

УДК 533.6.011.3

© А. М. Липанов, А. Н. Семакин

## ОБТЕКАНИЕ ВЯЗКИМ ГАЗОМ СФЕРИЧЕСКИХ ЧАСТИЦ В ОГРАНИЧЕННОМ ОБЪЕМЕ

Рассмотрено течение вязкого газа в ограниченном объеме, в котором расположено от одной до четырех сфер. Описан численный метод решения задачи (метод конечных объемов). Представлены результаты расчетов.

*Ключевые слова:* многосвязная область, метод конечных объемов, вязкий газ.

### Введение

Рассмотрение многих возникающих на практике задач (сушка зерна в гуртах потоком теплового воздуха, фильтрация вязкой жидкости через поры в горных породах, очистка загрязненных или газообразных сред фильтрацией через слой частиц, находящихся в некотором объеме, и т. д.) сводится к необходимости расчета течения газа или жидкости через многосвязные области, которые чаще всего представляют собой ограниченный объем той или иной формы, заполненный большим количеством разнообразных частиц.

В известных авторам работах [1–3] рассматриваются только двух- и трехсвязные объемы (одно или два тела в неограниченном пространстве). В данной статье представлены результаты расчетов течения вязкого газа в областях более сложного строения на основе простого численного метода, предложенного в [4].

### § 1. Расчетная область

Рассматриваемая область представляет собой прямоугольный параллелепипед с одним входом в центре передней грани и несколькими выходами на задней грани. В этой области размещается от одной до четырех сфер следующим образом:

1. одна сфера располагается в центре области;
2. две сферы располагаются на продольной оси симметрии области;
3. центры трех сфер находятся в горизонтальной плоскости симметрии в вершинах треугольника;
4. четыре сферы образуют пирамиду с основанием, лежащим на нижней грани рассматриваемой области.

В случаях 1–3 область имеет два выхода, в случае 4 — четыре выхода.

### § 2. Численный метод решения

Введем глобальную декартовую систему координат  $X, Y, Z$ , в которой рассматривается вся исходная область в целом, и разделим эту область на  $N$  подобластей или конечных объемов (КО) [4]. Все эти КО можно свести к пяти стандартным видам: прямоугольный, сферический, пирамидальный, кольцевой и цилиндрический. Прямоугольный объем представляет собой обычный прямоугольный параллелепипед. Сферический КО используется для выделения пространства около сферы вдали от боковых стенок рассматриваемой области. Одной из его шести граней является поверхность сферы. Пирамидальный КО имеет клинообразную форму

и выделяет пространство около точки касания сферы и одной из боковых сторон области при их касании. У кольцевого КО одна грань является частью цилиндрической поверхности. Цилиндрический КО представляет собой обычный цилиндр, используемый для описания входа и выходов.

В каждом КО введем локальную декартовую систему координат  $x, y, z$ . Эти локальные системы координат определяются заданием начала координат  $O(a_0^1, a_0^2, a_0^3)$  и базисных векторов  $\mathbf{i} = (a_1^1, a_1^2, a_1^3)$ ,  $\mathbf{j} = (a_2^1, a_2^2, a_2^3)$ ,  $\mathbf{k} = (a_3^1, a_3^2, a_3^3)$  в глобальной системе координат  $X, Y, Z$ . Локальные  $x$ -,  $y$ -,  $z$ - и глобальные  $X$ -,  $Y$ -,  $Z$ - координаты точки связаны соотношениями:

$$\begin{aligned} X &= a_0^1 + a_1^1 x + a_2^1 y + a_3^1 z, \\ Y &= a_0^2 + a_1^2 x + a_2^2 y + a_3^2 z, \\ Z &= a_0^3 + a_1^3 x + a_2^3 y + a_3^3 z. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Во всех видах КО, кроме прямоугольного, необходимо также вводить криволинейную систему координат  $\xi, \eta, \zeta$ , в которой данный КО можно представить в виде параллелепипеда:

1. сферический КО

$$\xi = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \eta = -\frac{y}{x}, \quad \zeta = -\frac{z}{x}, \quad (2.2)$$

где  $-1 \leq \eta \leq 1$ ,  $-1 \leq \zeta \leq 1$ ;

2. пирамидальный КО

$$\xi = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{\sqrt{x^2 + z^2}}, \quad \eta = \frac{2y}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \zeta = -\frac{z}{x}, \quad (2.3)$$

где  $0 \leq \eta \leq \frac{1}{r}$ ,  $-1 \leq \zeta \leq 1$ ,  $r$  — радиус сферы;

3. кольцевой КО

$$\xi = \sqrt{x^2 + z^2}, \quad \eta = y, \quad \zeta = -\frac{z}{x}, \quad (2.4)$$

где  $-1 \leq \zeta \leq 1$ ;

4. цилиндрический КО

$$\xi = x, \quad \eta = \sqrt{y^2 + z^2}, \quad \zeta = \arctg \frac{z}{y} + \pi k, \quad (2.5)$$

где  $-\pi \leq \zeta \leq \pi$ .

Во всех случаях, кроме первого, криволинейные системы координат ортогональны.

Далее для каждого полученного КО в его локальной системе координат формулируется система уравнений гидромеханики в безразмерной форме [5,6]. Эта система включает уравнение неразрывности, три уравнения импульса и уравнение энергии:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{2} \left( u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} \right) + \frac{1}{2} \rho \cdot \operatorname{div} (\mathbf{V}) = 0, \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} + \frac{\partial uw}{\partial z} \right) - \frac{1}{\rho \operatorname{Re}} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = \\ = -\frac{1}{\rho k M^2} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{2} u \cdot \operatorname{div} (\mathbf{V}) + \frac{1}{3 \rho \operatorname{Re}} \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{div} (\mathbf{V}), \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2} \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} + \frac{\partial vw}{\partial z} \right) - \frac{1}{\rho \text{Re}} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) = \\ = -\frac{1}{\rho k M^2} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{2} v \cdot \text{div}(\mathbf{V}) + \frac{1}{3 \rho \text{Re}} \frac{\partial}{\partial y} \text{div}(\mathbf{V}), \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{2} \left( u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial uw}{\partial x} + \frac{\partial vw}{\partial y} + \frac{\partial w^2}{\partial z} \right) - \frac{1}{\rho \text{Re}} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) = \\ = -\frac{1}{\rho k M^2} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{2} w \cdot \text{div}(\mathbf{V}) + \frac{1}{3 \rho \text{Re}} \frac{\partial}{\partial z} \text{div}(\mathbf{V}), \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{2} \left( u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{\partial uT}{\partial x} + \frac{\partial vT}{\partial y} + \frac{\partial wT}{\partial z} \right) - \frac{k}{\rho \text{Re} \text{Pr}} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) = \\ = -\frac{(k-1)}{\rho} p \text{div}(\mathbf{V}) + \frac{1}{2} T \cdot \text{div}(\mathbf{V}) + \frac{k(k-1)M^2}{\rho \text{Re}} \left( 2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \right. \\ \left. + \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 - \frac{2}{3} (\text{div}(\mathbf{V}))^2 \right). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Здесь  $\mathbf{V} = (u, v, w)$  — вектор скорости,  $p, \rho, T$  — давление, плотность и температура,  $\text{Re} = 100$  — число Рейнольдса,  $\text{Pr} = 1$  — число Прандтля,  $M = 0,6$  — число Маха,  $k = 1,4$  — отношение изобарной  $C_p$  и изохорной  $C_v$  теплоемкостей и

$$\text{div}(\mathbf{V}) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}. \quad (2.11)$$

Безразмерное уравнение состояния:

$$p = \rho T. \quad (2.12)$$

За масштабные величины при вычислении безразмерных комплексов берутся:

$h$  — диаметр входного отверстия,

$U_0$  — максимальная величина продольной компоненты скорости в поперечном сечении входа,

$p_0$  — характерное давление,

$\rho_0$  — характерная плотность.

При интегрировании данной системы по времени используется метод Рунге–Кутты второго порядка точности [7]. При вычислении частных производных по пространственным переменным применяется центральная разностная схема произвольного порядка точности [8]. Для устранения нефизических осцилляций в схему добавляется искусственная диссипация [9].

После проведения очередного шага по времени из одного КО в другой передаются необходимые для дальнейших расчетов значения гидромеханических параметров (скорость, плотность и температура) с помощью интерполяции полиномом второй степени.

Поскольку плотность и температура являются скалярными величинами, то их значения не будут зависеть от ориентации локальных систем координат разных КО. Однако компоненты вектора скорости при переходе из одной системы координат в другую меняются. Поэтому при передаче компонент вектора скорости из одного КО в другой они сначала переводятся в глобальную систему координат и далее из глобальной системы координат в локальную, но уже другого КО.

Начальные и граничные условия ставятся согласно [8, 10].

### § 3. Результаты расчетов

Во всех случаях течение газа получается стационарным. На рис. 1–4 приведены соответствующие поля скоростей, когда в расчетной области располагается от одной до четырех сфер. Ниже приведены результаты расчетов для каждого случая отдельно.

Таблица 1. Величина  $C_x$  для случая 1

$N$	2	4	6
49338	1,042	1,165	1,167
90364	1,075	1,145	1,147
153176	1,080	1,141	1,140
285528	–	1,180	–
378918	–	1,170	–

Таблица 2. Величина  $\omega_{max}$  для случая 1

$N$	2	4	6
49338	12,381	14,588	14,793
90364	14,337	15,773	15,885
153176	12,965	14,431	14,625
285528	–	14,776	–
378918	–	14,670	–

При проведении расчетов для случая 1 (одна сфера), когда сфера располагается в центре расчетной области, исследовалась сходимость решения в зависимости от порядка точности разностной схемы и количества точек разностной сетки. При этом рассматривались разностные схемы со вторым, четвертым и шестым порядками точности на сетках с количеством точек 49338, 90364, 153176, 285528 и 378918. В табл. 1 приведены значения коэффициента сопротивления сферы  $C_x$ , а в табл. 2 — максимум модуля вектора вихря в зависимости от порядка точности и количества точек разностной сетки в один и тот же момент времени  $t = 30$ . Из этих таблиц видно, что разница между схемами с четвертым и шестым порядками точности для коэффициента сопротивления  $C_x$  не превосходит 0,2%, а для максимума модуля завихренности — 1,5% на всех сетках. Различие между схемами второго и четвертого порядков для  $C_x$  составляет 11,8%, 6,5%, 5,6%, а для завихренности — 17,8%, 10,0%, 11,3% на соответствующих сетках. Опираясь на эти результаты, можно утверждать, что при проведении расчетов с малым числом Рейнольдса достаточно использовать схему четвертого порядка точности, и переход к схемам более высокого порядка не имеет смысла.

Изменение коэффициента сопротивления  $C_x$  для схемы четвертого порядка точности в зависимости от количества точек сетки составляет 1,7%, 0,4%, 3,4%, 0,8%, а изменение максимума модуля завихренности — 8,1%, 8,5%, 2,4%, 0,7%. Если же сравнивать их только на сетках с количеством точек 49338 и 378918, то изменение  $C_x$  составит 0,4%, а изменение максимума модуля завихренности — 0,6%.

В табл. 3 для схемы четвертого порядка точности на различных сетках приведены:  $\alpha_u$  — угол отрыва потока от сферы,  $\alpha_p$  — угол, отсчитываемый от задней критической точки сферы до точки минимума давления на поверхности сферы,  $p_{min}$  — минимальное давление на сфере. Все данные приведены для вертикальной плоскости симметрии. Характер изменения этих величин при переходе от одной сетки к другой аналогичен изменению  $C_x$  и  $\omega_{max}$ , при этом разница между ними на сетках с количеством точек 49338 и 378918 составляет: 0,6% для  $\alpha_u$ , 0,4% для  $\alpha_p$  и 0,8% для  $p_{min}$ .

Таблица 3. Некоторые характеристики течения для случая 1

$N$	$\alpha_u$	$\alpha_p$	$p_{min}$
49338	65,74	113,20	1,210
90364	65,70	113,96	1,210
153176	65,99	114,44	1,207
285528	66,16	116,57	1,226
378918	66,14	113,63	1,219

Таблица 4. Некоторые параметры течения для случая 2

$l$	$p_1$	$p_2$	$p_3$	$p_4$	$C_x^1$	$C_x^2$	$\alpha_u$	$\alpha_p$	$p_{min}$
0	2,17	—	—	1,37	—	—	67	114	1,17
1	2,17	1,35	1,34	1,37	1,03	-0,10	73	119	1,17
3	2,18	1,38	1,38	1,37	0,92	0,10	81	119	1,20
6	2,19	1,39	1,40	1,37	0,94	0,15	81	119	1,21
9	2,19	1,39	1,40	1,38	0,94	0,16	81	119	1,21

Такой характер изменений при переходе от одной сетки к другой (см. табл. 1–3) связан с тем, что при этом количество точек сетки изменяется некратно и рассмотренные величины вычисляются по набору точек, занимающих немного иное положение в пространстве, что и влечет подобные колебания около некоторого истинного значения как в большую, так и в меньшую стороны, причем разница между наибольшей и наименьшей из рассмотренных сеток не превышает 1%.

В табл. 4 представлены некоторые параметры течения для случая 2 (две сферы). В этой таблице  $l$  — расстояние между сферами (радиусы),  $p_1$  и  $p_2$  — значения давления в передней и задней критических точках первой сферы,  $p_3$  и  $p_4$  — значения давления в передней и задней критических точках второй сферы,  $C_x^1$  и  $C_x^2$  — коэффициенты сопротивления первой и второй сфер соответственно,  $\alpha_u$  — угол отрыва потока от первой сферы,  $\alpha_p$  — угол, отсчитываемый от задней критической точки первой сферы до точки минимума давления на поверхности сферы,  $p_{min}$  — минимальное давление на сфере. Величины  $\alpha_u$ ,  $\alpha_p$  и  $p_{min}$  приведены для вертикальной плоскости симметрии.

При всех  $l$  общая картина распределения давления получается одинаковой. Давление достигает своего максимума в передней критической точке первой сферы. В остальном пространстве оно приблизительно постоянно,  $p \in (1,3; 1,4)$ . В выходных отверстиях  $p$  резко падает до 1.

Угол отрыва потока  $\alpha_u$  увеличивается с  $67^\circ$  при  $l = 0$  до  $81^\circ$  при  $l = 3$  и в дальнейшем не изменяется. Увеличение  $\alpha_u$  сопровождается уменьшением коэффициента сопротивления  $C_x^1$ , увеличением размеров вихревой области в кормовом пространстве первой сферы и увеличением коэффициента сопротивления второй сферы  $C_x^2$ . Из табл. 4 следует, что при некотором  $l \in (1; 3)$   $C_x^2 = 0$ , то есть главный вектор сил, действующих со стороны набегающего потока газа на вторую сферу, равен нулю. Но данное положение неустойчиво, так как при любых отклонениях от него на сферу начинает действовать сила, стремящаяся увести ее от данного положения.

При  $l = 6$  и  $l = 9$  параметры течения  $\alpha_u$ ,  $\alpha_p$ ,  $C_x^1$ ,  $C_x^2$  различаются незначительно (см. табл. 4). Поэтому можно сделать вывод, что при  $l \geq 6$  расстояние между сферами уже не влияет на структуру потока и каждая из сфер не чувствует изменение положения другой.

Для случая 3 (три сферы) коэффициенты сопротивления сфер имеют следующие значения:  $C_x^1 = 0,72$ ,  $C_x^2 = 0,63$ ,  $C_x^3 = 0,13$ , то есть наибольшему воздействию со стороны набегающе-

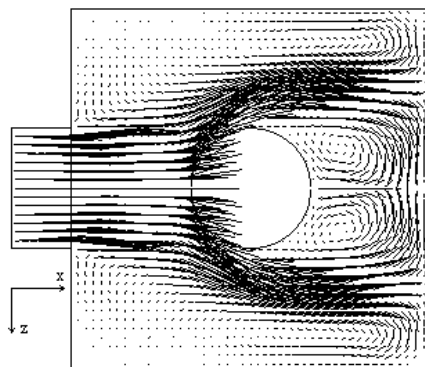


Рис. 1. Поле скоростей в горизонтальной плоскости симметрии для случая 1.

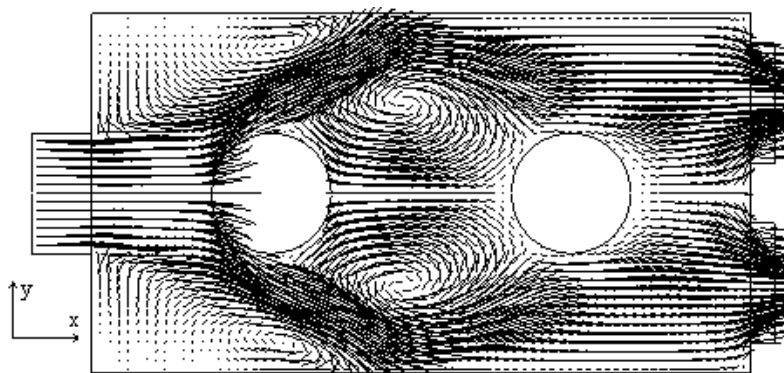


Рис. 2. Поле скоростей в вертикальной плоскости симметрии для случая 2.

го потока газа подвергаются первая и вторая от входа сферы. В точках лобовой поверхности этих сфер, расположенных под углами  $24^\circ$  и  $13^\circ$ , отсчитываемых от передних критических точек первой и второй сфер соответственно, в горизонтальной плоскости симметрии давление достигает своего максимума:  $p_{max}^1 = 1,99$  — для первой сферы,  $p_{max}^2 = 1,85$  — для второй сферы. Далее, в точках, расположенных под углами  $96^\circ$  и  $114^\circ$ , отсчитываемых от задних критических точек первой и второй сфер соответственно, давление принимает минимальные значения  $p_{min}^1 = 1,12$  для первой сферы и  $p_{min}^2 = 1,27$  для второй сферы. Они располагаются перед соответствующими точками отрыва потока, что соответствует результатам, полученным в теории пограничного слоя [5]. В остальной области, включая пространство около третьей сферы, давление находится в интервале  $(1,3; 1,4)$  и резко падает до 1 в выходных отверстиях из объема.

Для случая 4 при обтекании вязким газом пирамиды, составленной из 4-х сфер, получается следующее.

В пространстве перед пирамидой напротив входа можно выделить довольно четкую струю газа, движущуюся по направлению к пирамиде. Ниже уровня входного отверстия располагаются два больших вихря с осью вращения, параллельной оси  $y$ , которые по мере продвижения вверх по оси  $y$  уменьшаются в размере, приближаются к пирамиде и отходят к боковым граням. Около верхней и нижней граней параллелепипеда вдоль лобовой поверхности сфер располагаются два вихря с осью вращения, параллельной оси  $z$ . За пирамидой располагается область, заполненная многочисленными вихрями с осями вращения, параллельными как оси  $y$ , так и оси  $z$ . Данная область смещена преимущественно к основанию пирамиды. В кормовом пространстве сферы, образующей вершину пирамиды, располагаются два вихря, вытянутые к задней грани расчетной области в виде хвоста (на рис. 4 не показаны).

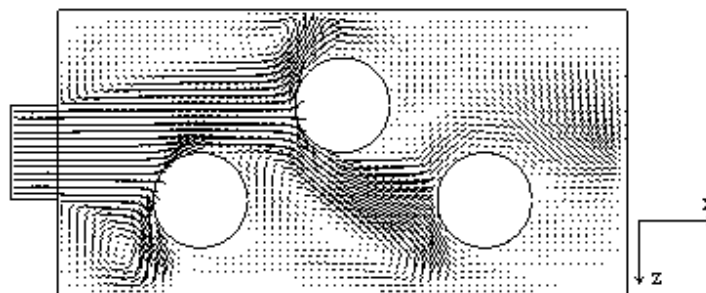


Рис. 3. Поле скоростей в горизонтальной плоскости симметрии для случая 3.

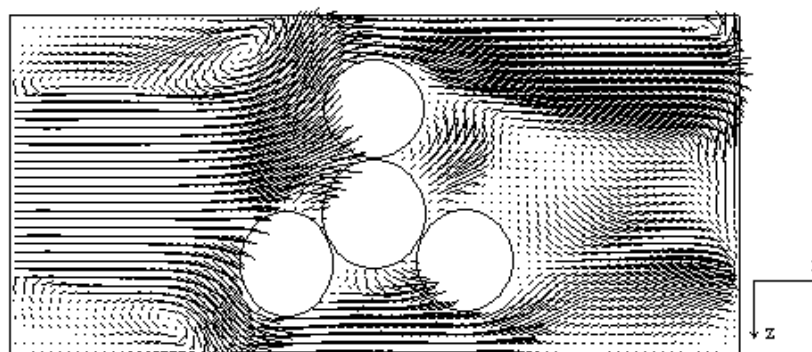


Рис. 4. Поле скоростей в горизонтальной плоскости для случая 4.

В центре пирамиды максимальное значение скорости равно 0,8, то есть величина скорости имеет тот же порядок, что и при входе в объем. Давление изменяется в интервале  $(2,3; 2,5)$ , температура — в интервале  $(1,4; 1,5)$ .

В области перед пирамидой давление лежит в интервале  $(2,7; 3)$ , после пирамиды — в интервале  $(1,7; 2)$ . В выходных отверстиях оно падает до 1.

Температура распределена по объему более равномерно,  $T \in (1,4; 1,5)$ . Только при входе газа в объем наблюдается небольшое понижение его температуры.

### Заключение

В статье кратко описан численный метод расчета течения вязкого газа через многосвязные области применительно к рассматриваемой задаче, а также представлены результаты расчетов обтекания вязким газом 1–4 сфер, расположенных в ограниченном объеме.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Численное моделирование пространственных течений около осесимметричных поверхностей / Горохов М. М., Русяк И. Г., Бас А. А., Корепанов А. В., Микрюков А. В. // Информационные технологии в инновационных проектах: Материалы международной научной конференции (Ижевск, 2003). — Ижевск: ИжГТУ, 2003. — Ч. 2. — С. 21–23.
2. Горохов М. М. Численное исследование горения гранулированных топлив в турбулентном потоке // Интеллектуальные системы в производстве. — 2004. — № 1. — С. 85–115.
3. Горохов М. М., Русяк И. Г. Численное моделирование пространственных турбулентных течений в областях со сложной геометрией // Информационные технологии в инновационных проектах: Материалы международной научной конференции (Ижевск, 2003). — Ижевск: ИжГТУ, 2003. — Ч. 1. — С. 7–12.
4. Липанов А. М. Метод численного решения уравнений гидромеханики в многосвязных областях // Математическое моделирование. — 2006. — Т. 18. — № 12. — С. 3–18.

5. Седов Л. И. Механика сплошной среды. — Т. 1–2. — СПб.: Издательство «Лань», 2004.
6. Самарский А. А., Вабищевич П. Н. Численные методы решения задач конвекции-диффузии. — М.: Едиториал УРСС, 2004. — 248 с.
7. Вержбицкий В. М. Основы численных методов. — М.: Высшая школа, 2002. — 840 с.
8. Липанов А. М., Кисаров Ю. Ф., Ключников И. Г. Численный эксперимент в классической гидромеханике турбулентных потоков. — Екатеринбург: УрО РАН, 2001. — 161 с.
9. Липанов А. М., Кисаров Ю. Ф., Ключников И. Г. Класс разностных схем высокого порядка точности для прямого моделирования турбулентных потоков при числах Рейнольдса  $Re = 10^5$  // Применение математического моделирования для решения задач в науке и технике: Сборник трудов научной конференции. — Ижевск: ИПМ УрО РАН, 1996. — С. 81–102.
10. Федорченко А. Т. Численное исследование нестационарных дозвуковых течений вязкого газа во внезапно расширяющемся плоском канале // Механика жидкости и газа. — 1988. — № 4. — С. 32–41.

Поступила в редакцию 27.07.09

*A. M. Lipanov, A. N. Semakin*

**Viscous gas flow past spherical particles in restricted volume**

Viscous gas flow in restricted volume with 1-4 spheres is considered. Numerical method for problem solution is described. Calculation results are presented.

*Keywords:* multiply-connected domain, final volume method, viscous gas.

Mathematical Subject Classifications: 76G25

Липанов Алексей Матвеевич, академик РАН, Институт прикладной механики УрО РАН, 426067, Удмуртская республика, г. Ижевск, ул. Т. Барамзиной, 34, E-mail: lam@udm.ru

Семакин Артем Николаевич, мл. науч. сотр., Институт прикладной механики УрО РАН, 426067, Удмуртская республика, г. Ижевск, ул. Т. Барамзиной, 34, E-mail: arte-semaki@yandex.ru