

УДК 531.384, 531.662

© В. В. Васькин, О. С. Наймушина

**ДВИЖЕНИЕ ПЛОСКИХ ТВЕРДЫХ ДИСКОВ В ПОЛЕ ТЯЖЕСТИ,  
СОУДАРЯЮЩИХСЯ С ГЛАДКОЙ ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТЬЮ<sup>1</sup>**

Рассматриваются ударные движения плоских твердых дисков над неподвижной горизонтальной плоскостью в однородном поле тяжести. Плоскость является абсолютно гладкой, соударения с плоскостью — абсолютно упругими. Диски движутся в вертикальной плоскости и вращаются вокруг горизонтальной оси, при этом они могут отрываться от плоскости с последующими ударами и прыжками. Приведены двумерные отображения таких движений дисков на фазовой плоскости при различных энергиях. Также определены стационарные точки и проведен полный анализ их линейной устойчивости. Показано, что в плоскости параметров имеется множество зон устойчивости и неустойчивости в первом приближении. Получены явные аналитические условия устойчивости и неустойчивости через параметры задачи.

*Ключевые слова:* плоский твердый диск, упругий удар, отображение, линейная устойчивость, зоны устойчивости.

**Введение**

Задача о движении тела, соприкасающегося с твердой поверхностью, привлекает внимание ученых уже около двух с половиной столетий.

Эта задача подкупает своей простотой уравнений импульсивного движения. Но при решении реальных задач возникает множество трудностей.

Существуют различные теории удара — от простейших, основанных на ньютоновском восстановлении и кулоновском трении, до более реалистичных моделей динамической теории упругости. Выбор той или иной модели удара для решения конкретной задачи связан с компромиссом между простотой и реалистичностью, достигнуть которого на практике удается редко. Все-таки до настоящего времени теория удара не получила достаточно полного физического и математического описания. Например, практическое применение традиционного метода «припасовывания» ([1, 2]) осложняется тем, что моменты ударов заранее неизвестны, а само «припасовывание» может быть сложно выполнимым технически.

В данной статье в описании удара введена дельта-функция Дирака, формализуя принцип пренебрежения временем удара, то есть при ударе конечный импульс передается за бесконечно малый промежуток времени.

**§ 1. Ударные движения твердых дисков**

Движение диска в вертикальной плоскости в поле тяжести соударяющегося с гладкой горизонтальной плоскостью состоит из бесконечной последовательности свободного движения диска и собственно удара о гладкую плоскость.

Свободное движение диска описывается лагранжианом

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{z}^2) + \frac{A\dot{\varphi}^2}{2} - mgz, \quad (1.1)$$

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке гранта ведущих научных школ НШ-8784.2010.1, гранта Правительства РФ для господдержки научных исследований под руководством ведущих ученых в российских ОУ ВПО (№ 11.G34.31.0039), ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (ГК № 02.740.11.0195).

где  $x, z$  — обобщенные координаты центра масс диска;  $\varphi$  — угол поворота диска относительно неподвижной оси  $z$ ;  $m$  — масса диска;  $A$  — момент инерции диска относительно центра масс.

При свободном движении имеются три интеграла движения: импульс по оси  $x$

$$p_x = m\dot{x}, \quad (1.2)$$

момент импульса (вдоль  $y$ )

$$M = A\dot{\varphi} = A\Omega \quad (1.3)$$

и энергия

$$E = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{M^2}{2A} + \frac{m\dot{z}^2}{2} + mgz. \quad (1.4)$$

Таким образом, свободное движение диска представляет собой равномерное движение центра масс вдоль оси  $x$  с равноускоренным движением вдоль оси  $z$  и вращение диска с постоянной угловой скоростью вокруг центра. Форма диска при свободном движении не играет роли.

Если отсчитывать свободное движение от момента отрыва диска от горизонтальной плоскости ( $t = t_n$ ), то уравнения его движения будут иметь вид:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_n + U_n(t - t_n), \\ \omega(t) &= \Omega_n, \\ v(t) &= V_n - g(t - t_n), \\ \varphi(t) &= \varphi_n + \Omega_n(t - t_n), \\ z(t) &= z_n + V_n(t - t_n) - \frac{g(t - t_n)^2}{2}, \end{aligned} \quad (1.5)$$

где  $x_n, z_n$  — координаты центра масс в момент отрыва;  $U_n, V_n$  — проекции скорости центра масс на оси  $x$  и  $z$  в момент отрыва;  $\varphi_n, \Omega_n$  — угол поворота диска и угловая скорость в момент отрыва.

Эти величины связаны законом сохранения энергии

$$E = \frac{mV_n^2}{2} + \frac{A\Omega_n^2}{2} + mgz_n. \quad (1.6)$$

Высота центра масс в момент отрыва (удара) зависит от геометрии диска и его угла поворота относительно вертикали и характеризуется функцией  $h(\varphi)$ :

$$z_n = h(\varphi_n).$$

Функцию  $h(\varphi)$  выбираем так, чтобы ее минимальное значение достигалось при  $\varphi = 0$ .

Время удара о плоскость  $t_{n+1}$  определяется из уравнения:

$$h(\varphi_n + \omega_n(t_{n+1} - t_n)) = h(\varphi_n) + V(t_{n+1} - t_n) - \frac{g(t_{n+1} - t_n)^2}{2}. \quad (1.7)$$

Теория удара в настоящее время не получила достаточно полного физического и математического описания. Поэтому рассмотрим простейшую модель удара:

- а) Удар диска о плоскость считаем упругим (при ударе сохраняется механическая энергия);
- б) Сила реакции нормальна к поверхности (связь идеальна);
- в) Временем удара можно пренебречь (сила реакции имеет импульсный характер).

Формализуем эти предположения с помощью введения дельта-функции Дирака.

Пренебрегая остальными силами при ударе, уравнения движения диска при ударе примут вид:

$$m \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{N}, \quad (1.8)$$

$$\frac{Ad\vec{\Omega}}{dt} = [\vec{r}_a, \vec{N}], \quad \vec{N} = \vec{n}q\delta(t - t_n), \quad (1.9)$$

где  $\vec{n}$  — нормаль к поверхности соприкосновения;  $\vec{r}_a$  — радиус-вектор из центра масс в точку касания;  $q$  — величина передаваемого импульса при ударе;  $\delta(t - t_{n+1})$  — дельта-функция Дирака;

или в проекциях:

$$m \frac{dU}{dt} = 0, \quad (1.10)$$

$$m \frac{dV}{dt} = q\delta(t - t_{n+1}), \quad (1.11)$$

$$A \frac{d\omega}{dt} = qd(\varphi)\delta(t - t_{n+1}), \quad (1.12)$$

$d(\varphi)$  — плечо силы реакции в момент удара, когда угол поворота диска равен  $\varphi_{n+1} = \varphi_n + \omega_n(t_{n+1} - t_n)$ .

Функция  $d(\varphi)$  связана с функцией  $h(\varphi)$  соотношением

$$d(\varphi) = -\frac{dh(\varphi)}{d\varphi}. \quad (1.13)$$

В дальнейшем мы увидим, что важное значение имеет функция  $\xi(\varphi)$  в стационарных точках:

$$\xi(\varphi) = \frac{d^2h(\varphi)}{d\varphi^2}. \quad (1.14)$$

Таким образом, вся геометрия диска при ударе сводится к одной функции  $h(\varphi)$ .

Интегрируя уравнения (1.10), (1.11) и (1.12) вблизи момента удара (от  $t - 0$  до  $t + 0$ ), получаем закон изменения скоростей при ударе:

$$mU(t_{n+1} + 0) = mU(t_{n+1} - 0), \quad (1.15)$$

$$mV(t_{n+1} + 0) = mV(t_{n+1} - 0) + q, \quad (1.16)$$

$$A\Omega(t_{n+1} + 0) = A\Omega(t_{n+1} - 0) + qd(\varphi_{n+1}). \quad (1.17)$$

Так как скорости при ударе получают конечный скачок, координаты  $z$  и  $\varphi$  при ударе не меняются.

Из (1.15) следует, что скорость вдоль оси  $x$  не меняется при ударе, следовательно, импульс вдоль оси  $x$  с учетом уравнения (1.10) является интегралом движения и может быть выбран равным нулю ( $U = 0$ ). Таким образом, движение диска сводится к движению по вертикали и вращению вокруг центра масс.

Величина импульса удара определяется из закона сохранения энергии:

$$\frac{mV^{2+}}{2} + \frac{A\Omega^{2+}}{2} + mgh(\varphi^+) = \frac{mV^{2-}}{2} + \frac{A\Omega^{2-}}{2} + mgh(\varphi^-), \quad (1.18)$$

где

$$V^+ = V(t_{n+1} + 0),$$

$$\Omega^+ = \Omega(t_{n+1} + 0),$$

$$V^- = V(t_{n+1} - 0) = V_n - g(t_{n+1} - t_n),$$

$$\Omega^- = \Omega(t_{n+1} - 0) = \Omega_n.$$

Энергия также является глобальным интегралом движения.

Учитывая (1.16) и (1.17), из уравнения (1.18) получим величину импульса при ударе:

$$q = -2 \frac{m(V^- + d(\varphi^-)\Omega^-)}{\left(1 + \frac{md^2(\varphi^-)}{A}\right)}. \quad (1.19)$$

Подставляя (1.19) в (1.16) и (1.17), получаем закон преобразования скоростей при ударе:

$$\begin{pmatrix} V^+ \\ \Omega^+ \end{pmatrix} = \frac{1}{1 + \frac{md^2(\varphi)}{A}} \begin{pmatrix} -\left(1 - \frac{md^2(\varphi)}{A}\right) & -2d(\varphi) \\ -\frac{2md(\varphi)}{A} & 1 - \frac{md^2(\varphi)}{A} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V^- \\ \Omega^- \end{pmatrix}. \quad (1.20)$$

Детерминант матрицы преобразования при ударе равен  $-1$ , то есть мера сохраняется, а собственные значения этой матрицы равны  $\lambda_{1,2} = \pm 1$ . Это означает, что имеются величины, одна из которых не меняется при ударе, а другая меняет свой знак. Легко показать, что этими величинами будут момент импульса диска относительно точки касания  $A\omega$  и скорость точки касания диска  $v$ :

$$\begin{aligned} v &= V + d(\varphi)\Omega, \\ \omega &= \Omega - \frac{md(\varphi)V}{A}. \end{aligned} \quad (1.21)$$

При ударе они преобразуются:

$$\begin{aligned} v^+ &= -v^-, \\ \omega^+ &= \omega^-. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Эти величины являются более удобными при построении отображения, так как скорость точки касания диска всегда положительна (определяется однозначно из закона сохранения энергии), в то время как скорость центра масс после удара может быть и положительной, и отрицательной (то есть ее определение из энергии не однозначно).

Энергия в этих переменных принимает вид:

$$E = \frac{1}{2} \frac{(mv^2 + A\omega^2)}{\left(1 + \frac{md^2(\varphi)}{A}\right)} + mgh(\varphi), \quad (1.23)$$

где величины берутся в момент удара.

В дальнейшем удобно перейти к безразмерным переменным. Формально это значит — положить  $m = 1$ ,  $g = 1$ ,  $A = 1$ , а фактически — перейти к новым единицам измерения:

массу измерять в единицах  $m$ ;

длину — в  $l_0 = \sqrt{\frac{A}{m}}$ ;

время — в  $t_0 = \sqrt{\frac{g}{l_0}} = \sqrt{g\sqrt{\frac{m}{A}}}$ ;

скорость — в  $v_0 = \frac{l_0}{t_0}$ ;

энергию — в единицах  $e_0 = mgl_0 = mg\sqrt{\frac{A}{m}}$ .

## § 2. Двумерное отображение ударов на фазовой плоскости

Соберем вместе преобразование параметров диска при свободном движении и преобразование при ударе.

Начальное положение в момент  $t_n$  после удара задается углом  $\varphi_n$  и приведенной угловой скоростью  $\omega_n$ . Скорость отрыва точки касания равна

$$v_n = \sqrt{2(E - h(\varphi_n))(1 + d^2(\varphi_n)) - \omega_n^2}. \quad (2.1)$$

По  $\varphi_n, \omega_n, v_n$  находим скорость центра масс и угловую скорость вращения диска:

$$\begin{aligned} V &= \frac{v_n - \omega_n d(\varphi_n)}{1 + d^2(\varphi_n)}, \\ \Omega &= \frac{\omega_n + v_n d(\varphi_n)}{1 + d^2(\varphi_n)}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Из уравнения (1.7) определяем время следующего удара:  
 $t_{n+1} = t_n + \Delta_n,$

$$h(\varphi_n + \Omega_n \Delta_n) = h(\varphi_n) + V_n \Delta_n - \frac{\Delta_n^2}{2}, \quad (2.3)$$

и значение скорости центра масс и ориентацию диска при отрыве от плоскости (перед ударом):

$$\begin{aligned} V_{n+1}^- &= V_n - \Delta_n, \\ \varphi_{n+1}^- &= \varphi_n + \Omega_n t_n, \\ \Omega_{n+1}^- &= \Omega_n. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Далее по ним определяем скорость и угловую скорость вращения точки касания диска перед ударом

$$\begin{aligned} v_{n+1}^- &= V_{n+1}^- + d(\varphi_{n+1}^-) \Omega_{n+1}^-, \\ \omega_{n+1}^- &= \Omega_{n+1}^- - m d(\varphi_{n+1}^-) V_{n+1}^-, \end{aligned} \quad (2.5)$$

и значения после удара

$$\begin{aligned} \omega_{n+1}^+ &= \omega_{n+1}^-, \\ v_{n+1}^+ &= -v_{n+1}^-. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Таким образом, получаем двумерное отображение движения диска над гладкой плоскостью ( $F$  — отображение):

$$\begin{pmatrix} \varphi \\ \omega \end{pmatrix}^{n+1} = \widehat{F} \begin{pmatrix} \varphi \\ \omega \end{pmatrix}^n. \quad (2.7)$$

*Область возможных движений дисков (ОВД)*

$$2(E - h(\varphi))(1 + d^2(\varphi)) - \omega^2 \geq 0 \quad (2.8)$$

при ударах отображается сама в себя.

Это отображение было реализовано в программном комплексе «Компьютерная динамика: Хаос». В качестве конкретных систем рассматривались диски различных геометрических форм.

**1.** Круглый диск со смещенным центром масс (смещение  $b$ ):

$$h(\varphi) = b(1 - \cos \varphi), \quad (2.9)$$

$$d(\varphi) = -b \sin \varphi, \quad (2.10)$$

$$\xi(\varphi) = b \cos \varphi; \quad (2.11)$$

2. Эллиптический диск с полуосями  $a$  и  $b$ :

$$h(\varphi) = \sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi} - b, \quad (2.12)$$

$$d(\varphi) = -\frac{(a^2 - b^2) \sin \varphi \cos \varphi}{\sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}}, \quad (2.13)$$

$$\xi(\varphi) = -\frac{(a^2 - b^2)(a^2 \sin^4 \varphi - b^2 \cos^4 \varphi)}{(a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}}; \quad (2.14)$$

3. Параболический диск с центром масс в фокусе:

$$h(\varphi) = \frac{p(1 - \cos \varphi)}{2 \cos \varphi}, \quad (2.15)$$

$$d(\varphi) = -\frac{p \sin \varphi}{2 \cos^2 \varphi}, \quad (2.16)$$

$$\xi(\varphi) = \frac{p}{\cos \varphi} \left( \frac{1}{2} + \frac{\sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi} \right). \quad (2.17)$$

На рис. 1 приведены типичные отображения при различных энергиях. Характерно наличие стационарных точек различной кратности и стохастических слоев, что говорит о неинтегрируемости этих систем. Сравнение отображений для различных дисков при некоторых соответствующих энергиях показывает их схожесть.

Большой интерес представляет определение расположения стационарных точек и исследование их устойчивости.

### § 3. Стационарные точки

Уравнение на определение стационарных точек имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \varphi + 2n\pi \\ \omega \end{pmatrix} = \hat{F} \begin{pmatrix} \varphi \\ \omega \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

Для стационарной точки:

$$\begin{aligned} \varphi_{n+1} &= \varphi_n + 2n\pi = \varphi_0 + 2n\pi, \\ h(\varphi_{n+1}) &= h(\varphi_n) = h(\varphi_0) = h_0, \\ d(\varphi_{n+1}) &= d(\varphi_n) = d(\varphi_0) = d_0, \\ \xi(\varphi_{n+1}) &= \xi(\varphi_n) = \xi(\varphi_0) = \xi_0, \\ \omega_{n+1} &= \omega_n = \omega_0, \\ v_n &= v_0 = \sqrt{2(e - h_0)(1 + d_0^2) - \omega_0^2}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Уравнения на параметры стационарных точек выглядят следующим образом:

$$\frac{2(\sqrt{2(e - h_0)(1 + d_0^2) - \omega_0^2} - d_0 \omega_0)(\omega_0 + d_0 \sqrt{2(e - h_0)(1 + d_0^2) - \omega_0^2})}{(1 + d_0^2)^2} - 2n\pi = 0, \quad (3.3)$$

$$\frac{2d_0(\sqrt{2(e - h_0)(1 + d_0^2) - \omega_0^2} - d_0 \omega_0)}{1 + d_0^2} = 0, \quad (3.4)$$

где  $e$  – безразмерная энергия;  $n$  – целое число, определяющее число оборотов диска между ударами ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ).

Можно их переписать в следующем виде:

$$2V_0 \Omega_0 = 2n\pi, \quad (3.5)$$

$$2d_0 V_0 = 0, \quad (3.6)$$

$V_0$  – скорость центра масс диска;  $\Omega_0$  – угловая скорость центра масс диска.

Уравнение (3.5) означает, что за время между ударами диск совершает  $n$  оборотов, а из уравнения (3.6) видно, что момент сил при ударе должен равняться нулю.

Одним из решений системы является  $V_0 = 0$  при  $n = 0$ , при этом не накладываются условия на угол поворота диска при ударе  $\varphi_0$ . Касание диска о плоскость происходит без удара, время между ударами  $t_0 = 2V_0$  равно нулю, и, казалось бы, это решение является тривиальным. В данной постановке это действительно так, но на самом деле это есть точка бифуркации.

У нашей системы имеются решения другого типа — это касательное соприкосновение с поверхностью, фаза проскальзывания, отрыв с последующим или нормальным ударом либо опять безударное касание. Движения диска подобного рода рассматривались в работе А. П. Иванова [3].

В этой статье рассмотрим только случай «нормальных» ударных движений с  $V_0 \neq 0$ . Из уравнения (3.6) получаем:

$$d_0 = 0, \tag{3.7}$$

то есть стационарные точки ударов определяются стационарными точками  $h(\varphi)$ .

Тогда уравнение (3.3) определяет стационарные значения момента импульса:

$$\omega_0^2 = (e - h_0) \pm \sqrt{(e - h_0)^2 - \pi^2 n^2}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots \tag{3.8}$$

У всех плоских дисков есть решение, которое соответствует минимальному положению центра масс:

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= 0, \\ \omega_0^2 &= e \pm \sqrt{e^2 - n^2 \pi^2}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots \end{aligned} \tag{3.9}$$

Кроме этих стационарных точек имеются и другие экстремальные положения центра масс диска, определяемые из уравнения (3.7):

$$\begin{aligned} \varphi_0 &\neq 0, \\ \omega_0^2 &= (e - h_0) \pm \sqrt{(e - h_0)^2 - n^2 \pi^2}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots \end{aligned} \tag{3.10}$$

1) Для круглого диска:

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= \pi, \\ h_0 &= 2b, \\ \xi_0 &= -b. \end{aligned} \tag{3.11}$$

2) Для эллиптического диска:

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= \pm \frac{\pi}{2}, \\ h_0 &= a, \\ \xi_0 &= \frac{b^2 - a^2}{a}; \end{aligned} \tag{3.12}$$

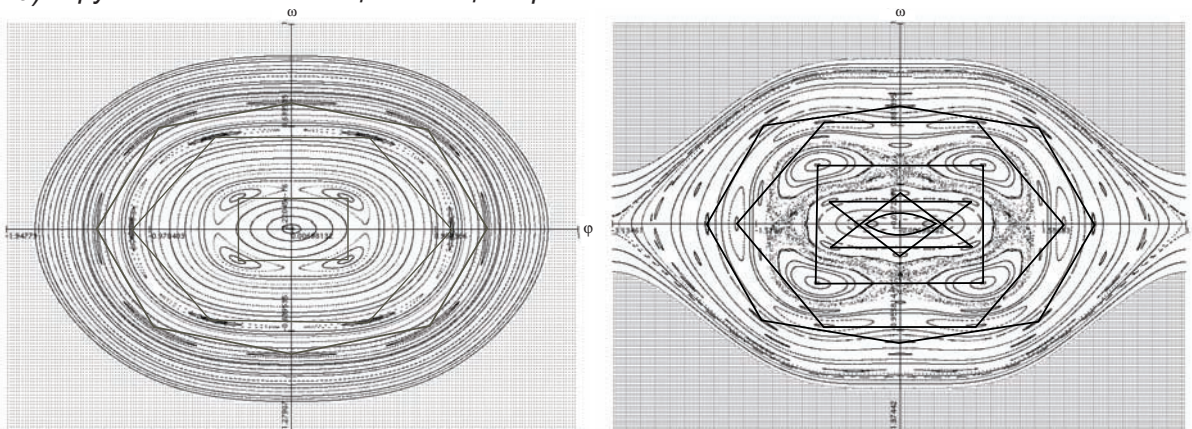
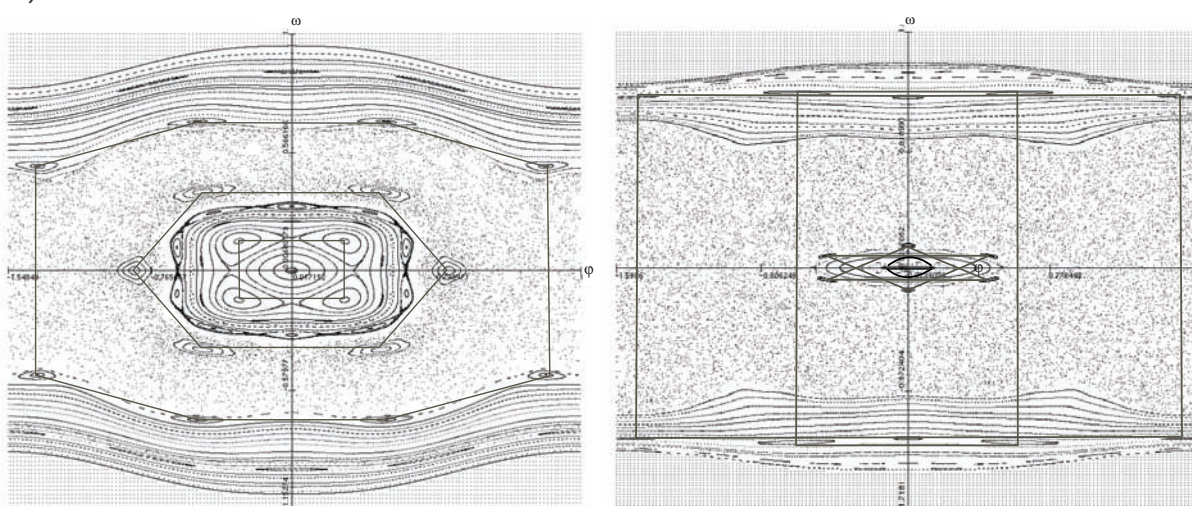
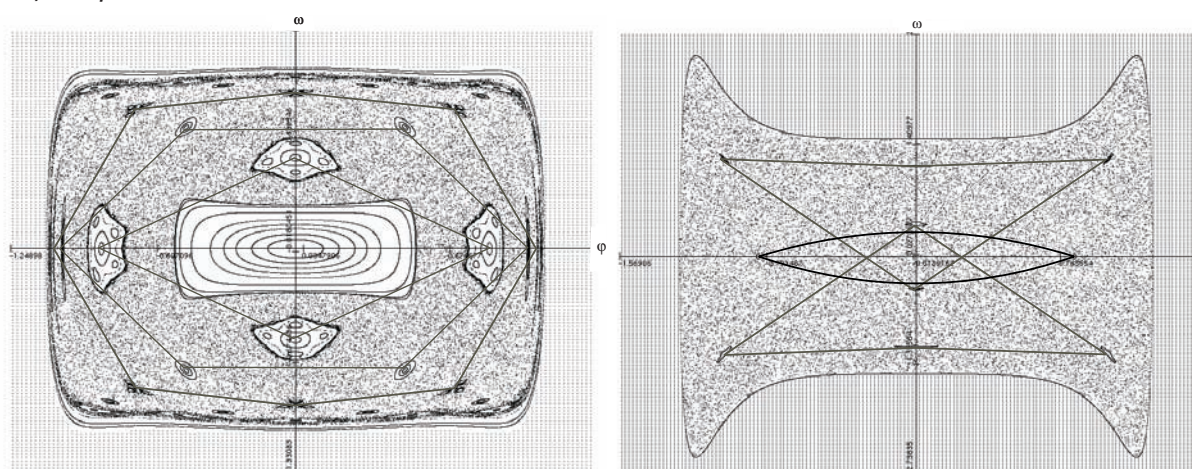
$$\begin{aligned} \varphi_0 &= \pi, \\ h_0 &= b, \\ \xi_0 &= \frac{a^2 - b^2}{b}. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Эти стационарные точки можно наблюдать на отображениях, полученных в комплексе программ «Компьютерная динамика: Хаос» и приведенных на рис. 1.

#### § 4. Линейная устойчивость стационарных точек

Линеаризуя отображения вблизи стационарных точек

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_0 + x, \\ \omega &= \omega_0 + y, \end{aligned} \tag{4.1}$$

а) *Круглый диск со смещенным центром масс*б) *Эллиптический диск*с) *Параболический диск* $e=0.6$  $e=1.1$ 

**Рис. 1.** Фазовый портрет двумерного отображения движения дисков на плоскости  $(\varphi, \omega)$  при различных энергиях  $e$



получаем линейное преобразование от удара к удару:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^{n+1} = \widehat{T} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^n, \quad (4.2)$$

где  $\widehat{T}$  — это матрица перехода.

Рассмотрим отдельно случай, общий для всех дисков

$$\varphi_0 = 0, \quad h_0 = 0, \quad d_0 = 0,$$

и отдельно случай для

$$\varphi_0 \neq 0, \quad h_0 \neq 0, \quad d_0 = 0.$$

Проанализируем линейную устойчивость каждой из этих точек.

**Устойчивость стационарной точки  $\varphi_0 = 0$ .**

Для этой стационарной точки имеется четыре значения  $\omega_0$  :

$$\omega_0^+ = \pm \sqrt{e + \sqrt{e^2 - n^2\pi^2}}, \quad n = \pm 1, \pm 2 \dots$$

— решение с  $n = 0$  отбрасываем, так как оно лежит на границе ОВД, где  $v_0 = 0$ ; и

$$\omega_0^- = \pm \sqrt{e - \sqrt{e^2 - n^2\pi^2}}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$$

Рассмотрим каждый из этих случаев.

Матрица  $\widehat{T}$  для  $\omega_0^+$  имеет вид:

$$\widehat{T}^+ = \begin{pmatrix} 1 + 4\xi_0 \sqrt{e^2 - n^2\pi^2} & -\frac{4\sqrt{e^2 - n^2\pi^2}}{\sqrt{e - \sqrt{e^2 - n^2\pi^2}}} \\ -2\xi_0 \sqrt{e - \sqrt{e^2 - n^2\pi^2}} \times & \\ \times (1 + 2\xi_0 \sqrt{e^2 - n^2\pi^2}) & 1 + 4\xi_0 \sqrt{e^2 - n^2\pi^2} \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

Собственные значения определяются уравнением

$$\lambda^{2+} - 2\lambda^+(1 + 2\varepsilon) + 1 = 0, \quad (4.4)$$

где  $\varepsilon = 2\xi_0 \sqrt{e^2 - n^2\pi^2}$ ;  $\xi_0 > 0$ , так как  $\varphi_0 = 0$  является точкой минимума функции  $h(\varphi_0)$ ; значит и  $\varepsilon \geq 0$ ;

корни уравнения равны

$$\lambda_{1,2}^+ = (1 + 2\varepsilon) \pm 2\sqrt{\varepsilon(\varepsilon + 1)}. \quad (4.5)$$

Легко видеть, что при любых  $\varepsilon > 0$  собственные значения остаются действительными, а так как  $\lambda_1\lambda_2 = 1$ , один из корней всегда больше 1. То есть стационарная точка  $(0, \omega_0^+)$  во всех областях линейно неустойчива.

Аналогично найдем собственные значения матрицы  $\widehat{T}^-$  для стационарной точки  $(0, \omega_0^-)$  :

$$T^- = \begin{pmatrix} 1 - 4\xi_0 \sqrt{e^2 - n^2\pi^2} & \frac{4\sqrt{e^2 - n^2\pi^2}}{\sqrt{e + \sqrt{e^2 - n^2\pi^2}}} \\ -2\xi_0 \sqrt{e + \sqrt{e^2 - n^2\pi^2}} \times & \\ \times (1 - 2\xi_0 \sqrt{e^2 - n^2\pi^2}) & 1 - 4\xi_0 \sqrt{e^2 - n^2\pi^2} \end{pmatrix}, \quad (4.6)$$

$$\lambda^{2-} - 2\lambda^-(1 - 2\varepsilon) + 1 = 0, \quad (4.7)$$

$$\lambda_{1,2}^- = (1 - 2\varepsilon) \pm 2\sqrt{\varepsilon(\varepsilon - 1)}. \quad (4.8)$$

В области  $0 < \varepsilon < 1$  корни комплексные и по модулю равны единице, то есть в этой области стационарная точка  $(0, \omega_0^-)$  является линейно устойчивой. При  $\varepsilon > 1$  она становится неустойчивой.

Таким образом, стационарные точки с  $\omega_0^- = \pm\sqrt{e - \sqrt{e^2 - n^2\pi^2}}$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , в области энергии  $n\pi \leq e \leq \sqrt{n^2\pi^2 + \frac{1}{4\xi_0^2}}$  линейно устойчивые, а при  $e > \sqrt{n^2\pi^2 + \frac{1}{4\xi_0^2}}$  теряют свою устойчивость. Стационарные точки с  $\omega_0^+ = \pm\sqrt{e + \sqrt{e^2 - n^2\pi^2}}$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , для всех энергий будут неустойчивыми.

### Устойчивость стационарной точки $\varphi_0 \neq 0$ .

Аналогично проанализируем линейную устойчивость этой стационарной точки.

Также имеются четыре значения  $\omega_0$ :

$$\omega_0^+ = \pm\sqrt{(e - h_0) + \sqrt{(e - h_0)^2 - n^2\pi^2}}, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots$$

и

$$\omega_0^- = \pm\sqrt{(e - h_0) - \sqrt{(e - h_0)^2 - n^2\pi^2}}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Находим матрицы преобразования  $\hat{T}^+$  и  $\hat{T}^-$ :

$$\hat{T}^+ = \begin{pmatrix} 1 + 4\xi_0\sqrt{(e - h_0)^2 - n^2\pi^2} & -\frac{4\sqrt{(e - h_0)^2 - n^2\pi^2}}{\sqrt{(e - h_0) - \sqrt{(e - h_0)^2 - n^2\pi^2}}} \\ -2\xi_0\sqrt{(e - h_0) - \sqrt{(e - h_0)^2 - n^2\pi^2}} \times \\ \times (1 + 2\xi_0\sqrt{(e - h_0)^2 - n^2\pi^2}) & 1 + 4\xi_0\sqrt{(e - h_0)^2 - n^2\pi^2} \end{pmatrix}, \quad (4.9)$$

$$\hat{T}^- = \begin{pmatrix} 1 - 4\xi_0\sqrt{(e - h_0)^2 - n^2\pi^2} & \frac{4\sqrt{(e - h_0)^2 - n^2\pi^2}}{\sqrt{(e - h_0) + \sqrt{(e - h_0)^2 - n^2\pi^2}}} \\ -2\xi_0\sqrt{(e - h_0) + \sqrt{(e - h_0)^2 - n^2\pi^2}} \times \\ \times (1 - 2\xi_0\sqrt{(e - h_0)^2 - n^2\pi^2}) & 1 - 4\xi_0\sqrt{(e - h_0)^2 - n^2\pi^2} \end{pmatrix}, \quad (4.10)$$

которые имеют собственные значения

$$\lambda_{1,2}^+ = (1 + 2\varepsilon) \pm 2\sqrt{\varepsilon(\varepsilon + 1)}, \quad (4.11)$$

$$\lambda_{1,2}^- = (1 - 2\varepsilon) \pm 2\sqrt{\varepsilon(\varepsilon - 1)}, \quad (4.12)$$

где  $\varepsilon = 2\xi_0\sqrt{(e - h_0)^2 - n^2\pi^2}$ .

Здесь  $\xi_0$  в зависимости от геометрической формы диска может быть как положительным так и отрицательным.

При  $\xi_0 > 0$  область устойчивости стационарных точек находится в области энергии  $n\pi + h_0 \leq e \leq \sqrt{n^2\pi^2 + \frac{1}{4\xi_0^2}} + h_0$  при  $\omega_0^- = \pm\sqrt{(e - h_0) - \sqrt{(e - h_0)^2 - n^2\pi^2}}$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Если  $\xi_0 < 0$  ( $\varepsilon < 0$ ), в таком случае стационарные точки будут линейно устойчивыми при этой же энергии, только при  $\omega_0^+ = \pm\sqrt{(e - h_0) + \sqrt{(e - h_0)^2 - n^2\pi^2}}$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

На рис. 2 показаны зоны линейной устойчивости стационарных точек дисков при разных значениях параметра  $\xi_0$ .

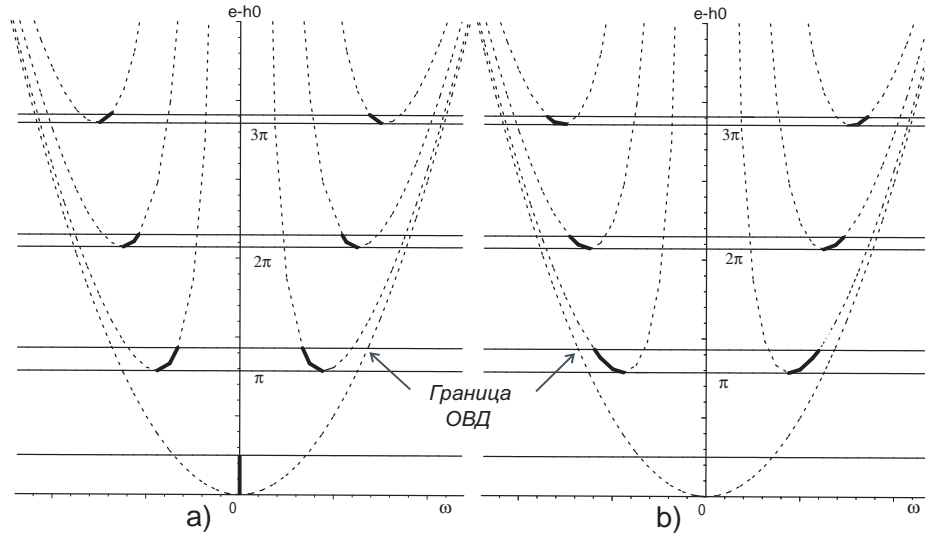


Рис. 2. Зоны линейной устойчивости при  $\xi_0 > 0$  (а),  $\xi_0 < 0$  (б) (сплошными линиями выделены устойчивые стационарные точки, а штрихом — неустойчивые)

§ 5. Стационарные точки высшей кратности

Таким образом, для каждого  $n$  образуется «ствол» стационарных точек с энергией  $n\pi \leq e \leq \sqrt{n^2\pi^2 + \frac{1}{4\xi_0^2}}$  в пространстве  $(\varphi, \omega, \varepsilon)$ , кратности  $m = 1$ .

На каждом «стволе» могут существовать точки бифуркаций, из которых образуются «ветви» стационарных точек различных кратностей  $m$  ( $m = 2, 3, \dots$ ).

Энергии, при которых образуются «ветви», определяются уравнением

$$\det(\widehat{T}^m(\varepsilon) - \widehat{E}) = 0. \tag{5.1}$$

Для каждого  $m$  существуют решения этого уравнения, универсальные в переменных  $\varepsilon$ :

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= 0; \\ \varepsilon_2 &= 1; \\ \varepsilon_3 &= \frac{3}{4}, \frac{3}{4}; \\ \varepsilon_4 &= \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \\ \varepsilon_5 &= \frac{5}{8} \pm \frac{\sqrt{5}}{8}, \frac{5}{8} \pm \frac{\sqrt{5}}{8}; \\ \varepsilon_6 &= \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}; \\ \varepsilon_8 &= \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{4}; \\ \varepsilon_{10} &= \frac{3}{8} \pm \frac{\sqrt{5}}{8}, \frac{3}{8} \pm \frac{\sqrt{5}}{8}. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Таким образом, на каждом  $n$ -«стволе» имеются «ветви» стационарных точек кратности  $m$ , начало которых определяется энергиями  $e_{n,m} = h_0 + \sqrt{n^2\pi^2 + \frac{\varepsilon_m^2}{4\xi_0^2}}$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ,  $m = 1, 2, 3, \dots$ , а их положение на плоскости  $(\varphi, \omega)$  определяется соответствующими значениями  $\varphi_0$  и  $\omega_0$ .

Отметим, что положение начал «ветвей» универсально, оно не зависит от параметров задачи. Однако дальнейшее их движение с изменением энергии определяется параметрами задачи: типом диска, геометрическими параметрами и так далее.

Пока остается открытым вопрос об устойчивости «ветвей». Как видно из приведенных на рис. 1 примеров, возможны оба варианта, то есть они могут быть как устойчивыми, так и неустойчивыми, а также они могут менять тип устойчивости.

### Заключение

Таким образом, рассмотрение ударных движений твердых дисков над гладкой горизонтальной плоскостью показало универсальность их поведения. Наличие стохастических слоев говорит об их неинтегрируемости. Фазовые портреты подобны, деревья с точками роста «ветвей» кратных периодов одинаковы. Конфигурация же ветвей, или траектории движения кратных стационарных точек, индивидуальна, зависит от типа диска (геометрической формы). В дальнейшем будет проведено более детальное изучение структуры этих фазовых портретов.

Авторы выражают благодарность А. В. Борисову, И. С. Мамаеву и А. А. Килину за поставленную задачу и полезные обсуждения в ходе работы.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Иванов А. П. Динамика систем с механическими соударениями. — М.: Международная программа образования, 1997. — 336 с.
2. Маркеев А. П. Динамика твердого тела при наличии его соударений с твердой поверхностью // Нелинейная динамика. — 2008. — Т. 4, № 1. — С. 1–38.
3. Иванов А. П. О безударных прыжках неоднородного колеса. Случай гладкой опоры // Механика твердого тела. — 1992. — № 1. — С. 25–31.
4. Маркеев А. П. Исследование устойчивости периодического движения твердого тела при наличии соударений с горизонтальной плоскостью // Прикладная математика и механика. — 1992. — Т. 58. — Вып. 3. — С. 71–81.
5. Алехин А. К., Маркеев А. П. Об устойчивости периодического движения диска над горизонтальной плоскостью // Механика твердого тела. — 2000. — № 4. — С. 16–22.

Поступила в редакцию 1.12.10

*V. V. Vaskin, O. S. Naymushina*

### The motion of a flat rigid disks bouncing off of a smooth horizontal plane in the gravity field

We consider the motion of a flat rigid disks bouncing off a horizontal plane in the gravity field. The plane is assumed to be absolutely smooth and the impact absolutely elastic. The disks move in vertical plane and rotate around horizontal axis, while the disks are able to break off from the plane with following impacts and bounces. For different values of the energy, 2D projections of the disk's trajectories onto the phase plane are given. The stationary points are determined and their linear stability is studied in detail. It is shown, there are alternating domains of linear stability and instability in the first approximation in the plane parameters. The stability conditions are expressed analytically in terms of the parameters of the problem.

*Keywords:* flat rigid disc, elastic impact, projections, linear stability, domains of linear stability.

Mathematical Subject Classifications: 70E18, 70E50, 70H05

Васькин Владимир Васильевич, к. ф.-м. н., профессор, кафедра теоретической физики, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1 (корп. 4), E-mail: vaskin@udsu.ru

Наймушина Ольга Сергеевна, м. н. с., кафедра теоретической физики, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1 (корп. 4), E-mail: osn@rcd.ru