{N}_1[\gamma](s)\, ds\|x_1 - x_2\|_{W[0;t]},$$

где $\mathcal{N}_1[\gamma](s) = \mathcal{N}_0\big(s, \gamma(s)\big)$, $h = h[x_1, x_2]$ — это отрезок $[0;t]$, за вычетом (с точностью до множества нулевой меры) максимального подотрезка $[0;s] \subset [0;t]$, на котором x_1 и x_2 совпадают.

Далее, дословно повторяя соответствующие рассуждения из § 1, получаем, что выполняются условия $\mathbf{F}_1$), $\mathbf{F}_4$), $\mathbf{F}_5$) при $\mathcal{N}(t,s) = \mathcal{N}_0\big(t, \|\overline{x}\|_W + s\big)$, $R(s) = s$. А следовательно, справедлива

Теорема 3. *Пусть управлению $u = \overline{u} \in U$ отвечает решение $x = \overline{x}$ уравнения* (2.9). *Тогда для всех $u \in U$ при достаточно малом $\alpha \equiv \big\|F[\overline{x};u] - F[\overline{x};\overline{u}]\big\|_W$ уравнение* (2.9) *имеет единственное решение $x = x[u] \in W$, и справедлива оценка: $\|x - \overline{x}\|_{W[0;t]} \leqslant \beta(t)$ при $t \in [0;T]$; а стало быть, $\|x - \overline{x}\|_W \leqslant \|\beta\|_{\mathbf{C}[0;T]}$, где $\beta \in \mathbf{C}[0;T]$ есть любое* (*существующее для всех достаточно малых $\alpha \geqslant 0$*) *решение уравнения*

$$\beta(t) = \alpha + R\left(\int\limits_0^t \Big|\mathcal{N}\big(s,\beta(s)\big)\,\beta(s)\Big|\,ds\right), \quad t \in [0;T].$$

Отметим, что в силу установленных выше свойств оператора F, на самом деле решение $x[u] \in W_0$.

§ 3. Сильно нелинейное параболическое уравнение

Пусть $T > 0$, $p \geqslant 2$ — заданные числа, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область переменных $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $Q = \Omega \times (0;T)$, $V = W_0^{1,p}(\Omega)$, $V' = W^{-1,p'}(\Omega)$ — сопряженное пространство к $W^{1,p}(\Omega)$, $H = L_2(\Omega)$, $Z = L_{p'}(0,T;V')$,

$$W_0 = \big\{x \in L_p(0,T;V) \colon x' \in L_{p'}(0,T;V')\big\},$$

$x_0 \in H$, $z \in Z$.

Как указано в [20, глава 2, § 1.1, замечание 1.2, с. 167], V — рефлексивное банахово пространство, содержащееся в гильбертовом пространстве H, причем вложение $V \subset H$ непрерывно и V плотно в H, и более того, $H \subset V'$, $W_0 \subset W = \mathbf{C}(0,T;H)$.

Следуя [20, глава 2, § 1.1, замечание 1.1], определим оператор $A \colon W^{1,p}(\Omega) \to W^{-1,p}(\Omega)$ формулой:

$$A(\varphi) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \xi_i}\left(\left|\frac{\partial \varphi}{\partial \xi_i}\right|^{p-2} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_i}\right).$$

Как указано в [20, глава 2, (1.10), с. 168], оператор A является монотонным на V:

$$(Ax - Ay, x - y) \geqslant 0 \quad \forall\, x, y \in V.$$

Более того, он обладает свойством коэрцитивности [20, глава 2, (1.16), с. 169]:

$$(Ax, x) \geqslant \sigma\, \|x\|_V^p, \quad \sigma > 0.$$

Следуя [20, глава 2, § 1.1], рассмотрим задачу в цилиндре Q:

$$\frac{\partial x}{\partial t} + A[x] = z, \tag{3.11}$$

$$x(0) = x_0, \quad x\big|_{\partial\Omega \times (0;T)} = 0. \tag{3.12}$$

Производные здесь понимаются в смысле распределений. Далее элемент $x_0 \in H$ будем считать фиксированным. Справедливо следующее утверждение [20, глава 2, § 1.1, теорема 1.1, замечание 1.1].

Лемма 7. *Для любого $z \in Z$ задача* (3.11), (3.12) *имеет единственное решение $x = x[z] \in W_0$.*

Замечание 3. Как видно из [20, глава 2, § 1.3, с. 173] единственность решения на самом деле устанавливается по норме пространства W, а уже из этого следует единственность и в более узком пространстве W_0. Обозначим $x = \mathcal{F}[z]$ — решение задачи (3.11), (3.12), отвечающее функции $z \in Z$. В силу указанных выше обстоятельств, определен однозначный оператор $\mathcal{F}\colon Z \to W_0$, который можно рассматривать также и как оператор $\mathcal{F}\colon Z \to W$, поскольку $W_0 \subset W$.

Далее будем считать, что задан управляемый вольтерров оператор

$$f[u]\colon W \to L_2(0,T;H) = L_2(Q) \subset Z.$$

Тогда задача (3.12) для управляемого уравнения

$$\frac{\partial x}{\partial t} + A(x) = f[u](x),$$

переписывается в виде операторного уравнения

$$x = F[x;u], \quad x \in W, \tag{3.13}$$

при $F[x;u] = \mathcal{F}f[u](x)$. Далее мы будем предполагать, что управлению $u = \overline{u} \in U$ отвечает решение $x = \overline{x} \in W$ уравнения (3.13).

Вольтерровость оператора $\mathcal{F}$ доказывается аналогично [6, леммы 6–8]. Далее мы получим необходимые нам оценки оператора $\mathcal{F}$.

Лемма 8. *Для всех $z_i \in L_2(Q)$, $x_i = \mathcal{F}[z_i]$, $i = 1,2$, $t \in [0;T]$ имеем:*

$$\|x_1 - x_2\|_{\mathbf{C}(0,t;H)} \leqslant 2\int_0^t \bigl|z_1(s) - z_2(s)\bigr|\,ds.$$

Доказательство. Положим $w = x_1 - x_2$. Аналогично доказательству [20, глава 2, § 1.3, с. 173] получаем:

$$(w',w) + (Ax_1 - Ax_2, x_1 - x_2) = (z_1 - z_2, w).$$

И в силу монотонности оператора A,

$$G(t) = (w',w) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\bigl|w(t)\bigr|^2 \leqslant \int_\Omega \bigl(z_1(t) - z_2(t)\bigr)\,w(t)\,d\xi.$$

Положим $\Phi(t) = \bigl|w(t)\bigr|^2$. Таким образом, $\Phi(0) = 0$,

$$G(t) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Phi(t) \leqslant \int_\Omega \bigl(z_1(t) - z_2(t)\bigr)\,w(t)\,d\xi \leqslant \bigl|z_1(t) - z_2(t)\bigr|\,\bigl|w(t)\bigr|,$$

согласно неравенству Гёльдера. Ясно, что функция $\Phi(t)$ является решением задачи Коши

$$\Phi'(t) = 2G(t), \quad \Phi(0) = 0,$$

откуда получаем:

$$\Phi(t) = 2\int_0^t G(s)\,ds \leqslant 2\int_0^t \max\bigl\{0, G(s)\bigr\}\,ds \leqslant 2\int_0^t \bigl|z_1(s) - z_2(s)\bigr|\,\bigl|w(s)\bigr|\,ds.$$

Таким образом,

$$\big|w(t)\big|^2 \leqslant 2\|w\|_{\mathbf{C}(0,t;H)} \int\limits_0^t \big|z_1(s) - z_2(s)\big|\, ds.$$

Следовательно,

$$\|w\|^2_{\mathbf{C}(0,t;H)} \leqslant 2\|w\|_{\mathbf{C}(0,t;H)} \int\limits_0^t \big|z_1(s) - z_2(s)\big|\, ds. \qquad \square$$

Непосредственно из леммы 8 получаем:

$$\big\|\mathcal{F}[z_1] - \mathcal{F}[z_2]\big\|_{W[0;t]} \leqslant 2 \int\limits_0^t \big|z_1(s) - z_2(s)\big|\, ds. \tag{3.14}$$

Далее будем предполагать, что оператор $f[u]$ является оператором Немыцкого:

$$(f[u]x)(\xi, t) = f[u]\big(\xi, t, x(\xi, t)\big)$$

и удовлетворяет неравенству:

$$\big|f[u]\big(., t, x_1(., t)\big) - f[u]\big(., t, x_2(., t)\big)\big| \leqslant \frac{1}{2}\mathcal{N}_0\Big(t, \max\big\{\|x_1\|_{W[0;t]}, \|x_2\|_{W[0;t]}\big\}\Big)\|x_1 - x_2\|_{W[0;t]},$$

с функцией $\mathcal{N}_0(t, s)$, удовлетворяющей условию $\mathbf{N}_1$) и неубывающей по $s \geqslant 0$, при п. в. $t \in [0; T]$ и всех $x_i \in W$, $i = 1, 2$.

Тогда для всех $x_i \in W$, $\|x_i\|_{W[0;t]} \leqslant \gamma(t)$, $i = 1, 2$, с учетом (3.14), получаем:

$$\big\|F[x_1; u] - F[x_2; u]\big\|_{W[0;t]} \leqslant \int\limits_0^t \chi_h(s)\,\mathcal{N}_1[\gamma](s)\|x_1 - x_2\|_{W[0;s]}\, ds \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^t \chi_h(s)\,\mathcal{N}_1[\gamma](s)\, ds\|x_1 - x_2\|_{W[0;t]},$$

где $\mathcal{N}_1[\gamma](s) = \mathcal{N}_0\big(s, \gamma(s)\big)$, $h = h[x_1, x_2]$ — это отрезок $[0; t]$, за вычетом (с точностью до множества нулевой меры) максимального подотрезка $[0; s] \subset [0; t]$, на котором x_1 и x_2 совпадают.

Далее, дословно повторяя соответствующие рассуждения из § 1, получаем, что выполняются условия $\mathbf{F}_1$), $\mathbf{F}_4$), $\mathbf{F}_5$) при $\mathcal{N}(t, s) = \mathcal{N}_0\big(t, \|\overline{x}\|_W + s\big)$, $R(s) = s$. А следовательно, справедлива

Теорема 4. *Пусть управлению $u = \overline{u} \in U$ отвечает решение $x = \overline{x}$ уравнения* (3.13). *Тогда для всех $u \in U$ при достаточно малом $\alpha \equiv \big\|F[\overline{x}; u] - F[\overline{x}; \overline{u}]\big\|_W$ уравнение* (3.13) *имеет единственное решение $x = x[u] \in W$, и справедлива оценка: $\|x - \overline{x}\|_{W[0;t]} \leqslant \beta(t)$ при $t \in [0; T]$; а стало быть, $\|x - \overline{x}\|_W \leqslant \|\beta\|_{\mathbf{C}[0;T]}$, где $\beta \in \mathbf{C}[0; T]$ есть любое* (*существующее для всех достаточно малых $\alpha \geqslant 0$*) *решение уравнения*

$$\beta(t) = \alpha + R\left(\int\limits_0^t \Big|\mathcal{N}\big(s, \beta(s)\big)\,\beta(s)\Big|\, ds\right), \quad t \in [0; T].$$

Отметим, что в силу установленных выше свойств оператора F, на самом деле решение $x[u] \in W_0$.

§ 4. Нелинейное уравнение теплопроводности

Рассмотрим ситуацию, описанную в § 3, в предположении, что $p = 2$. В этом случае вспомогательное уравнение (3.11) является линейным — классическим уравнением теплопроводности. Случай $p = 2$ заслуживает отдельного рассмотрения, поскольку на этот раз оператор A оказывается линейным сильно монотонным:

$$(Ax_1 - Ax_2, x_1 - x_2) = \big(A(x_1 - x_2), x_1 - x_2\big) \geqslant \sigma \, \|x_1 - x_2\|_V^p, \quad \sigma > 0.$$

Указанное обстоятельство позволяет усилить лемму 8 и за счет этого ослабить требования к оператору $f[u]$. А именно, справедливо следующее утверждение.

Лемма 9. *Пусть $p = 2$. Тогда для всех $z_i \in Z = Z[0,T] = L_{p'}(0,T;V')$, $x_i = \mathcal{F}[z_i]$, $i = 1,2$, $t \in [0;T]$ имеем:*

$$\|x_1 - x_2\|_{\mathbf{C}(0,t;H)} \leqslant \sqrt{\frac{2}{\sigma}} \|z_1 - z_2\|_{Z[0,t]}, \quad \|x_1 - x_2\|_{W_1[0,t]} \leqslant \frac{1}{\sigma} \, \|z_1 - z_2\|_{Z[0,t]},$$

где $W_1 = W_1[0,T] = L_p(0,T;V)$.

Доказательство. Положим $w = x_1 - x_2$. Аналогично доказательству [20, глава 2, § 1.3, с. 173] получаем:

$$(w', w) + (Ax_1 - Ax_2, x_1 - x_2) = (z_1 - z_2, w).$$

И в силу сильной монотонности оператора A,

$$(w', w) + \sigma \big\|w(t)\big\|_V^2 \leqslant \int\limits_\Omega \big(z_1(t) - z_2(t)\big) w(t) \, d\xi \leqslant \big\|z_1(t) - z_2(t)\big\|_{V'} \big\|w(t)\big\|_V.$$

Положим

$$G(t) = (w', w) + \sigma \big\|w(t)\big\|_V^2 = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \Phi(t), \quad \Phi(t) = \big|w(t)\big|^2 + 2\sigma \int\limits_0^t \big\|w(s)\big\|_V^2 \, ds.$$

Очевидно, что $\Phi(t)$ является решением задачи Коши

$$\Phi'(t) = 2G(t), \quad \Phi(0) = 0.$$

Отсюда получаем:

$$\Phi(t) = 2 \int\limits_0^t G(s) \, ds \leqslant 2 \int\limits_0^t \max\big\{0, G(s)\big\} \, ds \leqslant 2 \int\limits_0^t \big\|z_1(s) - z_2(s)\big\|_{V'} \, \big\|w(s)\big\|_V \, ds.$$

Таким образом, по неравенству Гёльдера

$$\big|w(t)\big|^2 + 2\sigma \, \|w\|_{W_1[0,t]}^2 \leqslant 2 \, \|z_1 - z_2\|_{Z[0;t]} \|w\|_{W_1[0,t]}.$$

В частности,

$$\|w\|_{W_1[0,t]} \leqslant \frac{1}{\sigma} \, \|z_1 - z_2\|_{Z[0;t]}.$$

Следовательно,

$$\big|w(t)\big| \leqslant \sqrt{\frac{2}{\sigma}} \, \|z_1 - z_2\|_{Z[0;t]}.$$

□

Далее в качестве рабочего пространства выберем $W = L_p(0,T;V) \cap \mathbf{C}(0,T;H)$. Напомним [21, глава 1, § 5, замечание 5.12, с. 22], что если банаховы пространства X, Y непрерывно вложены в некоторое локально выпуклое пространство, то их пересечение $X \cap Y$ становится банаховым пространством, если ввести норму:

$$\|x\|_{X\cap Y} = \|x\|_X + \|x\|_Y.$$

И как известно [21, глава 1, § 5, замечание 5.2, с. 17], всякое линейное нормированное пространство, и в частности, $L_p(0,T;H)$, является локально выпуклым (топологическим) пространством. Таким образом,

$$\|x\|_W = \|x\|_{W_1} + \|x\|_{\mathbf{C}(0,T;H)}.$$

Теперь непосредственно из леммы 9 получаем:

$$\big\|\mathcal{F}[z_1] - \mathcal{F}[z_2]\big\|_{W[0;t]} \leqslant \sigma_1 \|z_1 - z_2\|_{Z[0,t]} = R\left(\int\limits_0^t \big\|z_1(s) - z_2(s)\big\|_{V'}^2\, ds\right), \tag{4.15}$$

где $R(s) = \sigma_1\sqrt{s}$, $\sigma_1 = \dfrac{1}{\sigma} + \sqrt{\dfrac{2}{\sigma}}$.

Далее будем предполагать, что оператор $f[u]\colon W \to Z$ является оператором Немыцкого:

$$(f[u]x)(\xi,t) = f[u]\big(\xi,t,x(\xi,t)\big)$$

и удовлетворяет неравенству:

$$\big\|f[u]\big(.,t,x_1(.,t)\big) - f[u]\big(.,t,x_2(.,t)\big)\big\|_{V'} \leqslant \mathcal{N}_0\Big(t, \max\big\{\|x_1\|_{W[0;t]}, \|x_2\|_{W[0;t]}\big\}\Big)\|x_1 - x_2\|_{W[0;t]},$$

с функцией $\mathcal{N}_0(t,s)$, удовлетворяющей условию $\mathbf{N}_1$) и неубывающей по $s \geqslant 0$, при п. в. $t \in [0;T]$ и всех $x_i \in W$, $i = 1,2$.

Тогда для всех $x_i \in W$, $\|x_i\|_{W[0;t]} \leqslant \gamma(t)$, $i = 1,2$, с учетом (4.15), получаем:

$$\big\|F[x_1;u] - F[x_2;u]\big\|_{W[0;t]} \leqslant R\left(\int\limits_0^t \chi_h(s)\mathcal{N}_1[\gamma](s)\|x_1 - x_2\|_{W[0;s]}^2\, ds\right) \leqslant$$
$$\leqslant R\left(\int\limits_0^t \chi_h(s)\mathcal{N}_1[\gamma](s)\, ds\right) \|x_1 - x_2\|_{W[0;t]},$$

где $\mathcal{N}_1[\gamma](s) = \mathcal{N}_0^2\big(s,\gamma(s)\big)$, $h = h[x_1,x_2]$ — это отрезок $[0;t]$, за вычетом (с точностью до множества нулевой меры) максимального подотрезка $[0;s] \subset [0;t]$, на котором x_1 и x_2 совпадают.

Далее, почти дословно повторяя соответствующие рассуждения из § 1, получаем, что выполняются условия $\mathbf{F}_1$), $\mathbf{F}_4$), $\mathbf{F}_5$) при $\mathcal{N}(t,s) = \mathcal{N}_0^2\big(t,\|\overline{x}\|_W + s\big)s$, $R(s) = \sigma_1\sqrt{s}$, $K(s) = R(s)$. Чтобы воспользоваться [1, теоремы 4,5], нужно еще обеспечить выполнение условия

S) Мажорантное функционально-интегральное уравнение

$$\beta(t) = \alpha + R\left(\int\limits_0^t \Big|\mathcal{N}\big(s,\beta(s)\big)\,\beta(s)\Big|\, ds\right), \quad t \in [0;T],$$

разрешимо для всех достаточно малых $\alpha > 0$.

В нашем случае речь идет об уравнении (здесь $\omega = \|\overline{x}\|_W$):

$$(\beta(t)-\alpha)^2 = \sigma_1^2 \int\limits_0^t \mathcal{N}_0^2\big(s,\omega+\beta(s)\big)\,\beta^2(s)\,ds, \quad t\in[0;T]. \tag{4.16}$$

Таким образом, справедлива

Теорема 5. *Пусть управлению $u=\overline{u}\in U$ отвечает решение $x=\overline{x}$ уравнения (3.13), $p=2$, и выполнено условие* $\mathbf{S}$). *Тогда для всех $u\in U$ при достаточно малом*

$$\alpha \equiv \big\|F[\overline{x};u]-F[\overline{x};\overline{u}]\big\|_W$$

уравнение (3.13) *имеет единственное решение $x=x[u]\in W$, и справедлива оценка:*

$$\|x-\overline{x}\|_{W[0;t]} \leqslant \beta(t) \ \ \textit{при} \ \ t\in[0;T];$$

а стало быть,

$$\|x-\overline{x}\|_W \leqslant \|\beta\|_{\mathbf{C}[0;T]},$$

где $\beta\in\mathbf{C}[0;T]$ есть любое решение уравнения (4.16).

Отметим, что в силу установленных ранее свойств оператора F, на самом деле решение $x[u]\in W_0$.

Касательно мажорантного уравнения отметим следующее. На этот раз функция $R(s)$ не обладает подлинейным порядком роста. Однако в [1, замечание 1] указано, что для выполнения условия $\mathbf{S}$) достаточно следующей оценки:

$$\inf_{r>0}\frac{1}{r}\int\limits_0^T \mathcal{N}\big(t,\alpha+R(r)\big)\,\big(\alpha+R(r)\big)\,dt<1. \tag{4.17}$$

Иначе говоря,

$$\inf_{r>0}\Psi(r,\alpha)<1, \quad \Psi(r,\alpha)=\frac{\sigma_1^2}{r}\int\limits_0^T \mathcal{N}_0^2\big(t,\|\overline{x}\|_W+\alpha+\sigma_1\sqrt{r}\big)\,\big(\alpha+\sigma_1\sqrt{r}\big)^2\,dt. \tag{4.18}$$

Предположим, что при некотором $r>0$ выполняется оценка:

$$\sigma_1^2\int\limits_0^T \mathcal{N}_0^2\big(t,\|\overline{x}\|_W+\sigma_1\sqrt{r}\big)\,dt<1, \tag{4.19}$$

то есть $\Psi(r,0)<1$. Тогда, за счет непрерывности $\Psi(r,\alpha)$ по α, оценка (4.18) тоже будет выполнена для всех достаточно малых $\alpha\geqslant 0$. В свою очередь, для выполнения условия (4.19) достаточно, чтобы

$$\sigma_1^2\int\limits_0^T \mathcal{N}_0^2\big(t,\|\overline{x}\|_W\big)\,dt<1. \tag{4.20}$$

Выполнение условия (4.20) можно обеспечивать различными способами. В частности, достаточно, чтобы $T>0$ было достаточно мало. Либо достаточно, чтобы $\overline{x}=0$, $\mathcal{N}_0(t,0)=0$. Либо, наконец, достаточно, чтобы $\sigma_1>0$ было достаточно мало.

Вместе с тем, детальный анализ непосредственно уравнения (4.16), особенно при конкретном выборе функции $\mathcal{N}_0$ или ее мажоранты, позволяет существенно ослабить требования, обеспечивающие выполнение условия **S**). Прежде всего, заметим, что с помощью замены $q(t) = \big(\beta(t) - \alpha\big)^2$, уравнение (4.16) преобразуется к виду:

$$q(t) = \int\limits_0^t \sigma_1^2 \mathcal{N}_0^2\big(s, \omega + \alpha + \sqrt{q(s)}\big)\big(\alpha + \sqrt{q(s)}\big)^2\, ds, \tag{4.21}$$

Предположим, например, что функция $\mathcal{N}_0$ равномерно ограничена сверху:

$$\sigma_1^2 \mathcal{N}_0^2(t,s) \leqslant \kappa, \quad t \in [0;T], \quad s \geqslant 0.$$

Тогда функцию $\sigma_1^2 \mathcal{N}_0^2(t,s)$ можно заменить на константу κ и вместо уравнения (4.21) получаем:

$$q(t) = \int\limits_0^t \kappa\,\big(\alpha + \sqrt{q(s)}\big)^2\, ds, \tag{4.22}$$

или

$$q' = \kappa\,(\alpha + \sqrt{q})^2, \quad q(0) = 0.$$

После замены $z = \sqrt{q}$ имеем:

$$\frac{z}{(z+\alpha)^2}\, dz = \frac{\kappa}{2}\, dt,$$
$$\left(\frac{1}{z+\alpha} - \frac{\alpha}{(z+\alpha)^2}\right) dz = \frac{\kappa}{2}\, dt,$$

и считая, что $z \geqslant 0$, находим:

$$\ln(z+\alpha) + \frac{\alpha}{z+\alpha} = \frac{\kappa t}{2} + C.$$

Из условия $z(0) = 0$ получаем:

$$C = \ln\alpha + 1.$$

Таким образом, получаем решение задачи Коши в неявном виде:

$$\psi[\alpha](z) = \frac{\kappa t}{2}, \quad \psi[\alpha](z) = \ln\left(\frac{z}{\alpha} + 1\right) - \frac{z}{z+\alpha}.$$

Пусть $t > 0$. Заметим, что

$$\psi[\alpha]'(z) = \frac{z}{(z+\alpha)^2} > 0 \quad \forall\, z > 0.$$

И при этом $\psi[\alpha](0) = 0 < \dfrac{\kappa t}{2}$, $\psi[\alpha](+\infty) = +\infty > \dfrac{\kappa t}{2}$. Таким образом, по теореме о промежуточном значении непрерывной функции, существует единственное решение:

$$z = z_\alpha(t) = \psi[\alpha]^{-1}\left(\frac{\kappa t}{2}\right), \quad t > 0.$$

Тем самым, мажорантное уравнение (4.22) имеет единственное решение.

Заметим, что равномерную ограниченность функции $\mathcal{N}_0(t,s)$ необязательно требовать для всех $s \geqslant 0$. Достаточно потребовать выполнение этого условия, скажем, для всех $s \in [0;\omega+2]$. Попадание решения $z_\alpha(t)$ в соответствующий отрезок $[0;1]$ можно обеспечить за счет достаточной малости $\alpha \in (0;1]$. Действительно, при произвольно фиксированном $z>0$ производная

$$\frac{d}{d\alpha}\,\psi[\alpha](z) = -\frac{z}{\alpha(z+\alpha)} + \frac{z}{(z+\alpha)^2} = \frac{-z^2}{\alpha(z+\alpha)^2} < 0.$$

Таким образом, $\psi[\alpha_2](z) < \psi[\alpha_1](z)$ для всех $0<\alpha_1<\alpha_2$. Соответственно, $z_{\alpha_1}(t) < z_{\alpha_2}(t)$ для всех $0<\alpha_1<\alpha_2$, $t>0$. Ясно, что $z_\alpha(t)$ строго возрастает по $t>0$, поскольку $z'_\alpha(t)>0$. Интуитивно очевидно, что $z_\alpha(T) \to +0$ при $\alpha \to +0$. И коль скоро это так, то $z_\alpha(t) \in [0;1]$ для всех $t\in[0;T]$ и достаточно малых $\alpha \in (0;1]$.

Приведем строгое доказательство указанного интуитивно очевидного факта.

Лемма 10. *Пусть* $z_* = \inf\limits_{\alpha>0} z_\alpha(T)$. *Тогда* $z_*=0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим от противного, что $z_*>0$. В силу строгой монотонности $z_\alpha(T)$ по $\alpha>0$, найдется $\alpha_1>0$ такое, что

$$z_* \leqslant z_\alpha(T) = \psi[\alpha]^{-1}\left(\frac{\kappa T}{2}\right) < z_*+1 \quad \forall\,\alpha\in(0;\alpha_1).$$

И с учетом строгой монотонности $\psi[\alpha](z)$ по $z>0$, имеем:

$$\psi[\alpha](z_*) \leqslant \frac{\kappa T}{2} \leqslant \psi[\alpha](z_*+1) \quad \forall\,\alpha\in(0;\alpha_1).$$

Но это невозможно, так как $\psi[\alpha](z_*) \to +\infty$ при $\alpha\to+0$. Таким образом, наше предположение неверно. Следовательно, $z_*=0$. □

Лемма 11. *Функция* $z_\alpha(T)$ *непрерывна по* $\alpha>0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выберем произвольно последовательность $\alpha_n \to \alpha_0 > 0$ при $n\to\infty$. Положим

$$z^0 = z_{\alpha_0}(T) = \psi[\alpha_0]^{-1}\left(\frac{\kappa T}{2}\right).$$

Зафиксируем произвольно число $\varepsilon>0$. В силу строгой монотонности функции $\psi[\alpha_0](z)$ по $z>0$ выполняется неравенство:

$$\psi[\alpha_0](z^0-\varepsilon) < \psi[\alpha_0](z^0) < \psi[\alpha_0](z^0+\varepsilon).$$

Поскольку функции $\psi[\alpha](z^0-\varepsilon)$, $\psi[\alpha](z^0+\varepsilon)$ непрерывны по $\alpha>0$, то по теореме об устойчивости знака непрерывной функции, найдется число $n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ такое, что

$$\psi[\alpha_n](z^0-\varepsilon) < \psi[\alpha_0](z^0) = \frac{\kappa T}{2} < \psi[\alpha_n](z^0+\varepsilon) \quad \forall\,n\geqslant n_\varepsilon.$$

То же самое можно переписать в виде:

$$z^0-\varepsilon < \psi[\alpha_n]^{-1}\left(\frac{\kappa T}{2}\right) < z^0+\varepsilon \quad \forall\,n\geqslant n_\varepsilon.$$

Иначе говоря,

$$\left|z_{\alpha_n}(T) - z_{\alpha_0}(T)\right| < \varepsilon \quad \forall\,n\geqslant n_\varepsilon.$$

Это означает, что $z_{\alpha_n}(T) \to z_{\alpha_0}(T)$ при $n\to\infty$. □

Обозначим

$$\widetilde{\mathcal{N}}(t,r)=\begin{cases}\kappa, & r\in[0;\omega+2],\\ \sigma_1^2\mathcal{N}_0^2(t,r), & r>\omega+2,\end{cases}$$

где предполагается, что

$$\kappa=\sup_{t\in[0;T],\,r\in[0;\omega+2]}\sigma_1^2\mathcal{N}_0^2(t,r)<\infty.$$

Следующее уравнение является мажорантным для уравнения (4.21):

$$q(t)=\int\limits_0^t\widetilde{\mathcal{N}}\big(s,\omega+\alpha+\sqrt{q(s)}\big)\big(\alpha+\sqrt{q(s)}\big)^2\,ds, \tag{4.23}$$

Из проведенных рассуждений вытекает

Лемма 12. *Уравнение* (4.23) *имеет решение, принимающее значения в отрезке* $[0;1]$ (*единственное среди таких функций*), *для всех достаточно малых* $\alpha\in(0;1]$.

Теперь, пользуясь изотонностью правой части уравнения (4.21) и теоремой А. Тарского (см., например, [23, раздел 5]; в случае непрерывности функции $\mathcal{N}_0$ по совокупности переменных можно также использовать теорему Урысона о продолжении непрерывной функции и классическую теорему Уинтнера [24, § III.5, теорема 5.1, с. 43]), получаем, что оно разрешимо для всех достаточно малых $\alpha\in(0;1]$. Отсюда вытекает

Теорема 6. *Пусть функция* $\mathcal{N}_0(t,s)$ *ограничена на ограниченных множествах. Тогда условие* $\mathbf{S}$) *выполнено.*

Как видно из доказательства [1, теорема 8], условие (4.17) как раз и требовалось для того, чтобы обеспечить попадание решения мажорантного уравнения в заданный отрезок. Если подобное свойство обеспечено этим или каким-то иным способом, существование решения доказывается с помощью теоремы Шаудера.

Приведенный пример наглядно демонстрирует, что непосредственное исследование мажорантного уравнения может оказываться более эффективным, позволяя получать более сильные результаты при более слабых требованиях, нежели использование «готовых» общих, абстрактных результатов о разрешимости уравнений соответствующего класса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чернов А. В. Исследование условий сохранения глобальной разрешимости операторных уравнений с помощью систем сравнения в виде функционально-интегральных уравнений в классе $\mathbf{C}[0;T]$ // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2024. Т. 34. Вып. 1. С. 109–136. https://doi.org/10.35634/vm240108
2. Чернов А. В. О сохранении глобальной разрешимости управляемого операторного уравнения второго рода // Уфимский математический журнал. 2020. Т. 12. № 1. С. 56–82. https://www.mathnet.ru/rus/ufa503
3. Sumin V. I. Volterra functional-operator equations in the theory of optimal control of distributed systems // IFAC-PapersOnLine. 2018. Vol. 51. Issue 32. P. 759–764. https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2018.11.454
4. Чернов А. В. О сохранении разрешимости полулинейного уравнения глобальной электрической цепи // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2018. Т. 58. № 12. С. 2095–2111. https://doi.org/10.31857/S004446690003555-1

5. Сумин В. И. Управляемые вольтерровы функциональные уравнения и принцип сжимающих отображений // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2019. Т. 25. № 1. С. 262–278. https://doi.org/10.21538/0134-4889-2019-25-1-262-278
6. Чернов А. В. О тотально глобальной разрешимости эволюционного вольтеррова уравнения второго рода // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2022. Т. 32. Вып. 4. С. 593–614. https://doi.org/10.35634/vm220407
7. Agarwal R. P., O'Regan D., Wong P. J. Y. Constant-sign solutions of systems of integral equations. Cham: Springer, 2013. https://doi.org/10.1007/978-3-319-01255-1
8. Yang Zhilin. Positive solutions for a system of nonlinear Hammerstein integral equations and applications // Applied Mathematics and Computation. 2012. Vol. 218. Issue 22. P. 11138–11150. https://doi.org/10.1016/j.amc.2012.05.006
9. Bugajewska D., Bugajewski D., Hudzik H. BV_ϕ-solutions of nonlinear integral equations // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2003. Vol. 287. Issue 1. P. 265–278. https://doi.org/10.1016/S0022-247X(03)00550-X
10. Hernández-Verón M. A., Yadav N., Martínez E., Singh S. Kurchatov-type methods for non-differentiable Hammerstein-type integral equations // Numerical Algorithms. 2023. Vol. 93. Issue 1. P. 131–155. https://doi.org/10.1007/s11075-022-01406-8
11. Moroz V., Zabrejko P. On Hammerstein equations with natural growth conditions // Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen. 1999. Vol. 18. No. 3. P. 625–638. https://doi.org/10.4171/ZAA/902
12. Cabada A., Infante G., Fernández Tojo F. A. Nontrivial solutions of Hammerstein integral equations with reflections // Boundary Value Problems. 2013. Issue 1. Article number: 86. https://doi.org/10.1186/1687-2770-2013-86
13. López-Somoza L., Minhós F. Existence and multiplicity results for some generalized Hammerstein equations with a parameter // Advances in Difference Equations. 2019. Vol. 2019. Issue 1. Article number: 423. https://doi.org/10.1186/s13662-019-2359-y
14. Graef J., Kong Lingju, Minhós F. Generalized Hammerstein equations and applications // Results in Mathematics. 2017. Vol. 72. Issues 1–2. P. 369–383. https://doi.org/10.1007/s00025-016-0615-y
15. Aziz W., Leiva H., Merentes N. Solutions of Hammerstein equations in the space $BV(I_a^b)$ // Quaestiones Mathematicae. 2014. Vol. 37. Issue 3. P. 359–370. https://doi.org/10.2989/16073606.2014.894675
16. Bugajewski D. On BV-solutions of some nonlinear integral equations // Integral Equations and Operator Theory. 2003. Vol. 46. Issue 4. P. 387–398. https://doi.org/10.1007/s00020-001-1146-8
17. Bugajewska D., O'Regan D. On nonlinear integral equations and Λ-bounded variation // Acta Mathematica Hungarica. 2005. Vol. 107. Issue 4. P. 295–306. https://doi.org/10.1007/s10474-005-0197-8
18. Pachpatte B. G. On a generalized Hammerstein-type integral equation // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 1985. Vol. 106. Issue 1. P. 85–90. https://doi.org/10.1016/0022-247X(85)90132-5
19. Polyanin A. D., Manzhirov A. V. Handbook of integral equations. New York: Chapman and Hall/CRC, 2008. https://doi.org/10.1201/9781420010558
20. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972.
21. Гаевский Х., Грёгер К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1978.
22. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988.
23. Чернов А. В. О равновесии по Штакельбергу в программных стратегиях в вольтерровых функционально-операторных играх // Математическая теория игр и её приложения. 2022. Т. 14. Вып. 2. С. 99–122. https://doi.org/10.17076/mgta_2022_2_53
24. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.

Поступила в редакцию 05.09.2024
Принята к публикации 14.10.2024

Чернов Андрей Владимирович, к. ф.-м. н., доцент, Нижегородский государственный университет, 603950, Россия, г. Нижний Новгород, пр-т Гагарина, 23.
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-1464-8249
E-mail: chavnn@mail.ru

Цитирование: А. В. Чернов. О сохранении глобальной разрешимости и оценке решений некоторых управляемых нелинейных уравнений в частных производных второго порядка // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2024. Т. 34. Вып. 4. С. 541–562.

A. V. Chernov

Preservation of global solvability and estimation of solutions of some controlled nonlinear partial differential equations of the second order

Keywords: second kind evolutionary Volterra equation of general form, functional integral equation, comparison system, preservation of global solvability, uniqueness of solution, nonlinear wave equation, nonlinear parabolic equation.

MSC2020: 47J05, 47J35, 47N10

DOI: 10.35634/vm240405

Let U be the set of admissible controls, $T>0$, and let $W[0;\tau]$, $\tau\in(0;T]$, be a scale of Banach spaces such that the set of restrictions of functions from $W=W[0;T]$ to $[0;\tau]$ coincides with $W[0;\tau]$; let $F[.;u]\colon W\to W$ be a controlled Volterra operator, $u\in U$. Earlier, for the operator equation $x=F[x;u]$, $x\in W$, the author introduced a comparison system in the form of a functional integral equation in the space $\mathbf{C}[0;T]$. It was established that to preserve (under small perturbations of the right-hand side) the global solvability of the operator equation, it is sufficient to preserve the global solvability of the specified comparison system, and the corresponding sufficient conditions were established. In this paper, further examples of application of this theory are considered: nonlinear wave equation, strongly nonlinear wave equation, nonlinear heat equation, strongly nonlinear parabolic equation.

REFERENCES

1. Chernov A. V. Investigation of conditions for preserving global solvability of operator equations by means of comparison systems in the form of functional-integral equations in $\mathbf{C}[0;T]$, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2024, vol. 34, issue 1, pp. 109–136 (in Russian). https://doi.org/10.35634/vm240108
2. Chernov A. V. On preservation of global solvability of controlled second kind operator equation, *Ufa Mathematical Journal*, 2020, vol. 12, no. 1, pp. 56–81. https://doi.org/10.13108/2020-12-1-56
3. Sumin V. I. Volterra functional-operator equations in the theory of optimal control of distributed systems, *IFAC-PapersOnLine*, 2018, vol. 51, issue 32, pp. 759–764. https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2018.11.454
4. Chernov A. V. Preservation of the solvability of a semilinear global electric circuit equation, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2018, vol. 58, no. 12, pp. 2018–2030. https://doi.org/10.1134/S0965542518120096
5. Sumin V. I. Controlled Volterra functional equations and the contraction mapping principle, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2019, vol. 25, no. 1, pp. 262–278 (in Russian). https://doi.org/10.21538/0134-4889-2019-25-1-262-278
6. Chernov A. V. On totally global solvability of evolutionary Volterra equation of the second kind, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2022, vol. 32, issue 4, pp. 593–614 (in Russian). https://doi.org/10.35634/vm220407
7. Agarwal R. P., O'Regan D., Wong P. J. Y. *Constant-sign solutions of systems of integral equations*, Cham: Springer, 2013. https://doi.org/10.1007/978-3-319-01255-1
8. Yang Zhilin. Positive solutions for a system of nonlinear Hammerstein integral equations and applications, *Applied Mathematics and Computation*, 2012, vol. 218, issue 22, pp. 11138–11150. https://doi.org/10.1016/j.amc.2012.05.006
9. Bugajewska D., Bugajewski D., Hudzik H. BV_ϕ-solutions of nonlinear integral equations, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2003, vol. 287, issue 1, pp. 265–278. https://doi.org/10.1016/S0022-247X(03)00550-X
10. Hernández-Verón M. A., Yadav N., Martínez E., Singh S. Kurchatov-type methods for non-differentiable Hammerstein-type integral equations, *Numerical Algorithms*, 2023, vol. 93, issue 1, pp. 131–155. https://doi.org/10.1007/s11075-022-01406-8

11. Moroz V., Zabrejko P. On Hammerstein equations with natural growth conditions, *Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen*, 1999, vol. 18, no. 3, pp. 625–638. https://doi.org/10.4171/ZAA/902
12. Cabada A., Infante G., Fernández Tojo F. A. Nontrivial solutions of Hammerstein integral equations with reflections, *Boundary Value Problems*, 2013, issue 1, article number: 86. https://doi.org/10.1186/1687-2770-2013-86
13. López-Somoza L., Minhós F. Existence and multiplicity results for some generalized Hammerstein equations with a parameter, *Advances in Difference Equations*, 2019, vol. 2019, issue 1, article number: 423. https://doi.org/10.1186/s13662-019-2359-y
14. Graef J., Kong Lingju, Minhós F. Generalized Hammerstein equations and applications, *Results in Mathematics*, 2017, vol. 72, issues 1–2, pp. 369–383. https://doi.org/10.1007/s00025-016-0615-y
15. Aziz W., Leiva H., Merentes N. Solutions of Hammerstein equations in the space $BV(I_a^b)$, *Quaestiones Mathematicae*, 2014, vol. 37, issue 3, pp. 359–370. https://doi.org/10.2989/16073606.2014.894675
16. Bugajewski D. On BV-solutions of some nonlinear integral equations, *Integral Equations and Operator Theory*, 2003, vol. 46, issue 4, pp. 387–398. https://doi.org/10.1007/s00020-001-1146-8
17. Bugajewska D., O'Regan D. On nonlinear integral equations and Λ-bounded variation, *Acta Mathematica Hungarica*, 2005, vol. 107, issue 4, pp. 295–306. https://doi.org/10.1007/s10474-005-0197-8
18. Pachpatte B. G. On a generalized Hammerstein-type integral equation, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1985, vol. 106, issue 1, pp. 85–90. https://doi.org/10.1016/0022-247X(85)90132-5
19. Polyanin A. D., Manzhirov A. V. *Handbook of integral equations*, New York: Chapman and Hall/CRC, 2008. https://doi.org/10.1201/9781420010558
20. Lions J.-L. *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Paris: Dunod, 1969. https://zbmath.org/0189.40603
21. Gajewski H., Gröger K., Zacharias K. *Nichtlineare Operatorgleichungen und Operatordifferentialgleichungen* (Nonlinear operator equations and operator differential equations), Berlin: Akademie, 1974. https://zbmath.org/0289.47029
22. Sobolev S. L. *Some applications of functional analysis in mathematical physics*, Providence: American Mathematical Society, 1991. https://zbmath.org/0732.46001
23. Chernov A. V. On Stackelberg equilibrium in the sense of program strategies in Volterra functional operator games, *Automation and Remote Control*, 2022, vol. 83, no. 11, pp. 1843–1856. https://doi.org/10.1134/S00051179220110091
24. Hartman P. *Ordinary differential equations*, New York–London–Sydney: John Wiley and Sons, 1964. https://zbmath.org/0125.32102

Received 05.09.2024
Accepted 14.10.2024

Andrei Vladimirovich Chernov, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Nizhni Novgorod State University, pr. Gagarina, 23, Nizhny Novgorod, 603950, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-1464-8249
E-mail: chavnn@mail.ru

Citation: A. V. Chernov. Preservation of global solvability and estimation of solutions of some controlled nonlinear partial differential equations of the second order, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2024, vol. 34, issue 4, pp. 541–562.