

УДК 531.36, 521.1

© *О. В. Холостова***О ДВИЖЕНИИ ДИНАМИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНОГО СПУТНИКА В ОДНОМ СЛУЧАЕ КРАТНОГО ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО РЕЗОНАНСА**

Исследуются движения динамически симметричного спутника (твердого тела) относительно центра масс в центральном ньютоновском гравитационном поле на слабоэллиптической орбите в окрестности его стационарного вращения (цилиндрической прецессии). Рассматриваются значения параметров, для которых в предельном случае круговой орбиты одна из частот малых линейных колебаний равна единице, а другая нулю, и ранг матрицы коэффициентов линеаризованных уравнений возмущенного движения равен двум, а также малая окрестность этой резонансной точки в трехмерном пространстве параметров. Построены резонансные периодические движения спутника, аналитические по дробным степеням малого параметра (эксцентриситета орбиты центра масс спутника), проведен строгий нелинейный анализ их устойчивости. Методами КАМ-теории описаны двух- и трехчастотные условно-периодические движения спутника, с частотами разного порядка по малому параметру. Обсуждается ряд общетеоретических вопросов, касающихся рассматриваемого кратного параметрического резонанса в близких к автономным, периодическим по времени гамильтоновым системам с двумя степенями свободы. Построено несколько качественно различных вариантов областей параметрического резонанса. Показано, что в общем случае характер нелинейных резонансных колебаний системы определяется системой первого приближения по малому параметру.

Ключевые слова: кратный параметрический резонанс, нормализация, нелинейные колебания, устойчивость, периодические движения, теория КАМ, спутник, цилиндрическая прецессия.

DOI: [10.35634/vm240408](https://doi.org/10.35634/vm240408)**Введение**

Рассматриваются движения 2π -периодической по времени гамильтоновой системы с двумя степенями свободы, описываемой гамильтонианом $H(q_j, p_j, t; \alpha, \beta, \varepsilon)$, где q_j, p_j ($j = 1, 2$) — канонически сопряженные координаты и импульсы, ε — малый параметр ($0 < \varepsilon \ll 1$), при нулевом значении которого система автономна, а α и β — параметры, меняющиеся в некотором диапазоне.

Пусть начало координат $q_j = p_j = 0$ ($j = 1, 2$) фазового пространства — положение равновесия системы, устойчивое в линейном приближении при $\varepsilon = 0$ в некоторой области в плоскости параметров α, β . Пусть, кроме того, в некоторой точке (α_*, β_*) , принадлежащей границе области, для частот малых линейных колебаний системы в окрестности этого равновесия имеем $\omega_1 = 1$ и $\omega_2 = 0$, то есть в системе реализуется кратный параметрический резонанс. Ставится задача об исследовании характера нелинейных резонансных колебаний рассматриваемой неавтономной ($\varepsilon \neq 0$) системы вблизи ее тривиального равновесия для значений параметров из малой окрестности резонансной точки $\varepsilon = 0$, $\alpha = \alpha_*$, $\beta = \beta_*$ трехмерного пространства параметров.

Существуют два качественно различных случая описанного кратного резонанса, для которых ранг матрицы A коэффициентов линеаризованных (при $\varepsilon = 0$) уравнений возмущенного движения равен трем или двум. Первый из этих случаев, чаще встречающийся в приложениях, рассмотрен в статье [1] в более общей постановке, когда одна из частот целая или полужелая, а другая равна нулю; решен вопрос о существовании, числе и устойчивости (в линейном приближении) резонансных периодических движений системы, аналитических по дробным или целым степеням малого параметра.

В данной работе рассмотрен случай $\text{rank } \mathbf{A} = 2$. Он существенно сложнее для исследования ввиду большого числа параметров (коэффициентов нормальной формы гамильтониана возмущенного движения). В конкретных задачах эти коэффициенты зависят только от параметров, характеризующих отклонение значений α и β от их резонансных значений, и исследование может быть проведено в достаточно полном объеме.

В первой части работы изучены нелинейные колебания при резонансе $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 0$ в случае $\text{rank } \mathbf{A} = 2$ динамически симметричного спутника (твердого тела) относительно центра масс в центральном ньютоновском гравитационном поле на слабоэллиптической орбите в окрестности его стационарного вращения (цилиндрической прецессии). Построены резонансные периодические движения спутника, аналитические по дробным степеням малого параметра (эксцентриситета орбиты центра масс спутника), проведен линейный и нелинейный анализ их устойчивости. Методами КАМ-теории описаны двух- и трехчастотные условно-периодические движения спутника, с частотами разных порядков по малому параметру. Во второй части обсуждаются некоторые общетеоретические вопросы, касающиеся исследуемого резонанса.

Стационарные вращения динамически симметричного спутника на круговой орбите подробно описаны в монографии [2]. В статье [3] показано существование цилиндрической прецессии спутника на эллиптической орбите. Устойчивость цилиндрической прецессии спутника на круговой и эллиптической орбитах изучалась в работах [4–12], а периодические движения в ее окрестности построены в работах [10, 13–15] и др.

В статье [16] впервые дана классификация случаев кратного параметрического резонанса в близких к автономным, 2π -периодических по времени линейных гамильтоновых системах с двумя степенями свободы и описана техника построения областей параметрического резонанса. В недавних статьях [1, 17, 18] и др. (более подробную библиографию см. в [18]) построена теория нелинейных колебаний близких к автономным, нелинейных гамильтоновых систем с двумя степенями свободы для различных случаев кратного параметрического резонанса.

§ 1. Постановка задачи. Преобразование гамильтониана

Рассмотрим движение динамически симметричного спутника (твердого тела) относительно центра масс в центральном ньютоновском гравитационном поле на слабоэллиптической орбите с эксцентриситетом e ($0 < e \ll 1$). Ориентацию главных центральных осей инерции спутника в орбитальной системе координат будем задавать углами Эйлера ψ, θ, ϕ . Пусть A и C — экваториальный и осевой моменты инерции спутника, ω_0 — среднее движение его центра масс по орбите, r_0 — проекция угловой скорости спутника в орбитальной системе координат на ось его динамической симметрии, являющаяся константой. Введем безразмерные параметры $\alpha = C/A$ ($0 < \alpha \leq 2$) и $\beta = r_0/\omega_0$ и примем истинную аномалию ν за независимую переменную.

Уравнения движения приведенной системы с двумя степенями свободы, описывающие движение оси симметрии спутника, могут быть записаны в гамильтоновой форме с гамильтонианом $H(\theta, \psi, p_\theta, p_\psi, \nu; \alpha, \beta, e)$, полученным в [12]. Эти уравнения допускают частное решение $\theta = \pi/2$, $\psi = \pi$, $p_\theta = 0$, $p_\psi = 0$, отвечающее стационарному вращению спутника с угловой скоростью r_0 вокруг оси его динамической симметрии, перпендикулярной плоскости орбиты (цилиндрической прецессии). Будем исследовать движения спутника в окрестности этого движения. Зададим возмущения по формулам $\theta = \pi/2 + q_1$, $\psi = \pi + q_2$, $p_\theta = p_1$, $p_\psi = p_2$ и запишем гамильтониан возмущенного движения в виде

$$H = H_2 + H_4 + \dots, \quad H_2 = \frac{1}{2}p_1^2 + (\alpha\beta - 1)p_2q_1 + \frac{1}{2}p_2^2 + \frac{1}{2}(\alpha^2\beta^2 - \alpha\beta + 3\alpha - 3)q_1^2 +$$

$$\begin{aligned}
& + p_1 q_2 + \frac{1}{2} \alpha \beta q_2^2 - e \left[2\alpha \beta p_2 q_1 - \left(\frac{3}{2}(\alpha - 1) - \alpha^2 \beta^2 \right) q_1^2 + p_1^2 + p_2^2 \right] \cos \nu + \\
& + \frac{3}{4} e^2 \left[\alpha \beta (1 - \alpha \beta (1 - \cos 2\nu)) q_1^2 - \alpha \beta q_2^2 + (1 + \cos 2\nu)(p_1^2 + p_2^2) + 2\alpha \beta \cos 2\nu p_2 q_1 \right] + O(e^3) \\
H_4 = & \left(-\frac{5}{24} \alpha \beta - \frac{1}{2} \alpha + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \alpha^2 \beta^2 \right) q_1^4 - \frac{1}{6} p_1 q_2^3 + \frac{1}{4} q_1^2 \alpha \beta q_2^2 + \left(\frac{5}{6} \alpha \beta - \frac{1}{3} \right) p_2 q_1^3 + \\
& + \frac{1}{2} p_2^2 q_1^2 + \frac{1}{2} p_2 q_1 q_2^2 - \frac{1}{24} \alpha \beta q_2^4 + e \left[-p_2^2 q_1^2 + \left(-\frac{2}{3} \alpha^2 \beta^2 - \frac{1}{2}(\alpha - 1) \right) q_1^4 - \frac{5}{3} \alpha \beta p_2 q_1^3 \right] \cos \nu + O(e^2).
\end{aligned}$$

В предельном случае $e = 0$ круговой орбиты центра масс спутника система автономна, а уравнение частот малых колебаний линеаризованных уравнений возмущенного движения для значений параметров $\alpha = 1$, $\beta = 1$ имеет решение $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 0$, для которого ранг матрицы коэффициентов линеаризованных уравнений равен 2. Указанная точка плоскости параметров α, β является точкой пересечения двух границ $\alpha\beta - 1 = 0$, $\alpha\beta + 3\alpha - 4 = 0$ областей устойчивости цилиндрической прецессии спутника на круговой орбите, на каждой из которых одна из частот обращается в нуль [2].

В автономном случае в точке $\alpha = \beta = 1$ имеем $H_2 = H_{20}$, $H_4 = H_{40}$, где

$$H_{20} = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + p_1 q_2 + \frac{1}{2} q_2^2, \quad H_{40} = \frac{1}{8} q_1^4 - \frac{1}{6} p_1 q_2^3 + \frac{1}{4} q_1^2 q_2^2 + \frac{1}{2} p_2 q_1^3 + \frac{1}{2} p_2^2 q_1^2 + \frac{1}{2} p_2 q_1 q_2^2 - \frac{1}{24} q_2^4.$$

Линейная унивалентная каноническая замена переменных вида [16] $q_1 = x_2 - X_1$, $q_2 = x_1 - X_2$, $p_1 = X_2$, $p_2 = X_1$ приводит квадратичную форму H_{20} к нормальной форме $H_2^{(0)} := (x_1^2 + X_1^2)/2$. Последующее близкое к тождественному каноническое преобразование, полученное методом Депри–Хори [19], приводит форму H_{40} к виду

$$H_4^{(0)} = \frac{1}{8}(x_2^2 + X_2^2)^2. \quad (1.1)$$

Нормализованный в точке точного резонанса гамильтониан $H_0 = H_2^{(0)} + H_4^{(0)} + \dots$ автономной системы при достаточно малых x_j, X_j ($j = 1, 2$) является положительно определенной функцией этих переменных, а так как H_0 — первый интеграл, то тривиальное равновесие системы устойчиво на основании теоремы Ляпунова об устойчивости. Ранее этот результат получен другим путем в работе [11].

Рассмотрим неавтономный случай. Будем исследовать движения системы в малой окрестности резонансной точки трехмерного пространства параметров, задаваемой соотношениями $\alpha = 1 + e\eta_1$, $\beta = 1 + e\mu_1 + e^2\mu_2 + \dots$, где ν_1, μ_1 и μ_2 — константы.

Проведем в полном неавтономном гамильтониане две описанные выше замены переменных и представим формы H_2 и H_4 в виде

$$H_2 = H_2^{(0)} + eH_2^{(1)} + e^2H_2^{(2)} + O(e^3), \quad H_4 = H_4^{(0)} + eH_4^{(1)} + O(e^2).$$

Выполним далее преобразование поворота $x_1 = y_1 \cos \nu + Y_1 \sin \nu$, $X_1 = -y_1 \sin \nu + Y_1 \cos \nu$ по первой паре переменных, оставляя неизменной вторую пару ($x_2 = y_2$, $X_2 = Y_2$). В результате этого преобразования форма $H_2^{(0)}$ уничтожается, а форма $H_4^{(0)}$ сохраняет свой вид с точностью до обозначений.

Проведем затем, вновь используя метод Депри–Хори, нормализацию преобразованной квадратичной части гамильтониана возмущенного движения в слагаемых порядка e и e^2 ,

а также формы четвертой степени в слагаемых порядка e . Опуская подробности и не приводя в силу громоздкости явный вид нормализующей замены, выпишем, оставляя прежние обозначения для переменных, полученные в результате преобразования формы второй и четвертой степеней:

$$K_2 = eK_{21} + e^2K_{22} + O(e^3), \quad K_4 = K_{40} + eK_{41} + O(e^2), \quad (1.2)$$

$$K_{21} = \frac{3}{4}\eta_1(y_1^2 + Y_1^2) + \frac{1}{2}(4\eta_1 + \mu_1)y_2^2 + \frac{1}{2}(\eta_1 + \mu_1)Y_2^2, \quad K_{22} = -\frac{3}{16}\eta_1(7\eta_1 + 4\mu_1)(y_1^2 + Y_1^2) - 3\eta_1Y_2y_1 - \frac{3}{2}\eta_1y_2Y_1 + \frac{1}{2}(\mu_2 - \mu_1^2 - \eta_1\mu_1 - \eta_1^2)Y_2^2 + \frac{1}{2}(\mu_2 + \mu_1^2 + 3\eta_1\mu_1 - 8\eta_1^2)y_2^2. \quad (1.3)$$

$$K_{41} = -\frac{3}{16}\eta_1(y_1^2 + Y_1^2)^2 - \frac{3}{8}\eta_1(5y_2^2 + 3Y_2^2)(y_1^2 + Y_1^2) + \frac{1}{24}(11\mu_1 - \eta_1)y_2^4 - \frac{1}{8}(\eta_1 + \mu_1)(2y_2^2 + 3Y_2^2)Y_2^2.$$

Здесь K_{40} — это форма (1.1), в которой сделана замена x_j, X_j на y_j, Y_j ($j = 1, 2$). Слагаемые $O(e^3)$ и $O(e^2)$ 2π -периодичны по ν .

§ 2. Области параметрического резонанса

Рассмотрим сначала линейную систему с гамильтонианом K_2 из (1.2), (1.3). Соответствующее ей характеристическое уравнение представляется в виде

$$\lambda^4 + a\lambda^2 + b = 0. \quad (2.1)$$

При выполнении условий $a > 0, b > 0, d = a^2 - 4b > 0$ корни уравнения чисто мнимые, и тривиальное равновесие линейной системы устойчиво. На границах областей устойчивости имеем $b = 0, a \geq 0$ (случай нулевой частоты) или $d = 0, a \geq 0$ (случай равных частот). При переходе через эти границы могут возникнуть области неустойчивости (области параметрического резонанса).

Главные части коэффициентов a, b и дискриминанта d таковы:

$$a' = \frac{e^2}{4}(2\mu_1 + 5\eta_1)^2, \quad b' = \frac{9e^4}{4}\eta_1^2(\mu_1 + \eta_1)(4\eta_1 + \mu_1), \quad d' = \frac{e^4}{16}(7\eta_1^2 + 20\eta_1\mu_1 + 4\mu_1^2)^2.$$

Отсюда следует, что при достаточно малых e при условии $b' < 0$ в системе имеется область параметрического резонанса, для которой

$$\min(-4\eta_1, -\eta_1) < \mu_1 < \max(-4\eta_1, -\eta_1).$$

Для граничных значений $\mu_1 = -\eta_1$ и $\mu_1 = -4\eta_1$ рассмотрим слагаемые порядка e^5 в выражении для коэффициента b и найдем уточненные уравнения границ области параметрического резонанса; получаем соответственно $\mu_2 = \eta_1^2$ и $\mu_2 = 4\eta_1^2$.

В случае $d' = 0$ имеем два бифуркационных значения

$$\mu_1 = \mu_1^\pm(\eta_1) = \frac{1}{2}(-5 \pm 3\sqrt{2})\eta_1. \quad (2.2)$$

Если $\mu_1 = \mu_1^+(\eta_1)$, то квадратичная форма K_{21} имеет вид

$$K_{21} = \frac{3}{4}\eta_1[y_1^2 + Y_1^2 + (\sqrt{2} - 1)Y_2^2 + (1 + \sqrt{2})y_2^2]$$

и является знакоопределенной, ее знак совпадает со знаком η_1 . В этом случае тривиальное равновесие системы устойчиво, и область параметрического резонанса отсутствует.

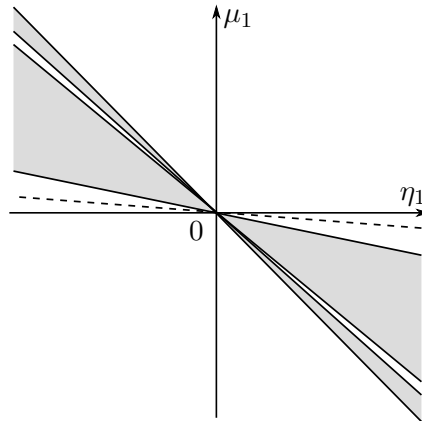


Рис. 1. Области параметрического резонанса

При $\mu_1 = \mu_1^-(\eta_1)$ квадратичная форма

$$K_{21} = \frac{3}{4}\eta_1 [y_1^2 + Y_1^2 - (\sqrt{2} + 1)Y_2^2 - (\sqrt{2} - 1)y_2^2]$$

знакопеременная, и характер устойчивости тривиального равновесия определяется ненулевыми слагаемыми дискриминанта d наименьшей (шестой) степени по e вида

$$d'' = \frac{9}{64} [128\mu_2^2 + 16(3\sqrt{2} - 4)\eta_1^2\mu_2 + (12\sqrt{2} - 17)\eta_1^2(19728 + 13968\sqrt{2} - \eta_1^2)]\eta_1^2 e^6.$$

Условие неустойчивости $d'' < 0$ задает интервал

$$-\frac{3\sqrt{2}}{4}\sqrt{5\sqrt{2} + 1}|\eta_1| + \frac{4 - 3\sqrt{2}}{16}\eta_1^2 < \mu_2 < \frac{3\sqrt{2}}{4}\sqrt{5\sqrt{2} + 1}|\eta_1| + \frac{4 - 3\sqrt{2}}{16}\eta_1^2, \quad (2.3)$$

определяющий вторую область параметрического резонанса.

Ранее уравнения границ областей параметрического резонанса в рассматриваемой задаче были получены в несколько другом виде в статье [16].

Общая картина устойчивости тривиального равновесия представлена в плоскости параметров η_1, μ_1 (при фиксированном значении e) на рис. 1. Начало координат соответствует случаю точного резонанса, области параметрического резонанса закрашены, области устойчивости в линейном приближении оставлены незакрашенными. Пунктирной линией на рис. 1 показана прямая $\mu_1 = \mu_1^+(\eta_1)$.

В следующих разделах проводится исследование нелинейных резонансных колебаний полной неавтономной системы в окрестности тривиального равновесия.

§ 3. Резонансные периодические движения

3.1. Положения равновесия модельной системы

Рассмотрим сначала случай, когда значения параметров η_1 и μ_1 лежат вне второй области параметрического резонанса и ее малой окрестности, а также вне малой окрестности прямой $\mu_1 = \mu_1^+(\eta_1)$. Положим $y_j = \sqrt{e}z_j$, $Y_j = \sqrt{e}Z_j$ ($j = 1, 2$) и введем новую независимую переменную $\tau = e\nu$. Преобразованный гамильтониан запишется в виде

$$\Gamma(z_j, Z_j, \tau) = \hat{\Gamma}(z_j, Z_j) + O(e^2), \quad (3.1)$$

$$\hat{\Gamma}(z_j, Z_j) = \Gamma^{(0)} + e\Gamma^{(1)}, \quad \Gamma^{(0)} = \Gamma_{21} + \Gamma_{40}, \quad \Gamma^{(1)} = \Gamma_{22} + \Gamma_{41}. \quad (3.2)$$

В (3.2) слагаемые $\Gamma_{21}, \Gamma_{22}, \Gamma_{40}$ и Γ_{41} — это формы K_{21}, K_{22}, K_{40} и K_{41} из (1.2), (1.3), в которых переменные y_j, Y_j заменены на z_j, Z_j ($j = 1, 2$). Главная (модельная) часть $\hat{\Gamma}(z_j, Z_j)$ соответствует автономной системе, которую будем называть модельной. Слагаемое $O(e^2)$ периодически по τ , с периодом $2\pi e$.

Описанная модельная система может иметь до двух пар положений равновесия, отличных от тривиального. Приравнивая к нулю частные производные $\hat{\Gamma}(z_j, Z_j)$ по z_j и Z_j ($j = 1, 2$), получим систему уравнений для равновесных значений этих переменных, из которой находим, что первая пара положений равновесия задается соотношениями

$$\begin{aligned} z_1 &= 2eZ_{20} + O(e^2), & Z_2 &= Z_{20} + e \frac{\mu_2 + (\mu_1 + 2\eta_1)(2\mu_1 + \eta_1)}{2(\mu_1 + \eta_1)} Z_{20} + O(e^2), \\ Z_1 &= z_2 = 0, & Z_{20}^2 &= -2(\mu_1 + \eta_1), \end{aligned} \tag{3.3}$$

существует в области $\mu_1 + \eta_1 < 0$ и при достаточно малых e устойчива в линейном приближении при $\eta_1 > 0$ и неустойчива при $\eta_1 < 0$.

Вторая пара положений равновесия задается соотношениями

$$\begin{aligned} Z_1 &= ez_{20} + O(e^2), & z_2 &= z_{20} - e \frac{20\eta_1^2 + 34\eta_1\mu_1 + 8\mu_1^2 - 3\mu_2}{6(4\eta_1 + \mu_1)} z_{20} + O(e^2), \\ z_1 &= Z_2 = 0, & z_{20}^2 &= -2(\mu_1 + 4\eta_1), \end{aligned} \tag{3.4}$$

существует в области $\mu_1 + 4\eta_1 < 0$ и при достаточно малых e устойчива в линейном приближении при $\eta_1 < 0$ и неустойчива при $\eta_1 > 0$.

Таким образом, в первой (широкой) области параметрического резонанса на рис. 1 имеется одна пара устойчивых равновесий, а левее и ниже этой области — две пары, устойчивая и неустойчивая. На границах области выписанные равновесные значения переменных обращаются в нуль. На прямой $\eta_1 = 0$ гамильтониан $\hat{\Gamma}(z_j, Z_j)$ зависит только от переменных z_2 и Z_2 , их равновесные значения вычисляются по формулам из (3.3) и (3.4) при $\eta_1 = 0$; далее эти равновесия не рассматриваются.

В областях устойчивости частоты малых линейных колебаний модельной системы в окрестности решений (3.3) и (3.4) определяются соответственно формулами

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \frac{3}{2}\eta_1 \left(1 + \frac{e}{4}(5\eta_1 + 8\mu_1)\right) + O(e^2), \\ \Omega_2 &= \sqrt{6\eta_1} \sqrt{|\eta_1 + \mu_1|} \left(1 + \frac{e}{2} \frac{(\mu_1 + 2\nu_1)^2 - \mu_2}{|\nu_1 + \mu_1|}\right) + O(e^2) \end{aligned} \tag{3.5}$$

и

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \frac{3}{2}\eta_1 \left(1 + \frac{e}{4}(73\eta_1 + 16\mu_1)\right) + O(e^2), \\ \Omega_2 &= \sqrt{6|\eta_1|} \sqrt{|4\eta_1 + \mu_1|} \left(1 - \frac{e}{18} \frac{69\mu_1^2\eta_1 + 8\mu_1^3 + 186\nu_1^2\eta_1 + 188\nu_1^3 - 9\eta_1\mu_2}{|\eta_1||4\eta_1 + \mu_1|}\right) + O(e^2). \end{aligned} \tag{3.6}$$

3.2. Периодические движения полной системы

Для значений параметров, лежащих внутри областей устойчивости (в линейном приближении) или неустойчивости найденных равновесий модельной системы корни соответствующих характеристических уравнений имеют порядок единицы, а в полной преобразованной неавтономной системе с гамильтонианом (3.1) частота малого, периодического по τ возмущения имеет порядок e^{-1} . На основании теории периодических движений Пуанкаре, при достаточно малых e из каждого нетривиального равновесия модельной системы

рождается единственное решение полной преобразованной системы, аналитическое по e и периодическое по τ , с периодом $2\pi e$. Эти решения соответствуют 2π -периодическим по ν и аналитическим по дробным степеням e решениям исходной системы, задаваемым соотношениями

$$\begin{aligned} q_1 &= -e^{1/2} Z_{20}(\mu_1 + \eta_1 + 2) \sin \nu + O(e^{3/2}), & q_2 &= e^{1/2} Z_{20}[(\mu_1 + \eta_1) \cos \nu - 1] + O(e^{3/2}), \\ q_1 &= -e^{1/2} z_{20}(-1 + 3\eta_1 \cos \nu) + O(e^{3/2}), & q_2 &= -e^{1/2} z_{20}(3\nu_1 + 2) \sin \nu + O(e^{3/2}) \end{aligned}$$

для первой и второй пар равновесий соответственно и описывающим движения спутника в окрестности цилиндрической прецессии. Здесь слагаемые $O(e^{3/2})$ 2π -периодичны по ν .

В силу непрерывности по e характеристических показателей линеаризованных уравнений возмущенного движения, устойчивые в линейном приближении и неустойчивые равновесия модельной системы порождают соответственно устойчивые в линейном приближении и неустойчивые периодические решения полной неавтономной системы.

Для получения строгих выводов об устойчивости периодических решений, являющихся устойчивыми в линейном приближении, необходимо провести нормализацию гамильтониана возмущенного (в их окрестности) движения в слагаемых до четвертой степени включительно относительно возмущений.

Из выражений (3.5) и (3.6) следует, что при достаточно малых e в системе могут быть реализованы резонансы второго, третьего и четвертого порядков. Однако в гамильтонианах возмущенного движения соответствующие резонансные слагаемые отсутствуют, и указанные резонансы оказываются несущественными в нормализуемых частях.

Структура нормализованных гамильтонианов, записанных в симплектических полярных координатах r_j, φ_j ($j = 1, 2$), такова:

$$G = \Omega_1 r_1 + \Omega_2 r_2 + c_{20} r_1^2 + c_{11} r_1 r_2 + c_{02} r_2^2 + O_5,$$

где c_{ij} — константы, а слагаемое $O(e^2)$ периодически (с периодом $2\pi e$) по τ и 2π -периодично по φ_j . Опуская подробности довольно громоздких вычислений, приведем выражения для коэффициентов c_{ij} . Для периодического движения, рождающегося из (3.3), имеем

$$c_{20} = -\frac{3}{4} e \eta_1 + O(e^2), \quad c_{11} = e \frac{\sqrt{6|\eta_1|}(2\mu_1 + 11\eta_1)}{4\sqrt{|\eta_1 + \mu_1|}} + O(e^2), \quad c_{02} = \frac{2\mu_1 - 7\eta_1}{8|\eta_1 + \mu_1|} + O(e), \quad (3.7)$$

а для периодического движения, рождающегося из (3.4),

$$c_{20} = -\frac{3}{4} e \eta_1 + O(e^2), \quad c_{11} = e \frac{\sqrt{6|\eta_1|}(2\mu_1 + 23\eta_1)}{4\sqrt{|4\eta_1 + \mu_1|}} + O(e^2), \quad c_{02} = \frac{17\eta_1 + \mu_1}{8|4\eta_1 + \mu_1|} + O(e). \quad (3.8)$$

В исследуемой области при достаточно малых e коэффициенты из (3.7) удовлетворяют условиям

$$c_{20} < 0, \quad c_{02} < 0, \quad \Delta = 4c_{20}c_{02} - 4c_{11}^2 > 0.$$

Так как $\Delta \neq 0$, то для достаточно малых значений e рассматриваемое периодическое движение устойчиво для большинства (в смысле меры Лебега) начальных условий [19]. Кроме того, квадратичная форма $c_{20}r_1^2 + c_{11}r_1r_2 + c_{02}r_2^2$ отрицательно определена при $r_1 \geq 0, r_2 \geq 0$, что означает формальную устойчивость данного движения [20].

Для коэффициентов из (3.8) имеем $c_{20} > 0, c_{02} > 0, \Delta < 0$, и соответствующее периодическое движение устойчиво для большинства начальных условий, но не является формально устойчивым.

§ 4. Случай равных частот

4.1. Дальнейшее преобразование гамильтониана

Рассмотрим теперь значения $\mu_1 = \mu_1^\pm(\eta_1)$ из (2.2), соответствующие случаям равных частот. Отметим, что, несмотря на то, что при $\mu_1 = \mu_1^+(\eta_1)$ в системе не возникает области параметрического резонанса, а при $\mu_1 = \mu_1^-(\eta_1)$ такая область имеется, перестройка характера движений системы происходит в обоих случаях.

Вернемся к рассмотрению системы с преобразованными частями K_2 и K_4 гамильтониана возмущенного движения, определяемыми формулами (1.2), (1.3). Перейдем в e -окрестность начала координат фазового пространства по формулам $y_j = ez_j$, $Y_j = eZ_j$ ($j = 1, 2$) и введем новую независимую переменную $\tau = e\nu$. В новых переменных гамильтониан системы примет вид

$$\begin{aligned} L = & \frac{3\eta_1}{4}(z_1^2 + Z_1^2) + \frac{3\eta_1}{4}(1 \pm \sqrt{2})z_2^2 + \frac{3\eta_1}{4}(-1 \pm \sqrt{2})Z_2^2 + \\ & + e \left[\frac{9}{16}(1 \mp 2\sqrt{2})\eta_1^2(z_1^2 + Z_1^2) + \left(\frac{\mu_2}{2} + \frac{-19 \mp 12\sqrt{2}}{8}\eta_1^2 \right) z_2^2 + \right. \\ & \left. + \left(\frac{\mu_2}{2} + \frac{-37 \pm 24\sqrt{2}}{8}\eta_1^2 \right) Z_2^2 - 3\eta_1 Z_2 z_1 - \frac{3}{2}\eta_1 z_2 Z_1 + \frac{1}{8}(z_2^2 + Z_2^2)^2 \right] + O(e^2), \end{aligned} \quad (4.1)$$

где слагаемое $O(e^2)$ периодически по τ с периодом $2\pi e$.

Здесь и далее при проведении нормализации гамильтониана возмущенного движения в рассматриваемых случаях равных частот верхние и нижние знаки относятся к $\mu_1 = \mu_1^+(\eta_1)$ и $\mu_1 = \mu_1^-(\eta_1)$ соответственно.

Сделаем линейную каноническую замену

$$z_1 = z'_1, \quad Z_1 = Z'_1, \quad z_2 = \sqrt{\sqrt{2} \mp 1} z'_2, \quad Z_2 = \left(\sqrt{\sqrt{2} \mp 1} \right)^{-1} Z'_2,$$

в результате которой нулевая (по e) квадратичная часть гамильтониана (4.1) запишется в нормальной форме $(3/4)\eta_1 [(z'_1{}^2 + Z'_1{}^2) \pm (z'_2{}^2 + Z'_2{}^2)]$. С учетом структуры этой формы выполним далее близкую к тождественной замену переменных $z'_j, Z'_j \rightarrow \hat{z}_j, \hat{Z}_j$ ($j = 1, 2$), нормализующую слагаемые порядка e в формах второй и четвертой степеней по возмущениям. Преобразованный гамильтониан запишется в виде

$$\begin{aligned} \tilde{L} = & \frac{3}{4}\eta_1 ((\hat{z}_1^2 + \hat{Z}_1^2) \pm (\hat{z}_2^2 + \hat{Z}_2^2)) + e \left[\sqrt{2} \left(\frac{\mu_2}{2} + \frac{-20 \pm 3\sqrt{2}}{16}\eta_1^2 \right) (\hat{z}_2^2 + \hat{Z}_2^2) + \right. \\ & \left. + \frac{9}{16}(1 \mp 2\sqrt{2})\eta_1^2(\hat{z}_1^2 + \hat{Z}_1^2) + \frac{3\eta_1}{4} \sqrt{5\sqrt{2} \mp 1} (\hat{z}_2 \hat{Z}_1 \mp \hat{Z}_2 \hat{z}_1) + \frac{5}{16}(\hat{z}_2^2 + \hat{Z}_2^2)^2 \right] + O(e^2). \end{aligned}$$

Перейдем затем к симплектическим полярным координатам ϕ_j, r_j и выполним еще одно каноническое преобразование вида

$$r_1 = R_1, \quad r_2 = R_2 \mp R_1, \quad \phi_1 = \Phi_1 \pm \Phi_2, \quad \phi_2 = \Phi_2.$$

Гамильтониан системы примет вид

$$\begin{aligned} \hat{L} = & L^{(0)} + O(e^2), \quad L^{(0)} = \pm \frac{3}{2}\eta_1 R_2 + e \left[\sqrt{2} \left(\frac{\pm 4 + 3\sqrt{2}}{16}\eta_1^2 - \mu_2 \right) R_1 + \right. \\ & \left. + \sqrt{2} \left(\frac{-20 \pm 3\sqrt{2}}{8}\eta_1^2 + \mu_2 \right) R_2 - \frac{3\eta_1}{2} \sqrt{5\sqrt{2} \mp 1} \sqrt{R_1} \sqrt{R_2 \mp R_1} \sin \Phi_1 + \frac{5}{4}(R_2 \mp R_1)^2 \right], \end{aligned} \quad (4.2)$$

в котором главная часть не зависит от угловой переменной Φ_2 , а слагаемое $O(e^2)$ 2π -периодично по Φ_1 и Φ_2 и периодически по τ с периодом $2\pi e$.

4.2. Приведенные системы с одной степенью свободы

Приближенный гамильтониан $L^{(0)}$ отвечает автономной системе с двумя степенями свободы, с циклической координатой Φ_2 . Имеем $R_2 = c = \text{const}$, причем при $\mu_1 = \mu_1^+(\eta_1)$ (верхние знаки) должно выполняться условие $c \geq R_1 \geq 0$, а при $\mu_1 = \mu_1^-(\eta_1)$ (нижние знаки) — условия $R_1 + c \geq 0$, $R_1 \geq 0$, и константа c может принимать значения любого знака или обращаться в нуль.

В случае $\mu_1 = \mu_1^+(\eta_1)$ значению $c = 0$ отвечает единственная точка приближенной системы — тривиальное равновесие. При $c > 0$ положим в (4.2) $R_2 = c$, $R_1 = c\rho$ ($0 < \rho \leq 1$), отбросим постоянные слагаемые и введем параметры κ , λ и новую независимую переменную $\hat{\tau}$ по формулам

$$\kappa = -\frac{6\eta_1}{5c} \sqrt{5\sqrt{2}-1}, \quad \lambda = -\frac{4\sqrt{2}}{5c} \left(\mu_2 - \frac{4+3\sqrt{2}}{16} \eta_1^2 \right) - 2, \quad \hat{\tau} = \frac{5}{4} c e \tau.$$

Получим гамильтониан

$$h = \kappa \sqrt{\rho} \sqrt{1-\rho} \sin \Phi_1 + \lambda \rho + \rho^2, \quad (4.3)$$

отвечающей приведенной системе с одной степенью свободы, с координатой Φ_1 .

В случае $\mu_1 = \mu_1^-(\eta_1)$ и $c = 0$ введем параметры κ_0 , λ_0 и новую независимую переменную $\hat{\tau}_0$ по формулам

$$\kappa_0 = -\frac{6\eta_1}{5} \sqrt{5\sqrt{2}+1}, \quad \lambda_0 = \frac{4\sqrt{2}}{5} \left(\mu_2 - \frac{4-3\sqrt{2}}{16} \eta_1^2 \right), \quad \hat{\tau}_0 = \frac{5}{4} e \tau.$$

Получим приведенный гамильтониан вида

$$h_0 = (\lambda_0 + \kappa_0 \sin \Phi_1) R_1 + R_1^2. \quad (4.4)$$

Если $c > 0$, то положим $R_2 = c$, $R_1 = c\rho$ ($\rho \geq 0$), а при $c < 0$ сделаем сначала замену $\Phi_2 = -\tilde{\Phi}_2$, $R_2 = -\tilde{R}_2$ и затем положим $\tilde{R}_2 = |c|$, $R_1 = |c|\rho$ ($\rho \geq 1$). Введем параметры κ^\pm , λ^\pm и новую независимую переменную $\hat{\tau}$ по формулам

$$\kappa^\pm = \frac{\kappa_0}{|c|}, \quad \lambda^\pm = \frac{\lambda_0}{|c|} \pm 2, \quad \hat{\tau} = |c| \hat{\tau}_0.$$

Соответствующие приведенные гамильтонианы имеют вид

$$h^\pm = \kappa^\pm \sqrt{\rho} \sqrt{\rho \pm 1} \sin \Phi_1 + \lambda^\pm \rho + \rho^2. \quad (4.5)$$

Параметры κ , κ_0 и κ^\pm а также λ , λ_0 и λ^\pm в приведенных гамильтонианах (4.3), (4.4) и (4.5) могут принимать значения любого знака.

Приведенные системы с гамильтонианами вида (4.3)–(4.5) получены и исследованы ранее в работах [17, 18], где рассмотрен кратный параметрический резонанс 2:1:1. Показано, что в системе с гамильтонианом h из (4.3) в области существования движений в зависимости от значений κ и λ имеется либо два устойчивых равновесия, либо четыре равновесия, три из которых устойчивы и одно неустойчиво. Тривиальное равновесие системы с гамильтонианом h_0 из (4.4) устойчиво при условии $|\lambda_0| > \kappa_0$ и неустойчиво при замене знака этого неравенства на противоположный (см. также формулу (2.3)). Кроме того, в этой системе при $\lambda_0 < \kappa_0$ имеется одно устойчивое, а при $\lambda_0 < -\kappa_0$ — одно неустойчивое равновесие. В системах с гамильтонианами h^\pm из (4.5) в зависимости от значений κ^\pm и λ^\pm имеются либо одно устойчивое равновесие, либо три равновесия, два из которых устойчивы и одно неустойчиво. Получены уравнения бифуркационных кривых в плоскости параметров, разделяющих области с различным числом равновесий. Другие движения приведенных систем с гамильтонианами h , h_0 и h^\pm представляют собой либо колебания в окрестности устойчивых равновесий, либо вращения, либо асимптотические движения. Представлен полный набор фазовых портретов этих систем [17, 18].

4.3. О двухчастотных условно-периодических движениях

Каждому положению равновесия приведенных систем с гамильтонианами (4.3) и (4.5) (исключаем равновесия на границах $\rho = 1$ областей существования) соответствует однопараметрическое, с параметром c , семейство стационарных вращений приближенной автономной системы с двумя степенями свободы с гамильтонианами $L^{(0)}$ из (4.2).

Эти движения описываются соотношениями $R_1 = c\rho_0$, $R_2 = c$, $\Phi_1 = \pi/2$ или $-\pi/2$, а частота изменения циклической координаты при выборе в $L^{(0)}$ верхних знаков равна

$$\Omega_2 = \frac{3}{2}\eta_1 + \left[\sqrt{2} \left(\mu_2 - \frac{\eta_1^2}{8}(20 - 3\sqrt{2}) \right) - \frac{3\delta_1\eta_1\sqrt{5\sqrt{2}-1}\sqrt{\rho_0}}{4\sqrt{1-\rho_0}} + \frac{5c}{2}(1-\rho_0) \right] e,$$

а при выборе нижних знаков равна

$$\Omega_2 = -\frac{3}{2}\eta_1 + \left[\sqrt{2} \left(\mu_2 - \frac{\eta_1^2}{8}(20 + 3\sqrt{2}) \right) - \frac{3\delta_1\eta_1\sqrt{5\sqrt{2}-1}\sqrt{\rho_0}}{4\sqrt{\rho_0 \pm 1}} + \frac{5|c|}{2}(\rho_0 \pm 1) \right] e,$$

где верхний и нижний знаки отвечают случаям $c > 0$ и $c < 0$. В этих формулах ρ_0 — равновесные значения соответствующей приведенной системы.

При выполнении условий

$$\Omega_2 \neq 0, \quad \frac{\partial^2 L^{(0)}}{\partial R_2^2} \neq 0 \tag{4.6}$$

и при достаточно малых значениях e из большинства описанных стационарных вращений приближенных автономных систем рождаются условно-периодические, с частотами Ω_2 и e^{-1} , движения полных неавтономных систем с гамильтонианом (4.2) [21, 22].

При $\eta_1 \neq 0$ первое условие в (4.6), очевидно, выполняется. Второе условие сводится к неравенствам

$$\frac{3\delta_1\eta_1\sqrt{5\sqrt{2}-1}\sqrt{\rho_0}}{8c(1-\rho_0)^{3/2}} + \frac{5}{2} \neq 0 \quad \text{и} \quad \frac{3\delta_1\eta_1\sqrt{5\sqrt{2}+1}\sqrt{\rho_0}}{8|c|(\rho_0 \pm 1)^{3/2}} + \frac{5}{2} \neq 0 \tag{4.7}$$

при выборе в $L^{(0)}$ соответственно верхних и нижних знаков. В обоих случаях неравенства (4.7) удовлетворяются, если $\eta_1\delta_1 > 0$. Если же $\eta_1\delta_1 < 0$, то в пространстве величин η_1, κ, μ имеются поверхности вырождения, требующие отдельного исследования.

4.4. О трехчастотных условно-периодических движениях

Периодические движения приведенных систем (колебания в окрестности устойчивых равновесий и вращения) порождают двухчастотные условно-периодические движения приближенных автономных систем с двумя степенями свободы с гамильтонианом $L^{(0)}$ из (4.2), большинство из которых, в свою очередь, порождает трехчастотные условно-периодические движения полных неавтономных систем с гамильтонианом \hat{L} из (4.2).

Опишем эти трехчастотные движения, считая порождающими движения приведенной системы с гамильтонианом h^+ из (4.5) при $\kappa^+ = 1/5$, $\lambda^+ = -3$. Фазовый портрет системы представлен на рис. 2, а в плоскости переменных $u = \sqrt{2\rho} \cos \Phi_1$, $v = \sqrt{2\rho} \sin \Phi_1$.

В системе имеется первый интеграл (интеграл энергии)

$$\frac{1}{5}\sqrt{\rho+1}\sqrt{\rho}\sin\Phi_1 - 3\rho + \rho^2 = \hat{h} = \text{const.} \tag{4.8}$$

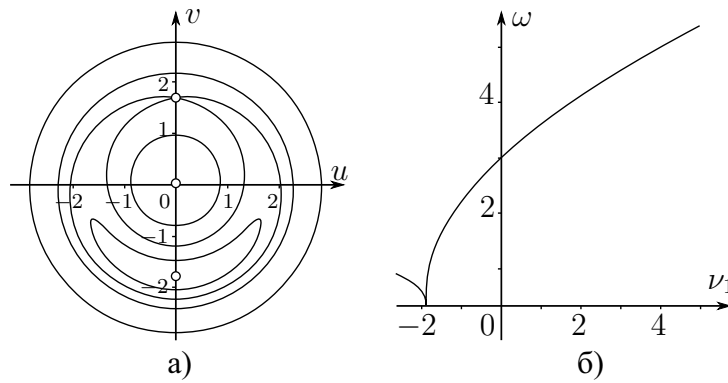


Рис. 2. Фазовый портрет приведенной системы (а), график функций $\omega^{(j)}(h)$ (б)

Положения равновесия системы описываются соотношениями

$$\rho = 0.0011165, \quad \Phi_1 = \frac{\pi}{2}; \quad \rho = 1.3963316, \quad \Phi_1 = \frac{\pi}{2}; \quad \rho = 1.6029523, \quad \Phi_1 = -\frac{\pi}{2}.$$

Первое и третье из них устойчивы, а второе неустойчиво. Соответствующие им уровни энергии таковы: $\hat{h}^{(1)} = -2.6479303$, $\hat{h}^{(2)} = -1.8734073$, $\hat{h}^{(3)} = 0.0093338$. Кроме того, уровню энергии $\hat{h} = \hat{h}^{(2)}$ отвечает движение по сепаратрисе, а уровню энергии $\hat{h} = \hat{h}^{(3)}$ — одно из вращений.

При $\hat{h} < \hat{h}^{(1)}$ движение системы невозможно; при $\hat{h}^{(1)} < \hat{h} < \hat{h}^{(2)}$ происходят колебания в окрестности первого положения равновесия. Каждой точке интервала $\hat{h}^{(2)} < \hat{h} < \hat{h}^{(3)}$ соответствует одно из колебаний в окрестности третьего положения равновесия и одно вращение. Интервал $\hat{h} > \hat{h}^{(3)}$ задает область вращений.

При помощи интеграла (4.8), исключим Φ_1 из уравнения для ρ , получая уравнение

$$\left(\frac{d\rho}{d\eta}\right)^2 = f(\rho), \quad f(\rho) = -\rho^4 + 6\rho^3 + \left(2\hat{h} - \frac{224}{25}\right)\rho^2 + \left(-6\hat{h} + \frac{1}{25}\right)\rho - \hat{h}^2, \quad (4.9)$$

решение которого записывается через эллиптические функции Якоби [23]. Не выписывая явно это решение, исследуем свойства частот колебаний и вращений системы в зависимости от \hat{h} .

В области колебаний $\hat{h}^{(1)} < \hat{h} < \hat{h}^{(2)}$ и части области вращений при $\hat{h}^{(3)} < \hat{h} < \hat{h}^{(4)}$ ($\hat{h}^{(4)} = 3.9979994$) многочлен четвертой степени $f(\rho)$ из (4.9) имеет два вещественных корня ρ_1, ρ_2 ($\rho_1 < \rho_2$) и два комплексно-сопряженных корня ρ_3, ρ_4 . Движение (колебание или вращение) происходит при $\rho_1 < \rho < \rho_2$. Следуя [23], введем обозначения

$$a_1 = |\text{Im } \rho_3|, \quad b_1 = \text{Re } \rho_3, \quad A^2 = (\rho_2 - b_1)^2 + a_1^2, \quad B^2 = (\rho_1 - b_1)^2 + a_1^2.$$

Частота исследуемого движения вычисляется по формуле

$$\omega^{(1)}(\hat{h}) = \frac{\pi\sqrt{AB}}{2K(k_1)}, \quad k_1^2 = \frac{(\rho_2 - \rho_1)^2 - (A - B)^2}{4AB}, \quad (4.10)$$

где $K(k_1)$ — полный эллиптический интеграл первого рода.

В области $\hat{h}^{(2)} < \hat{h} < \hat{h}^{(3)}$ колебаний и вращений и в области вращений при $\hat{h} > \hat{h}^{(4)}$ многочлен $f(\rho)$ имеет четыре вещественных корня $\rho = \rho_j$ ($\rho_1 < \rho_2 < \rho_3 < \rho_4$). В первой из указанных областей колебанию и вращению соответствуют интервалы $\rho_1 < \rho < \rho_2$ и $\rho_3 < \rho < \rho_4$. Вращению во второй области отвечает интервал $\rho_3 < \rho < \rho_4$, при этом

$\rho_1 < \rho_2 < 0$. Оба движения в области $\hat{h}^{(2)} < \hat{h} < \hat{h}^{(3)}$ происходят с одной и той же частотой, вычисляемой по формуле

$$\omega^{(2)}(\hat{h}) = \frac{\pi\sqrt{\rho_{42}\rho_{31}}}{2K(k_2)}, \quad k_2 = \sqrt{\frac{\rho_{43}\rho_{21}}{\rho_{42}\rho_{31}}}, \quad \rho_{ij} = \rho_i - \rho_j. \quad (4.11)$$

По этой же формуле вычисляется частота вращения из области $\hat{h} > \hat{h}^{(4)}$.

Анализ показывает, что функция $\omega = \omega^{(1)}(\hat{h})$ из (4.10) монотонно убывает в области существования $\hat{h}^{(1)} < \hat{h} < \hat{h}^{(2)}$ от значения 0.9052379 при $\hat{h} = \hat{h}^{(1)}$ до нуля при $\hat{h} = \hat{h}^{(2)}$. Функция $\omega = \omega^{(2)}(\hat{h})$ из (4.11) монотонно возрастает, принимая нулевое значение при $\hat{h} = \hat{h}^{(2)}$ и значение, равное 4.9976007, в точке $\hat{h} = \hat{h}^{(4)}$ стыковки двух частей этой функции. Нулевое значение частоты на общей границе $\hat{h} = \hat{h}^{(2)}$ областей существования двух функций $\omega = \omega^{(1,2)}(\hat{h})$, соответствует движению по сепаратрисе (когда период движения бесконечен). Графики функций $\omega = \omega^{(j)}(\hat{h})$ ($j = 1, 2$) представлены на рис. 2, б.

В областях колебаний или вращений исследуемой приведенной системы введем переменные действие–угол I, w , полагая, что

$$I = I(\hat{h}) = \frac{1}{2\pi} \oint \rho d\Phi_1 = \frac{1}{2\pi} \oint v du. \quad (4.12)$$

Интегрирование в (4.12) проводится вдоль замкнутой траектории, соответствующей колебанию или вращению. Функция $\hat{h} = \hat{h}(I)$, обратная к (4.12), представляет собой гамильтониан системы, записанный в переменных действие–угол.

В соответствующих областях приближенной автономной системы с двумя степенями свободы с гамильтонианом $L^{(0)}$ из (4.2) (в котором выбраны нижние знаки) также введем переменные действие–угол I_j, w_j ($j = 1, 2$). Так как Φ_2 — циклическая координата, то $I_2 = R_2$. Для переменной I_1 имеем $I_1 = (2\pi)^{-1} \oint R_1 d\Phi_1 = (2\pi)^{-1} I_2 \oint \rho(\Phi_1, \hat{h}) d\Phi_1$, где интегрирование проводится по полному циклу изменения переменных Φ_1, R_1 (или Φ_1, ρ). Здесь функция $\rho(\Phi_1, \hat{h})$ вычисляется при учете (4.8). Из выписанных соотношений следует, что $I = I_1/I_2$ и, таким образом, $\hat{h} = \hat{h}(I_1/I_2)$.

В новых переменных приближенный гамильтониан зависит только от I_1, I_2 :

$$\begin{aligned} \tilde{H}_F(I_1, I_2) &= H_F^{(0)}(I_2) + eH_F^{(1)}(I_1, I_2), \\ H_F^{(0)} &= -\frac{3}{2}\eta_1 I_2 + e \left[\sqrt{2} \left(\mu_2 - \frac{20 + 3\sqrt{2}}{8} \eta_1^2 \right) I_2 + \frac{5}{4} I_2^2 \right], \quad H_F^{(1)} = \frac{5}{4} I_2^2 \hat{h}(I_1/I_2). \end{aligned}$$

Частоты нелинейных колебаний системы с этим гамильтонианом таковы:

$$\omega_1 = \frac{\partial \tilde{H}_F}{\partial I_1} = \frac{5}{4} e c \omega^{(j)} \sim e, \quad \omega_2 = \frac{\partial \tilde{H}_F}{\partial I_2} = -\frac{3}{2} \eta_1 + O(e) \sim 1.$$

Здесь величины $\omega^{(j)}$ ($j = 1, 2$) вычисляются по формулам (4.10) и (4.11).

Полный неавтономный гамильтониан (4.2) в переменных I_j, w_j имеет вид

$$H_F(I_1, I_2, w_1, w_2, \tau; e) = H_F^{(0)}(I_2) + eH_F^{(1)}(I_1, I_2) + e^2 H_F^{(2)}(I_1, I_2, w_1, w_2, \tau; e) \quad (4.13)$$

где последнее слагаемое аналитично по всем аргументам, 2π -периодично по w_1 и w_2 и $2\pi e$ -периодично по τ . В системе с гамильтонианом (4.13) имеет место случай собственного вырождения [24], так как главная (порядка единицы) часть гамильтониана зависит только от одной переменной действие I_2 . Рассмотрим условия

$$\frac{\partial H_F^{(0)}}{\partial I_2} \neq 0, \quad \frac{\partial H_F^{(1)}}{\partial I_1} \neq 0, \quad \frac{\partial^2 H_F^{(1)}}{\partial I_1^2} \neq 0.$$

Первое условие, очевидно, выполняется, а второе и третье сводятся к неравенствам $\omega^{(j)} \neq 0$ и $\partial\omega^{(j)}/\partial h \neq 0$ соответственно. В силу вышеизложенных свойств частот $\omega^{(j)}$ ($j = 1, 2$) указанные неравенства также выполняются. Поэтому [24] большинство движений полной системе условно-периодические, с двумя медленными частотами $\omega_2 \sim 1$ и $\omega_1 \sim e$ и одной быстрой частотой, равной e^{-1} . Часть фазового пространства, не заполненная этими движениями, имеет порядок $O(\exp(-d_1/e))$, где $d_1 = \text{const} > 0$.

§ 5. Об исследовании гамильтоновой системы в общем случае

Рассмотрим теперь гамильтонову систему, описанную во введении, при резонансе $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 0$ ($\text{rank } \mathbf{A} = 2$). Пусть, как и в рассмотренной спутниковой задаче, гамильтониан возмущенного движения содержит слагаемые только четных степеней относительно возмущений, а неавтономная квадратичная часть гамильтониана в слагаемых порядка ε содержит только первые гармоники $\sin t$ и $\cos t$.

Введем окрестность резонансной точки (α_*, β_*) по формулам $\alpha = \alpha_* + \varepsilon\eta_1 + \dots$, $\beta = \beta_* + \varepsilon\mu_1 + \dots$ и проведем нормализацию гамильтониана возмущенного движения аналогично описанной в § 2. Результирующий гамильтониан представляется в виде

$$\begin{aligned} K &= K_2 + K_4 + \dots, & K_2 &= \varepsilon K_{21} + O(\varepsilon^2), & K_4 &= K_{40} + O(\varepsilon), \\ K_{21} &= \lambda_1(y_1^2 + Y_1^2) + \lambda_2 Y_2^2 + \lambda_4 Y_2 y_2 + \lambda_3 y_2^2 + \beta_1 y_1 y_2 + \beta_2 Y_1 Y_2 + \beta_3 Y_1 y_2 + \beta_4 y_1 Y_2, \\ K_{40} &= c(y_1^2 + Y_1^2)^4 + (y_1^2 + Y_1^2)^2 f_2(y_2, Y_2) + f_4(y_2, Y_2). \end{aligned}$$

Здесь $\lambda_j = a_j \eta_j + b_j \mu_j$, коэффициенты a_j, b_j , а также β_j и c — постоянные величины, не зависящие от η_1 и μ_1 . Через $f_k(y_2, Y_2)$ обозначены однородные формы k -й степени с постоянными коэффициентами, не зависящими от η_1 и μ_1 . Таким образом, квадратичная форма K_{21} , помимо η_1 и μ_1 , содержит 12 параметров a_j, b_j, β_j , а форма K_{40} — 9 параметров; эти 21 параметр для каждой конкретной задачи — фиксированные числа.

Полагая $y_j = \sqrt{\varepsilon} z_j$, $Y_j = \sqrt{\varepsilon} Z_j$ ($j = 1, 2$) и вводя новую независимую переменную $\tau = \varepsilon t$, перепишем гамильтониан в виде

$$\Gamma(z_j, Z_j, \tau) = \Gamma^{(0)} + O(\varepsilon), \quad \Gamma^{(0)} = \Gamma_{21} + \Gamma_{40}, \quad (5.1)$$

где Γ_{21} и Γ_{40} — это формы K_{21} и K_{40} , в которых сделана замена $y_j, Y_j \rightarrow z_j, Z_j$ ($j = 1, 2$).

Рассмотрим линейную систему с гамильтонианом Γ_{21} . Коэффициенты соответствующего характеристического уравнения (2.1) и его дискриминант представляются в виде

$$a = 4\lambda_1^2 + \Lambda_1 + 2B_3, \quad b = B_3^2 + 4(\lambda_1 \Lambda_1 - \Lambda_2)\lambda_1, \quad d = (4\lambda_1^2 - \Lambda_1)^2 + 4B_3(4\lambda_1^2 + \Lambda_1) + 16\lambda_1 \Lambda_2, \quad (5.2)$$

зависящем от четырех комбинированных параметров $\lambda_1, \Lambda_1, \Lambda_2, B_3$. Здесь

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= 4\lambda_2 \lambda_3 - \lambda_4^2, & \Lambda_2 &= B_1 \lambda_2 + B_2 \lambda_3 - B_4 \lambda_4, \\ B_1 &= \beta_3^2 + \beta_1^2, & B_2 &= \beta_4^2 + \beta_2^2, & B_3 &= -\beta_4 \beta_3 + \beta_1 \beta_2, & B_4 &= \beta_3 \beta_2 + \beta_4 \beta_1. \end{aligned} \quad (5.3)$$

В случае точного резонанса ($\eta_1 = \mu_1 = 0$) характеристическое уравнение принимает вид $(\lambda^2 + B_3)^2 = 0$, и тривиальное равновесие при $B_3 > 0$ устойчиво в линейном приближении, при $B_3 < 0$ неустойчиво, а случай $B_3 = 0$ требует рассмотрения в квадратичной части гамильтониана слагаемых следующего порядка по малому параметру.

В случае, близком к резонансному, в силу (5.3), коэффициент a в (5.2) — квадратичная функция, а b и d — многочлены четвертой степени относительно η_1 и μ_1 . В частном случае $\beta_j = 0$ ($j = 1, \dots, 4$), когда все $B_j = 0$ и $\Lambda_2 = 0$, форма Γ_{21} принимает вид

$$\Gamma_{21} = \lambda_1(z_1^2 + Z_1^2) + \lambda_2 Z_2^2 + \lambda_4 Z_2 z_2 + \lambda_3 z_2^2, \quad (5.4)$$

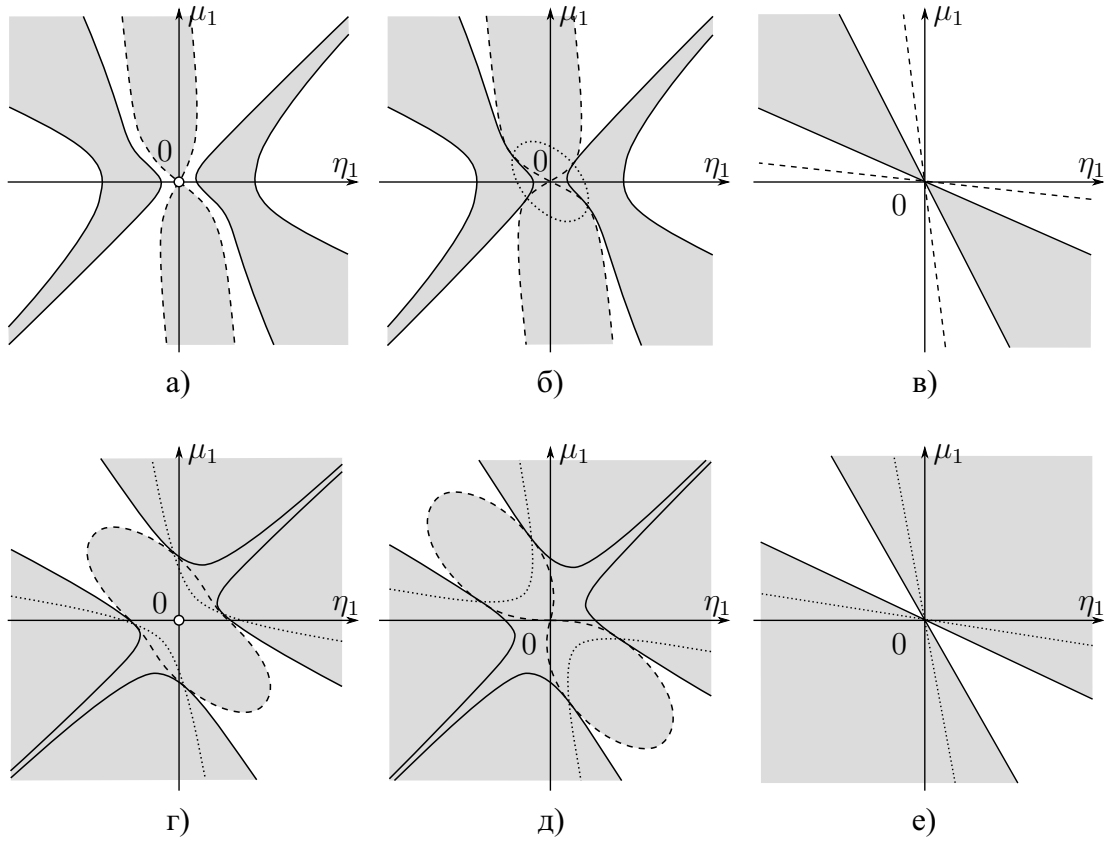


Рис. 3. Варианты областей устойчивости и неустойчивости

а равенства (5.2) таковы: $a = 4\lambda_1^2 + \Lambda_1$, $b = 4\lambda_1^2\Lambda_1$, $d = (4\lambda_1^2 - \Lambda_1)^2$.

При $\Lambda_1 < 0$ имеем $b < 0$, и тривиальное равновесие неустойчиво. Если квадратичная форма Λ_1 может обратиться в нуль (и раскладывается на линейные множители), то условие $\Lambda_1 = 0$ определяет границы области параметрического резонанса.

В случае $\Lambda_1 > 0$ имеем $a > 0$ и $b > 0$. Если квадратичная форма $4\lambda_1^2 - \Lambda_1$ в d не раскладывается на множители, то всегда $d > 0$, и тривиальное равновесие устойчиво. Если такое разложение возможно, то из равенства $d = 0$ имеем два варианта: $\lambda_1 = \pm\sqrt{4\lambda_2\lambda_3 - \lambda_4^2}/2$, и (5.4) переписывается в виде

$$\Gamma_{21} = \pm\sqrt{4\lambda_2\lambda_3 - \lambda_4^2}(z_1^2 + Z_1^2)/2 + \lambda_2 Z_2^2 + \lambda_4 Z_2 z_2 + \lambda_3 z_2^2. \quad (5.5)$$

При сделанных предположениях квадратичная форма $\lambda_2 Z_2^2 + \lambda_4 Z_2 z_2 + \lambda_3 z_2^2$ знакоопределенная. Если $\lambda_2 > 0$ и $\lambda_3 > 0$, то при выборе верхнего знака в (5.5) квадратичная форма Γ_{21} положительно определена относительно z_j, Z_j ($j = 1, 2$), и тривиальное равновесие устойчиво. При выборе нижнего знака форма Γ_{21} знакопеременная, и в следующем приближении по ε может быть найдена еще одна область параметрического резонанса. Случай $\lambda_2 < 0$, $\lambda_3 < 0$ аналогичен. Заметим, что рассмотренный частный случай включает в себя (при $\lambda_4 = 0$) исследованную в предыдущих разделах спутниковую задачу.

Некоторые варианты взаимного положения областей устойчивости и неустойчивости представлены на рис. 3 в плоскости параметров η_1, μ_1 . Рис. 3, а-в отвечает значениям $a_1 = -b_1 = a_2 = b_3 = a_4 = b_4 = 1$, $b_2 = a_3 = 2$, а параметры B_j таковы: $B_1 = 5, B_2 = 2, B_3 = 1, B_4 = 3$ (а), $B_1 = 5, B_2 = 2, B_3 = -1, B_4 = 3$ (б), $B_1 = B_2 = B_3 = B_4 = 0$ (в). Для рис. 3, г-е в первом наборе значений знаки a_3 и b_3 изменены на противоположные, а B_j те же, что и для первых трех рисунков.

Области неустойчивости на рис. 3 закрашены, области устойчивости в линейном приближении не закрашены. Точечными линиями изображены (находящиеся в областях неустойчивости) кривые $a = 0$, проходящие через точки взаимного касания кривых $b = 0$ (сплошные линии) и $d = 0$ (пунктирные линии). Прямые $a = 0$ и $b = 0$ на рис. 3, e пересекаются в начале координат (условие $d = 0$ не реализуется).

В точке $\eta_1 = \mu_1 = 0$ на рис. 3, a и z (когда $B_3 > 0$) тривиальное равновесие устойчиво. В первом случае вблизи нее имеются области устойчивости и неустойчивости, а во втором случае эта точка принадлежит окружающей ее области неустойчивости (а области устойчивости появляются вне некоторой окрестности начала координат).

В случае, относящемся к рис. 3, b , вблизи одной из прямых вне закрашенной области при рассмотрении следующего приближения по ε может возникнуть вторая область параметрического резонанса. Этот рисунок соответствует рассмотренной спутниковой задаче, где такая область существует. В случае же, относящемся к рис. 3, e , имеется только одна область параметрического резонанса.

Из вышесказанного следует, что, за исключением частного случая $\beta_j = 0$ ($j = 1, \dots, 4$), области параметрического резонанса вполне определяются рассмотрением линейной системы первого приближения по малому параметру.

В полной нелинейной системе первого приближения по ε , описываемой гамильтонианом (5.1), существуют 2π -периодические по времени, аналитические по дробным степеням малого параметра решения, рождающиеся из нетривиальных равновесий приближенной автономной системы с гамильтонианом $\Gamma^{(0)}$ из (5.1). Для указанного частного случая, как и в спутниковой задаче, полное описание нелинейных колебаний может потребовать рассмотрения системы как первого, так и второго приближения по ε .

Финансирование. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда, № 24-11-00162, <https://rscf.ru/project/24-11-00162/> в Московском авиационном институте (Национальном исследовательском университете).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Холостова О. В. О периодических движениях неавтономной гамильтоновой системы в одном случае кратного параметрического резонанса // Нелинейная динамика. 2017. Т. 13. № 4. С. 477–504. <https://doi.org/10.20537/nd1704003>
2. Белецкий В. В. Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. М.: МГУ, 1975.
3. Сарычев В. А. Асимптотически устойчивые стационарные вращения спутника // Космические исследования. 1965. Т. 3. Вып. 5. С. 667–673.
4. Маркеев А. П. Устойчивость стационарного вращения спутника на эллиптической орбите // Космические исследования. 1965. Т. 3. Вып. 5. С. 674–676.
5. Маркеев А. П. Об устойчивости канонической системы с двумя степенями свободы при наличии резонанса // Прикладная математика и механика. 1968. Т. 32. Вып. 4. С. 738–744.
6. Маркеев А. П., Чеховская Т. Н. Об устойчивости цилиндрической прецессии спутника на эллиптической орбите // Прикладная математика и механика. 1976. Т. 40. Вып. 6. С. 1040–1047.
7. Сокольский А. Г. К задаче об устойчивости регулярных прецессий симметричного спутника // Космические исследования. 1980. Т. 18. Вып. 5. С. 698–706.
8. Маркеев А. П. К задаче об устойчивости положения равновесия гамильтоновой системы при резонансе 3:1 // Прикладная математика и механика. 2001. Т. 65. Вып. 4. С. 653–660.
9. Чуркина Т. Е. Об устойчивости движения спутника на эллиптической орбите в случае цилиндрической прецессии // Математическое моделирование. 2004. Т. 16. № 7. С. 3–5. <https://www.mathnet.ru/rus/mm249>

10. Bardin B. S., Maciejewski A. J. Transcendental case in stability problem of Hamiltonian system with two degrees of freedom in presence of first order resonance // *Qualitative Theory of Dynamical Systems*. 2013. Vol. 12. Issue 1. P. 207–216. <https://doi.org/10.1007/s12346-012-0077-x>
11. Маркеев А. П. Об устойчивости стационарного вращения спутника вокруг нормали к плоскости орбиты // *Прикладная математика и механика*. 2019. Т. 83. № 5–6. С. 691–703. <https://doi.org/10.1134/S0032823519050072>
12. Маркеев А. П. О вращательном движении динамически симметричного спутника на эллиптической орбите // *Космические исследования*. 1967. Т. 5. Вып. 4. С. 530–539.
13. Маркеев А. П. О критическом случае пары нулевых корней в гамильтоновой системе с двумя степенями свободы // *Прикладная математика и механика*. 1998. Т. 62. Вып. 3. С. 372–382.
14. Bardin B. S. On nonlinear motions of Hamiltonian system in case of fourth order resonance // *Regular and Chaotic Dynamics*. 2007. Vol. 12. Issue 1. P. 86–100. <https://doi.org/10.1134/S156035470701008X>
15. Vera J. A. On the periodic solutions emerging from the cylindrical precession of an axisymmetric satellite in a circular orbit // *Mechanics Research Communications*. 2013. Vol. 51. P. 23–28. <http://doi.org/10.1016/j.mechrescom.2013.04.001>
16. Маркеев А. П. О кратном параметрическом резонансе в системах Гамильтона // *Прикладная математика и механика*. 2006. Т. 70. Вып. 2. С. 200–220.
17. Kholostova O. V. On nonlinear oscillations of a time-periodic Hamiltonian system at a 2:1:1 resonance // *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*. 2022. Vol. 18. No. 4. P. 481–512. <https://doi.org/10.20537/nd221101>
18. Kholostova O. V. On nonlinear oscillations of a near-autonomous Hamiltonian system in one case of integer nonequal frequencies // *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*. 2023. Vol. 19. No. 4. P. 447–471. <https://doi.org/10.20537/nd231103>
19. Маркеев А. П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978.
20. Glimm J. Formal stability of Hamiltonian systems // *Communications on Pure and Applied Mathematics*. 1964. Vol. 17. Issue 4. P. 509–526. <https://doi.org/10.1002/cpa.3160170408>
21. Moser J. Convergent series expansions for quasi-periodic motions // *Mathematische Annalen*. 1967. Vol. 169. Issue 1. P. 136–176. <https://doi.org/10.1007/BF01399536>
22. Мельников В. К. О некоторых случаях сохранения условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона // *Доклады Академии наук СССР*. 1965. Т. 165. № 6. С. 1245–1248. <https://www.mathnet.ru/rus/dan31959>
23. Byrd P. F., Friedman M. D. Handbook of elliptic integrals for engineers and scientists. Heidelberg–Berlin: Springer, 1971. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-65138-0>
24. Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И. Математические аспекты классической и небесной механики. М.: Эдиториал УРСС, 2002.

Поступила в редакцию 14.08.2024

Принята к публикации 20.10.2024

Холостова Ольга Владимировна, д. ф.-м. н., профессор, кафедра мехатроники и теоретической механики, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), 125993, Россия, г. Москва, Волоколамское ш., 4.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6810-2025>

E-mail: kholostova_o@mail.ru

Цитирование: О. В. Холостова. О движении динамически симметричного спутника в одном случае кратного параметрического резонанса // *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки*. 2024. Т. 34. Вып. 4. С. 594–612.

O. V. Kholostova

On the motion of a dynamically symmetric satellite in one case of multiple parametric resonance

Keywords: multiple parametric resonance, normalization, nonlinear oscillations, stability, periodic motions, KAM theory, satellite, cylindrical precession.

MSC2020: 70H08, 70H12, 70H14, 70H15, 70M20

DOI: [10.35634/vm240408](https://doi.org/10.35634/vm240408)

The paper studies the motions of a dynamically symmetric satellite (rigid body) relative to the center of mass in the central Newtonian gravitational field on a weakly elliptical orbit in the neighborhood of its stationary rotation (cylindrical precession). We consider the values of the parameters for which, in the limiting case of a circular orbit, one of the frequencies of small linear oscillations is equal to unity and the other is equal to zero, and the rank of the coefficient matrix of the linearized equations of the perturbed motion is equal to two, as well as a small neighborhood of this resonant point in the three-dimensional space of parameters. The resonant periodic motions of the satellite, analytical in fractional powers of a small parameter (the eccentricity of the orbit of the satellite's center of mass), are constructed. A rigorous nonlinear analysis of their stability is carried out. The methods of KAM theory are used to describe two- and three-frequency conditionally periodic motions of a satellite, with frequencies of different orders in a small parameter. A number of general theoretical issues concerning the considered multiple parametric resonance in Hamiltonian systems with two degrees of freedom that are close to autonomous and periodic in time are discussed. Several qualitatively different variants of parametric resonance regions are constructed. It is shown that in the general case the nature of nonlinear resonant oscillations of the system is determined by the first approximation system in a small parameter.

Funding. The study was supported by grant No. 24-11-00162 from the Russian Science Foundation, <https://rscf.ru/project/24-11-00162/> and carried out at the Moscow Aviation Institute (National Research University).

REFERENCES

1. Kholostova O. V. On periodic motions of a nonautonomous Hamiltonian system in one case of multiple parametric resonance, *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*, 2017, vol. 13, no. 4, pp. 477–504 (in Russian). <https://doi.org/10.20537/nd1704003>
2. Beletskii V. V. *Dvizhenie sputnika otnositel'no tsentra mass v gravitatsionnom pole* (Satellite's motion about center of mass in a gravitational field), Moscow: Moscow State University, 1975.
3. Sarychev V. A. Asymptotically stable stationary rotations of the satellite, *Kosmicheskie Issledovaniya*, 1965, vol. 3, issue 5, pp. 667–673 (in Russian).
4. Markeev A. P. Stability of stationary rotation of a satellite in an elliptical orbit, *Kosmicheskie Issledovaniya*, 1965, vol. 3, issue 5, pp. 674–676 (in Russian).
5. Markeev A. P. Stability of a canonical system with two degrees of freedom in the presence of resonance, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1968, vol. 32, issue 4, pp. 766–772. [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(68\)90108-1](https://doi.org/10.1016/0021-8928(68)90108-1)
6. Markeev A. P., Chekhovskaia T. N. On the stability of a satellite cylindrical precession in an elliptic orbit, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1976, vol. 40, issue 6, pp. 984–991. [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(76\)90139-8](https://doi.org/10.1016/0021-8928(76)90139-8)
7. Sokol'skii A. G. The problem of the stability of regular precessions of a symmetrical satellite, *Kosmicheskie Issledovaniya*, 1980, vol. 18, issue 5, pp. 698–706 (in Russian).
8. Markeyev A. P. The problem of the stability of the equilibrium position of a Hamiltonian system at 3:1 resonance, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2001, vol. 65, issue 4, pp. 639–645. [https://doi.org/10.1016/S0021-8928\(01\)00068-5](https://doi.org/10.1016/S0021-8928(01)00068-5)

9. Churkina T.E. On the stability of satellite's motion in the elliptical orbit in case of the cylindrical precession, *Matematicheskoe Modelirovanie*, 2004, vol. 16, no. 7, pp. 3–5 (in Russian).
<https://www.mathnet.ru/eng/mm249>
10. Bardin B. S., Maciejewski A. J. Transcendental case in stability problem of Hamiltonian system with two degrees of freedom in presence of first order resonance, *Qualitative Theory of Dynamical Systems*, 2013, vol. 12, issue 1, pp. 207–216. <https://doi.org/10.1007/s12346-012-0077-x>
11. Markeev A. P. On the stability of a steady rotation of a satellite around the normal to the orbital plane, *Mechanics of Solids*, 2020, vol. 55, issue 7, pp. 947–957. <https://doi.org/10.3103/S0025654420070146>
12. Markeev A. P. On rotational motion of a dynamically symmetrical satellite in an elliptic orbit, *Kosmicheskie Issledovaniya*, 1967, vol. 5, issue 4, pp. 530–539 (in Russian).
13. Markeev A. P. The critical case of a pair of zero roots in a two-degree-of-freedom hamiltonian system, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1998, vol. 62, issue 3, pp. 341–349.
[https://doi.org/10.1016/S0021-8928\(98\)00045-8](https://doi.org/10.1016/S0021-8928(98)00045-8)
14. Bardin B. S. On nonlinear motions of Hamiltonian system in case of fourth order resonance, *Regular and Chaotic Dynamics*, 2007, vol. 12, issue 1, pp. 86–100.
<https://doi.org/10.1134/S156035470701008X>
15. Vera J. A. On the periodic solutions emerging from the cylindrical precession of an axisymmetric satellite in a circular orbit, *Mechanics Research Communications*, 2013, vol. 51, pp. 23–28.
<http://doi.org/10.1016/j.mechrescom.2013.04.001>
16. Markeev A. P. Multiple parametric resonance in Hamiltonian systems, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2006, vol. 70, issue 2, pp. 176–194.
<https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2006.06.001>
17. Kholostova O. V. On nonlinear oscillations of a time-periodic Hamiltonian system at a 2:1:1 resonance, *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*, 2022, vol. 18, no. 4, pp. 481–512.
<https://doi.org/10.20537/nd221101>
18. Kholostova O. V. On nonlinear oscillations of a near-autonomous Hamiltonian system in one case of integer nonequal frequencies, *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*, 2023, vol. 19, no. 4, pp. 447–471. <https://doi.org/10.20537/nd231103>
19. Markeev A. P. *Tochki libratsii v nebesnoi mekhanike i kosmodinamike* (Libration points in celestial mechanics and cosmodynamics), Moscow: Nauka, 1978.
20. Glimm J. Formal stability of Hamiltonian systems, *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 1964, vol. 17, issue 4, pp. 509–526. <https://doi.org/10.1002/cpa.3160170408>
21. Moser J. Convergent series expansions for quasi-periodic motions, *Mathematische Annalen*, 1967, vol. 169, issue 1, pp. 136–176. <https://doi.org/10.1007/BF01399536>
22. Mel'nikov V. K. On some cases of conservation of conditionally periodic motions under a small change of the Hamiltonian function, *Soviet Mathematics. Doklady*, 1965, vol. 6, pp. 1592–1596.
<https://zbmath.org/0143.11801>
23. Byrd P. F., Friedman M. D. *Handbook of elliptic integrals for engineers and scientists*, Heidelberg–Berlin: Springer, 1971. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-65138-0>
24. Arnol'd V. I., Kozlov V. V., Neishtadt A. I. *Mathematical aspects of classical and celestial mechanics*, Berlin–Heidelberg: Springer, 2006. <https://doi.org/10.1007/978-3-540-48926-9>

Received 14.08.2024

Accepted 20.10.2024

Ol'ga Vladimirovna Kholostova, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Department of Mecha-
tronics and Theoretical Mechanics, Moscow Aviation Institute (National Research University), Voloko-
lamskoe shosse, 4, Moscow, 125993, Russia.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6810-2025>

E-mail: kholostova_o@mail.ru

Citation: O. V. Kholostova. On the motion of a dynamically symmetric satellite in one case of multiple
parametric resonance, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye
Nauki*, 2024, vol. 34, issue 4, pp. 594–612.