

УДК 532.5.032

© *В. В. Пак***АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ТРЕХСЛОЙНОГО ТЕЧЕНИЯ
ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ И НЕКОТОРЫЕ ГЕОФИЗИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ¹**

Разработана нелинейная модель трехслойного течения со свободной границей на основе упрощенных уравнений вязкой жидкости в длинноволновом приближении. Проведено асимптотическое исследование модели, которое показало существование двух различных режимов эволюции течения на малых и больших временах. Получено уравнение, связывающее смещения границ слоев на больших временах, не зависящее от предыстории течения. Модельные результаты используются для изучения поведения глубинной границы под крупномасштабной кольцевой структурой на Луне в зависимости от изменения геометрических физических параметров модели.

Ключевые слова: многослойные течения, длинноволновое приближение, теория смазки, нелинейная диффузия, кольцевые структуры.

Введение

Исследование процесса образования деформационных структур в тонких слоях вязкой жидкости и их устойчивости является одной из важных проблем гидродинамики [1, 2]. Для этой цели широко используются упрощенные уравнения движения вязкой жидкости в длинноволновом приближении (уравнения смазки) [3].

Характерной особенностью многослойных течений является наличие, по крайней мере, двух режимов эволюции: быстрое изменение за относительно короткий начальный промежуток (так называемый временной пограничный слой) и квазистационарная стадия, когда за большие промежутки времени решение изменяется весьма незначительно [2]. Это создает существенные трудности для моделирования, так как задача сводится к сингулярно возмущенной системе нелинейных параболических уравнений.

В работе [4] проведено исследование полной нелинейной системы для двухслойного осесимметричного течения вязкой жидкости. С помощью метода малого параметра исследовалась эволюция границ слоев. Из результатов асимптотического анализа следует, что на больших временах движения поверхности и границы раздела слоев жидкости связаны зависимостью, близкой к функциональной. В качестве примера возможных приложений полученных результатов выполнен расчет положения глубинной границы крупномасштабной кольцевой структуры на Луне.

Однако двухслойная модель имеет существенные ограничения. Реальная глубинная структура состоит из большого числа слоев, которые практически невозможно сгруппировать в два достаточно однородных по плотности и вязкости комплекса. Положение нижней границы является также произвольным и постановка на ней условий жесткого сцепления ограничивает возможности адекватного моделирования реальных глубинных движений.

В настоящей работе проведено асимптотическое исследование эволюции трехслойного течения. Получено уравнение, связывающее движение границ раздела слоев на больших временах, которое используется для моделирования движения глубинной границы раздела под крупномасштабной кольцевой структурой на Луне.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президиума РАН (программа фундаментальных исследований РАН № 2 «Интеллектуальные информационные технологии, математическое моделирование, системный анализ и автоматизация») и гранта ДВО РАН «Моделирование тонкой структуры гидрофизических полей и термохалинной турбулентности в океане» (№ 09-III-A-07-317).

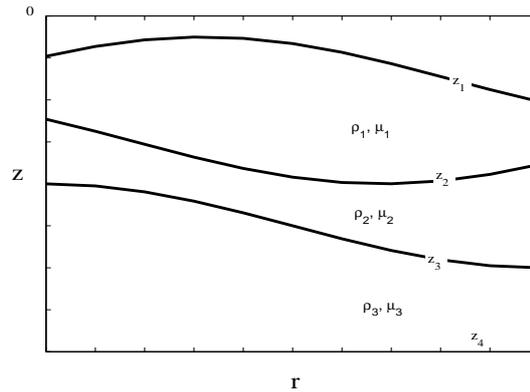


Рис. 1. Общая схема расчетной области

§ 1. Постановка начально-краевой задачи

Общая схема расчетной области показана на рис. 1. Рассмотрим вязкую жидкость, состоящую из трех слоев (обозначены индексами $i = 1, 3$), которые ограничены поверхностями раздела $z = Z_i$, $i = \overline{1, 4}$ и боковой границей $r = r_b$. Верхняя граница Z_1 является свободной, а нижняя Z_4 — неподвижна. Пусть течение создается осесимметричным начальным рельефом поверхности и границы раздела слоев.

Осесимметрическое течение описывается в цилиндрических координатах (r, φ, z) , где r , φ и z — это, соответственно, радиальная, азимутальная и вертикальная координаты. Пусть начало координат совпадает с пересечением оси симметрии и средним (невозмущенным) уровнем поверхности жидкости.

Движение вязкой несжимаемой жидкости в поле силы тяжести при условии осевой симметрии описывается следующими уравнениями [3]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} &= -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu_i \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu_i \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) - \rho_i g, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial(r u_r)}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} &= 0, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где ρ_i , μ_i , $i = \overline{1, 3}$ — плотности и вязкости слоев (постоянные внутри слоев), u_r , u_z — радиальная и вертикальная компоненты скорости, p — давление, g — ускорение силы тяжести.

Для замыкания системы (1.1), на границах слоев задаются следующие краевые условия [3]:

- (1) На границе Z_1 : условия свободной поверхности, то есть нормальная и касательная составляющие напряжения равны нулю:

$$\begin{aligned} \left(-p + 2\mu_1 \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) n_1^1 + \mu_1 \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) n_2^1 &= 0, \\ \mu_1 \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) n_1^1 + \left(-p + 2\mu_1 \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) n_2^1 &= 0, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где n_j^i — направляющие косинусы нормали к границе Z_i , которые вычисляются по формулам:

$$n_1^i = -\frac{\frac{\partial Z_i}{\partial r}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial Z_i}{\partial r} \right)^2}}, \quad n_2^i = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial Z_i}{\partial r} \right)^2}}. \quad (1.3)$$

- (2) На границах раздела слоев Z_i , $i = 2, 3$: условия полного прилипания, то есть составляющие скорости и напряжения непрерывны:

$$\begin{aligned} [u_r]_-^+ &= 0, & [u_z]_-^+ &= 0, \\ \left[\left(-p + 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) n_1^i + \mu \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) n_2^i \right]_-^+ &= 0, \\ \left[\mu \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) n_1^i + \left(-p + 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) n_2^i \right]_-^+ &= 0, \end{aligned} \quad (1.4)$$

где $[\cdot]_-^+$ — скачок функции.

- (3) На границе Z_4 : составляющие скорости движения фундамента равны нулю:

$$u_r = 0, \quad u_z = 0. \quad (1.5)$$

- (4) Начальный профиль границ определяется функциями Z_{i0} :

$$Z_i(r, 0) = Z_{i0}(r), \quad i = \overline{1, 3}. \quad (1.6)$$

На подвижных границах раздела задаются также кинематические условия отсутствия перетока массы, то есть нормальная составляющая скорости частиц жидкости на границе равна скорости движения самой границы:

$$u_z(r, Z_i, t) - \frac{\partial Z_i}{\partial r} u_r(r, Z_i, t) - \frac{\partial Z_i}{\partial t} = 0, \quad i = \overline{1, 3}. \quad (1.7)$$

На боковой границе расчетной области, а также на оси симметрии, радиальная скорость задается равной нулю:

$$u_r(0, z, t) = 0, \quad u_r(r_b, z, t) = 0. \quad (1.8)$$

Для описания движения жидкости использовались упрощенные уравнения в длинноволновом приближении, полученные из (1.1) при следующих предположениях:

- (1) характерный горизонтальный масштаб возмущений много больше вертикального;
- (2) негидростатические напряжения много меньше гидростатического давления;
- (3) плотность не убывает с глубиной.

Обозначим горизонтальный масштаб Z_{i0} через R , а вертикальный — через ϵR , где ϵ — малый параметр, и перейдем к безразмерным переменным:

$$r = R r', \quad z = \epsilon R z', \quad \mu_i = \mu_0 \mu'_i, \quad \rho_i = \rho_0 \rho'_i, \quad u_r = u_0 u'_r, \quad u_z = \epsilon u_0 u'_z, \quad p = p_0 p', \quad (1.9)$$

где μ_0 , ρ_0 , $p_0 = \rho_1 g \epsilon R$, $t_0 = \frac{R}{u_0}$ и $u_0 = \frac{\epsilon^3 \rho_0 g R^2}{\mu_0}$ — это, соответственно, масштабы вязкости, плотности, давления, времени и скорости. В качестве масштабов вязкости и плотности выберем следующие величины: $\rho_0 = \rho_1$ и $\mu_0 = \min \mu_i$.

Подставляя (1.9) в (1.1)–(1.7) и, пренебрегая величинами порядка $o(\epsilon)$, получим следующие уравнения (в дальнейшем для удобства штрихи опускаются):

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial r} &= \mu_i \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2}, \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= -\rho_i, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial(r u_r)}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} &= 0, \end{aligned} \quad (1.10)$$

с граничными условиями

$$p = 0, \quad \mu_1 \frac{\partial u_r}{\partial z} = 0, \quad z = Z_1, \quad (1.11)$$

$$[u_r]_-^+ = 0, \quad [p]_-^+ = 0, \quad \left[\mu \frac{\partial u_r}{\partial z} \right]_-^+ = 0, \quad z = Z_i, \quad i = 2, 3, \quad (1.12)$$

$$u_r = 0, \quad u_z = 0, \quad z = Z_4, \quad (1.13)$$

$$u_z(r, Z_i, t) - \frac{\partial Z_i}{\partial r} u_r(r, Z_i, t) - \frac{\partial Z_i}{\partial t} = 0, \quad i = \overline{1, 3}, \quad (1.14)$$

и начальными условиями:

$$Z_i(r, 0) = Z_{i0}, \quad i = \overline{1, 3}. \quad (1.15)$$

Решая (1.10) с учетом условий (1.11)–(1.13) получим выражения для u_r , u_z и p на границах слоев. После подстановки их в (1.14) и некоторых преобразований получаются уравнения для Z_i :

$$\frac{\partial Z_i}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \sum_{j=1}^3 \left(\Delta \rho_j A_{ij} \frac{\partial Z_j}{\partial r} \right) \right), \quad i = \overline{1, 3} \quad (1.16)$$

где

$$A_{ji} = A_{ij} = \sum_{l=i}^3 H_l \sum_{m=j}^3 H_m \sum_{k=m}^3 \frac{1}{\mu_k} \frac{H_k}{1 + \delta_{jk} + \delta_{lm}}, \quad i \leq j, \quad j = \overline{1, 3}, \quad (1.17)$$

$$H_i = Z_{i+1} - Z_i, \quad \Delta \rho_1 = 1, \quad \Delta \rho_i = \rho_i - \rho_{i-1}, \quad i = 2, 3,$$

δ_{ij} – символ Кронекера.

§ 2. Асимптотическое исследование трехслойного течения

Безразмерные разности плотностей $\Delta \rho_2$ и $\Delta \rho_3$ являются малыми величинами, так как плотность верхних слоев Земли и других твердых планет варьирует в пределах 3000–3400 кг/м³. Предположим, что $\Delta \rho_2 \sim \Delta \rho_3$. Тогда можно ввести малый параметр $\epsilon_1 \ll 1$ такой, что $\Delta \rho_i = \epsilon_1 \Delta \rho_{i0}$, $i = 2, 3$, где $\Delta \rho_{i0} \sim 1$.

Используя результаты работы [5], выделим быстро убывающую составляющую решения. Для этого представим решение системы (1.16) в виде суммы

$$Z_i = z_i(r, \tau) + \zeta_i(r, t), \quad i = \overline{1, 3}, \quad (2.1)$$

где ζ_i являются пограничными функциями, компенсирующими невязку начальных условий и быстро убывающими к нулю на бесконечности, $\tau = \epsilon_1 t$ – «медленное» время. Очевидно, что начальные условия для z_i и ζ_i из (2.1) должны удовлетворять следующим соотношениям: $Z_{i0} = \zeta_i(r, 0) + z_i(r, 0)$, $i = \overline{1, 3}$. Далее разобьем систему (1.16) следующим образом:

1. Для функций $z_i(r, t)$:

$$\epsilon_1 \frac{\partial z_i}{\partial \tau} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r A_{i1} \Big|_{Z=z} \frac{\partial z_1}{\partial r} \right) + \frac{\epsilon_1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \sum_{j=2}^3 \left(\Delta \rho_{j0} A_{ij} \Big|_{Z=z} \frac{\partial z_j}{\partial r} \right) \right), \quad i = \overline{1, 3}, \quad (2.2)$$

где $A_{ij} \Big|_{Z=z}$ – значение A_{ij} , полученное заменой всех вхождений Z на z .

2. Для функций $\zeta_i(r, t)$:

$$\frac{\partial \zeta_i}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \left(A_{i1} \frac{\partial Z_1}{\partial r} - A_{i1} \Big|_{Z=z} \frac{\partial z_1}{\partial r} \right) \right) + \frac{\epsilon_1}{r} \sum_{j=2}^3 \Delta \rho_{j0} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \left(A_{ij} \frac{\partial Z_j}{\partial r} - A_{ij} \Big|_{Z=z} \frac{\partial z_j}{\partial r} \right) \right), \quad i = \overline{1, 3}. \quad (2.3)$$

Представим приближенное решение в виде асимптотических разложений:

$$z_i = z_{i0} + \epsilon_1 z_{i1} + \dots, \quad \zeta_i = \zeta_{i0} + \epsilon_1 \zeta_{i1} + \dots \quad (2.4)$$

Тогда система нулевого приближения для z_{10} имеет вид:

$$0 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r A_{11} \Big|_{Z_i=z_{i0}} \frac{\partial z_{10}}{\partial r} \right), \quad 0 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r A_{21} \Big|_{Z_i=z_{i0}} \frac{\partial z_{10}}{\partial r} \right), \quad 0 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r A_{31} \Big|_{Z_i=z_{i0}} \frac{\partial z_{10}}{\partial r} \right). \quad (2.5)$$

Так как боковая граница расчетной области непроницаема, система (2.5) имеет нулевое решение $z_{10} = 0$. Подставляя его в (2.3), получим систему нулевого приближения для ζ_i :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta_{10}}{\partial t} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r A_{11} \Big|_{Z_i=z_{i0}+\zeta_{i0}} \frac{\partial \zeta_{10}}{\partial r} \right), \\ \frac{\partial \zeta_{20}}{\partial t} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r A_{21} \Big|_{Z_i=z_{i0}+\zeta_{i0}} \frac{\partial \zeta_{10}}{\partial r} \right), \\ \frac{\partial \zeta_{30}}{\partial t} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r A_{31} \Big|_{Z_i=z_{i0}+\zeta_{i0}} \frac{\partial \zeta_{10}}{\partial r} \right). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Так как система (2.6) автономна (то есть коэффициенты уравнений не зависят явно от t), можно оценить величины погранслойных функций на больших временах ($t \sim 1$). Согласно результатам асимптотического анализа сингулярно возмущенных систем дифференциальных уравнений в частных производных [6, 7], $|\zeta_1| \sim \exp(-\frac{\omega_1 t}{\epsilon_1})$, где $\omega_1 \sim \min A_{11} \Big|_{Z_i=z_{i0}+\zeta_{i0}} \sim 1$. Из 2-го и 3-го уравнений (2.6) следует, что функции ζ_2 и ζ_3 имеют такую же оценку скорости убывания. Следовательно, на больших временах вклад погранслойных функций в общее решение пренебрежимо мал.

Система уравнений первого приближения для z_i имеет вид:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r A_{110} \frac{\partial z_{11}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \sum_{j=2}^3 \left(\Delta \rho_{j0} A_{1j0} \frac{\partial z_{j0}}{\partial r} \right) \right), \\ \frac{\partial z_{i1}}{\partial \tau} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r A_{i10} \frac{\partial z_{11}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \sum_{j=2}^3 \left(\Delta \rho_{j0} A_{ij0} \frac{\partial z_{j0}}{\partial r} \right) \right), \quad i = \overline{2, 3}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

где $A_{ij0} = A_{ij} \Big|_{Z_i=z_{i0}}$. Проинтегрируем первое уравнение (2.7) по r

$$A_{110} \frac{\partial z_{11}}{\partial r} + \sum_{j=2}^3 \Delta \rho_{j0} A_{1j0} \frac{\partial z_{j0}}{\partial r} = C_1. \quad (2.8)$$

Так как из условия непроницаемости на боковой границе расчетной области (1.8) частные производные $\frac{\partial z_{11}}{\partial r}$ и $\frac{\partial z_{i0}}{\partial r}$ равны нулю, константа интегрирования $C_1 = 0$.

Решая (2.8) относительно $\frac{\partial z_{11}}{\partial r}$ и подставляя полученное решение во второе и третье уравнение (2.7), получим дифференциальное уравнение, связывающее функции z_{11} , z_{20} и z_{30} , не зависящее от времени

$$\frac{\partial z_{11}}{\partial r} + \sum_{j=2}^3 \frac{A_{1j0}}{A_{110}} \frac{\partial z_{j0}}{\partial r} = 0, \quad (2.9)$$

и два уравнения параболического типа, описывающих эволюцию z_{20} и z_{30} на больших временах

$$\frac{\partial z_{i0}}{\partial \tau} = \frac{1}{r} \sum_{j=2}^3 \Delta \rho_{j0} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \left(\frac{A_{ij0} A_{110} - A_{i10} A_{1j0}}{A_{110}} \right) \frac{\partial z_{j0}}{\partial r} \right), \quad i = \overline{2, 3}, \quad (2.10)$$

Мы не приводим явные выражения коэффициентов уравнения ввиду их громоздкости.

Скорость убывания функций z_{11} , z_{20} и z_{30} будет значительно меньше, чем у погранслоевых функций ζ_i и оценивается величиной $\exp(-\omega_2\tau)$, где $\omega_2 \sim O(1)$ [6, 7].

Таким образом, с помощью метода малого параметра мы получили уравнение (2.9), связывающее положения подвижных границ слоев на больших временах. Это уравнение не зависит от предыстории течения.

§ 3. Результаты моделирования

Используя результаты асимптотического анализа трехслойной модели вязкого течения, проведено моделирование глубинной границы под кольцевой структурой Orientale на Луне.

В предыдущей работе [4], с помощью двухслойной модели, по рельефу поверхности Orientale определялось положение границы кора–мантия. Нижняя граница задавалась на заранее определенной глубине и предполагалась неподвижной. Проведено сравнение результатов расчетов с профилями границы, построенных с помощью гравиметрических методов.

Однако двухслойная модель имеет существенные ограничения. Плотности и вязкости в каждом слое должны быть постоянными. Однако, изучая процессы, охватывающие толщину в сотни километров, нельзя пренебречь изменением вязкости и плотности вещества с глубиной, так как это приводит к радикальной перестройке поля скоростей и напряжений, по сравнению с однородной моделью [12]. Для замыкания системы уравнений движения жидкости в слоях необходимо, чтобы нижняя граница была неподвижной или должны быть известны скорости ее движения. В реальности задать закон движения практически невозможно, потому что движение этой границы зависит от течения как в вышележащих, так в подстилающих слоях. Для того чтобы обойти эту трудность, в модель вводится третий подстилающий слой с заданной толщиной, плотностью и вязкостью. Все это приводит к необходимости перехода к модели с большим числом слоев.

В данной работе с помощью трехслойной модели мы исследуем поведение границы раздела Z_3 , которая может быть расположена на глубине ниже подошвы коры, труднодоступной для оценки современными экспериментальными методами.

В качестве исходной информации была использована топография поверхности Z_1 и профиль границы кора–мантия Z_2 , полученный с помощью геофизических методов [10], а также геометрические и физические параметры, приведенные в [4]. Для краткости введем следующие обозначения: $\mu_s = \{\mu_1, \mu_2, \mu_3\}$ и $\Delta\rho_s = \{\Delta\rho_2, \Delta\rho_3\}$. Исследование зависимости поведения границы Z_3 от изменения геометрических и физических параметров проводилось относительно модели со следующими значениями параметрами: $R = 500$ км, $\epsilon = 0.1$, $\epsilon_1 = 0.1$, $\mu_s = \{1, 1, 1\}$, $\Delta\rho_s = \{0.03, 0.1\}$, $Z_4 = -6$. Назовем эту модель «основной».

Для сравнения результатов моделирования было использовано так называемое условие изостазии (гидростатического равновесия), широко используемое в геофизике. Это условие означает, что давление на нижнюю границу предполагается постоянным, то есть

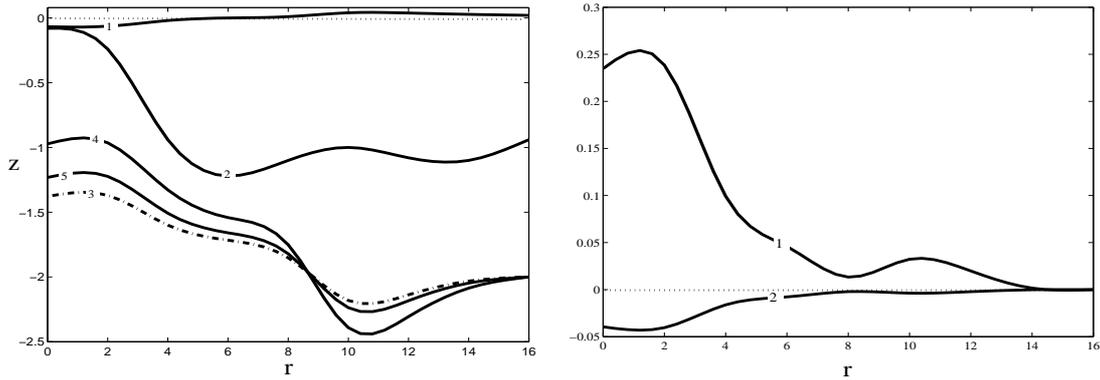
$$\sum_{i=1}^N \rho_i (Z_i - Z_{i-1}) = Z_1 + \sum_{i=2}^N \Delta\rho_i Z_i - \rho_N Z_{N+1} = C. \quad (3.1)$$

Назовем Z_3 , полученное из (3.1), «изостатическим решением».

На рис. 2 приводятся результаты моделирования с вариацией положения нижней границы Z_4 . Глубина и протяженность представлены в безразмерных величинах (цена деления — 50 км).

Как видно из результатов, с увеличением толщины нижнего слоя положение границы Z_3 асимптотически стремится к изостатическому решению.

Отметим существенное отклонение основного решения от решения линеаризованного уравнения, полученного из (2.9) путем замены всех вхождений Z_3 на некоторое усредненное значение \bar{Z}_3 . Невязка между нелинейной и линейной уменьшается со смещением положения нижней границы в глубину (см. рис. 2b).



(а) 1 — рельеф поверхности, 2 — граница кора-мантя, 3 — изостатическое решение, 4 — основное решение, 5 — Z_3 , полученное при $Z_4 = -14$
 (б) Невязка линейной модели. 1 — $Z_4 = -6$, 2 — $Z_4 = -14$

Рис. 2. Модельные расчеты кольцевой структуры на Луне с различным положением нижней границы.

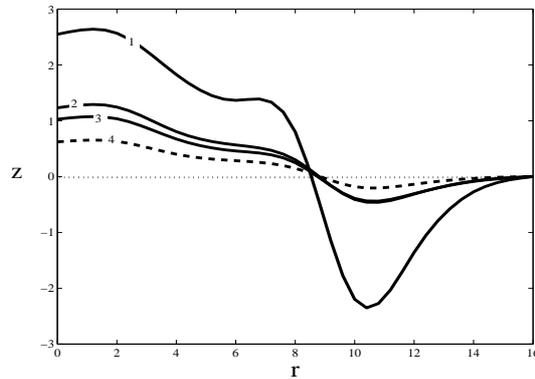


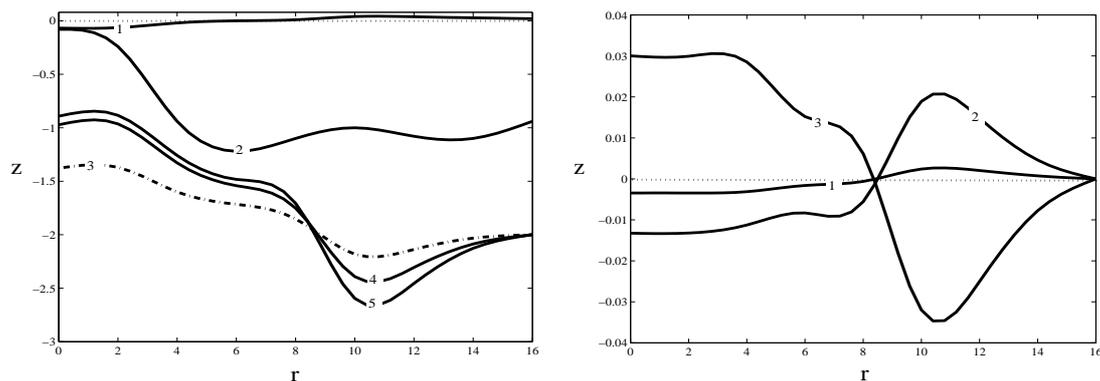
Рис. 3. Амплитуды смещения границы Z_3 при различной толщине среднего слоя 1 — $Z_3 = -2$, $Z_4 = -6$, 2 — $Z_3 = -6$, $Z_4 = -10$, 3 — $Z_3 = -8$, $Z_4 = -12$, 4 — изостатическое решение

На рис. 3 показаны результаты моделирования с вариацией с толщины среднего слоя без изменения толщины нижнего. Для того чтобы сравнить амплитуды смещения все профили сведены к одному уровню. Как видно из результатов, с увеличением толщины среднего слоя увеличивается амплитуда смещения границы Z_3 и ее отклонение от изостатического решения.

На рис. 4 приводятся результаты моделирования с вариацией вязкостей слоев. Как видно из результатов, рельеф границы Z_3 зависит, в основном, от отношения вязкостей среднего и нижнего слоев: с уменьшением этого отношения увеличивается отклонение от изостатического решения (рис. 4а). Однако поведение границы Z_3 практически не зависит от отношения вязкостей верхнего и нижнего слоев (рис. 4б).

На рис. 5 приводятся результаты моделирования с вариацией плотностей слоев. Как видно из результатов, при вариации отношения перепадов плотностей между слоями, положение модельной границы Z_3 , полученные как из решения уравнения (2.9), так и изостатические решения, существенно зависит от соотношения перепадов плотностей между слоями. С увеличением отношения $\frac{\Delta\rho_2}{\Delta\rho_3}$ куполовидная форма этой границы переходит в кольцеобразную. Величина невязки модельного и изостатического решений практически не изменяется.

Таким образом, получены следующие результаты моделирования.



(a) 5 — Z_3 при $\mu_s = \{10, 1, 10\}$. Остальные обозначения такие же, как и на рис. 2

(b) 1 — разность решений Z_3 с $\mu_s = \{10, 10, 1\}$ и $\mu_s = \{1, 1, 1\}$, 2 — разность решений Z_3 с $\mu_s = \{10, 1, 1\}$ и $\mu_s = \{1, 1, 1\}$, 3 — разность решений Z_3 при $\mu_s = \{1, 1, 10\}$ и $\mu_s = \{10, 1, 10\}$

Рис. 4. Модельные расчеты кольцевой структуры на Луне с различными вязкостями слоев

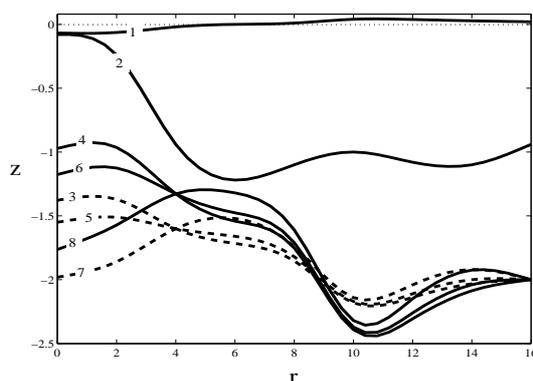


Рис. 5. Модельные расчеты кольцевой структуры на Луне с различными плотностями слоев: 5 — Z_3 при $\Delta\rho_2 = 0,05$, 6 — Z_3 при $\Delta\rho_2 = 0,1$. Остальные обозначения такие же, как и на рис. 2

1. При большой толщине нижнего слоя профиль границы Z_3 приближается к изостатическому решению. Увеличение же толщины среднего слоя приводит к обратному эффекту: отклонение от изостатического решения становится более значительным.

2. Рельеф границы Z_3 существенным образом зависит от отношения вязкостей среднего и нижнего слоев и практически не зависит от отношения вязкостей верхнего и среднего. Этот результат имеет важное значение для геофизики, так как оценка вязкости на больших глубинах является неопределенной и варьирует в очень больших пределах.

3. Увеличение отношения перепадов плотностей приводит к качественному изменению формы рельефа Z_3 . Величина невязки модельного и изостатического решений практически не изменяется.

Заключение

Проведено исследование системы нелинейных параболических уравнений, описывающих эволюцию осесимметричного течения трехслойной вязкой жидкости со свободной границей, создаваемого начальным рельефом границ слоев.

С помощью метода малого параметра показано существенное различие эволюции течения на малых и на больших временах. Из результатов асимптотического анализа получено уравнение, связывающее границы слоев, не зависящее (в первом приближении) от предыстории процесса.

В качестве примера возможных приложений полученных результатов выполнен расчет глубинной структуры крупномасштабной кольцевой структуры на Луне. Исследовалось поведение глубинной границы раздела в зависимости от изменения геометрических и физических параметров модели.

Разработанная модель значительно расширяет возможности моделирования структур на более глубоких горизонтах, труднодоступных в настоящее время для изучения экспериментальными методами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Craster R. V., Matar O. K. Dynamics and stability of thin liquid films // *Reviews of Modern Physics*. 2009. Vol. 81. № 3. P. 1131–1198.
2. Merkt D., Pototsky A., Bestehorn M. Long-wave theory of bounded two-layer films with a free liquid–liquid interface: Short- and long-time evolution // *Phys. Fluids*. 2005. Vol. 17. 064104.
3. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М.; Л.: Гостехтеориздат, 1950. 676 с.
4. Пак В. В. Нелинейная модель осесимметричного течения двухслойной вязкой жидкости со свободной поверхностью // *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки*. 2010. Вып. 2. С. 91–100.
5. Коврижных О. О. Об асимптотическом решении сингулярно возмущенной системы с двумя малыми параметрами // *Труды ин-та матем. и мех. УрО РАН*. 2007. Т. 104 (146). № 2. С. 124–134.
6. Белоносов В. С., Вишневецкий М. П. Об устойчивости стационарных решений нелинейных параболических систем // *Матем. сб.* 1977. Т. 13. № 4 (12). С. 534–558.
7. Борисов В. Г. О параболических краевых задачах с малым параметром при производных по t // *Матем. сб.* 1986. Т. 131 (173). № 3 (11). С. 293–308.
8. Wieczorek M. A., Phillips R. J. Lunar Multiring Basins and the Cratering Process // *Icarus*. 1999. Vol. 139. P. 246–259.
9. Pike R. J., Spudis P. D. Basin-ring spacing on the Moon, Mercury, and Mars // *Earth, Moon, and Planets*. 1987. Vol. 39. P. 129–194.
10. Hikida H., Wieczorek M. A. Crustal thickness of the Moon: New constraints from gravity inversions using polyhedral shape models // *Icarus*. 2007. Vol. 192. P. 150–166.
11. Жарков В. Н. Внутреннее строение Земли и планет. М.: Наука, 1983. 416 с.
12. Теркот Д., Шуберт Дж. Геодинамика. Геологическое приложение физики сплошных сред. М.: Мир, 1985. Т. 2. 360 с.

Поступила в редакцию 24.06.11

V. V. Pak

An asymptotic study of three-layered creeping flow and some geophysical applications

The nonlinear model based on the long-wave approximation of the Navier–Stokes equations is developed to study the free-surface three-layered creeping flow. An asymptotic study of the governing equations reveals two different modes of evolution at a short and long time. The relation between layers' boundaries is obtained that is independent of a pre-history of the flow. The obtained results are applied to study a behavior of the deep interface beneath the large-scale lunar basin under the variation of geometrical and physical model's parameters.

Keywords: multi-layered flow, long-wave approximation, lubrication theory, nonlinear diffusion, ring basins.

Mathematical Subject Classifications: 76D50

Пак Владимир Васильевич, к. ф.-м. н., ведущий научный сотрудник, лаборатория геофизической гидродинамики, Тихоокеанский океанологический институт им. В.И. Ильичева ДВО РАН, 690041, Россия, г. Владивосток, ул. Балтийская, 43. E-mail: pakvv@poi.dvo.ru

Pak Vladimir Vasil'evich, Candidate of Physics and Mathematics, Leading Researcher, V.I. Il'ichev Pacific Oceanological Institute of the Far Eastern Branch of RAS, ul. Baltiiskaya, 43, Vladivostok, 690041, Russia