

УДК 532.517.4: 519.632.4

© А. И. Карпов, А. А. Шумихин

**ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВНУТРЕННИХ ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЙ МЕТОДОМ КРУПНЫХ ВИХРЕЙ<sup>1</sup>**

Рассмотрена математическая модель дозвуковых нестационарных турбулентных течений несжимаемого газа, основанная на методе крупных вихрей. Приводятся описания модели подсеточной турбулентности и вычислительного алгоритма, представлены результаты параметрических расчетов турбулентных течений несжимаемого газа в прямоугольном канале при различных числах Рейнольдса.

*Ключевые слова:* турбулентное течение, метод крупных вихрей, вычислительная гидродинамика.

**Введение**

Использование системы нестационарных трехмерных уравнений Навье–Стокса для расчета турбулентных течений в настоящее время считается наиболее обоснованным подходом для получения достоверных результатов численного моделирования. Одной из возможных реализаций данного подхода является метод крупных вихрей (Large Eddy Simulation, LES), занявший устойчивое место среди перспективных направлений вычислительной гидроаэродинамики (например, [1]). Непосредственное преимущество этого метода проявляется в сравнении с другими основными (в некотором смысле альтернативными) подходами к моделированию турбулентных течений. С одной стороны, метод крупных вихрей требует меньших вычислительных ресурсов по сравнению с прямым численным моделированием (например, [2]), сохраняя при этом возможность детального описания крупномасштабных вихревых структур, ограниченных размерами вычислительной сетки. С другой стороны, полуэмпирические параметрические модели турбулентности (например, [3]), основанные на решении осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье–Стокса, не позволяют данные вихревые структуры выявить.

**§ 1. Постановка задачи**

В декартовой системе координат исходная система уравнений Навье–Стокса имеет вид

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i u_j) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \nu \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \quad (1.2)$$

где  $x_i$ ,  $u_i$  — компоненты координаты и скорости ( $i = 1, 2, 3$ ),  $t$  — время,  $p$  — давление,  $\nu$  — кинематическая вязкость.

Основой метода крупных вихрей (вихреразрешающего моделирования) является пространственная фильтрация системы трехмерных нестационарных уравнений Навье–Стокса, что приводит к разделению параметров течения на крупномасштабную и мелкомасштабную составляющие. При этом перенос импульса и энергии крупными вихрями моделируется точно, а характеристики турбулентности более мелких масштабов рассчитываются с использованием подсеточных моделей. Крупномасштабная составляющая выделяется при помощи использования операции пространственной фильтрации:

$$\bar{f}(x, t) = \int_D f(\xi, t) g(x, \xi, \Delta) d\xi. \quad (1.3)$$

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 07-08-96044-р\_урал\_a).

Здесь  $D$  — расчетная область,  $g$  — функция фильтра,  $\Delta$  — ширина фильтра, определяющая наименьший размер вихря, остающегося после применения фильтра. Функция фильтра  $g$  имеет вид

$$g(x, \xi) = \begin{cases} \frac{1}{V}, & \xi \in V, \\ 0, & \xi \notin V, \end{cases} \quad (1.4)$$

где  $V$  — объем ячейки.

При дискретизации исходной системы уравнений, с использованием метода конечных объемов, процедура фильтрации осуществляется неявно. Роль фильтра в данном случае выполняет дискретизация системы уравнений по пространству с шагом  $\bar{\Delta}$ , ограничивающая спектр турбулентных пульсаций длиной волны  $\lambda = 2\bar{\Delta}$ . Численная аппроксимация коротковолнового участка спектра пульсаций, то есть моделирование мелкомасштабной составляющей турбулентности, производится с использованием модели подсеточной турбулентности. Соответственно, операция фильтрации понимается как осреднение параметров течения по объемам ячеек расчетной сетки:

$$\bar{f}(x) = \frac{1}{V} \int_V f(\xi) d\xi, \quad \xi \in V. \quad (1.5)$$

После применения процедуры пространственной фильтрации (1.5) к системе уравнений (1.1)–(1.2) при использовании осреднения по Рейнольдсу для всех переменных система уравнений преобразуется к виду

$$\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j} = 0, \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i \bar{u}_j) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \nu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}, \quad (1.7)$$

где тензор подсеточных напряжений определяется соотношением

$$\tau_{ij} = \overline{u_i u_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j. \quad (1.8)$$

В модели Смагоринского [4] полагается, что анизотропная часть тензора подсеточных напряжений пропорциональна тензору осредненных скоростей деформаций

$$\tau_{ij} = -2\nu_{sgs} \bar{S}_{ij}, \quad (1.9)$$

где  $\bar{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right)$ .

Подсеточная вязкость определяется как функция тензора скоростей деформаций и размера фильтра:

$$\nu_{sgs} = (C_S \bar{\Delta})^2 |\bar{S}|. \quad (1.10)$$

Здесь  $C_S$  — параметр Смагоринского (для течения в канале  $C_S = 0,1$  [5]),  $\bar{\Delta}$  — ширина фильтра,  $|\bar{S}| = \sqrt{2\bar{S}_{ij}\bar{S}_{ij}}$ . Ширина фильтра рассчитывается по формуле  $\bar{\Delta} = (\Delta x \Delta y \Delta z)^{1/3} = \sqrt[3]{V}$ , где  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  — размеры ячеек сетки по соответствующим осям.

Окончательно уравнение сохранения импульса записывается в следующем виде:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{u}_i \bar{u}_j)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\nu + \nu_{sgs}) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}. \quad (1.11)$$

## § 2. Вычислительный алгоритм

Для численного решения рассмотренной выше постановки задачи используется метод конечных объемов [6]. Запишем уравнение (1.11) следующим образом:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla F(u) + \nabla L(u, \nabla u) + \nabla H(p) = 0, \quad (2.1)$$

где операторы  $F$  (конвективные члены),  $L$  (диффузионные члены) и  $H$  (члены, включающие давление) определяются как

$$\nabla F(u) = \frac{\partial(\bar{u}_i \bar{u}_j)}{\partial x_j}, \quad (2.2)$$

$$\nabla L(u, \nabla u) = -\frac{\partial}{\partial x_j} (\nu + \nu_{sgs}) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}, \quad (2.3)$$

$$\nabla H(p) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i}. \quad (2.4)$$

Метод конечных объемов заключается в дискретизации уравнения (2.1), представленного в интегральной форме

$$\int_V \frac{\partial u}{\partial t} dV + \int_V \nabla F(u) dV + \int_V \nabla L(u, \nabla u) dV + \int_V \nabla H(p) dV = 0, \quad (2.5)$$

где  $V$  — объем расчетной ячейки. Используя теорему Остроградского–Гаусса, преобразуем уравнение к виду

$$\int_V \frac{\partial u}{\partial t} dV + \oint_S \nabla F(u) \cdot n dS + \oint_S \nabla L(u, \nabla u) \cdot n dS + \oint_S \nabla H(p) \cdot n dS = 0, \quad (2.6)$$

где  $S$  — площадь поверхности контрольного объема,  $n$  — внешняя единичная нормаль к поверхности.

Интеграл уравнения (2.6) по контрольному объему расчетной области определяется как сумма интегралов потоков через все его грани:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{V} \sum_k \left( \int_{S_k} \nabla F(u) \cdot n_k dS + \int_{S_k} \nabla L(u, \nabla u) \cdot n_k dS + \int_{S_k} \nabla H(p) \cdot n_k dS \right) = 0, \quad (2.7)$$

где  $S_k$  — площадь  $k$ -ой грани контрольного объема, для рассматриваемой здесь декартовой системы координат  $k = 1, 6$ .

Дискретизация уравнения (2.7) по пространству проводилась следующим образом: для диффузионного члена  $L$  и члена  $H$ , включающего давление, использовалась центрально-разностная схема второго порядка точности, для конвективного члена  $F$  — противопоточная разностная схема. Здесь использовалась противопоточная схема третьего порядка точности QUICK (Quadratic Upwind Interpolation for Convective Kinematics) [7], [8]. Для вычисления  $F$  необходимо определить значения компонент вектора скорости в центре контрольного объема и на его гранях. Разложение скорости  $u$  в степенной ряд в окрестности точки  $i + 1/2$  приводит к следующим значениям  $u$  в  $i$ -ом и  $i + 1$ -ом узлах (рис. 1):

$$u_{i+1} = u_{i+1/2} + \left(\frac{\Delta x}{2}\right) \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i+1/2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta x}{2}\right)^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i+1/2}, \quad (2.8)$$

$$u_i = u_{i+1/2} - \left(\frac{\Delta x}{2}\right) \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i+1/2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta x}{2}\right)^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i+1/2}. \quad (2.9)$$

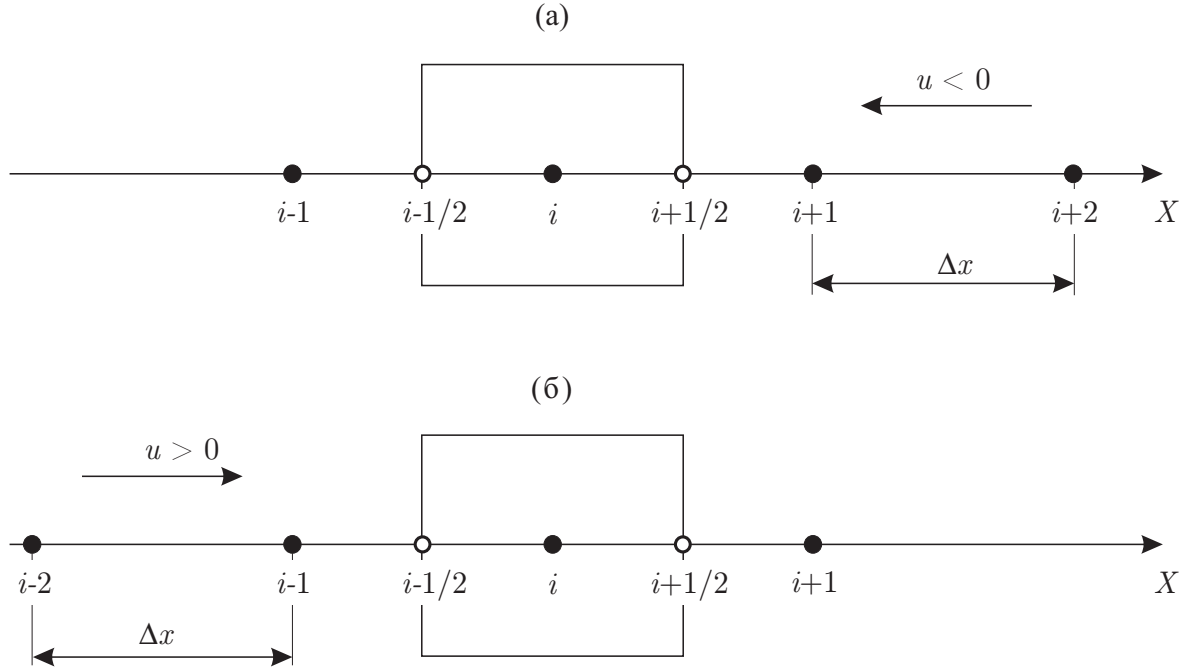


Рис. 1. Узлы расчетной сетки в окрестности  $i$ -го контрольного объема: (а)  $u < 0$ ; (б)  $u > 0$ .

Складывая уравнения (2.8) и (2.9), получаем соотношение для  $u_{i+1/2}$ :

$$u_{i+1/2} = \frac{u_i + u_{i+1}}{2} - \frac{(\Delta x)^2}{8} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{i+1/2}. \tag{2.10}$$

В зависимости от направления скорости для вычисления производной  $\left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{i+1/2}$  используются различные узлы в окрестности контрольного объема:

$$u_i < 0 : \quad \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{i+1/2} = \frac{u_i - 2u_{i+1} + u_{i+2}}{\Delta x^2}, \tag{2.11}$$

$$u_i > 0 : \quad \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{i+1/2} = \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{\Delta x^2}. \tag{2.12}$$

Аналогично для  $u_{i-1/2}$ :

$$u_{i-1/2} = \frac{u_{i-1} + u_i}{2} - \frac{(\Delta x)^2}{8} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{i-1/2}, \tag{2.13}$$

$$u_i < 0 : \quad \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{i-1/2} = \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{\Delta x^2}, \tag{2.14}$$

$$u_i > 0 : \quad \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{i-1/2} = \frac{u_i - 2u_{i-1} + u_{i-2}}{\Delta x^2}. \tag{2.15}$$

Градиент скорости в центре контрольного объема  $\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_i$  вычисляется с использованием уравнений (2.10) и (2.13) следующим образом:

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_i = \frac{u_{i+1/2} - u_{i-1/2}}{\Delta x} = \frac{1}{2\Delta x} \left( (u_{i+1} - u_{i-1}) - \left( \frac{\Delta x}{2} \right)^2 \left( \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{i+1/2} - \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{i-1/2} \right) \right) =$$

$$= \frac{1}{2\Delta x} (u_{i+1} - u_{i-1}) - \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta x}{2} \right)^2 \left( \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_i. \quad (2.16)$$

Далее, учитывая направление скорости в центре контрольного объема, запишем выражения для  $\left( \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_i$ . В случае  $u_i < 0$  используем уравнения (2.11), (2.14):

$$\left( \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_i = \frac{u_{i+2} - 3u_{i+1} + 3u_i - u_{i-1}}{\Delta x^3}, \quad (2.17)$$

и уравнение (2.16) преобразуется к виду

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_i = \frac{1}{8\Delta x} (-u_{i+2} + 7u_{i+1} - 3u_i - 3u_{i-1}). \quad (2.18)$$

Аналогично для  $u_i > 0$  (используются уравнения (2.12) и (2.15)):

$$\left( \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_i = \frac{u_{i+1} - 3u_i + 3u_{i-1} - u_{i-2}}{\Delta x^3}, \quad (2.19)$$

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_i = \frac{1}{8\Delta x} (3u_{i+1} + 3u_i - 7u_{i-1} + u_{i-2}). \quad (2.20)$$

Для дискретизации уравнений по времени использовалась гибридная явно- неявная схема второго порядка точности [9, 10]. Конвективные члены (дискретный оператор  $F_{disc}$ ) вычислялись по явной схеме Адамса–Бэшфорта, а диффузионные (дискретный оператор  $L_{disc}$ ) неявно, по схеме Адамса–Мултона:

$$\frac{u^* - u^n}{\Delta t} + \left[ \frac{3}{2} F_{disc}(u^n) - \frac{1}{2} F_{disc}(u^{n-1}) \right] + \left[ \frac{1}{2} L_{disc}(u^*) + \frac{1}{2} L_{disc}(u^n) \right] + H_{disc}(p^n) = 0, \quad (2.21)$$

где верхний индекс  $n$  — номер слоя по времени.

Решение задачи численного моделирования дозвуковых течений требует привлечения алгоритма для расчета поля давления. Здесь использован подход [6, 10], заключающийся в следующей итерационной последовательности. Для некоторого приближения давления  $p^*$  вычисляются приближенные значения полей скоростей  $u^*$ , после чего проводится коррекция давления через интегрирование уравнения Пуассона для поправки к давлению  $p'$

$$\nabla^2 p' = \frac{1}{\Delta t} \nabla u^*, \quad (2.22)$$

которая обеспечивает выполнение уравнения неразрывности при подстановке в него откорректированного значения скорости  $u^{n+1}$

$$u^{n+1} = u^* - \Delta t \nabla p'. \quad (2.23)$$

Далее вычисляется новое приближение давления  $p^{n+1}$ :

$$p^{n+1} = p^n + p'. \quad (2.24)$$

### § 3. Граничные и начальные условия

Рассмотрим граничные условия для расчетной области, приведенной на рис. 2. На верхней и нижней границах расчетной области (непроницаемые поверхности пластин) выставлялись условия непротекания и прилипания для всех компонент вектора скорости:

$$z = 0, \quad z = h: \quad u(x, y) = v(x, y) = w(x, y) = 0. \quad (3.1)$$

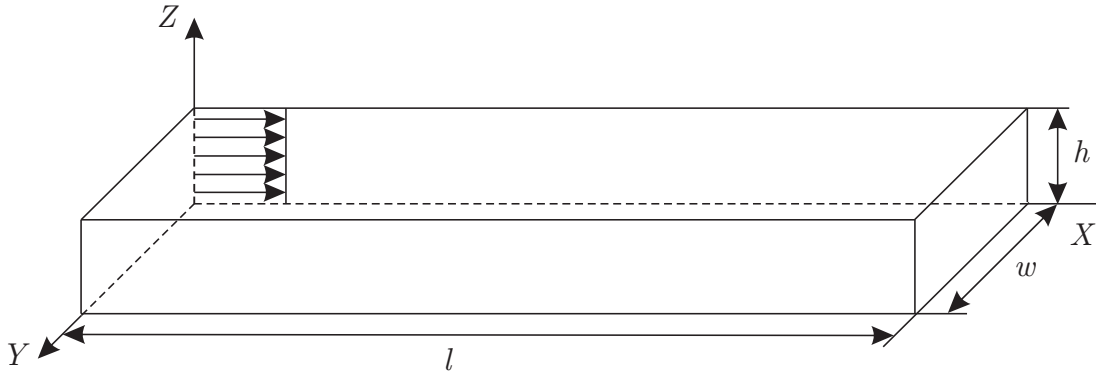


Рис. 2. Расчетная область.

На боковых границах выставлялись периодические граничные условия:

$$y = 0 : \quad u_1(x, z) = u_{k-1}(x, z), \quad (3.2)$$

$$y = w : \quad u_k(x, z) = u_2(x, z). \quad (3.3)$$

При расчете нестационарных течений газа большое значение имеют граничные условия на выходной границе  $x = l$ . В потоке, содержащем вихревые структуры (в произвольном случае захватывающие выходную границу расчетной области), в пределах расчетной области генерируются волны давления, которые должны выйти из нее без отражения. Иначе возникнет существенное искажение реальной картины течения. Применение общепринятого «мягкого» граничного условия (нулевого нормального градиента) вида  $\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0$  не дает удовлетворительных результатов именно по причине указанного эффекта возникновения волн давления. Здесь использовано граничное условие конвективного переноса (неотражающее граничное условие [1]):

$$x = l : \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} + u_{bor} \frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0, \quad (3.4)$$

где  $\Phi(y, z)$  — искомая функция (здесь это компоненты вектора скорости, в более общем случае — все рассчитываемые переменные),  $u_{bor}$  — значение нормальной компоненты скорости на границе.

Во входном сечении задан однородный профиль продольной скорости и невозмущенное поле течения для поперечных компонент

$$x = 0 : \quad u(y, z) = u_0, \quad v(y, z) = w(y, z) = 0. \quad (3.5)$$

Для начального распределения поля течения принято условие покоя:

$$t = 0 : \quad u(x, y, z) = v(x, y, z) = w(x, y, z) = 0. \quad (3.6)$$

#### § 4. Результаты расчетов

Проведены расчеты дозвукового течения воздуха в нормальных условиях (при атмосферном давлении  $p = 101320$  Па и комнатной температуре  $T = 300$  К). Размеры расчетной области имеют следующие значения:  $l = 0,15$  м,  $w = 0,03$  м,  $h = 0,03$  м. Расчеты проводились для трех значений продольной скорости на входе  $u_0$ , соответствующих числам Рейнольдса  $Re = \frac{u_0 h}{2\nu}$ , равных 750, 4000, 23000. Число узлов разностной сетки составило  $100 \times 30 \times 30$ .

На рис. 3 представлено распределение изолиний продольной скорости. Очевидна реализация ламинарного, переходного турбулентного режимов течения соответственно. На рис. 4 показаны профили продольной скорости в поперечном сечении и приводится сравнение с известными установленными теоретическими, расчетными и эмпирическими зависимостями. На рис. 5 представлено распределение кинетической энергии для турбулентных режимов течения.

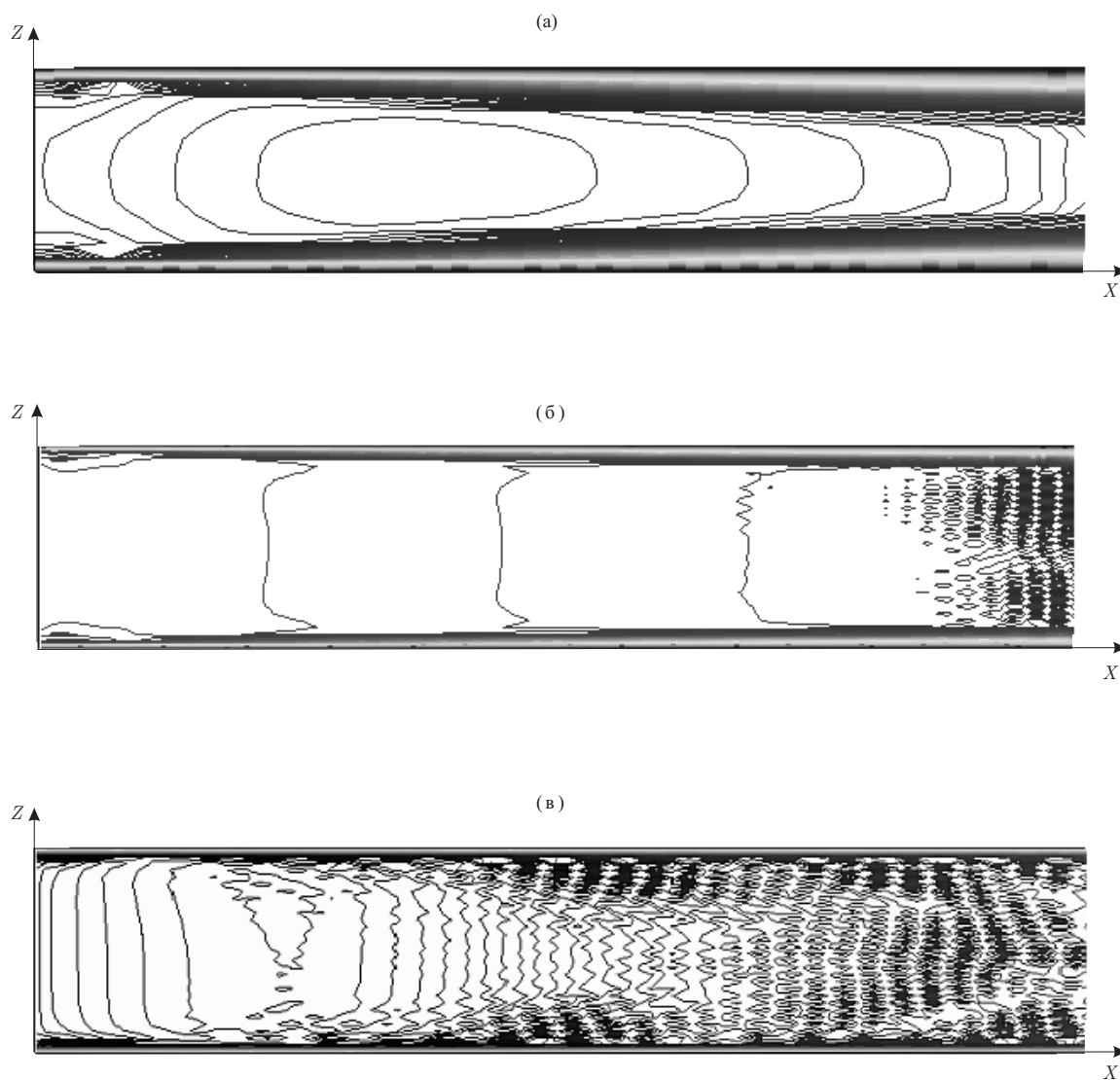
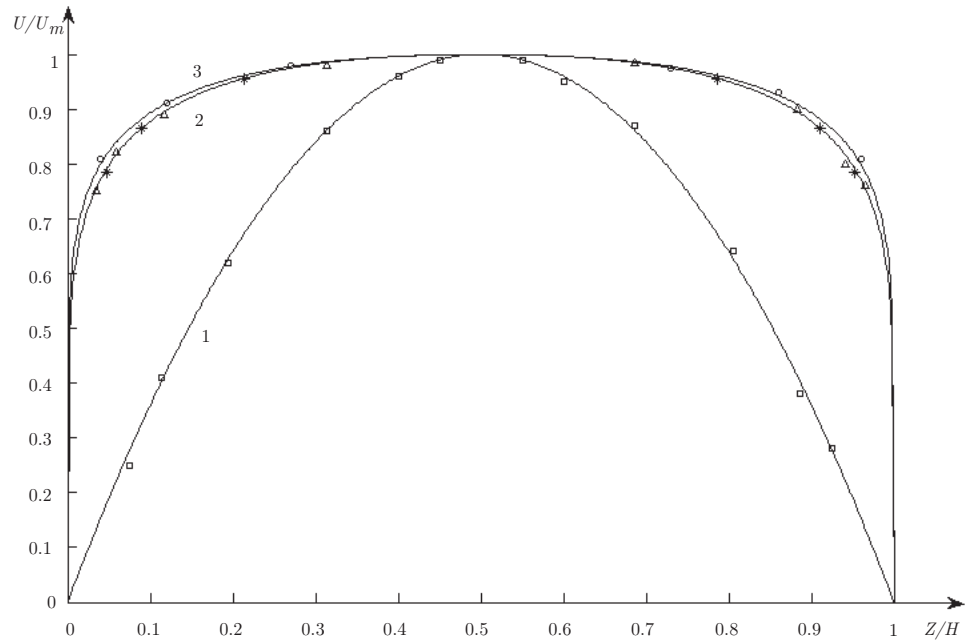
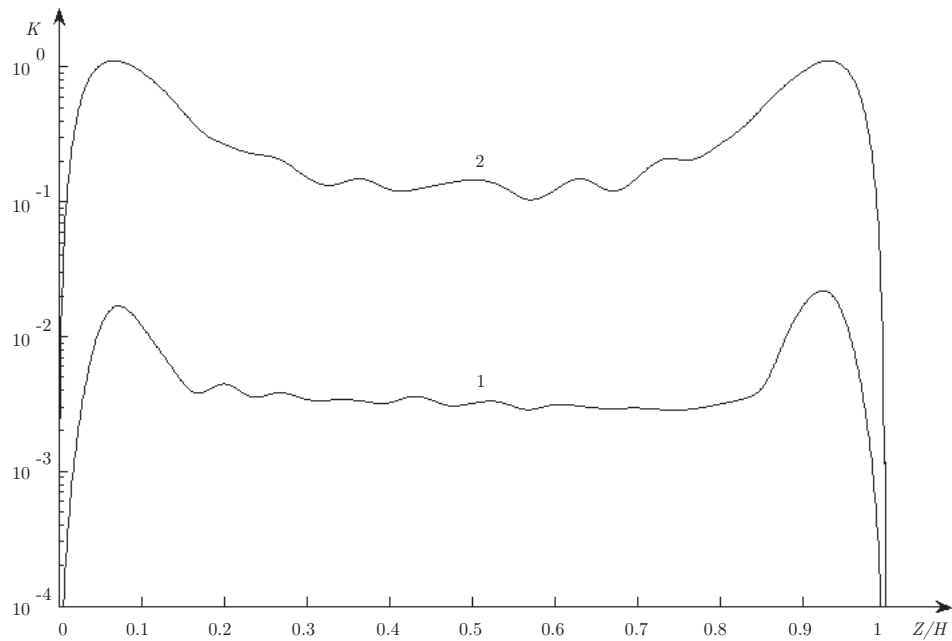


Рис. 3. Изолинии продольной скорости; (а)  $Re=750$ , (б)  $Re=4000$ , (в)  $Re=23000$ .



**Рис. 4.** Распределение продольной скорости в поперечном сечении. Настоящий расчет: сплошная линия соответствует  $Re=750$ , треугольники  $\Delta$  соответствуют  $Re=4000$ , кружки  $\circ$  соответствуют  $Re=23000$ ; эмпирические зависимости [11]: 1 —  $Re=750$ , 2 —  $Re=4000$ , 3 —  $Re=23000$ ; расчет [2] (прямое численное моделирование): звездочки  $*$  соответствуют  $Re=2500$ .



**Рис. 5.** Распределение кинетической энергии турбулентности в поперечном сечении: 1 соответствует  $Re=4000$ , 2 соответствует  $Re=23000$ .



**Заключение**

Целью проведения представленных в данной статье расчетов является тестирование собственного кода программной реализации метода крупных вихрей для моделирования турбулентных течений. В целом полученные результаты согласуются с известными параметрическими зависимостями, характеризующими закономерности турбулентных течений. Направление дальнейших исследований связано с применением метода крупных вихрей для моделирования турбулентных потоков неизоэнтальпического реагирующего газа с учетом химических реакций (главным образом — диффузионного горения).

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Волков К. Н., Емельянов В. Н. Моделирование крупных вихрей в расчетах турбулентных течений. — М.: Физматлит, 2008. — 368 с.
2. Липанов А. М., Кисаров Ю. Ф., Ключников И. Г. Численный эксперимент в классической гидромеханике турбулентных потоков. — Екатеринбург: УрО РАН, 2001. — 162 с.
3. Белов И. А., Исаев С. А. Моделирование турбулентных течений. — СПб.: БГТУ, 2001. — 108 с.
4. Smagorinsky J. General circulation experiments with the primitive equations // Mon. Weather Rev. — 1963. — Vol. 91, № 3. — P. 99–164.
5. Murray J. A., Piomelli U., Wallace J. M. Spatial and temporal filtering of experimental data a priori studies of subgrid-scale stress // Physics of Fluids. — 1996. — Vol. 8, № 7. — P. 1978–1980.
6. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей. Т. 1. — М.: Мир, 1991. — 504 с.
7. Leonard B. P. Comparison of Truncation Error of Finite-Difference and Finite-Volume Formulations of Convection Terms // NASA Technical Memorandum 105861, ICOMP-92-19. — 1992. — 14 p.
8. Leonard B. P. A stable and accurate convective modeling procedure based on quadratic upstream interpolation // Comput. Meth. Appl. Mech. Engr. — 1979. — Vol. 19, № 1. — P. 59–98.
9. Kirkpatrick M. R., Armfield S. W., Kent J. H. A representation of curved boundaries for the solution of the Navier-Stokes equations on a staggered three-dimensional Cartesian grid // Journal of Computational Physics. — 2003. — Vol. 184, № 1. — P. 1–36.
10. Kirkpatrick M. R., Armfield S. W., Kent J. H., Dixon T. Simulation of vortex shedding flows using high-order fractional step methods // ANZIAM Journal. — 2000. — Vol. 42(E). — P. C856–C876.
11. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. — М.: Наука, 1974. — 712 с.

Поступила в редакцию 20.08.09

*А. И. Карпов, А. А. Шумихин*

**A parametric study of internal turbulent flows by the Large Eddy Simulation**

The Large Eddy Simulation mathematical model for the subsonic unsteady turbulent flow of incompressible gas has been considered. The subgrid turbulence model, computational algorithm and numerical results of parametrical study of incompressible gas flow of in square channel under various Reynolds numbers has been presented.

*Keywords:* turbulent flow, large eddy simulation, computational fluid dynamics.

Mathematical Subject Classifications: 76F65, 65N06

Шумихин Андрей Александрович, научный сотрудник, Институт прикладной механики УрО РАН, 426067, Россия, г. Ижевск, ул. Т. Барамзиной, 34, E-mail: shumihin@udman.ru

Карпов Александр Иванович, д.ф.-м.н., главный научный сотрудник, Институт прикладной механики УрО РАН, 426067, Россия, г. Ижевск, ул. Т. Барамзиной, 34, E-mail: karpov@udman.ru