ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

МАТЕМАТИКА 2010. Вып. 4

УДК 517.938.5+531.38

© *П. Е. Рябов*

АНАЛИТИЧЕСКАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ ОСОБЕННОСТЕЙ ИНТЕГРИРУЕМОГО СЛУЧАЯ КОВАЛЕВСКОЙ–ЯХЬЯ[1]

В статье приводится аналитическая классификация особенностей ранга 0 и 1 отображения момента для интегрируемого случая Ковалевской–Яхья в динамике твердого тела.

Ключевые слова: интегрируемые гамильтоновы системы, отображение момента, бифуркационная диаграмма, тип невырожденной особенности.

Введение

Задача о движении гиростата Ковалевской в поле силы тяжести описывается уравнениями

$$\begin{aligned} 2\,\dot\omega_1 &= (\omega_3-\lambda)\omega_2, & \dot\alpha_1 &= \alpha_2\omega_3-\alpha_3\omega_2,\\ 2\,\dot\omega_2 &= -(\omega_3-\lambda)\omega_1-\alpha_3, & \dot\alpha_2 &= \omega_1\alpha_3-\omega_3\alpha_1,\\ \dot\omega_3 &= \alpha_2, & \dot\alpha_3 &= \alpha_1\omega_2-\alpha_2\omega_1. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь $\boldsymbol{\omega}$ — вектор угловой скорости, $\boldsymbol{\alpha}$ — единичный вектор направления силы тяжести, уравнения отнесены к системе координат, жестко связанной с телом-носителем гиростата. Параметр $\lambda > 0$ характеризует величину гиростатического момента, направленного по оси динамической симметрии. Систему (1) можно записать в гамильтоновом виде на пространстве $\mathbb{R}^6 = \{\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\alpha})\}$ со скобками Пуассона координатных функций

$$\{s_i, s_j\} = \varepsilon_{ijk}s_k, \quad \{s_i, r_j\} = \varepsilon_{ijk}r_k, \quad \{r_i, r_j\} = 0,$$
$$(s_1 = 2\omega_1,\ s_2 = 2\omega_2,\ s_3 = \omega_3 + \lambda)$$

и гамильтонианом

$$H = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \frac{1}{2}\omega_3^2 - \alpha_1.$$

Геометрический интеграл системы (1) и интеграл площадей

$$\Gamma = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2, \quad L = \omega_1\alpha_1 + \omega_2\alpha_2 + \frac{1}{2}\alpha_3(\omega_3 + \lambda) \tag{2}$$

являются функциями Казимира, вследствие чего векторное поле (1), ограниченное на четырехмерное многообразие

$$\mathcal{P}_\ell^4 = \{(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\alpha}) \in \mathbb{R}^6 \colon \Gamma = 1, L = \ell\},$$

является гамильтоновой системой с двумя степенями свободы. Для ее интегрируемости по Лиувиллю, кроме гамильтониана H, необходимо наличие одного дополнительного интеграла. Этот интеграл, обобщающий интеграл Ковалевской, указан в [1]:

$$K = (\omega_1^2 - \omega_2^2 + \alpha_1)^2 + (2\omega_1\omega_2 + \alpha_2)^2 + 2\lambda[(\omega_3 - \lambda)(\omega_1^2 + \omega_2^2) + 2\omega_1\alpha_3].$$

Фиксируя константу ℓ, определим интегральное отображение

$$\mathcal{F} \colon \mathcal{P}_\ell^4 \to \mathbb{R}^2, \tag{3}$$

полагая $(k, h) = \mathcal{F}(x) = \bigl(K(x), H(x)\bigr)$. Отображение $\mathcal{F}$ называют *отображением момента*.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 10–01–00043).

Обозначим через $\mathcal{C}$ совокупность всех критических точек отображений момента, то есть точек, в которых $\operatorname{rank} d\mathcal{F}(x) < 2$. Множество критических значений $\Sigma_\ell = \mathcal{F}(\mathcal{C} \cap \mathcal{P}^4_\ell)$ называется *бифуркационной диаграммой*. Множество $\mathcal{C}$ можно стратифицировать рангом отображения момента, представив его в виде объединения $\mathcal{C} = \mathcal{C}^0 \cup \mathcal{C}^1$. Здесь $\mathcal{C}^j = \{x\colon \operatorname{rank} d\mathcal{F}(x) = j\}$.

Бифуркационные диаграммы Σ_ℓ отображений момента вычислены в [2, 3] и содержатся в сечениях $\ell = \mathrm{const}$ объединения трех поверхностей Π_1, Π_2 и Π_3 в пространстве $\mathbb{R}^3(\ell, h, k)$. Для целей настоящей работы удобно записать уравнения этих поверхностей в виде, отличном от [2], принимая $g = \ell^2$:

$$\Pi_1\colon \begin{cases} g = \omega_1^2\left(\omega_1^2 + \dfrac{\lambda^2}{2} - h\right)^2, \\ k = 1 + 3\omega_1^4 - 2\omega_1^2\left(h - \dfrac{\lambda^2}{2}\right), \end{cases} \tag{4}$$

и

$$\Pi_{2,3}\colon \begin{cases} g = \dfrac{1}{2}(h + \dfrac{\lambda^2}{2}) - \lambda^2 s^2 - \dfrac{1}{4s}, \\ k = -2\lambda^2 h + 4\lambda^2 s + \dfrac{1}{4s^2}. \end{cases} \tag{5}$$

Здесь $\omega_1 \in \mathbb{R}$ для Π_1, $s < 0$ для Π_2 и $s > 0$ для Π_3. Уравнения поверхностей в виде (4), (5) удобны тем, что многообразия $\mathcal{P}^4_h = \{(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\alpha}) \in \mathbb{R}^6\colon \Gamma = 1, H = h\}$, на которых определена индуцированная система, компактны.

Множество $\mathcal{C}^0$ состоит из неподвижных точек системы (1). Множество $\mathcal{C}$ в целом исчерпывается аналитическими решениями уравнений (1), которые являются частными случаями решений П. В. Харламова [4, 5] и могут быть записаны в виде

$$\mathcal{M}_1\colon \begin{cases} \omega_1 = \mathrm{const}, \quad \omega_2 = 0, \quad \omega_3 = r, \\ \alpha_1 = \omega_1^2 + \dfrac{r^2}{2} - h, \quad \alpha_2^2 = R, \quad \alpha_3 = -\omega_1(r - \lambda), \\ R = -\dfrac{1}{4}r^4 + \left(-2\omega_1^2 + h\right) r^2 + 2\lambda\omega_1^2 r + 1 - \lambda^2\omega_1^2 - (\omega_1^2 - h)^2 \end{cases} \tag{6}$$

и

$$\mathcal{M}_{2,3}\colon \begin{cases} \omega_1 = -\dfrac{\sqrt{g}}{s} - \varkappa\rho Y, \quad \omega_2 = -\rho\sqrt{s}Z, \quad \omega_3 = \lambda + 2\varkappa X, \\ \alpha_1 = -2\varkappa^2 Y^2 + \dfrac{\lambda s}{\varkappa}X + \dfrac{\sqrt{g}}{\varkappa}\rho Y, \quad \alpha_2 = -2\varkappa\sqrt{s}\,YZ, \\ \alpha_3 = -\dfrac{\lambda s}{\varkappa}\rho Y + \dfrac{\sqrt{g}}{\varkappa}X, \quad (X, Y) = \begin{cases} (\cos\sigma, \sin\sigma), & \rho^2 \geqslant 0, \\ (\operatorname{ch}\sigma, \mathrm{i}\operatorname{sh}\sigma), & \rho^2 < 0, \end{cases} \\ Z^2 = \dfrac{1}{2}\left[(X + \dfrac{\lambda}{\varkappa})^2 + (\rho Y + \dfrac{\sqrt{g}}{s\varkappa})^2 - 1\right]. \end{cases} \tag{7}$$

Здесь и далее i — мнимая единица, σ и r — вспомогательные переменные, динамика которых описывается уравнениями $\dot\sigma^2 = \operatorname{sgn}(\rho^2)sZ^2$ и $\dot r^2 = R$, а совокупность решений $\mathcal{M}_j$ есть множество критических точек в прообразе поверхности Π_j $(j = 1, 2, 3)$.

В случае (6) постоянная ω_1 связана с h, k, g уравнениями (4), а в случае (7) параметры $\varkappa, \rho$ связаны с h, k, g, s функциональной зависимостью (5), если положить

$$\varkappa^2 = g + \lambda^2 s^2, \quad \rho^2 = 1 - \frac{2\varkappa^2}{s}.$$

При этом $s < 0$ для $\mathcal{M}_2$ и $s > 0$ для $\mathcal{M}_3$. Представление критических подмногообразий $\mathcal{M}_{2,3}$ в виде (7) впервые указано в работе [6].

Пересечения трехмерных многообразий $\mathcal{M}_j$ с $\mathcal{P}^4_\ell$ (или с $\mathcal{P}^4_h$) дают двумерные поверхности Q_j, которые являются симплектическими подмногообразиями, за исключением множества меры нуль точек вырождения индуцированной симплектической структуры. Функции

$$F = \omega_1 \quad \text{и} \quad S = \frac{\omega_3 - 2\ell\alpha_3}{2\lambda(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \lambda\omega_3)}$$

являются первыми интегралами на $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_{2,3}$ соответственно, почти всюду независимыми с гамильтонианом H. Их уровни гладко расслаивают Q_j на одномерные множества $\mathcal{L}_j$. Множества $\mathcal{L}_j$ с индуцированной на них динамикой далее называем *критическими окружностями.*

Отметим, что в общем случае для гиростата Ковалевской в *двойном поле* имеется связь между функциями F, S и указанными в [7] частными интегралами критических подсистем.

Определим интегральные отображения

$$\mathcal{F}_j \colon \mathcal{M}_j \to \mathbb{R}^2, \tag{8}$$

полагая $(f,h) = \mathcal{F}_1(x) = (F(x), H(x))$ и $(s,h) = \mathcal{F}_{2,3}(x) = (S(x), H(x))$. Критическим точкам этих отображений в $\mathcal{P}^4_\ell$ (или в $\mathcal{P}^4_h$) отвечают особенности ранга 0 отображений момента (3), то есть множество $\mathcal{C}^0$. Можно показать, что $\mathcal{C}^0$ соответствует множеству критических точек функции F на Q_1 и функции S на $Q_{2,3}$ (в § 3 приводится доказательство для функции F и указывается топологический тип Q_1). Множества критических значений $\Theta_j = \mathcal{F}_j(\mathcal{C}^0)$ будем называть бифуркационными (f,h)- и (s,h)-диаграммами. Параметризацию диаграмм Θ_j можно получить из параметризации особенностей ранга 0. В бифуркационные (s,h)-диаграммы для $\mathcal{F}_2$ и $\mathcal{F}_3$ необходимо добавить случаи обращения в нуль постоянной площадей. Отметим также, что на изоэнергетическом уровне $h = \mathrm{const}$ существуют такие значения параметра s на Π_3, для которых отсутствуют критические окружности $\mathcal{L}_3$ [8].

Напомним, понятие невырожденной особенности [9] применительно к системе с двумя степенями свободы. Пусть x — критическая точка ранга $q \leqslant 1$ отображения момента на некотором симплектическом многообразии $\mathcal{P}^4$. Если она является критической точкой некоторого интеграла φ, то линеаризация A_φ векторного поля $\operatorname{sgrad}\varphi$ в точке x является элементом отождествляемой с $\mathrm{sp}(4,\mathbb{R})$ алгебры всех симплектических операторов в касательном пространстве $T_x\mathcal{P}^4$. Заменой координат в образе отображения момента добьемся того, что точка x будет критической для первых $2-q$ компонент g_j отображения момента и регулярной для оставшихся q. Рассмотрим в $T_x\mathcal{P}^4$ подпространство V, натянутое на $\operatorname{sgrad} g_1, \ldots, \operatorname{sgrad} g_{2-q}$, и его косоортогональное дополнение V'. Тогда $V \subset \operatorname{Ker} A_{g_j}$ и $\operatorname{Im} A_{g_j} \subset V'$. На фактор-пространстве V'/V индуцируется симплектическая структура, а операторы $A_{g_j}|_{V'/V}$ являются элементами алгебры Ли $\mathrm{sp}(2(2-q),\mathbb{R})$. Обозначим через $\mathcal{A}(x,\mathcal{F})$ порожденную ими коммутативную подалгебру.

Определение 1. Критическая точка $x \in \mathcal{C}^q$ отображения момента $\mathcal{F}$ называется *невырожденной ранга* q (*коранга* $2-q$), если $\mathcal{A}(x,\mathcal{F})$ — подалгебра Картана в $\mathrm{sp}(2(2-q),\mathbb{R})$.

На практике для проверки картановости необходимо найти указанную замену в образе $\mathcal{F}$ и убедиться в выполнении следующих условий: операторы A_{g_j} $(j = 1, \ldots, 2-q)$ линейно независимы, и в их линейной оболочке найдется оператор A, у которого $2(2-q)$ собственных значения различны (индуцированный им оператор в $\mathcal{A}(x,\mathcal{F})$ называется *регулярным элементом*). Известно, что собственные числа симплектического оператора разбиты на группы трех типов — пары вида $\pm \mathrm{i}\mu$ (центр, эллиптический тип), $\pm\mu$ (седло, гиперболический тип) и четверки $\pm\mu_1 \pm \mathrm{i}\mu_2$ (фокусная особенность), где $\mu, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ и для регулярного элемента все они отличны от нуля. Количество элементов в каждой такой группе обозначим соответственно через m_1, m_2, m_3. Для невырожденной критической точки ранга q имеем $m_1 + m_2 + 2m_3 = 2 - q$. Четверка (q, m_1, m_2, m_3) называется типом невырожденной критической точки. После того как тип критической точки определен, слоение Лиувилля в ее окрестности для вещественно-аналитических систем оказывается локально симплектоморфно некоторому модельному слоению (подробности см. в [9]).

Цель настоящей работы состоит в аналитическом доказательстве невырожденности и классификации особенностей ранга 0 и 1 отображения момента (3).

§ 1. Критические точки ранга 0

Как уже отмечалось, множество $\mathcal{C}^0$ состоит из неподвижных точек системы (1). Принимая в качестве параметра $\omega_3 = r$, представим $\mathcal{C}^0$ в виде

$$\mathcal{C}^0\colon \quad \begin{cases} \omega_1^2 = -\dfrac{1}{2}r[r \mp \dfrac{1}{r-\lambda}D], \quad \omega_2 = \alpha_2 = 0, \quad \omega_3 = r, \\ \alpha_1 = \dfrac{1}{2}\left[r(r-\lambda) \mp D\right], \quad \alpha_3^2 = -\dfrac{1}{2}r(r-\lambda)\left[r(r-\lambda) \mp D\right]. \end{cases} \tag{9}$$

Значения первых интегралов определяют точку в $\mathbb{R}^3(g,k,h)$ [3, 6].

$$P = \mathcal{F}(\mathcal{C}^0)\colon \quad \begin{cases} g = r\left\{\lambda - \dfrac{(r-\lambda)^4+4}{8(r-\lambda)}\left[r(r-\lambda) \mp D\right]\right\}, \\ k = \lambda\left\{\dfrac{\lambda}{(r-\lambda)^2} + \dfrac{r(2r-\lambda)}{2(r-\lambda)}\left[r(r-\lambda) \mp D\right]\right\}, \\ h = \dfrac{1}{2}r(\lambda - r) \pm \dfrac{2r-\lambda}{2(r-\lambda)}D, \end{cases}$$

где $D = \sqrt{4 + r^2(r-\lambda)^2}$, при этом для верхнего знака $r \in (-\infty, 0] \cup (\lambda, +\infty)$, а для нижнего $r \in [0, \lambda)$.

Теорема 1. *Особым точкам $P = \mathcal{F}(\mathcal{C}^0)$ бифуркационных диаграмм Θ_j соответствуют невырожденные особенности $\mathcal{C}^0$ ранга 0 отображений момента (3) за исключением значений параметра r, отвечающим точкам возврата кривых на бифуркационных (f,h)- и (s,h)-диаграммах.*

Пусть

$$A = \frac{1}{2}[r(2r-\lambda) \pm \frac{\lambda}{r-\lambda}D], \tag{10}$$

$$B = \frac{1}{4}[(r-\lambda)(2r-\lambda) \mp D]. \tag{11}$$

Тогда невырожденная особенность $\mathcal{C}^0$ имеет следующий тип:

$(0,0,2,0)$ (*«седло-седло»*) *при* $A < 0$, $B < 0$;

$(0,1,1,0)$ (*«центр-седло»*) *при* $AB < 0$;

$(0,2,0,0)$ (*«центр-центр»*) *при* $A > 0$, $B > 0$.

Доказательство. Независимость операторов A_H и A_K, полученных линеаризацией полей $\operatorname{sgrad} H$ и $\operatorname{sgrad} K$ в точках (9), легко проверяется непосредственно в пространстве $\mathbb{R}^6$. В этом же пространстве характеристический многочлен оператора A_H с точностью до постоянного множителя имеет вид

$$\mu^2\left[\mu^2 + A\right]\left[\mu^2 + B\right] = 0,$$

где A и B определяются по формулам (10) и (11). Двукратный нулевой корень отвечает интегралам (2) – функциям Казимира относительно скобки Пуассона, а корни оставшегося многочлена четвертой степени дают классификацию особенностей ранга 0. Случаи $A = 0$ и $B = 0$ отвечают точкам возврата кривых на бифуркационных (f,h)- и (s,h)-диаграммах. □

§ 2. Невырожденные особенности ранга 1

Не затрагивая вопросы существования движений $\mathcal{L}_j$ в зависимости от постоянных интегрирования, решенные в [6], сформулируем теорему о типе таких движений.

Теорема 2. *Критические окружности $\mathcal{L}_j$ являются невырожденными особенностями $\mathcal{C}^1$ ранга 1 отображений момента* (3) *за исключением следующих значений*:

$$h = \frac{2f^4 + 3\lambda^2 f^2 + 1 + \lambda^4}{2(f^2+\lambda^2)}, \quad h = \frac{2s^2 - \lambda^2 s + 1}{2s}, \tag{12}$$

$$h = 3f^2 + \frac{\lambda^2}{2}, \quad s = \frac{1}{2\sqrt[3]{\lambda^2}}, \tag{13}$$

причем значения энергии (12) *отвечают касанию поверхностей* Π_1 *и* Π_3 *на бифуркационных* (f,h)*- и* (s,h)*-диаграммах, а значения параметров* (13) *– ребрам возврата поверхностей* Π_1 *и* Π_3 *соответственно. Более точно обозначим*

$$E = (2f^4 + 3f^2\lambda^2 - 2f^2 h + 1 - 2\lambda^2 h + \lambda^4)(-2h + 6f^2 + \lambda^2), \tag{14}$$

$$C = \frac{1}{s}(8\lambda^2 s^3 - 1)[2s^2 - (2h+\lambda^2)s + 1]. \tag{15}$$

Критические окружности $\mathcal{L}_1$ *имеют гиперболический тип* $(1,0,1,0)$, *если* $E<0$, *и эллиптический тип* $(1,1,0,0)$, *если* $E>0$. *Критические окружности* $\mathcal{L}_3$ *имеют гиперболический тип* $(1,0,1,0)$, *если* $C<0$, *и эллиптический тип* $(1,1,0,0)$, *если* $C>0$. *Критические окружности* $\mathcal{L}_2$ *всегда имеют эллиптический тип.*

Доказательство. В качестве интегралов, для которых $\mathcal{L}_j$ являются особенностью ранга 1 отображений момента (3), можно взять функции с неопределенными множителями Лагранжа (в общем случае для гиростата Ковалевской в *двойном поле* такие функции описаны в [7]):

$$\mathcal{L}_1\colon \Phi = K - 2\omega_1^2 H, \qquad \mathcal{L}_{2,3}\colon \Psi = sK + (2\lambda^2 s - 1)H.$$

Линеаризации A_Φ и A_Ψ векторных полей $\operatorname{sgrad}\Phi$ и $\operatorname{sgrad}\Psi$ в точках $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_{2,3}$ соответственно являются элементами отождествляемой с $\mathrm{sp}(4,\mathbb{R})$ алгебры всех симплектических операторов в касательном пространстве $T_{\mathcal{L}_j}\mathcal{P}^4_\ell$. Характеристические уравнения операторов A_Φ и A_Ψ после необходимой факторизации по нулевому корневому подпространству в подстановке явных выражений (6) и (7) примут вид

$$\mathcal{L}_1\colon \mu^2 + E = 0, \qquad \mathcal{L}_{2,3}\colon \mu^2 + C = 0,$$

где коэффициенты E и C определяются по формулам (14) и (15). При отсутствии кратного корня тип критических окружностей $\mathcal{L}_j$ определяется знаками величин C и E.

Таким образом, получена вся информация по аналитической классификации особенностей ранга 0 и 1 отображения момента (3) для интегрируемого случая Ковалевской–Яхья в динамике твердого тела. □

§ 3. Пример исследования критической подсистемы

Рассмотрим инвариантное многообразие $\mathcal{M}_1$, целиком состоящее из критических точек отображений момента.

Теорема 3. *Множество критических точек функции* $F=\omega_1$, *ограниченной на подмногообразие* $Q_1 = \mathcal{M}_1 \cap \mathcal{P}^4_h$, *совпадает с* $\mathcal{C}^0 \cap \mathcal{P}^4_h$.

Доказательство. Двумерная поверхность $Q_1(h) = \mathcal{M}_1 \cap \mathcal{P}^4_h$ задается формулами (6) при фиксированном h. Функция $F=\omega_1$, ограниченная на $Q_1(h)$, удовлетворяет уравнению

$$W(F,\alpha_2,r) = 0, \tag{16}$$

где

$$W = \left(F^2 + \frac{r^2}{2} - h\right)^2 + \alpha_2^2 + F^2(r-\lambda)^2 - 1.$$

Уравнение (16) неявно определяет функцию $\omega_1 = F(\alpha_2, r)$, критические точки которой удовлетворяют соотношениям

$$W'_{\alpha_2} = 0, \quad W'_r = 0. \tag{17}$$

Решение системы (16)–(17) совпадает с (9).

Функция $F = \omega_1$ на двумерной поверхности $Q_1(h)$ является функцией Морса, поскольку ее критические точки являются невырожденными особенностями ранга 0 отображения момента (3). Используя классическую теорию Морса [10], устанавливаем топологический тип связных компонент двумерной поверхности $Q_1(h)$, которые в зависимости от изоэнергетического уровня $h = \mathrm{const}$ на (f, h)-диаграмме являются либо двумерным тором $\mathbb{T}^2$, либо двумерной сферой $\mathbb{S}^2$. □

С учетом результатов работы [6] можно получить аналогичную картину всех слоений изоэнергетических уровней критических подсистем рассматриваемой задачи.

Автор благодарит М. П. Харламова за полезные обсуждения и постоянное внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Yehia H. New integrable cases in the dynamics of rigid bodies // Mech. Res. Commun. — 1986. — V. 13, № 3. — P. 169–172.
2. Рябов П. Е. Некоторые случаи вырождения переменных в одной задаче о движении твердого тела вокруг неподвижной точки // Деп. в ВИНИТИ. — 1991. — № 3660-В91. — С. 9.
3. Гашененко И. Н. Бифуркационное множество задачи о движении гиростата, подчиненного условиям Ковалевской // Механика твердого тела. — 1995. — № 27. — С. 31–35.
4. Харламов П. В. Лекции по динамике твердого тела. – Новосибирск: Изд-ие НГУ, 1965. — 221 с.
5. Харламов П. В. Один случай интегрируемости уравнений движения твердого тела, имеющего неподвижную точку // Механика твердого тела. — 1971. — № 3. — С. 57–64.
6. Харламов М. П., Харламова И. И., Шведов Е. Г. Бифуркационные диаграммы на изоэнергетических уровнях гиростата Ковалевской–Яхья // Механика твердого тела. — 2010. — № 40.
7. Харламов М. П. Критические подсистемы гиростата Ковалевской в двух постоянных полях // Нелинейная динамика. — 2007. — V. 3. № 3. — С. 331–348.
8. Рябов П. Е. Бифуркационное множество задачи о движении твердого тела вокруг неподвижной точки в случае Ковалевской-Яхьи // Дисс. . . . канд. физ.-мат. наук / МГУ. — М., 1997. — 143 с.
9. Болсинов А. В., Фоменко А. Т. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация — Ижевск: Изд-во РХД, 1999. — Т. 1, 2.
10. Милнор Дж. Теория Морса. — М.: Изд-во «Мир». — 1963. — 185 с.

Поступила в редакцию 25.11.10

P. E. Ryabov

Analytic classification of singularities in the integrable Kowalevski–Yehia case

In the paper we give analytic classification of singularities of the momentum map for integrable Kowalevski–Yehia case in rigid body dynamics.

Keywords: integrable Hamiltonian system, momentum map, bifurcation diagram, type of non-degenerate singularity.

Mathematical Subject Classifications: 70E17, 70G40

Рябов Павел Евгеньевич, к. ф.-м. н., доцент, кафедра теории вероятностей и математической статистики, Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации, 125993, Россия, г. Москва, Ленинградский просп., 49, E-mail: orelryabov@mail.ru