МАТЕМАТИКА 2009. Вып. 4

МАТЕМАТИКА

УДК 515.12

© *Е. С. Бастрыков*

О НЕКОТОРЫХ ТОЧКАХ РАСШИРЕНИЯ БЕЛЛА СЧЕТНОГО ДИСКРЕТНОГО ПРОСТРАНСТВА

Доказана теорема, вводящая эквивалентные определения для некоторых пределов сходящихся последовательностей в расширении Белла счетного дискретного пространства.

Ключевые слова: топология, общая топология, дискретные пространства, бикомпактные расширения, нарост расширения.

Введение

Рассматриваемое в данной статье пространство построено М. Беллом [1] и является бикомпактным расширением счетного дискретного пространства, нарост которого несепарабелен, но удовлетворяет условию Суслина. Дополнительные свойства этого расширения получены в [2]. Мы будем обозначать его BN. Дальнейшее исследование этого расширения было проведено в [3], были получены следующие результаты. Построена новая база для нароста. Доказано, что существуют счетные дискретные подмножества, как в N, так и в $BN \setminus N$, замыкания которых гомеоморфны βN — бикомпактному расширению Стоуна–Чеха счетного дискретного пространства. С другой стороны, показано, что существуют счетные дискретные подмножества N, наросты которых состоят из одной точки, то есть являющиеся сходящимися последовательностями. Также в [3] доказано, что дискретные подмножества, замыкание которых гомеоморфно βN, и сходящиеся последовательности образуют π-сети в BN.

В данной статье продолжено исследование этого пространства и доказана теорема, дающая эквивалентное определение точек, являющихся пределами описанных в [3] сходящихся последовательностей.

§ 1. Конструкция расширения Белла счетного дискретного пространства

Приведем конструкцию расширения Белла (см. [1]).

Пусть $P = \{f \in \omega^\omega : 0 \leqslant f(n) \leqslant n+1$ для всех $n < \omega\}$. Определим

$$N = \{f|_n \colon f \in P,\ n \subset \omega\}$$

— множество всех сужений отображений $f \in P$ на $n \subset \omega$ (здесь под n понимается $\{0, 1, \ldots, n\}$).

Пусть $T = \{\pi \in N^\omega : \operatorname{dom}(\pi(n)) = n+1$ для всех $n < \omega\}$, где под $\operatorname{dom} s$ понимается область определения отображения $s \in N$ (то есть функция π сопоставляет каждому $n < \omega$ кусочек функции соответствующей длины). Для каждого $s \in N$ положим $C_s = \{t \in N : t|_{\operatorname{dom} s} = s\}$. Для $\pi \in T$ положим $C_\pi = \bigcup\{C_{\pi(n)} : n < \omega\}$. Отметим, что C_π и $N \setminus C_\pi$ бесконечны для всякого $\pi \in T$. Пусть B — нормальная база [4], порожденная множествами из

$$B' = \{C_\pi : \pi \in T\} \cup \{N \setminus C_\pi : \pi \in T\}.$$

Очевидно, что $\{\{s\} : s \in N\} \cup \{C_s : s \in N\} \subseteq B$. Определим BN как волмэновское расширение N по базе B. Это расширение и является расширением Белла [1].

Для $U \subseteq N$ через U^* будем обозначать нарост ($U^* = [U] \setminus U$), в том числе $N^* = BN \setminus N$.

В [3] рассматривается следующая база пространства BN. Для $\pi \in P$ и $M \subseteq w$ обозначим $C_{\pi|M} = \{C_{\pi(n)} : n \in M\}$ и определим семейство

$$\Gamma = \{C_{\pi|M} \setminus \bigcup_{\ell=1}^{m} C_{\pi_\ell} : \pi,\ \pi_\ell \in T,\ M \subseteq \omega,\ m \in \omega\}.$$

В [3] показано, что семейство $\widetilde{B} = \{U^* : U \in \Gamma\}$ является базой пространства N^*.

Отметим, что множество N в конструкции расширения BN можно рассматривать как частично упорядоченное множество, полагая, что $s < t$ тогда и только тогда, когда t является продолжением s, то есть $\operatorname{dom} s < \operatorname{dom} t$ и $t|_{\operatorname{dom} s} \equiv s$, для $s,\ t \in N$.

Пусть $A = \{s_i : i \in \omega\}$ — бесконечная цепь в N, то есть s_{i+1} является продолжением s_i, $\operatorname{dom} s_i < \operatorname{dom} s_{i+1}$ для $i \in \omega$. В [3] доказано, что A является сходящейся последовательностью.

Заметим также, что $\{f|_n : n \in \omega\}$ для $f \in P$ тоже является бесконечной цепью, а значит, и сходящейся последовательностью. Более того, любая бесконечная цепь является подпоследовательностью $\{f|_n : n \in \omega\}$ для некоторого $f \in P$. Таким образом, интересующие нас точки мы будем описывать как пределы последовательностей $\{f|_n : n \in \omega\}$ для $f \in P$.

§ 2. Основной результат

Теорема 1. *Для точки $x \in N^*$ следующие утверждения эквивалентны.*

1. *Точка x является пределом сходящейся последовательности $\{f|_n : n \in \omega\}$.*
2. *Для любой базовой окрестности $O_x = \left(C_{\pi|M} \setminus \bigcup_{\ell=1}^{m} C_{\pi_\ell}\right)^*$ точки x найдется C_{s_0}, такое, что $x \in \left(C_{s_0} \setminus \bigcup_{\ell=1}^{m} C_{\pi_\ell}\right)^* \subseteq O_x$.*
3. *Для точки x существует база в наросте, состоящая из множеств вида*

$$\left(N \setminus \bigcup_{j=1}^{k} C_{\pi_j}\right)^*.$$

Доказательство. (1⇒2) Для произвольной окрестности

$$O_x = \left(C_{\pi|M} \setminus \bigcup_{\ell=1}^{m} C_{\pi_\ell}\right)^*$$

точки x рассмотрим

$$O'_x = \left[C_{\pi|M} \setminus \bigcup_{\ell=1}^{m} C_{\pi_\ell}\right].$$

Так как $x = \lim\limits_{n\to\infty} f|_n$, то для O'_x найдется $n_0 \in \omega$, такой, что для всех $n \geqslant n_0$ $f|_n \in O'_x$.

Также отметим, что

$$C_{\pi|M} = \bigcup\{C_s :\ s = \pi(n) \text{ для всех } n \in M\},$$

а следовательно, $f|_{n_0} \in C_{s_0}$ для некоторого $C_{s_0} \subseteq C_{\pi|M}$, и, очевидно, $C_{f|_{n_0}} \subseteq C_{s_0} \subseteq C_{\pi|M}$.

Более того, несложно видеть, что C_{s_0} содержит и $f|_n$ для всех $n \geqslant n_0$, а значит, в замыкании содержит и точку x. Таким образом,

$$x \in \left[C_{s_0} \setminus \bigcup_{\ell=1}^{m} C_{\pi_\ell}\right] \subseteq O'_x,$$

а значит, и

$$x \in \left(C_{s_0} \setminus \bigcup_{\ell=1}^{m} C_{\pi_\ell}\right)^* \subseteq O_x.$$

(2⇒3) Очевидно, что для любого $s \in N$ можно найти такие n и π_i $(i = 1, \ldots, n)$, что

$$C_s^* = \left(N \setminus \bigcup_{i=1}^{n} C_{\pi_i}\right)^*.$$

И тогда по условиям

$$x \in \left(C_{s_0} \setminus \bigcup_{\ell=1}^{m} C_{\pi_\ell}\right)^* = \left(\left(N \setminus \bigcup_{i=1}^{n} C_{\pi_i}\right) \setminus \bigcup_{\ell=1}^{m} C_{\pi_\ell}\right)^* = \left(N \setminus \bigcup_{j=1}^{k} C_{\pi_j}\right)^* \subseteq O_x.$$

Таким образом, множества вида

$$\left(N \setminus \bigcup_{j=1}^{k} C_{\pi_j}\right)^*$$

образуют базу точки x.

(3⇒1) Отметим, что весь нарост N^* представим в виде объединения непересекающихся множеств $F_f = \bigcap\limits_{n\in\omega} C^*_{f|_n}$ для $f \in P$. Пусть точка $x \in N^*$ и $x \in F_f$ для некоторого $f \in P$.

По условиям, множества вида

$$\left(N \setminus \bigcup_{j=1}^{k} C_{\pi_j}\right)^*$$

образуют базу этой точки в наросте.

Отметим, что $N \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{k} C_{\pi_j} \supseteq \{f|_n : n \in \omega\}$. Действительно, если найдется $r \in \omega$, такое, что $f|_r \notin N \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{k} C_{\pi_j}$, то очевидно, что все продолжения $f|_r$ также не лежат в $N \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{k} C_{\pi_j}$. То есть

$$N \setminus \bigcup_{j=1}^{k} C_{\pi_j} \not\supseteq C_{f|_r}.$$

Но

$$x \in F_f \subseteq C^*_{f|_r} \not\subseteq \left(N \setminus \bigcup_{j=1}^{k} C_{\pi_j}\right)^*,$$

что противоречит тому, что $\left(N \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{k} C_{\pi_j}\right)^*$ — окрестность точки x.

Таким образом,

$$\bigcap \left\{ \left[N \setminus \bigcup_{j=1}^{k} C_{\pi_j} \right] \right\} \supseteq [\{f|_n : n \in \omega\}].$$

Отсюда

$$\{x\} = \bigcap \left\{ \left[N \setminus \bigcup_{j=1}^{k} C_{\pi_j} \right] \right\} \supseteq [\{f|_n : n \in \omega\}].$$

То есть $x = \lim\limits_{n\to\infty} f|_n$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bell M. G. Compact ccc non-separable spaces of small weight // Topology Proceedings. — 1980. — V. 5. — P. 11–25.
2. Грызлов А. А. О бикомпактных расширениях дискретных пространств // Фундаментальная и прикладная математика. — 1996. — Т. 2, № 3. — С. 803–848.
3. Gryzlov A., Bastrykov E., Golovastov R. On Bell's compactification of N // Topology Proceedings. — 2010. — V. 35. — P. 117–138 (E-published, 2009).
4. Frink O. Compactifications and semi-normal spaces // Amer. J. of Math. — 1964. — P. 602–607.

Поступила в редакцию 13.10.09

E. S. Bastrykov

About some points of Bell's compactification of countable discrete space

The theorem is proved which gives equivalent definitions of some limits of convergent sequence in Bell's compactification of countable discrete space.

Keywords: topology, general topology, discrete spaces, compactification, remainder.

Mathematical Subject Classifications: 54D35, 54D80, 54-06

Бастрыков Евгений Станиславович, аспирант, кафедра алгебры и топологии, Удмуртский государственный университет, 426000, г. Ижевск, ул. Университетская, 1, E-mail: vporoshok@gmail.com