МАТЕМАТИКА 2011. Вып. 4

УДК 517.962.27

© *А. О. Егоршин*

ОБ ОДНОЙ ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧЕ СГЛАЖИВАНИЯ[1]

Изучается вариационный подход к постановке и решению задачи приближения функций квазиполиномами — решениями однородных, автономных линейных разностных или дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: линейные автономные дифференциальные и разностные уравнения, ортогональное проектирование, сглаживание, фильтрация, прогнозирование, процесс обновления, быстрые рекуррентные алгоритмы.

§ 1. Динамические задачи сглаживания

Уменьшение влияния ошибок в заданной функции возможно лишь за счет использования некоторой модели полезной составляющей этой функции и решения относительно этой модели некоторой оптимизационной обратной задачи с использованием ограничений, обусловленных принятой моделью [1]. В середине прошлого века были сформулированы и решены задачи сглаживания с помощью не только полиномов или иных базисных функций, но и с помощью динамических моделей сигналов. В известных фильтрах Н. Винера [2], Р. Калмана [3] модель сигнала в том или ином виде должна быть задана.

В фильтрах Калмана, основанных на дифференциальном или разностном [4] описании модели сигнала, возникают матричные уравнения Я. Риккати, что представляет определенные вычислительные трудности. Они связаны как с его сложностью, так и с накоплением ошибок [5]. Уравнения Риккати возникают, в частности (и в фильтре Калмана), как уравнения последовательного обращения матриц с аддитивными приращениями.

Дискретное уравнение такого рода имеет вид [6]:

$$(Q + uv^*)^{-1} = Q^{-1} - Q^{-1}u(I + v^*Q^{-1}u)^{-1}v^*Q^{-1}. \tag{1}$$

Здесь и далее индекс * — есть символ двух инволюций: комплексного сопряжения ^{C} и транспонирования ^{T}. Для скаляров это символ комплексного сопряжения.

В работах Т. Кайлата [5] для стационарных моделей, заданных уравнениями для состояний, были предложены так называемые быстрые (*fast*) фильтры Калмана без уравнений Риккати. Их основа — инвариантность однородных (стационарных и изотропных) систем к сдвигу аргумента. Эти идеи были использованы еще в работах Н. Левинсона [7] — дискретная задача (решение уравнения Винера–Хопфа) и М. Крейна [8] (континуальные задачи).

Идея Левинсона в [7] основана на применении встречных формул Фробениуса [9] к обращению окаймляемых теплицевых матриц:

$$\begin{aligned}\left[\begin{array}{c|c} Q & u \\ v^T & q \end{array}\right]^{-1} &= \left[\begin{array}{c|c} Q^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c} -Q^{-1}u \\ 1 \end{array}\right]\left(q - v^TQ^{-1}u\right)^{-1}\left[\begin{array}{c|c} -v^TQ^{-1} & 1 \end{array}\right] = \\ = \left[\begin{array}{c|c} q & \widetilde{u}^T \\ \widetilde{v} & Q \end{array}\right]^{-1} &= \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c} 1 \\ -Q^{-1}\widetilde{v} \end{array}\right]\left(q - \widetilde{u}^TQ^{-1}\widetilde{v}\right)^{-1}\left[\begin{array}{c|c} 1 & -\widetilde{u}^TQ^{-1} \end{array}\right].\end{aligned} \tag{2}$$

Символ $\widetilde{u}$ в (2) обозначает обратную перестановку компонент вектора u. Если u, v — блочные векторы, то есть обращаемая матрица в (2) блочно теплицева, и тогда символ $\widetilde{u}$ обозначает еще и инволюцию транспонирования блоков.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных иследований (проект № 10-01-00035) и Сибирского отделения РАН (проект № 85).

В настоящей работе мы приходим к задачам сглаживания, борьбы с ошибками путем динамического обобщения классической задачи сглаживания и аппроксимации: сглаживания степенными полиномами. Это обобщение приводит к также известным задачам сглаживания — сглаживания квазиполиномами и, в частности, суммой экспонент. Это значит, что это обобщение позволяет решить и задачу идентификации модели сигнала [10, 11]. В этой статье мы задачи идентификации не рассматриваем.

§ 2. Обобщение классической задачи аппроксимации

2.1. Аппроксимация степенными полиномами. Пусть $\mathbf{y} = y(t)$, $t \in I_T = [0, T]$ — произвольная функция, например, из $L = L^2[I_T]$. Задачу ее аппроксимации полиномом $\widehat{\mathbf{y}}$ степени $n-1$ по критерию *метода наименьших квадратов* (МНК) можно сформулировать так: минимизировать величину

$$J_y = \|\mathbf{y} - \widehat{\mathbf{y}}\|^2_L \quad \text{при условии, что} \quad \widehat{\mathbf{y}}^{(n)}(t) = 0, \quad t \in I.$$

Дискретная задача полиномиального сглаживания ставится аналогично. Пусть теперь $\mathbf{y}$ — последовательность (в общем случае комплексная) из пространства l^2_L финитных последовательностей длины $L+1$ или, что то же, $\mathbf{y}$ — это вектор евклидового пространства $E = E_L = E^{L+1}$. Задача: минимизировать величину

$$J_y = \|\mathbf{y} - \widehat{\mathbf{y}}\|^2_E \quad \text{при условии, что} \quad \Delta^{(n)}\widehat{\mathbf{y}} = 0.$$

Эти классические задачи допускают обобщения в разных направлениях [11]. В настоящей статье мы ограничиваемся скалярными однородными (дифференциальными и их дискретными аналогами разностными) уравнениями. Мы их записываем в виде:

$$\sum_0^n \widehat{y}^{(i)} a_i^* = 0, \quad a_n \neq 0, \quad t \in I; \tag{3}$$

$$\sum_{i=0}^n \widehat{y}_{k+i} \alpha_i^* = 0, \quad k = \overline{0, N}, \quad N = L - n. \tag{4}$$

Исследуется дискретная вариационная задача с критерием J_y в $E = E_y$ и уравнением (4) в условиях минимизации этого критерия. Уравнение (3) сводится к уравнению (4) дискретизацией — локальной или равномерной [12].

2.2. Задача вариационного сглаживания. Запись $\{x_i\}_k^m$ обозначает далее вектор–столбец, $|x_j|_l^n$ или $|x_l, \ldots, x_n|$ — вектор–строку, а $\{x_{ij}\}_{kl}^{mn}$ — матрицу (i — номера строк) множества элементов вида x. Если элементы x в $\{x_i\}_k^m$ — $(n-l+1)$-векторы–строки, а в $|x_j|_l^n$ или в $|x_l, \ldots, x_n|$ — $(m-k+1)$-векторы–столбцы, то эти конструкции определяют матрицу $\{x_{ij}\}_{kl}^{mn}$.

Изучаемая здесь задача МНК такова: минимизировать величину

$$J = \sum_0^L \|y_i - \widehat{y}_i\|^2 = \|\mathbf{y} - \widehat{\mathbf{y}}\|^2_E \ \to\ \min, \tag{5}$$

если

$$D\widehat{\mathbf{y}} = 0, \tag{6}$$

или, что то же,

$$\widehat{\mathbf{y}} \in \ker D. \tag{7}$$

Оператор D определяется формулой

$$D = D_\alpha = \left\{ \sum_0^n \alpha_i^* s^i e_k^* \right\}_0^N \ : \ E/\ker D \to DE = \mathcal{E}_N.$$

Здесь $e_k^* = |\delta_{kj}|_{j=0}^L$ — k-й орт в E', $s : E'_{L-1} \to E'_{1,L}$ — оператор сдвига такой, что $se_k^* = e_{k+1}^*$, а $\mathcal{E}_N = \mathcal{E}^{N+1}$ — евклидово пространство значений $N+1$ функционалов из E', которыми определен оператор D. Далее обозначаем: $\ker D_\alpha = \Psi$.

Заметим, что

$$se_k^* = e_k^* I^{1T} = e_{k+1}^* = \langle \,\cdot\, , e_{k+1} \rangle, \quad \text{где}$$
$$I^1 = I_L^1 = \{\delta_{i-1,j}\}_0^L = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ I_L & 0 \end{array}\right] : E \longrightarrow E \tag{8}$$

— оператор сдвига «вниз» в E («вправо» в E'). Здесь I_L — единичная L-матрица.

Подчеркнем, что (6) и (7) — это эквивалентные записи одного условия: принадлежности реализации $\widehat{\mathbf{y}}$ ядру разностного оператора $D = D_\alpha$. Здесь $\mathbf{y} = \{y_i\}_0^L \in E^{L+1} = E$ — исходная реализация (*original realization*) отсчетов (*references*) y_i, $i = \overline{0, L}$, а $\widehat{\mathbf{y}} = \{\widehat{y}_i\}_0^L \in \ker D_\alpha = \Psi \subset E$ — искомая сглаженная реализация (*smoothing realization*).

Условия минимизации функционала (5) — разностное уравнение (РУ) (6) для реализации $\widehat{\mathbf{y}}$ или уравнение (4) для ее отсчетов $\{\widehat{y}_i\}_0^L$ — можно записать также в виде:

$$D\widehat{\mathbf{y}} = \left\{ \sum_0^n \alpha_i^* s^i e_k^* \right\}_0^N \widehat{\mathbf{y}} = \left\{ \sum_0^n \alpha_i^* s^i e_k^* \widehat{\mathbf{y}} \right\}_0^N = \left\{ \sum_{i=0}^n \widehat{y}_{k+i} \alpha_i^* \right\}_{k=0}^N = 0. \tag{9}$$

Отсюда можно увидеть, что условия минимизации в задаче (5), (9) — это $N+1$ линейных ограничений на $L+1$ отсчетов реализации $\widehat{\mathbf{y}}$. Следовательно, эти равенства оставляют в задаче (5), (8) n независимых отсчетов в искомой сглаженной реализации $\widehat{\mathbf{y}}$. Они подлежат оптимизации по критерию J в (5).

Оператор D считается известным. Это означает, что задан вектор α его коэффициетов. Будем называть подпространство $\Psi = \ker D_\alpha = \ker D$, на которое осуществляется проектирование исходной реализации $\mathbf{y}$ в задаче (4) подпространством модели. Оптимизация вектора α в (9) — есть задача идентификации [10–12]. Мы ее здесь не рассматриваем.

2.3. Матричная формулировка задачи. Условия минимизации (4) можно записать в матричном виде. Используем для этого специальную матрицу: ленточную теплицеву $(L+1) \times (N+1)$-матрицу $A = A(\alpha)$ ($\widehat{A} = A(\widehat{\alpha})$). Она зависит от коэффициентов α уравнения (5). Определим

$$A^* = A_\alpha^* = A_N^* = \begin{vmatrix} \alpha_0^* & \cdots & \alpha_n^* & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_0^* & \cdots & \alpha_n^* \end{vmatrix}. \tag{10}$$

Матрицу A мы называем далее *матрицей скользящего вектора* (МСВ) α.

Используя эту конструкцию, в случае скалярного уравнения, условия минимизации (6) или (9) в задаче (5) можно записать так:

$$A^* \widehat{\mathbf{y}} = 0. \tag{11}$$

Наша цель далее показать, что матрица A^* из (10) есть матрица разностного оператора D_α. В естественном базисе в E, принятом при формулировке вариационной задачи (5), (9), это очевидно из (4), (9), (10).

Данный факт обусловлен тем, что $\mathbf{y}$ есть вектор отсчетов, а орты в E образуют единичную матрицу $I_{L+1} = |e_i|_0^L = \{\delta_{ij}\}_0^L$. Такой базис в E и будем обозначать как матрицу I. Здесь и далее под матрицей базиса или системы векторов мы имеем в виду столбцы матрицы.

В следующем разделе рассмотрены более общие ситуации. Речь пойдет о произвольных базисах в унитарном E и в функциональном гильбертовом $L^2[0,T]$ пространствах исходных данных.

§ 3. Матрица разностного оператора.

3.1. Матрица оператора в пространстве отсчетов. В естественном базисе I в E компоненты исходной реализации $\mathbf{y} = I[y]$ есть исходные отсчеты $\{[y]_i\}_0^L$. Скалярное произведение (СП) $\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle_E = \mathbf{x}'\mathbf{y}$ в этом базисе есть $\mathbf{x}^*\mathbf{y}$, то есть $\mathbf{x}' = \langle \cdot, \mathbf{x} \rangle = \mathbf{x}^* \in E'$, где E' — пространство, сопряженное E. Здесь I есть ($L+1$)-матрица оператора $\mathbb{I} : \mathcal{E} \to E$ где $\mathcal{E} = \mathcal{E}_L = \mathcal{E}^{L+1}$ — пространство отсчетов $[y]$. Оно совпадает с E, то есть $\mathbf{y} = [y]$.

Пусть в E задан базис $\mathbb{E}$ — невырожденная произвольная система векторов $|\epsilon_i|_0^L$, то есть замкнутая оболочка $S(\mathbb{E}) = E$. Исходная реализация в этом новом базисе имеет представление $\mathbf{y} = \mathbb{E}(y)$, где $(y) = \{(y)_i\}_0^L$ —так называемые обобщенные отсчеты. Матрицу $\mathbb{E}$ можно так же рассматривать и как оператор $\mathbb{E} : \mathcal{E} \to E$, где $\mathcal{E}$ — евклидово пространство обобщенных отсчетов (y). Базисом в этом пространстве будем считать также естественный базис $I = I_{L+1}$.

Замечание 1. Если СП в E задано билинейной формой $\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle_B = \mathbf{x}^* B \mathbf{y}$, то есть $x' = \langle \cdot, \mathbf{x} \rangle = x^* B$, то это можно трактовать, как существование в E базиса V такого, что $VV^* = B^{-1}$. В этом базисе $\mathbf{y} = V[y]$. Оператор $\mathbb{E}_V : \mathcal{E}_V = S(V\mathbb{E}) \to E$ имеет матрицу $\mathbb{E}$, так как нетрудно показать, что $[y] = \mathbb{E}(y)$, но $\mathbf{y} = \mathbb{E}_V(y) = V\mathbb{E}(y)$. □

Итак, в нашем случае, во–первых, матрица $\mathbb{E}$ есть и оператор $\mathbb{E}$, а во–вторых, $\mathbb{E}^* = E'$, то есть указанная инволюция матрицы совпадает с ее сопряженным оператором.

Замечание 2. В общем случае ситуация другая. Пусть оператор $K : E_{(1)} \to E_{(2)}$, причем в $E_{(1)}$ и $E_{(2)}$ СП определены матрицами B_1, B_2 соответственно. Тогда $K' = B_1^{-1} K^* B_2$. Для операторов $P : E \to E$, если матрица $B \neq I$ в определении СП, имеем: $P' = B^{-1} P^* B$. Если B, B_1, B_2 — единичные матрицы (как в нашем случае), то $K' = K^*$, $P' = P^*$. □

Обозначим столбцы матрицы $(\mathbb{E}')^{-1} = (\mathbb{E}^*)^{-1} = \mathbb{E}^{-1*}$ через ε_i, $i = \overline{0, L}$, то есть $\mathbb{E}^{-1*} = |\varepsilon_i|_0^L = |\varepsilon_0, \cdots, \varepsilon_L|$. Тогда строки матрицы $\mathbb{E}^{-1} = \{\varepsilon_i^*\}$ есть функционалы $\{\varepsilon_i' = \langle \cdot, \varepsilon_i \rangle\}_0^L$, значения которых на $\mathbf{y}$ есть обобщенные отсчеты (y):

$$(y) = \left\{\varepsilon_i'\mathbf{y} = \langle \mathbf{y}, \varepsilon_i \rangle\right\}_0^L = \mathbb{E}^{-1}\mathbf{y} = \left\langle \mathbf{y}, \mathbb{E}^{-1*} \right\rangle .$$

Здесь и далее $\langle X, Y \rangle = Y^* X$ — $(M \times N)$-матрица скалярных произведений, если X, Y — строки длины N и M соответственно элементов из E. Ясно, что $\langle X, Y \rangle^* = \langle Y, X \rangle$.

Если новый базис $\mathbb{E}$ ортонормированный, то есть матрица $\mathbb{E}$ такова, что $\langle \mathbb{E}, \mathbb{E} \rangle = I \to \mathbb{E}^{-1} = \mathbb{E}' = \mathbb{E}^*$, то $(y) = \mathbb{E}^*\mathbf{y} = \langle \mathbf{y}, \mathbb{E} \rangle$. Тогда $\{\varepsilon_i = \epsilon_i\}_0^L$ — столбцы матрицы $\mathbb{E}$.

Замечание 3. Если $\dim S(\mathbb{E}) < \dim E$ (как, например, в п. **3.2**), то в общем случае матрица $\mathbb{E}^{-1}$ в приведенных выше формулах есть обратная матрица Мура–Пенроуза [6] или обобщенного «метода наименьших квадратов» [9]: $\mathbb{E}^{-1} = \langle \mathbb{E}, \mathbb{E} \rangle^{-1} \langle \cdot, \mathbb{E} \rangle = (\mathbb{E}^* B \mathbb{E})^{-1} \mathbb{E}^* B$. □

Замечание 4. Поскольку здесь размерности E и линейной оболочки $S(\mathbb{E})$ совпадают, то $P = \mathbb{E}\left\langle \cdot, (\mathbb{E}')^{-1} \right\rangle = \mathbb{E}\mathbb{E}^{-1} = I$. В общем случае, с учетом замечания 2, если $B \neq I$, то $E' = E^* B$, а $\left\langle \cdot, (\mathbb{E}')^{-1} \right\rangle = E\left(B^{-1} E^{-1*}\right)^* = E^{-1}$. Если $\dim S(\mathbb{E}) < \dim E$, то P — ортопроектор на $S(\mathbb{E})$. Тогда $P' = P$ (также с учетом замечания 2) и $PP = P$ [6, 9]. □

Пусть $N < L$, $l = \overline{0, L-N}$ и $(\mathbb{E}')^{-1}_{l,l+N} = \mathbb{E}^{-1*}_{l,l+N} = |\varepsilon_i|_l^{l+N}$ — $(L+1) \times (N+1)$-матрицы соответствующих столбцов матрицы $(\mathbb{E}')^{-1} = \mathbb{E}^{-1*}$. Пусть далее $\mathbb{E}^{-1}_{l,l+N} = \{\varepsilon' = \varepsilon^* = \langle \cdot, \varepsilon_i \rangle\}_l^{l+N} = \left\langle \cdot, \mathbb{E}^{-1*}_{l,l+N} \right\rangle$ — $(N+1) \times (L+1)$-матрицы с указанными строками матрицы $\mathbb{E}^{-1}$.

Введем на E множество из $N+1$ функционалов вида:

$$f_k(\cdot) = \left\langle \cdot, \sum_{l=0}^{n} \varepsilon_{k+l}\alpha_l \right\rangle, \qquad k = \overline{0, N}, \qquad N = L - n.$$

Совокупность функционалов f_k и их значений на $E = E_L$ определяют оператор

$$D_\alpha = D(\cdot) = \{f_k(\cdot)\}_0^N = \left\langle \,\cdot\,, \sum_{l=0}^{n} \mathbb{E}^{-1*}_{l,l+N}\,\alpha_l \right\rangle = \sum_{l=0}^{n} \mathbb{E}^{-1}_{l,l+N}\,\alpha_l^* \,:\, E \longrightarrow \mathcal{E}_N. \qquad (12)$$

При таком определении оператора D (изоморфизма $D : E\big/\ker D \to DE = \mathcal{E}_N$) мы имеем в $\mathcal{E}_N$ естественный базис $\{\delta_{ij}\}_0^N = I_{N+1}$.

Назовем введенный в (12) оператор D обобщенным разностным оператором. Уравнение $D\widehat{\mathbf{y}} = 0$ назовем обобщенным разностным уравнением или РУ для обобщенных отсчетов реализации $\mathbf{y}$. Для оператора D в (12) нетрудно установить такой результат.

Лемма 1. *Матрица* M_D *разностного оператора* $D_\alpha : E_L \to \mathcal{E}_N$ *в базисах* $\mathbb{E}$ *и* $\mathcal{E}_N$ *есть матрица* A^* *из* (10).

Доказательство. Матрица оператора есть оператор преобразования координат: координат базисных векторов в пространстве определения оператора (в данном случае это базис $\mathbb{E}$ в E) в координаты их образов (в данном случае это базис I_{N+1} в $\mathcal{E}_N$). Поэтому для матрицы M_D оператора D (12) можем сразу написать формулу: $M_D = \langle D\mathbb{E}, I_{N+1}\rangle_{\mathcal{E}} = D\mathbb{E}$.

Докажем ее. Действительно, используя (12), преобразуем оператором D базисные векторы $\mathbb{E} \in E$ в пространство $\mathcal{E}_N$:

$$D\mathbb{E} = \sum_{l=0}^{n} \left\langle \mathbb{E}, \mathbb{E}^{-1*}_{l,l+N}\,\alpha_l \right\rangle = \sum_{l=0}^{n} \left\langle \mathbb{E}, \mathbb{E}^{-1*}_{l,l+N}\,\alpha_l \right\rangle.$$

Теперь надо вычислить в базисе пространства $\mathcal{E}_N$ координаты полученых в нем образов $D\mathbb{E}$ базисных векторов $\mathbb{E}$ из E. Так как в $\mathcal{E}_N$ введен естественный базис $\mathcal{E}_N = \{\delta_{ij}\}_0^N = I_{N+1}$, то

$$M_D = \langle D\mathbb{E}, I_{N+1}\rangle_{\mathcal{E}} = D\mathbb{E}.$$

Итак,

$$M_D = \sum_{l=0}^{n} \left\langle \mathbb{E}, \mathbb{E}^{-1*}_{l,l+N}\,\alpha_l \right\rangle = \sum_{l=0}^{n} \alpha_l^* \mathbb{E}^{-1}_{l,l+N}\,\mathbb{E} = \sum_{l=0}^{n} \alpha_l^* I^T_{l,l+N}\,. \qquad (13)$$

Здесь матрицы $I^T_{l,l+N}$ — есть указанные строки из единичной $L+1$-матрицы I . Это есть матрицы соответствующих скалярных произведений биортогональных базисов $\mathbb{E}$ и $\mathbb{E}^{-1}$. Матрицы

$$I^T_{l,l+N} = \mathbb{E}^{-1}_{l,l+N}\,\mathbb{E} = \{\delta_{i,j-l}\}_{i,j=0}^{i=n,j=L}$$

имеют единичный $N+1$-блок I_{N+1} после $l-1$-й позиции, а остальные элементы нулевые. Поэтому нетрудно увидеть, что последняя сумма в (13) и есть матрица A^* из (10). □

3.2. Матрица оператора в функциональном пространстве. Факт леммы 1 может быть обобщен и на функциональное пространство. Разностный оператор может быть задан в абстрактном гильбертовом пространстве H. Мы рассматриваем функции из $H = L^2[0,T]$. Сформулируем этот результат также в виде леммы. Сделаем необходимые пояснения.

Ограниченные линейные функционалы на L^2, как и в E, могут быть определены с помощью СП. Пусть L_2' — пространство таких функционалов на L^2: $\langle \mathbf{y}, \mathbf{x}\rangle_{L^2} = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x}\rangle$, $\mathbf{y} \in L^2$, $\mathbf{x} \in L_2'$. Двойственность L^2 и L_2' , определение СП в L^2 устанавливаются билинейным функционалом $\langle \mathbf{y}, \mathbf{x}\rangle = \displaystyle\int_0^T x^*(t)\,y(t)\,dt$. Далее мы сохраняем обозначения для сходных конструкций, например, таких как $\mathbf{x}' = \mathbf{x}^* = \langle\,\cdot\,, \mathbf{x}\rangle$. Это означает отсутствие весовой функции в определении СП.

Пусть $\mathbb{E} = |\epsilon_0, \cdots, \epsilon_L|$ — финитная, линейно независимая система функций в L^2 (в общем случае комплексных), а $S = S(\mathbb{E}) \subset L^2$ — замкнутая линейная оболочка системы $\mathbb{E}$, то есть конечномерное подпространство в L^2. Пусть, далее,

$$\mathbb{E}^{-1} = \{\varepsilon_i^*\}_0^L = \left\{\varepsilon_i'\right\}_0^L = \{\langle \cdot, \varepsilon_i \rangle\}_0^L = \left\langle \cdot, \mathbb{E}^{-1*} \right\rangle = \left\langle \cdot, (\mathbb{E}')^{-1} \right\rangle$$

— биортогональная ей система векторов в L_2'. Вектор–столбец $\mathbb{E}^{-1} = \{\varepsilon_i^*\}_0^L$ функций из L_2' есть семейство функционалов из L_2' на L^2 таких, что $\left\langle \mathbb{E}, \mathbb{E}^{-1*} \right\rangle = \mathbb{E}^{-1}\mathbb{E} = I_{L+1} = I$.

Система функций $\mathbb{E}^{-1}$, удовлетворяющая только последнему условию, определяется неоднозначно в отличие от конечномерного пространства исходных данных в E, рассмотренного выше, когда $\dim E = \dim S(\mathbb{E})$. Здесь же $\dim S(\mathbb{E}) < \dim E$. Но если подчинить систему $\mathbb{E}^{-1}$ четырем уравнениям Мура–Пенроуза [6] (для одного из них — $\left(\mathbb{E}^{-1}\mathbb{E}\right)' = \mathbb{E}^{-1}\mathbb{E}$, — приведенное выше условие — $\mathbb{E}^{-1}\mathbb{E} = I$ — его частный случай), то система $\mathbb{E}^{-1}$ определена однозначно формулой $\mathbb{E}^{-1} = \langle \mathbb{E}, \mathbb{E} \rangle^{-1} \langle \cdot, \mathbb{E} \rangle$, где $\langle \mathbb{E}, \mathbb{E} \rangle = \int_0^T \mathbb{E}^*(t)\, \mathbb{E}(t)\, dt$ — $(L+1)$-матрица.

Назовем обобщенными отсчетами реализации $\mathbf{y} \in L^2$ значения функционалов $\mathbb{E}^{-1}$ на $\mathbf{y}$:

$$(y) = \{y_i\}_0^L = \mathbb{E}^{-1}\mathbf{y} = \left\langle \mathbf{y}, \mathbb{E}^{-1*} \right\rangle = \{\langle \mathbf{y}, \varepsilon_i \rangle\}_0^L = \langle \mathbb{E}, \mathbb{E} \rangle^{-1} \langle \mathbf{y}, \mathbb{E} \rangle \in \mathcal{E}^{L+1} = \mathcal{E}, \tag{14}$$

где, напомним, ε_i, $i = \overline{0, L}$ — столбцы матрицы E^{-1*}.

Через $\mathcal{E} = \mathcal{E}_L = \mathcal{E}^{L+1}$ обозначено, как и выше, пространство обобщенных отсчетов — векторов (y) — размерности $L+1$ — с естественным базисом $\{\delta_{ij}\}_0^L \in \mathcal{E}$. Это пространство значений системы функционалов $\mathbb{E}^{-1}$ на E. Ясно, что $L+1$-вектор (y) можно рассматривать как результат действия оператора $\mathbb{E}^{-1} : L^2 \to \mathcal{E}$.

Выше уже было отмечено, что в отличие от конечномерного пространства исходных данных, в функциональном пространстве L^2 замкнутое многообразие $S = S(\mathbb{E})$ — конечномерное подпространство в L^2. В E мы имели тождество

$$\mathbf{y} = \mathbb{E}(y) = \mathbb{E}(\mathbf{y}, \mathbb{E}^{-1*}) = P\mathbf{y}, \quad \text{где} \quad P = I : E \to E,$$

где $\mathbb{E}^{-1}$ — обычная обратная матрица, поскольку $\dim S = \dim E$. Теперь же имеем оператор

$$P(\cdot) = \mathbb{E}\mathbb{E}^{-1} = \mathbb{E} \left\langle \cdot, \mathbb{E}^{-1*} \right\rangle : E \longrightarrow S, \quad \text{где} \quad \mathbb{E}^{-1} = \langle \mathbb{E}, \mathbb{E} \rangle^{-1} \langle \cdot, \mathbb{E} \rangle \tag{15}$$

— обратная матрица Мура–Пенроуза. Легко показать, что $PP = P$ $P' = P$.

Замечание 5. Первое равенство есть определение проектора, последнее — условие его ортогональности. Последнее равенство есть также одно из условий Мура–Пенроуза однозначности системы $\mathbb{E}^{-1}$. Оставшиеся два условия: $\mathbb{E}\mathbb{E}^{-1}\mathbb{E} = \mathbb{E}$, и $\mathbb{E}^{-1}\mathbb{E}\mathbb{E}^{-1} = \mathbb{E}^{-1}$ [6]. □

Оператор (15) есть, как легко видеть, ортопроектор на подпространство $S(\mathbb{E})$. Равенство

$$P\mathbf{y} = \mathbb{E} \left\langle \mathbf{y}, \mathbb{E}^{-1*} \right\rangle = \widetilde{\mathbf{y}}$$

определяет ортогональную проекцию $\widetilde{\mathbf{y}}$ функции $\mathbf{y}$ на это подпространство.

Как и ранее, рассмотрим на L^2 функционалы

$$f_k(\cdot) = \left\langle \cdot, \sum_{l=0}^{n} \varepsilon_{k+l}\alpha_l \right\rangle, \qquad k = \overline{0, N}, \qquad N = L - n \tag{16}$$

из сопряженного пространства L_2' и введем оператор

$$D(\cdot) = \{f_k(\cdot)\}_0^N = \left\langle \cdot, \sum_{l=0}^{n} \mathbb{E}^{-1*}_{l,l+N}\, \alpha_l \right\rangle : L^2 / \ker D \longrightarrow \mathcal{E}^{N+1} = \mathcal{E}_N.$$

Назовем его обобщенным разностным оператором. Равенство

$$D\widehat{\mathbf{y}} = \left\langle \widehat{\mathbf{y}}\,, \sum_{l=0}^{n} \mathbb{E}^{-1*}_{l,l+N}\,\alpha_l \right\rangle = 0$$

назовем обобщенным разностным уравнением для реализации $\widehat{\mathbf{y}}$.

Как видим, вид разностного оператора для обобщенных отсчетов в $S(\mathbb{E}) \subset L^2$ почти полностью аналогичен дискретному случаю, рассмотренному выше. Поэтому формулировка нижеследующей леммы близка к формулировке леммы 1.

Лемма 2. *Матрица* M_D *разностного оператора* $D_\alpha : S(\mathbb{E}) \subset L^2 \to \mathcal{E}_N$ *в базисах* $\mathbb{E} \in L^2$ *и* $\mathcal{E}_N$ *есть матрица* A^* *из* (10).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Надо сначала показать, что значения функционалов f_k на функции $\mathbf{y}$ и на ее проекции $\widetilde{\mathbf{y}}$ на конечномерное подпространство $S(\mathbb{E})$ совпадают. Покажем это. А именно, убедимся, что если $\widetilde{\mathbf{y}} = P\mathbf{y}$, то

$$f_k(\mathbf{y}) = f_k(\widetilde{\mathbf{y}}), \quad k = \overline{0,N}.$$

Так как (см. (15)) $S(\mathbb{E}) = S(\mathbb{E}^{-1*})$, то $P(\mathbb{E}) = P(\mathbb{E}^{-1*})$. Откуда $P\mathbb{E} = \mathbb{E}$ и $P\mathbb{E}^{-1*} = \mathbb{E}^{-1*}$. Следовательно, не только $P\epsilon_i = \epsilon_i$, но и $P\varepsilon_i = \varepsilon_i$, для всех $i = \overline{0,L}$. Поэтому, в силу определения (16) и линейности функционалов, достаточно показать, что

$$\langle \widetilde{\mathbf{y}}, \varepsilon_i \rangle = \langle \mathbf{y}, \varepsilon_i \rangle \quad \forall\ i = \overline{0,L} \quad \text{и если} \quad \widetilde{\mathbf{y}} = P\mathbf{y}.$$

Действительно, с учетом сказанного имеем:

$$\langle \widetilde{\mathbf{y}}, \varepsilon_i \rangle = \langle P\mathbf{y}, \varepsilon_i \rangle = \langle \mathbf{y}, P\varepsilon_i \rangle = \langle \mathbf{y}, \varepsilon_i \rangle.$$

Итак, показано, что

$$D\mathbf{y} = D\widetilde{\mathbf{y}} = D\mathbb{E}(y) = M_D(y).$$

Последнее равенство связано, как и в лемме 1, с тем, что в $\mathcal{E}_N$ базисом является матрица I_{N+1}. Поэтому окончательный вывод также совпадает с итоговыми формулами леммы 1:

$$M_D = D\mathbb{E} = \sum_{l=0}^{n} \left\langle \mathbb{E}\,, \mathbb{E}^{-1*}_{l,l+N}\alpha_l \right\rangle = \sum_{l=0}^{n} \alpha_l^* I^T_{l,l+N} = A^*,$$

что и требовалось. □

3.3. Примеры систем для обобщенных отсчетов.

Пример 1 (к п. **3.1**). Неортонормированная система отсчетов степенных функций в E.

$$\mathbb{E} = |\epsilon_i|_0^L = \left| \frac{(t_j - t_{(0)})^i}{i!} \right|_0^L = \mathbb{T}_h(t_{(0)}) = \mathbb{T}_h, \quad t_j = hj, \quad h = T/L, \quad t_{(0)} \in [0,T].$$

Здесь $\mathbb{T} = \{T_{ji}\}_0^L$ — $((L+1)\times(L+1))$-матрица отсчетов степенных функций в интервале $[0,T]$. Биортогональная система — обычная обратная матрица $\mathbb{T}_h^{-1}$. □

Следующие примеры относятся к п. **3.2**.

Пример 2. Неортонормированная система степенных функций в $L^2[0,T]$:

$$\mathbb{E} = |\epsilon_i|_0^L = \left| \frac{(t - t_{(0)})^i}{i!} \right|_0^L = \mathbb{T}(t_{(0)}) = \mathbb{T}, \quad \left\{t, t_{(0)}\right\} \in [0,T].$$

Здесь $\mathbb{T}$ — матрица отсчетов степенных функций в интервале $[0,T]$. Биортогональная система — система функций $\mathbb{T}^{-1} = \langle \mathbb{T}, \mathbb{T} \rangle^{-1} \langle\, \cdot\,, \mathbb{T} \rangle$. □

Пример 3. Ортонормированная система индикаторных функций $\mathbb{E} = \mathbb{I}_h$:

$$\epsilon_i(t) = h_\epsilon = 1\big/\sqrt{h}, \qquad \text{если} \quad t \in I_i, \qquad I_i = [t_i, t_i + h) \quad \text{и}$$

$$\epsilon_i(t) = 0, \qquad\qquad \text{если} \quad t \notin I_i; \qquad t_i = hi.$$

Здесь $h = T\big/L$, а $i = \overline{0, L}$. Так как эта система ортонормирована и действительна, то биортогональная ей система есть $\mathbb{I}_h^{-1} = \mathbb{I}_h \in L_2'$. □

Пример 4. Ортогональная, но ненормированная система $E = \mathbb{I}_{\delta/h}$. Видоизменение примера 3 параметром δ. Отличие функций $\mathbb{I}_{\delta/h}$ этого примера от функций $\mathbb{I}_h$ третьего примера заключается в том, что

$$\text{a)} \quad I_i = [t_i, t_i + \delta), \quad \delta \in (0, h), \qquad \text{b)} \quad h_\epsilon = 1.$$

Биортогональная система в этом случае есть $\mathbb{I}_{\delta/h}^{-1} = \mathbb{I}_{\delta/h}\big/\delta$, $\delta > 0$. При $\delta \to 0$ эта система в пространстве L_2' приближается к системе δ–функций, а значения на $\mathbf{y} \in L^2$ определяемых ею функционалов — к значениям отсчетов этой исходной функции (реализации) $\mathbf{y}$ на h–сетке $t_i = hi$, $i = \overline{0, L}$. Этот случай рассмотрен в п. **3.1** и изучается далее. □

Поясним примеры 3, 4. Значение обобщенных отсчетов в этих примерах пропорционально или равно среднему значению сглаживаемой функции в интервалах длины h или δ, примыкающих к точкам $t_i = hi$, $i = \overline{0, L}$. Это некоторая предварительная фильтрация ошибок на основе модели, предполагающей, что в указанных интервалах истинная (восстанавливаемая) функция близка к постоянной.

Обобщенные отсчеты (14) в первом и втором примерах — соответственно:

$$(y) = T_h^{-1}, \quad \text{и} \quad (y) = \mathbb{T}^{-1}\mathbf{y} = \langle \mathbb{T}, \mathbb{T} \rangle^{-1} \langle \mathbf{y}, \mathbb{T} \rangle = \left\langle \mathbf{y}, \mathbb{T}^{-1*} \right\rangle$$

есть вектор оценок производных $(y) \approx \{y^{(i)}\}_0^L$ функции $\mathbf{y} = y(t)$ на основе указанной дискретной или равномерной тейлоровской аппроксимации. Тогда коэффициенты обобщенного разностного уравнения в п. **3.2** — коэффициенты a дифференциального уравнения (3).

Пример 5. «Абстрактный» пример ортонормированной системы. Пусть $\mathbb{E}$ ортонормированная система, порожденная изометрическим на ней оператором $U : \mathbb{E} = \mathbb{E}_L = \mathbb{E}_{\overline{0,L}} = |U^i \epsilon_0|_0^L$, где $\|\epsilon_0\| = 1$. Частично изометрическим, таким, что отображение $S(\mathbb{E}_{L-1}) \to S(\mathbb{E}_{\overline{1,L}})$ изометрично, является, например, оператор $U_0 = \mathbb{E}_{\overline{1,L}} \langle \,\cdot\,, \mathbb{E}_{L-1} \rangle$.

В п. **3.1** $\mathbb{E} = E$. Можно считать, что в качестве U_0 принят оператор $I_{L+1}^1 = I^1$ сдвига «вниз» (8), а $\epsilon_0 = \varepsilon_0 = e_0 = \{\delta_{i0}\}_0^L$. Отображение $I^1 : E_{L-1/L} \to E_{\overline{1,L}/L}$ — изометрично.

В п. **3.1** был также отмечен случай, когда $\mathbb{E}$ — ортонормированная система. Тогда, как было отмечено, в биортогональной системе $\varepsilon_i = \epsilon_i$, $i = \overline{0, L}$. При образовании такой системы $\mathbb{E}$ с помощью оператора U (или U_0) обобщенное РУ имеет вид: $\left\{\sum_{i=0}^n \left\langle \widehat{\mathbf{y}}, U^i \varepsilon_k \alpha_i \right\rangle\right\}_{k=0}^L = 0$, где $\varepsilon_k = U^k \varepsilon_0 = \epsilon_k$ [10, 11, 13]. □

Замечание 6. Частично изометрическим оператором называется оператор U в H такой, что отображение $H \ominus \ker U \to UH$ изометрично.

Для I^1 (8) имеем: $\ker I^1 = e_L = \{\delta_{iL}\}_{i=o}^L$. Поэтому $E \ominus \ker I^1 = E \ominus S\,(e_L) = S\left(|e_i|_0^{L-1}\right) = E_{L-1/L} \supset E$, а $I^1 E = S\left(|e_i|_1^L\right) = E_{\overline{1,L}/L} \supset E$. □

§ 4. Аналитическое решение

4.1. Выбор базиса в ортогональном дополнении. В пространстве $\mathcal{E} = \mathcal{E}_L$ обобщеных отсчетов $(y) \in \mathcal{E}$ таких, что $\mathbf{y} = \mathbb{E}(y)$, мы имеем естественный базис $\{\delta_{ij}\}_0^L = I$. В E мы также приняли естественый базис ($B = I$). Будем считать, что $\mathbb{E} = I$, то есть $\mathbf{y} = I(y)$ и отождествим пространства E и $\mathcal{E}$ и, следовательно, вектор $\mathbf{y}$ с вектором его координат (y). Поэтому функционалы $\mathbf{x}'$ на E из E' определяются формулой $\mathbf{x}' = \langle\,\cdot\,,\mathbf{x}\rangle = \mathbf{x}^* \in E'$.

Уравнения (9), условия (11) означают, что $\langle\widehat{\mathbf{y}}, A\rangle_{\mathcal{E}} = 0 \ \ \forall \ \ \widehat{\mathbf{y}} \in \Psi = \ker D$. Более коротко: $\langle\Psi, A\rangle_{\mathcal{E}} = 0$. Таким образом, в E' имеем систему функционалов:

$$A' = \langle\,\cdot\,, A\rangle = A^* \in E',$$

которая определяет оператор $D : E_L \to \mathcal{E}_N$ (9). Его матрица есть МСВ A^* (10), (13).

Обозначим через $S' = S'(A^*) \subset \mathcal{E}'_L$ — подпространство функционалов в E', натянутое на систему функционалов A'. Через $\Psi' = \langle\,\cdot\,,\Psi\rangle \subset E'$ обозначаем подпространство функционалов $\Psi' = E' \ominus S'$ в E' — ортогональное дополнение к подпространству S' в E'. Под условием ортогональности в E' имеется в виду следующее. Если $\langle\mathbf{y},\mathbf{x}\rangle$ — СП в E, то СП в E' двойственных функционалов $\langle\,\cdot\,,\mathbf{x}\rangle$, и $\langle\,\cdot\,,\mathbf{y}\rangle$ есть $\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle$.

Является ли система A' независимой? В дополнение к результатам лемм 1, 2 из представления (10) и формулы (13) очевиден следующий результат:

Лемма 3. *Если хотя бы один коэффициент РУ* (9) *отличен от нуля, то строки матрицы* $A' = A^* = \langle\,\cdot\,, A\rangle$ *— матрицы оператора* D *— независимы и они есть базис в ортогональном дополнении* $\Psi'_\perp = S' \subset E'$ *к подпространству* $\Psi' = \langle\,\cdot\,,\Psi\rangle \subset E'$*, где* $\Psi = \ker D \subset E$.

Столбцы МСВ A — это система векторов в подпространстве $E \ominus \Psi$. Ясно также, что $E \ominus \Psi = S = S(A)$. При условии леммы 3 система A линейно независима. Поэтому очевидно

Следствие. *Матрица* A ($N+1$ *ее* $(L+1)$*-векторов–столбцов*) *является базисом подпространства* $\mathcal{E} \ominus \ker D = \Psi \subset \mathcal{E}$*, изометричного подпространству* $S' = E' \ominus \Psi'$.

Результаты лемм 1, 2, 3 и следствие последней позволяют констатировать следующие простые, но важные для решения задачи проектирования (5), (9) факты.

Теорема 1. a) *Ортогональное дополнение* S *к подпространству модели* $\Psi = \ker D_\alpha$ *всегда имеет теплицев базис* $A = A_N$ *скользящего вектора. Он сопряжен* (*двойственен*) *базису* A^* *в подпростанстве функционалов* $S' = S'(A^*) = E' \ominus \Psi'$.

b) *Матрица базиса* A^* *в* $S' \ominus \Psi'$ (*ее строки*) *является также матрицей разностного оператора* (12) *в евклидовом и в функциональном пространствах обобщенных отсчетов.*

c) *Базис скользящего вектора* A *в* S *— это столбцы матрицы* $A = A(\alpha)$*, конструкция которой в виде МСВ* A^* *приведена в* (10)*. Он порождается степенями частично изометрического оператора сдвига* (8) $I^1_{L+1} = I^1 = \{\delta_{i-1,j}\}^L_0$ *с начального вектора* $\eta_0 = |\alpha^*, 0^T_N|^*$ *:*

$$A = A_N = A_\alpha = A_N(\alpha) = |\eta_0, \eta_1, \cdots, \eta_N|, \quad \textit{где} \quad \eta_k = I^k\eta_0.$$

d) *Образующим вектором теплицевой ленточной матрицы* $A^* = A(\alpha^*)$ *обобщенного разностного оператора* D_α *является вектор коэффициентов* α^* *разностного уравнения дискретной вариационной задачи* (5), (9).

Теорема 1 приводит к эффективному численному методу решения задачи (5), (9). Его схема кратко излагается далее. Он применим и в случае произвольного частично изометрического оператора U в п. (c) теоремы при образовании базиса A (см. пример 5 в п. **3.3**).

4.2. Проектирование. В этой статье мы рассматриваем важный частный случай общей вариационной задачи (5), (9), предполагая разностный оператор D известным, то есть вектор α коэффициентов РУ (4), (9) заданным. В этом случае решение $\widehat{\mathbf{y}}_\alpha = \widehat{\mathbf{y}}$ вариационной задачи (5), (9) — обычное ортогональное проектирование вектора (реализации) $\mathbf{y}$ на конкретное подпространство $\Psi = \Psi_\alpha = S_\perp = S_\perp(A(\alpha))$. Такую задачу мы называем вариационной задачей сглаживания.

Отличие используемого здесь подхода к сглаживанию от чаще всего применяемого в методе наименьших квадратов [1, 4, 6, 9] и который при рекуррентных вычислениях приводит к использованию уравнения Риккати (1) в том, что проектор на подпространство модели Ψ вычисляется с использованием базиса не в Ψ, а некоторого базиса в его ортогональном дополнении $\Psi_\perp$. Этот вариационный подход приводит к использованию уравнений встречной ортогонализации, следствием которых, как показано в [12], являются формулы Фробениуса (2) [9]. Он приводит также к специальным быстрым алгоритмам рекуррентных вычислений в случае базисов, образуемых изометрическими операторами (пример 5).

В явном виде проекция $\widehat{\mathbf{y}}$ вычисляется по обычной формуле ортогонального проектирования в евклидовом пространстве. Соответствующая формула, выраженная через базис A в ортогональном дополнении S к подпространству Ψ — ядру оператора D в (6), (9) — имеет, как известно [1, 4, 6, 9], вид:

$$\begin{gathered}\widehat{\mathbf{y}} = \Pi\mathbf{y}, \quad \Pi = I - P, \qquad \text{где} \\ P = P_\alpha = AA^{-1} = A\,\langle A, A\rangle^{-1}\,\langle\,\cdot\,, A\rangle = A(A^*A)^{-1}A^*.\end{gathered} \tag{17}$$

Здесь P — проектор на $S = S(A) = E \ominus \Psi$. Оператор Π — есть проектор на ортогональное дополнение к S, то есть на подпространство $\Psi = S_\perp = E \ominus S(A)$ — ядро оператора D_α разностного уравнения (4), (9).

§ 5. Вычислительное решение

5.1. Сглаживание. Введем обозначения для проекторов $P_{\overline{k,l}}$. Так будут обозначаться проекторы на подпространство $S_{\overline{k,l}} = (A_{\overline{k,l}})$ — линейную замкнутую оболочку указаных столбцов матрицы A: $A_{\overline{k,l}} = |\eta_k, \ldots, \eta_l|$. Пусть также $\Pi_{\overline{k,l}}$ обозначает проектор на ортогональное дополнение $\Psi_{\overline{k,l}}$ к подпространству $S_{\overline{k,l}}$. Также обозначаем кратко: $\Pi_{\overline{0,k}} = \Pi_k$.

Введем понятие *частично* сглаженной реализации

$$\widehat{\mathbf{y}}_k = \Pi_k\mathbf{y}.$$

Проектор $\Pi_k = I - P_k$ воздействует только на первые $\overline{0, k+n}$ отсчетов из реализации $\mathbf{y}$. Это следует из вида матрцы A в (10), ее определения в теореме 2 и формул проектирования (17). Поэтому в частично сглаженной реализации — $L+1$-векторе $\widehat{\mathbf{y}}_k$ — только первые $\overline{0, k+n}$ отсчетов — «сглажены» проектором Π_k, а все последующие $N-k$ отсчетов равны исходным.

Текущими состояниями мы называем n–векторы

$$[\widehat{y}]_k = \{\widehat{y}_{k+i/k}\}_{i=1}^n, \qquad k = \overline{-1, N}$$

— *последние* n из упомянутых $\overline{0, k+n}$ сглаженных отсчетов в частично сглаженной реализации $\widehat{\mathbf{y}}_k$, оценку текущего состояния модели (4), (9). Эта оценка определяет прогноз $\widehat{y}_{k+1+n/k}$ модели (4), (9) на последний сглаживаемый $(k+n+1)$-й отсчет реализации $\widehat{\mathbf{y}}_{k+1}$, и, следовательно, ошибку этого прогноза

$$\pi_{k+1} = \langle\widehat{\mathbf{y}}_k, \eta_{k+1}\rangle) = y_{k+1+n} - \widehat{y}_{k+1+n/k},$$

называемую также процессом обновления [3]. Как мы увидим, именно ошибка прогноза определяет обновление сглаженной реализации на каждом такте k ее рекуррентного вычисления.

Пусть $A = |\eta_0, \ldots, \eta_N|$ — произвольная независимая система векторов. Хорошо известен [9] процесс ее ортогонализации Грама–Сонина–Шмидта [14] (ГСШ). Определим процессы *двусторонней* (*two–sided*) или *встречной* (*counter*) ортогонализации: прямой (*forward*) и возвратной (*backward*).

Определение 1. Определим *ортогонализирующие векторы* встречных процессов ортогонализации Г–Ш.

a) $f_k = \Pi_{k-1}\eta_k,\qquad h_k = \langle f_k, f_k\rangle$ — *прямой* процесс;

b) $f_{k-i/k} = \Pi_{\overline{1+k-i,k}}\,\eta_i,\quad h_{k-i/k} = \left\langle f_{k-i/k}, f_{k-i/k}\right\rangle$ — *возвратный* процесс,

$$\Pi_{-1} = \Pi_{\overline{k+1,k}} = I,\qquad f_{k/k} = \eta_k,\qquad i = \overline{0,k}\,,\quad k = \overline{0,N}.$$

Определим также *конечные* (*finished*) ортогонализирующие векторы прямых и возвратных процессов длины k. Для прямых процессов k это векторы f_k, а для возвратных — векторы

$$\widetilde{f}_k = \Pi_{\overline{1,k}}\,\eta_0 = f_{0/k},\qquad \widetilde{h}_k = \left\langle \widetilde{f}_k, \widetilde{f}_k\right\rangle = h_{0/k},\qquad f_0 = \widetilde{f}_0 = \eta_0. \qquad \square$$

Встречные процессы ортогонализации необходимы далее для формулировки и доказательства теоремы об уравнениях рекуррентных вычислений сглаженных реализаций $\widehat{\mathbf{y}}_k$, $k = \overline{0,N}$.

Это теореме должна быть предварена очевидная из определения 1.

Лемма 4. *Уравнения прямого процесса ортогонализации ГСШ имеют вид:*

$$\Pi_k(\,\cdot\,) = \Pi_{k-1}(\,\cdot\,) - f_k a_k\left\langle\,\cdot\,, f_k\right\rangle,\qquad \Pi_{-1} = I,$$

где

$$f_k = \Pi_{k-1}\eta_k,\quad a_k = h_k^{-1} = \|f_k\|^{-2},\qquad k = \overline{0,N}.$$

Теорема 2. *Пусть* Π_k, *— проектор на* $\Psi_k = E \ominus S_k$, $S_k = S(A_k)$, *а* $\widehat{\mathbf{y}}_k = \Pi_k\mathbf{y}$ *— проекция на* Ψ_k, *частично сглаженная реализация, соответствующая формулам* (17) *для базиса*

$$A_k = |\eta_0, \cdots, \eta_k|\,,$$

объема $k+1$ *в* S_k. *Тогда имеют место следующие факты.*

a) *Вычисления по формулам* (17) *проектирования на* $\ker D_k = \Psi_k$, *где* D_k *— разностный оператор, могут быть осуществлены рекуррентно, последовательным расширением базиса* A_k *от* $k=0$ *до* $k=N$, *с начальных условий для проектора:* $\Pi_{-1} = I_{L+1}$. *Начальная сглаженная реализация* $\widehat{\mathbf{y}}_{-1} = \mathbf{y}$ *равна исходной реализации* (*проектируемому вектору*).

b) *Такт* $k+1$, $k = \overline{-1, N-1}$ *вычисления проекции* $\widehat{\mathbf{y}}_{k+1} = \Pi_{k+1}\mathbf{y}$ *процесса вычисления сглаженной реализации*

$$\widehat{\mathbf{y}} = \widehat{\mathbf{y}}_N = \Pi_N\mathbf{y}$$

в явной формуле (17) *описывается следующими рекуррентными уравнениями:*

$$\widehat{\mathbf{y}}_{k+1} = \widehat{\mathbf{y}}_k - f_{k+1}a_{k+1}\pi_{k+1},\qquad \text{где}$$

$$\pi_{k+1} = \langle\widehat{\mathbf{y}}_k, \eta_{k+1}\rangle = y_{k+1+n} - \widehat{y}_{k+1+n/k}$$

— процесс обновления: ошибка прогноза $\widehat{y}_{k+1+n/k}$ *на значение отсчета* y_{k+1+n}.

c) *Прогноз осуществляется моделью* (4) *из ее последнего* (*текущего*) *оцененного вектора состояния*

$$[\widehat{y}]_k = \left\{\widehat{y}_{k+i/k}\right\}_{i=1}^n,\qquad k = \overline{-1, N-1},$$

вычисленного по результатам k*-го такта данного последовательного процесса* (*пункт* (b) *теоремы*). *В соответствии с утверждением* (a) *этой теоремы,* $[\widehat{y}]_{-1} = \{y_{i-1}\}_1^n$ *— есть первые* n *отсчетам из исходной реализации* $\mathbf{y}$.

d) *Векторы*

$$f_{k+1} = \Pi_k\eta_{k+1},\qquad k = \overline{-1, N-1}$$

— есть ортогонализирующие векторы прямого процесса ортогонализации ГСШ, а положительные действительные числа

$$a_{k+1} = 1/\|f_{k+1}\|^2$$

— есть обратные квадраты их норм.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение (a) следует из леммы 4, формулы (b) вытекают также из леммы 4 и из равенств:

$$\langle \mathbf{y}, f_{k+1}\rangle = \langle \mathbf{y}, \Pi_k \eta_{k+1}\rangle = \langle \Pi_k \mathbf{y}, \eta_{k+1}\rangle = \langle \widehat{\mathbf{y}}, \eta_{k+1}\rangle .$$

Результат (c) есть следствие определения базиса A в теореме 1, а заключение (d) есть также следствие леммы 4. □

5.2. Фильтрация. Формулы ортогонального проектирования (17) и рекуррентные формулы теоремы 2 дают решение задачи сглаживания. Нетрудно увидеть, что она включает в себя и фильтр для текущих состояний $[\widehat{y}]_k$, $k = \overline{-1, N}$.

Из формулы для прогноза $\widehat{y}_{k+1+n/k}$, от которого и зависит параметр обновления π_{k+1} сглаженной реализации $\widehat{\mathbf{y}}_{k+1}$ на такте $k+1$ рекуррентных вычислений в теореме 2, следует, что для его вычисления необходимо и достаточно вычисление только n последних компонент ортогонализующих векторов f_{k+1}.

Из нижеследующей теоремы 3 вытекает, что эти вычисления достаточны для решения задачи Коши уравнений ортогонализации (лемма 4) и проектирования (теорема 2). В уравнениях теоремы 3 используются встречные процессы ортогонализации из определения 1.

Теорема 3. a) *Ортогонализирующие векторы* $f_{k+1} = \Pi_k \eta_{k+1}$, $\widetilde{f}_{k+1} = \Pi_{1,k+1}\eta_0$ *вычисляются с помощью следующих линейных уравнений двусторонней ортогонализации:*

$$\begin{aligned} f_{k+1} &= I^1 f_k - \widetilde{f}_k \theta^*_{k+1}, \\ \widetilde{f}_{k+1} &= \widetilde{f}_k - I^1 f_k \theta_{k+1}, \end{aligned} \tag{18}$$

$$k = \overline{-1, N-1}, \qquad \Pi_{-1} = I, \qquad f_0 = \widetilde{f}_0 = \eta_0.$$

b) *Здесь:*
$$\theta_{k+1} = a_k \mu_{k+1}, \qquad \mu_{k+1} = \left\langle \widetilde{f}_k, I^1 f_k \right\rangle,$$

а множители $a_k = \|f_k\|^{-2}$ *— обратные квадраты норм ортогонализирующих векторов* f_k *— удовлетворяют следующими нелинейным уравнениям:*

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= \left(I - \theta_{k+1}\theta^*_{k+1}\right)^{-1} a_k, \\ a_0 &= \|\eta_0\|^{-1} = \|\alpha\|^{-2}. \end{aligned} \tag{19}$$

Здесь α *— вектор коэффициентов сглаживающего РУ* (4), (9).

c) *Все обращаемые числа не равны нулю:*

$$1 - |\theta_{k+1}|^2 > 0, \quad \forall \ \ k = \overline{0, N-1},$$

если вектор α *коэффициентов РУ* (4), (9) *имеет хотя бы одну не нулевую компоненту, то есть матрица* A *имеет полный ранг, равный* $N+1$.

Следствие 1. *Для вычисления множителей* μ *и, следовательно, переменных* a *в задаче Коши для уравнений* (18), (19) *необходимо и достаточно вычисления минимального числа* n *определяемых уравнениями* (18) *компонент ортогонализирующих* $L+1$ *–векторов*

$$f_k = \{f_{ik}\}_0^L \quad \textit{и} \quad \widetilde{f}_k = \left\{\widetilde{f}_{ik}\right\}_0^L, \qquad k = \overline{0, N}.$$

Указанное минимамальное число компонент ортогонализирущих векторов f_k, $\widetilde{f}_k$ *есть* n *граничных компонент этих векторов перед* $N-k$ *последними нулевыми их компонентами. А именно, это* n *-векторы*

$$[f]_k = \{f_{ik}\}_{k+1}^{k+n} \qquad \textit{и} \qquad \left[\widetilde{f}\right]_k = \left\{\widetilde{f}_{ik}\right\}_{k+1}^{k+n}, \qquad k = \overline{0, N}.$$

МАТЕМАТИКА 2011. Вып. 4

Д о к а з а т е л ь с т в о следует из формулы

$$\mu_{k+1} = \left\langle \widetilde{f}_k, I^1 f_k \right\rangle = \left\langle \widetilde{f}_k, \eta_{k+1} \right\rangle$$

для параметра μ и из определения векторов η в теореме 1. □

Следующий вывод очевиден из полученных результатов.

Следствие 2. *Явные формулы* (17)*, рекуррентные формулы теоремы* 2*, формулы утверждения* (a) *теоремы* 3 *включают в себя и решение задачи фильтрации для текущих состояний* $[\widehat{y}]_k$, $k = \overline{0, N}$. *При решении задачи фильтрации вычисления по формулам* (18) *могут быть ограничены минимальным числом* n *указанных в следствии 1 компонент ортогонализирующих векторов* f_k *и* $\widetilde{f}_k$. *Начальное условие этого фильтра есть* n *–вектор* $[y]_{-1} = \{y_i\}_0^{n-1}$ *— первые* n *отсчетов исходной реализации* $\mathbf{y}$. □

§ 6. Частный случай: полиномиальное сглаживание

Предложенное аналитическое и вычислительное решение общей задачи сглаживания с помощью разностного уравнения вида (4), (9) дает нетрадиционный, вариационный способ решения классической задачи полиномиального (степенным полиномом степени $n-1$) МНК–сглаживания уравнениями $\widehat{\mathbf{y}}^{(n)} = 0$ и $\Delta^n \widehat{\mathbf{y}} = 0$. Напомним, что в п. **2.1** эта задача и послужила отправной точкой исследуемой здесь вариационной задачи сглаживания и аппроксимации (5)–(7) с уравнениями более общего вида (3), (4).

Покажем способ вариационного сглаживания полиномом. Пусть моделью сигнала является полином степени $n-1$. Его отсчеты описываются разностным уравнением порядка $\Delta^n \widehat{\mathbf{y}} = 0$. В точках t_i, $i = \overline{0, L}$ интервала I_T они могут быть описаны таким, явным образом:

$$\left\{ \widehat{y}_i = \sum_{j=0}^{n-1} c_j (t_i - t_{(0)})^j / j!, \quad t_i = hi \in I_T = [0, T] \right\}_0^T \longrightarrow \widehat{\mathbf{y}} = \mathbb{T} c. \tag{20}$$

Тогда коэффициенты α^* уравнения модели (4) есть коэффициенты γ конечной разности порядка n. В этом случае формулы проектирования (17) дают решение задачи сглаживания реализации $\mathbf{y}$ указанным полиномом. Для этого необходимо в формулах (17) использовать МСВ $A = A(\gamma)$, где $\gamma_i = C_n^{n-i} = n! / (n-i)! i!$, $i = \overline{0, n}$.

Решение задачи полиномиального сглаживания в виде (17) есть альтернатива традиционному решению системы уравнений (20) по МНК:

$$\text{найти} \quad \min \|\mathbf{y} - \widehat{\mathbf{y}}\|^2 \quad \text{при} \quad \widehat{\mathbf{y}} = \mathbb{T}\, c.$$

Это решение может быть записано в виде следующего проектора $P(\Psi)$ на $\Psi = S(\mathbb{T})$ [2, 3, 9]:

$$\begin{gathered} \widehat{\mathbf{y}} = P(\Psi) = P(\mathbb{T}) = \mathbb{T} \left\langle \mathbb{T}, \mathbb{T} \right\rangle^{-1} \left\langle \mathbf{y}\, , \mathbb{T} \right\rangle = \mathbb{T}\, \widehat{c}, \qquad \text{где} \\ \widehat{c} = \mathbb{T}^{-1} \mathbf{y} = \left\langle \mathbb{T}, \mathbb{T} \right\rangle^{-1} \left\langle \mathbf{y}\, , \mathbb{T} \right\rangle = \left(\mathbb{T}^* \mathbb{T}\right)^{-1} \mathbb{T}^* \mathbf{y}. \end{gathered} \tag{21}$$

Здесь $\mathbb{T} = \mathbb{T}_{(n-1)/L}(t_0)$ — матрица отсчетов функций Тейлора из (20). Подобная матрица использовалась также в первом примере в п. **3.3**. Здесь

$$\mathbb{T} = \left\{ \frac{(t_i - t_{(0)})^j}{j!} \right\}_{i,j=0}^{i=L,\, j=n-1}.$$

Эквивалентность вариационного (17) и не вариационного (21) решений задачи (5)–(7) следует из эквивалентности ее условий (6) и (7). В эквивалентности решений (17) и (21) можно убедиться также, увидев, что $A_\gamma^* \mathbb{T} = 0$. Следовательно, $\Pi(A_\gamma) = I - P(A_\gamma) = P(\mathbb{T})$. Последовательное вычисление проекторов Π может быть эффективно выполнено с использованием описанных в этой статье уравнений встречной ортогонализации (теоремы 2, 3).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Линник Ю.В. Метод наименьших квадратов и основы теории обработки результатов наблюдений. М.: Физматгиз, 1961. 349 с.
2. Wiener N. Extrapolation, Interpolation, and Smoothing of Stationary Time Series. NY: Technology Press and Wiley, 1949.
3. Kalman R.E. A new approach to linear filtering and prediction problems // Trans. ASME. J. Basic Eng. Ser. D. Vol. 82. Mar. 1960. P. 34–45. (Also published as ASME Paper 59-IRD-11.)
4. Ли Р. Оптимальные оценки, определение характеристик и управление. М.: Наука, 1966. 176 с.
5. Kailath T. Same New Algorithms for Recursive Estimation in Constant Linear System // IEEE Trans. Inform. Theory. 1973. Vol. IT–19. № 6. P. 750–760.
6. Рао Р. Линейные статистические методы и их применение. М.: Наука, 1968. 548 с.
7. Levinson N. The Wiener RMS (root-mean–square) Error Criterion in Filter Design and Prediction // J. Math. Phys. 1947. Vol. 25. P. 261–278.
8. Крейн М.Г. Об интегральных уравнениях, порождающих дифференциальные уравнения 2–го порядка // ДАН. 1954. Т. 97. P. 21–24.
9. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1966. 576 с.
10. Егоршин А.О. Об одном способе оценки коэффициентов моделирующих уравнений для последовательностей // Сиб. журн. индустр. матем. 2000. Т. III. № 2(6). С. 78–96.
11. Егоршин А.О. Идентификация стационарных моделей в унитарном пространстве // Автоматика и телемеханика. 2004. Т. 65. № 12. С. 29–48.
12. Егоршин А.О. Вариационная дискретизация и идентификация линейных стационарных дифференциальных уравнений // Идентификация систем и задачи управления: труды III Междунар. конф. SICPRO'04. ИПУ РАН. Москва, 2004. С. 1824–1883.
13. Yegorshin A.O. Orthogonalization, Factorization, and Identification: As to The Theory of Recursive Equation In Linear Algebra // Siberian Electronic Mathematical Reports (SEMR). 2007. Vol. 4. P. 482–503. URL: `http://semr.math.nsc.ru/v4/p482-503.pdf`.
14. Глазман И.М, Любич Ю.И. Конечномерный линейный анализ М.: Наука, 1969. 475 с.

Поступила в редакцию 20.04.11

A. O. Egorshin

On one variational smoothing problem

We study the variational approach to setting and solving of the function approximating problem by quasipolynomials which are the solutions of the homogeneous autonomous linear difference or differential equations.

Keywords: linear autonomous difference or differential equations, orthogonal projection, smoothing, filtration, prediction, renewal process, fast recurrence algorithms.

Mathematical Subject Classifications: 65F25, 15A03

Егоршин Алексей Олегович, к. ф.-м. н., старший научный сотрудник, Институт математики имени С. Л. Соболева, СО РАН, 630090, Россия, г. Новосибирск, 90, просп. ак. В. А. Коптюга, 4.
E-mail: egorshin@math.nsc.ru

Egorshin Aleksei Olegovich, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher, Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Acad. Koptyug ave., 4, Novosibirsk, 630090, Russia