МЕХАНИКА 2011. Вып. 4

УДК 517.956.4

© *А. Н. Куликов, Д. А. Куликов, А. С. Рудый*

БИФУРКАЦИИ НАНОСТРУКТУР ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ ИОННОЙ БОМБАРДИРОВКИ

Рассматриваются процессы образования периодических структур при ионной бомбардировке. В качестве математической модели выбрано двумерное обобщение уравнения Курамото–Сивашинского. Аналогичное уравнение было получено и в работе Бредли–Харпера. С математической точки зрения изрезанный рельеф в результате ионной бомбардировки может быть объясним как локальные бифуркации плоского профиля при смене устойчивости.

Для описания такого рельефа получены асимптотические формулы. Для исследования нелинейной краевой задачи использован метод теории бифуркаций для задач с бесконечномерным фазовым пространством. В частности, использован метод построения нормальных форм, ведущий свое начало от алгоритма Крылова–Боголюбова.

Ключевые слова: ионная бомбардировка, периодические наноструктуры, уравнение Курамото–Сивашинского, локальные бифуркации, нормальные формы.

Введение

В работе [1] рассмотрено нелинейное уравнение с частными производными, которое можно назвать уравнением, обобщающим широко известное уравнение Курамото–Сивашинского. В работе [2] это уравнение было выведено авторами этой статьи как уравнение, моделирующее процесс образования неоднородного рельефа на поверхности плоской мишени (подложки). Этот вывод опирается на теорию Зигмунда [3] взаимодействия потока ионов с поверхностью твердого тела.

Предлагаемая ниже работа также посвящена математическим аспектам данной темы. В работе [1] были найдены некоторые точные решения уравнения Курамото–Сивашинского, которые имеют вид плоских бегущих волн. Во второй части этой работы рассмотрена периодическая краевая задача для данного нелинейного уравнения с частными производными, которая для некоторых частных случаев была исследована численно. Следует подчеркнуть, что периодическая краевая задача была расмотрена и в работе [4], где математическому анализу подвергнут линеаризованный вариант уравнения Курамото–Сивашинского (Бредли–Харпера). Ниже в рамках той же общности, что и в работе [1] будет рассмотрена соответствующая краевая задача, но ее анализ будет опираться не на численных методах, а на методах теории бифуркаций.

Рассмотрим краевую задачу, предложенную в работах [1, 2] в квазиизотропном случае:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -v_0 + \nu_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \nu_y \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} - D_{xx}\frac{\partial^4 h}{\partial x^4} - D_{xy}\frac{\partial^4 h}{\partial x^2 \partial y^2} - D_{yy}\frac{\partial^4 h}{\partial y^4} + \gamma_x(\frac{\partial h}{\partial x})^2 + \gamma_y(\frac{\partial h}{\partial y})^2, \qquad (0.1)$$

$$h(t, x + H_x, y) = h(t, x, y + H_y) = h(t, x, y). \qquad (0.2)$$

Здесь $v_0,\ \nu_x,\ \nu_y,\ D_{xx},\ D_{xy},\ D_{yy},\ \gamma_x,\ \gamma_y \in \mathbb{R}$.

Коэффициент $v_0 > 0$ и носит название коэффициента эрозии. Его вычислению, в частности, посвящена теория Зигмунда [3]. Коэффициенты поверхностной диффузии D_{xx}, D_{xy}, D_{yy} — положительные постоянные. Остальные коэффициенты уравнения (0.1), в принципе, могут иметь любой знак и варьироваться в достаточно широком диапазоне [1, 2], $\gamma_x, \gamma_y \neq 0$.

Положим

$$h(t,x,y) = u(t,x,y) - v_0 t,$$

а затем нормируем независимые пространственные переменные равенствами

$$x_1 = x(\frac{2\pi}{H_x}), \quad y_1 = y(\frac{2\pi}{H_y}).$$

В новых переменных краевая задача приобретает следующий вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -b_1\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - b_2\frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2} - d_1\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4} - d_2\frac{\partial^4 u}{\partial y_1^4} - d_3\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^2 \partial y_1^2} + c_1(\frac{\partial u}{\partial x_1})^2 + c_2(\frac{\partial u}{\partial y_1})^2, \tag{0.3}$$

$$u(t, x_1 + 2\pi, y) = u(t, x, y_1 + 2\pi) = u(t, x_1, y_1), \tag{0.4}$$

где

$$b_1 = -\nu_x(\frac{2\pi}{H_x})^2, \quad b_2 = -\nu_y(\frac{2\pi}{H_y})^2, \quad c_1 = \gamma_x(\frac{2\pi}{H_x})^2, \quad c_2 = \gamma_y(\frac{2\pi}{H_y})^2,$$

$$d_1 = D_{xx}(\frac{2\pi}{H_x})^4, \quad d_2 = D_{yy}(\frac{2\pi}{H_y})^4, \quad d_3 = D_{xy}(\frac{2\pi}{H_x})^2(\frac{2\pi}{H_y})^2.$$

Краевая задача (0.3), (0.4) инвариантна относительно замены $u \to u + const$. Поэтому, без нарушения общности, если речь идет о состоянии равновесия, то можно считать, что это состояние равновесия $u \equiv 0$.

В следующих разделах при изучении нелинейной краевой задачи (0.3), (0.4) будем опускать индекс «1» у пространственных переменных, то есть опять писать x, y вместо x_1, y_1 в тех случаях, когда это не вызывает разночтений.

§ 1. Устойчивость состояний равновесия

Для их устойчивости рассмотрим линеаризованную краевую задачу (0.3), (0.4):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Au, \tag{1.1}$$

$$u(t, x + 2\pi, y) = u(t, x, y + 2\pi) = u(t, x, y), \tag{1.2}$$

где линейный дифференциальный оператор

$$Au = -b_1\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - b_2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - d_1\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - d_2\frac{\partial^4 u}{\partial y^4} - d_3\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}$$

определен на достаточно гладких фукциях, имеющих по переменным x, y период 2π.

Пусть λ — собственное значение (СЗ), а $v(x, y)$ — собственная функция (СФ) линейного дифференциального оператора A.

Лемма 1.1. *Линейный дифференциальный оператор A имеет СЗ*

$$\lambda = \lambda(n, k) = (b_1 n^2 + b_2 k^2) - (d_1 n^4 + d_2 k^4 + d_3 n^2 k^2),$$

каждому из которых соответствует собственная функция

$$v(x, y) = e_{n,k}(x, y) = \exp(inx + iky),$$

где $n, k \in \mathbb{Z}$ — кольцу целых чисел.

Доказательство стандартно. Среди СЗ могут быть и кратные, если существуют такие пары (n_1, k_1) и (n_2, k_2), что

$$(b_1 n_1^2 + b_2 k_1^2) - (d_1 n_1^4 + d_2 k_1^4 + d_3 n_1^2 k_1^2) = (b_1 n_2^2 + b_2 k_2^2) - (d_1 n_2^4 + d_2 k_2^4 + d_3 n_2^2 k_2^2).$$

Отметим, что $\lambda(0,0)=0$. Понятно, что если $\lambda(n,k)<0$ при всех $n^2+k^2\neq 0$, то любое состояние равновесия задачи (1.1), (1.2) устойчиво (но не может быть асимптотически устойчивым). Устойчивость следует понимать в смысле нормы фазового пространства (пространства начальных условий). Например, пространства Соболева [5] $\mathbb{H}_2^4$, состоящие из тех 2π-периодических по x, y функций $f(x,y)$, у которых существуют интегрируемые с квадратом обобщенные производные до четвертого порядка включительно. Если же существует такая пара (n_0,k_0), где $n_0^2+k_0^2\neq 0$, что $\lambda(n_0,k_0)>0$, то состояние равновесия неустойчиво. Критические случаи выделяются условиями: пусть для некоторых пар (n_0,k_0) выполнено равенство

$$\lambda(n_0,k_0)=0, \quad k_0^2+n_0^2\neq 0,$$

а для остальных n,k $(n^2+k^2\neq 0)$ имеем $\lambda(n,k)<0$. В терминах коэффициентов уравнения (0.3) условия устойчивости приобретают вид двух неравенств: $b_1-d_1<0$, $b_2-d_2<0$. Следовательно, можно выделить три критических случая:

$$1)\ b_1=d_1, b_2<d_2; \quad 2)\ b_1<d_1, b_2=d_2; \quad 3)\ b_1=d_1, b_2=d_2.$$

При проверке следует учитывать, что $d_1,d_2,d_3>0$. В первом случае нулевое СЗ оператора A трехкратно. Ему соответствует СФ:

$$e_{0,0}(x,y)=1, \quad e_{\pm1,0}(x,y)=\exp(\pm ix).$$

При таком выборе коэффициентов удобно обозначить соответствующий оператор через A_1. При реализации второго критического случая оператор обозначим через A_2. Как и в первом случае нулевое СЗ трехкратно. Ему соответствуют три следующие СФ:

$$e_{0,0}(x,y)=1, \quad e_{0,\pm1}(x,y)=\exp(\pm iy).$$

Наконец, в последнем случае соответствующий оператор обозначим A_3. СЗ $\lambda=0$ здесь уже имеет кратность равную 5, так как ему соответствуют следующие 5 СФ:

$$e_{0,0}(x,y)=1, \quad e_{\pm1,0}(x,y)=\exp(\pm ix), \quad e_{0,\pm1}(x,y)=\exp(\pm iy).$$

В следующем разделе будут рассмотрены варианты выбора коэффициентов оператора A, при которых реализуются случаи близкие к критическим, отмеченым выше.

Положим $b_1-d_1=\varepsilon$, $|\varepsilon|<<1$ и введем в рассмотрение линейный дифференциальный оператор $(b_2<d_2)$

$$A_1(\varepsilon)v=-(d_1+\varepsilon)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-b_2\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}-d_1\frac{\partial^4 v}{\partial x^4}-d_2\frac{\partial^4 v}{\partial y^4}-d_3\frac{\partial^4 v}{\partial x^2\partial y^2},$$

где функция $v=v(x,y)$ удовлетворяет периодическим краевым условиям.

Во втором варианте рассмотрим линейный дифференциальный оператор $(b_2-d_2=\varepsilon$, $b_1<d_1)$

$$A_2(\varepsilon)v=-b_1\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-(d_2+\varepsilon)\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}-d_1\frac{\partial^4 v}{\partial x^4}-d_2\frac{\partial^4 v}{\partial y^4}-d_3\frac{\partial^4 v}{\partial x^2\partial y^2}$$

и, наконец, обозначим

$$A_3(\varepsilon)v=-(d_1+\alpha_1\varepsilon)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-(d_2+\alpha_2\varepsilon)\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}-d_1\frac{\partial^4 v}{\partial x^4}-d_2\frac{\partial^4 v}{\partial y^4}-d_3\frac{\partial^4 v}{\partial x^2\partial y^2}, \quad \alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}.$$

§ 2. Нелинейная краевая задача

В первой части этого раздела рассмотрим краевую задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A_1(\varepsilon)u + c_1(\frac{\partial u}{\partial x})^2 + c_2(\frac{\partial u}{\partial y})^2, \tag{2.1}$$

$$u(t, x + 2\pi, y) = u(t, x, y + 2\pi) = u(t, x, y), \tag{2.2}$$

где $u = u(t, x, y)$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$.

Будем искать решения краевой задачи (2.1), (2.2), которые могут быть представлены в следующем виде:

$$u(t, x, y, \varepsilon) = \psi(s) + \varepsilon^{1/2}u_1(s, x, y) + \varepsilon u_2(s, x, y) + \varepsilon^{3/2}u_3(s, x, y) + o(\varepsilon^{3/2}), \tag{2.3}$$

где $s = \varepsilon t$, $u_j(s, x, y) \in \mathbb{H}_2^4$ при любом рассматриваемом s, $j = 2, 3$. Наконец,

$$u_1(s, x, y) = z(s)\exp(ix) + \overline{z}(s)\exp(-ix).$$

Комплекснозначные функции $z = z(s)$, $\overline{z} = \overline{z}(s)$ и действительную функцию $\psi = \psi(s)$ будем искать как решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\psi' = a_0|z|^2, \tag{2.4}$$

$$z' = \alpha z - (a_1 + ia_2)z|z|^2, \tag{2.5}$$

где a_0, a_1, a_2, α — действительные числа. Уравнения (2.4), (2.5) выписаны с точностью до слагаемых порядка $O(\varepsilon^{1/2})$. Эту систему следует дополнить уравнением комплексно сопряженным к (2.5). Систему (2.4), (2.5) принято называть нормальной (квазинормальной) формой [6]. Система (2.4), (2.5) — «главная» часть нормальной формы Пуанкаре–Дюлака. В свою очередь, нормальная форма описывает динамику нелинейной краевой задачи (2.1), (2.2) на трехмерном инвариантном многообразии («центральное многообразие») [7,8]. Остальные решения нелинейной краевой задачи с течением времени приближаются к этому трехмерному многообразию со скоростью экспоненты.

Для определения функций u_2, u_3 сумму (2.3) следует подставить в краевую задачу (2.1), (2.2) и приравнять коэффициенты при $\varepsilon, \varepsilon^{3/2}$, а также учесть, что функции $\psi(s), z(s), \overline{z}(s)$ удовлетворяют системе уравнений (2.4), (2.5). В итоге для u_2, u_3 получим две следующие неоднородные краевые задачи:

$$a_0|z|^2 = A_1(0)u_2 + c_1(\frac{\partial u_1}{\partial x})^2, \tag{2.6}$$

$$u_2(s, x + 2\pi, y) = u_2(s, x, y + 2\pi) = u_2(s, x, y), \tag{2.7}$$

$$\begin{gathered}(\alpha z - (a_1 + ia_2)z|z|^2)\exp(ix) + (\alpha z - (a_1 - ia_2)\overline{z}|z|^2)\exp(-ix) = \\ = A_1(0)u_3 - \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + 2c_1(\frac{\partial u_1}{\partial x})(\frac{\partial u_2}{\partial x}),\end{gathered} \tag{2.8}$$

$$u_3(s, x + 2\pi, y) = u_3(s, x, y + 2\pi) = u_3(s, x, y). \tag{2.9}$$

Линейный оператор $A_1(0)$ имеет трехкратное нулевое СЗ, которому отвечают СФ $e_{0,0}(x, y)$, $e_{\pm1,0}(x, y)$. Поэтому, как известно [9, 10], неоднородная краевая задача

$$A_1(0)v(x, y) = F(x, y)$$

имеет решение, если справедливы следующие равенства (условия разрешимости)

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} F(x, y)\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} F(x, y)\exp(\pm ix)\,dx\,dy = 0.$$

Равенства
$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} v(x,y)\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} v(x,y)\exp(\pm ix)\,dx\,dy = 0$$
выделяют одно такое решение.

Применяя условия разрешимости при рассмотрении неоднородной краевой задачи (2.6), (2.7), получаем, что $a_0 = 2c_1$, а соответствующее решение
$$u_2(s,x,y) = -\frac{c_1}{12d_1}(z^2(s)\exp(2ix) + \overline{z}^2(s)\exp(-2ix)).$$
Аналогично из рассмотрения неоднородной краевой задачи (2.8), (2.9) находим, что
$$\alpha = 1, \quad a_1 = \frac{c_1^2}{3d_1}, \quad a_2 = 0.$$

Перейдем к рассмотрению нормальной формы (2.4), (2.5). При этом реальную роль играет уравнение для «комплексной амплитуды»
$$z' = z - \frac{c_1^2}{3d_1}z|z|^2. \tag{2.10}$$
Стандартный анализ показывает, что дифференциальное уравнение (2.10) имеет семейство состояний равновесия S_1 :
$$z(s) = \eta = \sqrt{3}\frac{\sqrt{d_1}}{|c_1|}\exp(i\nu), \quad \nu\in\mathbb{R}. \tag{2.11}$$
Инвариантное многообразие S_1 асимптотически устойчиво. Каждому решению (2.11) соответствует следующее решение нормальной формы (2.4), (2.5)
$$z(s) = \eta = \sqrt{3}\frac{\sqrt{d_1}}{|c_1|}\exp(i\nu), \quad \psi(s) = 6\frac{d_1}{c_1}s + \psi_0, \ \psi_0\in\mathbb{R}.$$
Используя результаты работ [6, 11, 12], можно обосновать справедливость утверждения.

Теорема 2.1. *Существует такое* $\varepsilon_0 > 0$, *что при всех* $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$ *каждому решению* (2.11) *соответствует решение краевой задачи* (2.1), (2.2)
$$\begin{gathered}u_1(t,x,y,\varepsilon) = u_1(t,x,\varepsilon) = K_1 + \Big(6\varepsilon\frac{d_1}{c_1} + o(\varepsilon)\Big)t + \frac{\sqrt{3}\sqrt{d_1}}{|c_1|}\varepsilon^{1/2}\Big(\exp(i(x+\nu_1)) + \\ + \exp(-i(x+\nu_1))\Big) - \frac{\varepsilon}{4c_1}\Big(\exp(i(2x+2\nu_1)) + \exp(-i(2x+2\nu_1))\Big) + O(\varepsilon^{3/2}),\end{gathered} \tag{2.12}$$
где K_1, ν_1 *— произвольные действительные постоянные. Семейство решений* (2.12) *формирует интегральное многообразие* $M_2(\varepsilon)$ *размерности* 2 *нелинейной краевой задачи* (2.1), (2.2).

Второй вариант выделяется условиями $b_2 = d_2 + \varepsilon, \ \varepsilon\in(0,\varepsilon_0), \ b_1 < d_1$. Это означает, что следует рассматривать краевую задачу
$$\frac{\partial u}{\partial t} = A_2(\varepsilon)u + c_1(\frac{\partial u}{\partial x})^2 + c_2(\frac{\partial u}{\partial y})^2, \tag{2.13}$$
$$u(t,x+2\pi,y) = u(t,x,y+2\pi) = u(t,x,y). \tag{2.14}$$
Практически дословно повторяя построения при анализе нелинейной краевой задачи (2.1), (2.2) позволяют доказать справедливость утверждения.

Теорема 2.2. *Существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ существует семейство устойчивых решений*

$$u_2(t,x,y,t) = u_2(t,y,\varepsilon) = K_2 + \Big(6\varepsilon\frac{d_2}{c_2} + o(\varepsilon)\Big)t + \frac{\sqrt{3}\sqrt{d_2}}{|c_2|}\varepsilon^{1/2}\Big(\exp(i(y+\nu_2)) + \exp(-i(y+\nu_2))\Big) -$$

$$-\frac{\varepsilon}{4c_2}\Big(\exp(i(2y+2\nu_2)) + \exp(-i(2y+2\nu_2))\Big) + O(\varepsilon^{3/2})$$

краевой задачи (2.13), (2.14). *Здесь K_2, ν_2 — произвольные действительные постоянные.*

Более сложный вариант бифуркационной задачи выделяется равенствами

$$b_1 = d_1 + \alpha_1\varepsilon, \quad b_2 = d_2 + \alpha_2\varepsilon, \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0), \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}.$$

Анализу подлежит краевая задача

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A_3(\varepsilon)u + c_1(\frac{\partial u}{\partial x})^2 + c_2(\frac{\partial u}{\partial y})^2, \tag{2.15}$$

$$u(t, x+2\pi, y) = u(t,x,y+2\pi) = u(t,x,y). \tag{2.16}$$

Этот случай отличается тем, что линейный дифференциальный оператор $A_3(0)$ имеет нулевое собственное число кратности 5, которому отвечают собственные функции

$$e_{0,0}(x,y) = 1, \quad e_{\pm1,0}(x,y) = \exp(\pm ix), \quad e_{0,\pm1}(x,y) = \exp(\pm iy).$$

Будем искать решения краевой задачи, которые могут быть представлены в форме

$$u(t,x,y,\varepsilon) = \psi(s) + \varepsilon^{1/2}u_1(s,x,y) + \varepsilon u_2(s,x,y) + \varepsilon^{3/2}u_3(s,x,y) + o(\varepsilon^{3/2}),$$

где $s = \varepsilon t$, функции $u_j(s,x,y) \in \mathbb{H}_2^4$ при всех рассматриваемых s, $j = 1, 2$, а

$$u_1(s,x,y) = (z_1(s)\exp(ix) + \overline{z}_1(s)\exp(-ix)) + (z_2(s)\exp(iy) + \overline{z}_2(s)\exp(-iy)).$$

В данном случае центральное инвариантное многообразие $M_5(\varepsilon)$ имеет размерность равную 5. На этом многообразии $M_5(\varepsilon)$ краевая задача сводится к системе из 5 обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\psi' = a_1|z_1|^2 + a_2|z_2|^2, \tag{2.17}$$

$$z_1' = \alpha_1 z_1 + (a_{11}|z_1|^2 + a_{12}|z_2|^2)z_1, \quad z_2' = \alpha_2 z_2 + (a_{21}|z_1|^2 + a_{22}|z_2|^2)z_2 \tag{2.18}$$

для функций $\psi = \psi(s)$, $z_1 = z_1(s)$, $z_2 = z_2(s)$. Уравнения (2.18) могут быть дополнены комплексносопряженными. Функции $u_2(s,x,y)$, $u_3(s,x,y)$ и коэффициенты нормальной формы (2.17), (2.18) могут быть определены из анализа неоднородных краевых задач для u_2, u_3 :

$$a_1|z_1|^2 + a_2|z_2|^2 = A_3(0)u_2 + c_1(\frac{\partial u_1}{\partial x})^2 + c_2(\frac{\partial u_1}{\partial y})^2, \tag{2.19}$$

$$u_2(s, x+2\pi, y) = u_2(s,x,y+2\pi) = u_2(s,x,y), \tag{2.20}$$

$$g_1\exp(ix) + \overline{g}_1\exp(-ix) + g_2\exp(iy) + \overline{g}_2\exp(-iy) =$$

$$A_3(0)u_3 + 2c_1(\frac{\partial u_1}{\partial x})(\frac{\partial u_2}{\partial x}) + 2c_2(\frac{\partial u_1}{\partial y})(\frac{\partial u_2}{\partial y}), \tag{2.21}$$

$$u_3(s, x+2\pi, y) = u_3(s,x,y+2\pi) = u_3(s,x,y). \tag{2.22}$$

В уравнении (2.21) использованы обозначения

$$g_1 = \alpha_1 z_1 + (a_{11}|z_1^2| + a_{12}|z_1^2|)z_1, \quad g_2 = \alpha_2 z_2 + (a_{21}|z_1^2| + a_{22}|z_1^2|)z_2.$$

Отметим, что в рассматриваемом случае неоднородная краевая задача

$$A_3(0)v(x,y)=F(x,y),\quad v(x+2\pi,y)=v(x,y+2\pi)=v(x,y)$$

имеет решение, если

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}F(x,y)\,dx\,dy=\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}F(x,y)\exp(\pm ix)\,dx\,dy=\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}F(x,y)\exp(\pm iy)\,dx\,dy=0.$$

Используя условия разрешимости, находим, что

$$a_1=2c_1,\quad a_2=2c_2,\quad a_{12}=a_{21}=0,\quad a_{11}=-\frac{c_1^2}{3d_1},\quad a_{22}=-\frac{c_2^2}{3d_2}.$$

Пусть $\alpha_1,\alpha_2>0$. Тогда система дифференциальных уравнений (2.17), (2.18) имеет семейство устойчивых решений

$$\psi(s)=6(\frac{d_1\alpha_1}{c_1}+\frac{d_2\alpha_2}{c_2})s+\psi_0,\quad \psi_0\in\mathbb{R},$$

$$z_j(s)=\eta_j=\frac{1}{|c_j|}\sqrt{\alpha}_j\exp(i\nu_j),\quad \nu_j\in\mathbb{R}. \tag{2.23}$$

Теорема 2.3. *Существует такое $\varepsilon_0>0$, что при всех $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$ и $\alpha_1,\alpha_2>0$ каждому решению семейства* (2.23) *соответствует устойчивое решение*

$$\begin{gathered}u_3(t,x,y,\varepsilon)=K_3+\Big(6\varepsilon(\frac{d_1\alpha_1}{c_1}+\frac{d_2\alpha_2}{c_2})+o(\varepsilon)\Big)t+\\+\frac{\sqrt{3}\sqrt{d_1}}{|c_1|}(\varepsilon\alpha_1)^{1/2}\Big(\exp(i(x+\nu_1))+\exp(-i(x+\nu_1))\Big)+\\+\frac{\sqrt{3}\sqrt{d_2}}{|c_2|}(\varepsilon\alpha_2)^{1/2}\Big(\exp(i(y+\nu_2))+\exp(-i(y+\nu_2))\Big)+\\+\frac{\varepsilon\alpha_1}{4c_1}\Big(\exp(i(2x+2\nu_1))+\exp(-i(2x+2\nu_1))\Big)+\\+\frac{\varepsilon\alpha_2}{4c_2}\Big(\exp(i(2y+2\nu_2))+\exp(-i(2y+2\nu_2))\Big)+O(\varepsilon^{3/2}),\end{gathered}$$

где K_3, ν_1, ν_2 — произвольные действительные постоянные, а через $O(\varepsilon^{3/2})$ обозначена 2π-периодическая по каждой из переменных x,y, имеющая по параметру ε порядок $\varepsilon^{3/2}$.

В теоремах 2.1, 2.2, 2.3 были найдены решения (двухпараметрические семейства решений) вспомогательной краевой задачи (2.1), (2.2). Этим решениям соответствуют решения уже основной краевой задачи (0.1), (0.2). Так, решениям краевой задачи (2.1), (2.2) из теоремы 2.1 соответствуют решения

$$h_1(t,x,\varepsilon)=-v_0t+u_1(t,\frac{H_x}{2\pi}x,\varepsilon)$$

краевой задачи (0.1), (0.2). Аналогично во-втором и в третьем случаях

$$h_2(t,x,\varepsilon)=-v_0t+u_2(t,\frac{H_y}{2\pi}y,\varepsilon),\ h_3(t,x,\varepsilon)=-v_0t+u_3(t,\frac{H_x}{2\pi}x,\frac{H_y}{2\pi}y,\varepsilon).$$

Решения h_1,h_2,h_3 наследуют устойчивость соответствующих решений u_1,u_2,u_3. При восстановлении решений h_1,h_2,h_3, конечно, следует учесть необходимость возвращения к первоначальным пространственным переменным x,y. Подчеркнем еще раз, что при рассмотрении краевой задачи (2.1), (2.2) были использованы вспомогательные переменные x_1,y_1.

§ 3. Неоднородный рельеф иной конфигурации

В данном разделе будем искать решения краевой задачи (2.1), (2.2) в следующем виде:

$$u(t,x,y)=v(t,kx+ny),\quad k^2+n^2\neq 0. \tag{3.1}$$

Пусть $z=kx+ny$. Подстановка функции (3.1) в уравнение (2.1) приводит к уравнению для $v(t,z)$ следующего вида:

$$\frac{\partial v}{\partial t}=-b_l\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}-d_l\frac{\partial^4 v}{\partial z^4}+c_l(\frac{\partial v}{\partial z})^2, \tag{3.2}$$

где

$$b_l=b_1k^2+b_2n^2,\quad d_l=d_1k^4+d_2n^4+d_3n^2k^2,\quad c_l=c_1k^2+c_2n^2.$$

Уравнение (3.2) следует рассматривать вместе с периодическими краевыми условиями

$$v(t,z+2l)=v(t,z), \tag{3.3}$$

где $l=\dfrac{\pi}{p}$, а натуральное p — наибольший общий делитель натуральных чисел $|k|,|n|$. Если они взаимно просты, то, конечно, $p=1$.

Пусть $b_l=d_l+\varepsilon$, где $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$ и рассмотрим краевую задачу (3.2), (3.3) как самостоятельный объект для исследования.

Лемма 3.1. *Существует такое $\varepsilon_0>0$, что при всех $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$ краевая задача* (3.2), (3.3) *имеет двухпараметрическое семейство устойчивых решений*

$$v_l(t,z,\varepsilon)=K_l+(6\varepsilon\frac{d_l}{c_l}+o(\varepsilon))t+2\varepsilon^{1/2}(\frac{\sqrt{3}\sqrt{d_l}}{|c_l|})\cos(z+\nu_l)-\frac{\varepsilon}{2c_l}\cos(2z+2\nu_l)+o(\varepsilon), \tag{3.4}$$

где K_l, $\nu_l\in\mathbb{R}$.

Доказательство этого утверждения практически дословно повторяет доказательство аналогичных теорем из предыдущего раздела.

Решение (3.4) порождает решение краевой задачи (2.1), (2.2)

$$u(t,x,y,\varepsilon)=v_l(t,kx+ny,\varepsilon) \tag{3.5}$$

и, следовательно, основной краевой задачи (0.1), (0.2). Если $k^2+n^2>1$, то это решение неустойчиво как решение нелинейной краевой задачи (2.1), (2.2). Поэтому оно может быть реализовано, если начальные условия $u(0,x)=f(x)$ (возмущения рельефа в начальный момент времени) выбраны специальным образом.

В заключение этого раздела выделим особый случай при рассмотрении краевой задачи (3.2), (3.3). Он возникает при $c_l=0$. Последнее означает, что существует пара целых чисел k_0,n_0, для которых выполнено равенство

$$c_1k_0^2+c_2n_0^2=0. \tag{3.6}$$

Необходимым, но далеко не достаточным условием выполнения (3.6) является неравенство $c_1c_2<0$. Примеры разных знаков у коэффициентов c_1,c_2 можно найти в работе [1]. Обозначим через Ω множество пар, для которых равенство (3.6) выполнено. Это множество содержит счетную совокупность таких пар, если, конечно, существует хотя бы одна. Обозначим через Ω_m ($m\in\mathbb{N}$) подмножество пар из Ω, для которых выполнено дополнительное условие $|k|+|n|<m$. Тогда функция

$$u(t,x,y)=\sum_{(p,q)\in\Omega_m}\beta_{pq}\exp(\mu_{pq}t)\cos(px+qy+\gamma_{pq}), \tag{3.7}$$

если $\mu_{pg} = (d_1p^2 + d_2q^2) - (d_1p^4 + d_2q^4 + d_3p^2q^2)$, $p, q \in \Omega$ удовлетворяет краевой задаче (1.1), (1.2) при любом выборе постоянных β_{pq}, $\gamma_{pq} \in \mathbb{R}$. Сумму (3.7) можно заменить на ряд

$$u(t, x, y) = \sum_{(p,q)\in\Omega} \beta_{pq} \exp(\mu_{pq}t) \cos(px + qy + \gamma_{pq}),$$

если его коэффициенты выбрать таким образом, что он сходится вместе с соответствующими производными. В нашем случае речь идет о следующих производных:

$$\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}, \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}, \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}.$$

Уместно добавить, что, например, неравенство $|\beta_{pq}| \leqslant M\dfrac{1}{(p^2+q^2)^2}$, где $M > 0$ может служить одним из вариантов достаточных условий для сходимости соответствующего ряда.

§ 4. Узкая мишень

Рассмотрим частный случай при изучении нелинейной краевой задачи (0.3), (0.4). Такой частный случай реализуется, если мишень (плоская подложка) узкая. Например, $H_x >> H_y$. Иначе $(\dfrac{H_y}{H_x})^2 = \mu << 1$. Далее μ будем интерпретировать как малый положительный параметр. Если при переходе от краевой задачи (0.1), (0.2) к новой нормированной краевой задаче (0.3), (0.4) добавить еще и нормировку времени $t_1 = d_2t$, то уравнение (0.3) преобразуется уже к следующему:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha_1\mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \alpha\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} - \beta_1\mu\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2} - \beta_2\mu^2\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \gamma_1\mu(\frac{\partial u}{\partial x})^2 + \gamma_2(\frac{\partial u}{\partial y})^2, \tag{4.1}$$

которое, как и ранее, рассматривается вместе с периодическими краевыми условиями (0.4). Здесь

$$\alpha = -\frac{\nu_y H_y^2}{D_{yy}(2\pi)^2},\ \alpha_1 = \frac{\nu_x H_y^2}{D_{yy}(2\pi)^2},\ \gamma_1 = \gamma_x\frac{1}{D_{yy}}\frac{H_y^2}{(2\pi)^2},\ \gamma_2 = \gamma_y\frac{1}{D_{yy}}\frac{H_y^2}{(2\pi)^2},\ \beta_1 = \frac{D_{xy}}{D_{yy}},\ \beta_2 = \frac{D_{xx}}{D_{yy}}.$$

Будем предполагать, что в рамках данного раздела постоянные $\alpha_1, \beta_1, \beta_2$ всегда положительны. Наконец, $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$ и их знак для дальнейшего непринципиален, но $\gamma_1, \gamma_2 \neq 0$. Выбор α последует ниже.

Введем в рассмотрение линейный дифференциальный оператор

$$A(\mu)v = -\alpha\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \alpha_1\mu\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^4 v}{\partial y^4} - \beta_1\mu\frac{\partial^4 v}{\partial x^2\partial y^2} - \beta_2\mu^2\frac{\partial^4 v}{\partial x^4},$$

область определения которого состоит из достаточно гладких 2π-периодических по переменным x и y функций. Пусть $\lambda(\mu) = \lambda_{kn}(\mu)$ собственные числа оператора $A(\mu)$. Тогда

$$\lambda_{kn}(\mu) = (\alpha n^2 - \mu\alpha_1 k^2 - (n^4 + \beta_1\mu n^2k^2 + \beta_2\mu^2k^4)),$$

где $n, k \in \mathbb{Z}$. Как и ранее $\lambda_{00}(\mu) \equiv 0$. Собственные функции могут быть заданы равенствами

$$e_{kn}(x, y, \mu) = \exp(i(kx + ny)),\ n, k \in \mathbb{Z}.$$

Наконец, если $\alpha < 1$, то справедливо неравенство $\lambda_{kn}(\mu) \leqslant \alpha - 1 < 0$ при $n \neq 0$. Уместно отметить, что решения вспомогательной задачи

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \alpha_1\mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \beta_2\mu^2\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \gamma_1\mu(\frac{\partial w}{\partial x})^2, \quad w(t, x + 2\pi) = w(t, x) \tag{4.2}$$

удовлетворяют основной краевой задаче (4.1), (0.4). Следовательно, решения краевой задачи (4.2) формируют инвариантное (интегральное) многообразие $M(\mu)$ для решений задачи (4.1), (0.4). Стандартная техника (см., например, [7, 8, 12]) позволяет доказать, что все решения из достаточно малой окрестности одного из состояний равновесия стремятся к $M(\mu)$ с экспоненциальной скоростью. Иными словами, в этом случае аттракторы краевой задачи (4.1), (0.4) могут быть найдены из рассмотрения «одномерной» краевой задачи (4.2), если, конечно, заведомо искать решения, у которых производные по x, y не «слишком» велики. В свою очередь так как $\alpha_1 > 0$, то все решения из окрестности одного из состояний равновесия стремятся к одному из них.

Иная ситуация складывается, если $\alpha > 1$. Пусть $\alpha = 1 + \mu a,\ a > 0$. Прежде чем непосредственно перейти к рассмотрению краевой задачи (4.1), (0.4) в этом случае, напомним один простой факт, который будет использоваться далее. Введем в рассмотрение линейный дифференциальный оператор

$$A_0 p(y) = -p''(y) - p^{(IV)}(y), \quad p(y + 2\pi) = p(y).$$

У него есть трехкратное собственное число $\lambda = 0$, которому отвечают собственные функции $p_0(y) = 1$, $p_\pm(y) = \exp(\pm iy)$. Он обратим на подпространстве из тех функций, для которых выполнено равенство

$$\int_0^{2\pi} \varphi(y)\,dy = \int_0^{2\pi} \varphi(y)\exp(\pm iy)\,dy = 0.$$

Последние равенства, как и ранее, будем называть условиями разрешимости для неоднородного уравнения $A_0 p(y) = \varphi(y)$, где $p(y + 2\pi) = p(y), \varphi(y + 2\pi) = \varphi(y)$.

Будем искать те решения краевой задачи (4.1), (0.4), которые могут быть представлены в следующей форме:

$$u(t, x, y, \mu) = \psi(s, x, \mu) + \mu^{1/2} u_1(s, x, y) + \mu u_2(s, x, y) + \mu^{3/2} u_3(s, x, y) + o(\mu^{3/2}), \tag{4.3}$$

где достаточно гладкие функции $\psi(s, x, \mu), u_1(s, x, y), u_2(s, x, y), u_3(s, x, y)$ удовлетворяют периодическим краевым условиям (0.4), $s = \mu t$. Наконец,

$$\int_0^{2\pi} u_j(s, x, y)\,dy = \int_0^{2\pi} u_j(s, x, y)\exp(\pm iy)\,dy = 0$$

при всех x и рассматриваемых s, а

$$u_1(s, x, y) = z(s, x)\exp(iy) + \bar{z}(s, y)\exp(-iy).$$

Подстановка суммы (4.3) в уравнение (4.1), как обычно (см. § 2), приводит к неоднородным краевым задачам для определения функций $u_2(s, x, y)$, $u_3(s, x, y)$. Так, приравнивая слагаемые при μ, получаем краевую задачу

$$A_0 u_2 = \frac{\partial \psi}{\partial s} - \alpha_1 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \gamma_1 (\frac{\partial \psi}{\partial x})^2 - \gamma_2 (\frac{\partial u_1}{\partial y})^2, \tag{4.4}$$

$$u_2(s, x + 2\pi, y) = u_2(s, x, y + 2\pi) = u_2(s, x, y). \tag{4.5}$$

Впрочем, при ее анализе переменные s, x играют роль параметров. Условия разрешимости краевой задачи (4.4), (4.5) позволяют заключить, что для функций $\psi(s, x)$, $z(s, x)$ должны быть выполнены равенства

$$\frac{\partial \psi}{\partial s} = \alpha_1 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \gamma_1 (\frac{\partial \psi}{\partial x})^2 + 2\gamma_2 z\overline{z}, \tag{4.6}$$

$$\psi(s, x + 2\pi) = \psi(s, x). \tag{4.7}$$

При выполнении условий разрешимости стандартно находится решение краевой задачи (4.4), (4.5)

$$u_2(s,x,y) = -\frac{\gamma_2}{12}(z^2(s,x)\exp(2iy) + \overline{z}^2(s,x)\exp(-2iy)).$$

Приравнивая коэффициенты при $\mu^{3/2}$, получим следующую неоднородную краевую задачу:

$$A_0u_3 = [\frac{\partial z}{\partial s}\exp(iy) + \frac{\partial \overline{z}}{\partial s}\exp(-iy)] - a(z\exp(iy) + \overline{z}\exp(-iy)) -$$

$$-q(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\exp(iy) + \frac{\partial^2 \overline{z}}{\partial x^2}\exp(-iy)) - 2\gamma_2(\frac{\partial u_1}{\partial y})(\frac{\partial u_2}{\partial y}) - 2\gamma_1\frac{\partial \psi}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial x}\exp(iy) + \frac{\partial \overline{z}}{\partial x}\exp(-iy)),$$

$$u_3(s,x+2\pi,y) = u_3(s,x,y+2\pi) = u_3(s,x,y),$$

где $q = \alpha_1 + \beta_1$. Условия разрешимости последней краевой задачи приводят, в свою очередь, к краевой задаче для определения $z(s,x)$, $\overline{z}(s,x)$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = az + q\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\gamma_2^2}{3}z|z|^2 + 2\gamma_1\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x}, \tag{4.8}$$

$$z(s,x+2\pi) = z(s,x). \tag{4.9}$$

Итак, для определения функции $\psi(s,x)$ и $z(s,x)$ получим систему из двух краевых задач: (4.6), (4.7) и (4.8), (4.9). Эту систему, следуя терминологии из монографии [6], можно назвать квазинормальной формой.

§ 5. Анализ квазинормальной формы. Основной результат для случая узкой мишени

Для квазинормальной формы, состоящей из системы из двух нелинейных краевых задач (4.6), (4.7) и (4.8), (4.9), укажем некоторый набор автомодельных решений Q_m:

$$\psi = \psi_m(s,x) = \sigma_m s + \nu_m, \quad z = z(s,x) = \eta_m\exp(imx),$$

где $\eta_m = \rho_m\exp(i\varphi_m)$, ν_m, φ_m — произвольные действительные константы, а постоянные $\sigma_m \in \mathbb{R}$, $\rho_m > 0$ определяются из системы

$$\sigma_m = 2\gamma_2\rho_m^2, \quad a - qm^2 - \frac{\gamma_2^2}{3}\rho_m^2 = 0,$$

и, следовательно, $\rho_m^2 = 3\gamma_2^{-2}(a - qm^2), \sigma_m = 6\gamma_2^{-1}(a - qm^2)$. Такие решения существуют для тех m, при которых $a - qm^2 > 0$. Такие решения существуют для $m = 0; \pm1, \ldots, \pm m_*$, где $m_* = entier(\sqrt{\frac{a}{q}})$, если $\sqrt{\frac{a}{q}} \notin \mathbb{Z}$ и $m_* = entier(\sqrt{\frac{a}{q}}) - 1$ при $\sqrt{\frac{a}{q}} \in \mathbb{Z}$.

Исследуем устойчивость найденных автомодельных решений. Для этого положим

$$z = \rho_1 z_1, \quad \psi = \rho_2\psi_1, \quad s = \rho_3\tau, \quad p_j > 0. \tag{5.1}$$

В новых переменных $z_1(s,x), \psi_1(s,x), \tau$ краевые задачи (4.6), (4.7) и (4.8), (4.9) удается записать в следующем виде:

$$\dot{\psi_1} = c\psi_1'' + (\psi_1')^2 + bz_1\bar{z}_1, \quad \psi_1(s,x+2\pi) = \psi_1(s,x), \tag{5.2}$$

$$\dot{z_1} = z_1 + dz_1'' - z_1|z_1|^2 + 2z_1'\psi_1', \quad z_1(s,x+2\pi) = z_1(s,x), \tag{5.3}$$

где $c = \dfrac{\alpha_1}{a}$, $d = \dfrac{q}{a}$, $b = \dfrac{6\gamma_1}{a\gamma_2}$, если в заменах (5.1) выбрать

$$\rho_1 = \frac{1}{\gamma_2}\sqrt{3a}, \quad \rho_2 = \frac{a}{\gamma_1}, \quad \rho_3 = \frac{1}{a}.$$

Краевые задачи (5.2), (5.3) имеют решения

$$Q'_m: \quad \psi_1 = \psi_1(\tau, x) = \omega_m \tau, \quad z_{1m}(\tau, x) = \xi_m \exp(imx),$$

соответствующие Q_m. Здесь $\omega_m = b|\xi_m|^2$, $\xi_m = r_m \exp(i\nu_m)$, $r_m^2 = 1 - dm^2$, $\nu_m \in \mathbb{R}$.

Для того чтобы исследовать устойчивость решений Q'_m, а, следовательно, и Q_m положим

$$z_1(\tau, x) = \xi_m \exp(imx)\Big(1 + w(\tau, x)\Big),$$

$$\psi_1(\tau, x) = \omega_m \tau + v(\tau, x).$$

После данных подстановок в краевые задачи (5.2), (5.3) и линеаризации для w, v получим следующие краевые задачи:

$$\dot{v} = cv'' + br_m^2(w + \bar{w}), \quad w(\tau, x + 2\pi) = w(\tau, x), \tag{5.4}$$

$$\dot{w} = d(w'' + 2imw') - r_m^2(w + \bar{w}) + 2imv', \quad w(\tau, x + 2\pi) = w(\tau, x). \tag{5.5}$$

При переходе от краевых задач (5.2), (5.3) к задачам (5.4), (5.5) использовался тот факт, что $\psi_m(\tau, x)$, $z_m(\tau, x)$ удовлетворяли первой системе краевых задач. Для исследования устойчивости нулевого решения линейных краевых задач (5.4), (5.5) положим

$$w(\tau, x) = w_1(\tau, x) + iw_2(\tau, x), \quad w_j(\tau, x) = \xi_{jk}(\tau) \exp(ikx),$$
$$v(\tau, x) = \varphi_k(\tau) \exp(ikx), \quad j = 1, 2, \ k \in \mathbb{Z}.$$

Для выбранного k получим систему из трех дифференциальных уравнений

$$\dot{\Theta}_k = B_k \Theta_k, \quad k = 0, \pm 1, \ldots, \tag{5.6}$$

где $\Theta_k = \Theta_k(\tau) = colon(\varphi_k(\tau), \xi_{1k}(\tau), \xi_{2k}(\tau))$,

$$B_k = \begin{pmatrix} -ck^2 & 2br_m^2 & 0 \\ 0 & -dk^2 - 2r_m^2 & -2dmki \\ 2imk & 2dmki & -dk^2 \end{pmatrix}.$$

Устойчивость систем (5.6) определяет расположение СЗ матриц B_k, которые находим как корни характеристического уравнения

$$\lambda^3 + (q_{km} + ck^2)\lambda^2 + (ck^2 q_{km} + p_{km})\lambda + R_{km} = 0, \tag{5.7}$$

где $q_{km} = 2dk^2 + 2r_m^2$, $p_{km} = dk^2(dk^2 - 4dm^2 + 2r_m^2)$, $R_{km} = ck^2 p_{km} - 8dbm^2k^2r_m^2$.

Если при всех $k \neq 0$ справедливы три неравенства

$$ck^2 q_{km} + p_{km} > 0, \quad R_{km} > 0, \quad (q_{km} + ck^2)(ck^2 q_{km} + p_{km}) - R_{km} > 0, \tag{5.8}$$

то все СЗ матриц B_k лежат в полуплоскости комплексной плоскости, выделяемой неравенством $\operatorname{Re} \lambda_{kj} \leqslant -\lambda_0 < 0$ (λ_0 – универсальная положительная постоянная). Например, если $|\gamma_1 \gamma_2^{-1}|$ достаточно мал, то неравенства (5.8) выполнены при всех $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, если

$$\frac{d}{2} + 1 - 3dm^2 > 0,$$

где $d = \dfrac{q}{a} = \dfrac{(\alpha_1 + \beta_1)}{a}$. Итак доказано утверждение.

Лемма 5.1. *Система из двух краевых задач* (4.6), (4.7), (4.8), (4.9) *имеет решение* Q_m, *если* $a - qm^2 > 0$. *Это решение устойчиво, если выполнены неравенства* (5.8) *и неустойчиво, если для решения с данным номером* m *одно из неравенств* (5.8) *заменено на неравенство с противоположным знаком.*

Теорема 5.1. *Существует такое $\mu_0 > 0$, что при всех $\mu \in (0, \mu_0)$ краевая задача* (4.1), (0.4) *имеет решение, соответствующее Q_m и для этого решения справедлива асимптотическая формула:*

$$u_m(t,x,y,\mu) = \sigma_m \mu t + K_m + \rho_m \mu^{1/2}\Big(\exp(iy + imx + i\nu_m) + \exp(-iy - imx - i\nu_m))$$
$$-\rho_m^2(\frac{\gamma_2^2}{12})\mu(\exp(2iy + 2imx + i2\nu_m) + \exp(-2iy - 2imx - i2\nu_m)\Big) + o(\mu),$$

где $\rho_m^2 = 3\gamma_2^{-1}(a_0 - qm^2) > 0$, $\sigma_m = 2\gamma_1 p_m^2$, K_m, ν_m — произвольные действительные постоянные. Это решение устойчиво, если выполнено условие (5.8) *и неустойчиво, если знак в одном из неравенств* (5.8) *заменен на противоположный.*

Отметим, что число автомодельных решений определяются условием

$$m = 0, \pm 1, \ldots, \pm m_0, \quad m_0 = entier(\sqrt{\frac{a}{q}}),$$

если $\sqrt{\frac{a}{q}}$ не является натуральным числом и m_0 следует уменьшить на 1, если $\sqrt{\frac{a}{q}} \in \mathbb{N}$. Во всяком случае таких решений может быть достаточно много, если велико a или мало q. Структура асимптотической формулы для решений $u_m(t,x,y,\mu)$ показывает, что «изрезанность» рельефа вдоль оси Ox может быть достаточно мелкой, а главное относительно «разнокалиберной».

Отметим, что построения последних двух разделов и отчасти первых имеют точки соприкосновения с работами [13–16], где изучалось уравнение Курамото–Цузуки (Гинзбурга–Ландау). В некоторых частных случаях это уравнение называют обобщенным кубическим уравнением Шредингера. В этих работах можно найти некоторые аналоги теорем из данной статьи [13–16] и более детальное изложение некоторых фрагментов доказательств.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Deissler R. J. Turbulent bursts, spots and slugs in a generalized Ginzburg–Landau equation // Physics letters A. 1987. Vol. 120. № 7. P. 334–340.
2. Bradley R. M., Haper J. M. E. Theory of ripple topography induced by ion bombardment // J. Vae. Technol. 1988. Vol. A6. № 4. P. 2390–2395.
3. Sigmund P. Sputtering by ion bombardment. Theoretical concepts. Sputtering by particle bombardment. 1. / Behrisch R. (Ed). Berlin: Springer–Verlag. 1981. P. 9–71.
4. Кудряшов Н. А., Рябов П. Н., Стриханов М. Н. Численное моделирование формирование наноструктур на поверхности плоских подложек при ионной бомбардировке // Ядерная физика и инжиниринг. 2010. Т. 1. № 2. С. 151–158.
5. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Л.: Изд-во ЛГУ им. А.А. Жданова, 1950. 255 с.
6. Мищенко Е. Ф., Садовничий В. А., Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Автоволновые процессы в нелинейных средах с диффузией. М.: Физматлит, 2005. 431 с.
7. Марсден Дж., МакКракен М. Бифуркация рождения цикла и ее приложения. М.: Мир, 1980. 369 с.
8. Куликов А. Н. О гладких инвариантных многообразиях полугруппы нелинейных операторов в банаховом пространстве // Исследования по устойчивости и теории колебаний. Ярославль: Изд-во ЯрГУ, 1976. С. 114–129.
9. Неймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. 526 с.
10. Функциональный анализ. Справочная математическая библиотека. М.: Наука, 1972. 544 с.
11. Foias C., Sell G. R., Temam R. Inertial manifold for non-linear evolutionary equations // J. Diff. Eq. 1988. Vol. 73. P. 309–352.
12. Куликов А. Н. Интегральные многообразия нелинейных автономных дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве. Препринт № 85 института прикладной математики им. М.В. Келдыша АН СССР, 1991. 24 с.
13. Колесов А. Ю., Куликов А. Н., Розов Н. Х. Цилиндрические бегущие волны обобщенного кубического уравнения Шредингера // Докл. РАН. 2006. Т. 73. № 1. С. 125–129.

14. Куликов А. Н., Куликов Д. А. Локальные бифуркации плоских бегущих волн обобщенного кубического уравнения Шредингера // Дифференц. уравнения. 2010. Т. 40. № 9. С. 1290–1299.
15. Куликов А. Н., Куликов Д. А. Бифуркация автоволн обобщенного кубического уравнения Шредингера в случае трех независимых переменных // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2008. Вып. 3. С. 23–34.
16. Куликов А. Н., Куликов Д. А. Посткритические и докритические бифуркации бегущих волн модифицированного уравнения Гинзбурга–Ландау // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2009. Вып. 4. С. 71–78.

Поступила в редакцию 29.06.11

A. N. Kulikov, D. A. Kulikov, A. S. Rudyi
Bifurcation of the nanostructures induced by ion bombardment

We consider ion-bombardment-induced processes for formation of periodic structures. As a mathematical model, we have chosen the generalized two-dimensional Kuramoto–Sivashinsky equation which is equivalent to the equation obtained by Bradley–Harper. The jagged relief obtained due to ionic bombardment can be explained from a mathematical point of view as local bifurcations of flat profile involving an exchange of stabilities.
To describe the above relief asymptotic formulas are obtained. The bifurcation theory method for problems with infinite dimensional phase space is used to study nonlinear boundary value problem. In particular, we use normal form building which springs from Krylov–Bogolyubov method of averaging.

Keywords: ion bombardment, periodic nanostructures, Kuramoto–Sivashinsky equation, local bifurcations, normal forms.

Mathematical Subject Classifications: 37H20

Куликов Анатолий Николаевич, к. ф.-м. н., доцент кафедры дифференциальных уравнений, Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, 150000, Россия, г. Ярославль, ул. Советская, 14.
E-mail: anat_kulikov@mail.ru

Куликов Дмитрий Анатольевич, к. ф.-м. н., доцент кафедры микроэлектроники, Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, 150000, Россия, г. Ярославль, ул. Советская, 14.
E-mail: kulikov_d_a@mail.ru

Рудый Александр Степанович, д. ф.-м. н., профессор кафедры микроэлектроники, Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, 150000, Россия, г. Ярославль, ул. Советская, 14.
E-mail: rudy@univ.uniyar.ac.ru

Kulikov Anatolii Nikolaevich, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, P.G. Demidov Yaroslavl State University, ul. Sovetskaya, 14, Yaroslavl, 150000, Russia

Kulikov Dmitrii Anatol'evich, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, P.G. Demidov Yaroslavl State University, ul. Sovetskaya, 14, Yaroslavl, 150000, Russia

Rudyi Aleksandr Stepanovich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, P.G. Demidov Yaroslavl State University, ul. Sovetskaya, 14, Yaroslavl, 150000, Russia