

УДК 532.5.032

© *И. И. Потапов, М. А. Щекачева*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТИ РАЗМЫВА БЕРЕГОВОГО СКЛОНА В РЕКАХ С ПЕСЧАНЫМ ДНОМ¹

Предлагается математическая модель развития берегового склона равнинной реки, имеющей песчаное основание. Для определения транспорта донных наносов в данной работе используется оригинальный аналитический закон, не содержащий феноменологических параметров. Для решения задачи предлагается расщепление расчетной области на две подобласти по преобладающим механизмам деформирования дна. Получена асимптотическая формула, определяющая скорость отступления берегового склона, согласующаяся с точностью до коэффициента с эмпирической формулой Л. И. Викуловой.

Ключевые слова: береговые деформации, русловые процессы, транспорт наносов.

Введение

Проблеме размыва и деформации берегов рек посвящено достаточно много работ [1–5], поскольку береговые изменения русла могут приводить к разрушению береговых сооружений. Одними из первых по данной тематике являются работы [4, 5]. В них предложен эвристический закон береговых деформаций, согласно которому скорость движения берега является непрерывной функцией скорости движения речного потока в окрестностях берега. Использование данной модели позволило воспроизводить и качественно исследовать задачу устойчивости берегов русла [4]. Однако, использованный в работах [4, 5] феноменологический закон береговых деформаций обладает серьезными недостатками. Во-первых, он требует экспериментального определения своих параметров для каждого расчета. Во-вторых, для него не выполняется баланс береговых наносов, поступающих в русло реки. В-третьих, его формулировка не учитывает механизмов лавинного обрушения берега. Кроме того, нет никакой причины полагать, что закон береговых деформаций будет являться только функцией скорости речного потока, так как по определению должен учитывать такие характеристики как глубина потока, физико-механические параметры донного материала, формы донной и береговой поверхности.

Для определения основных параметров, влияющих на русловой процесс и определяющих характер изменения берегового склона, были проведены лабораторные эксперименты по размыву широкого, прямого, трапециевидного речного канала [6, 7]. На основе полученных данных были сформулированы двумерные математические модели [1, 8] и выполнены модельные численные исследования эволюции берегового склона с учетом процессов обрушения подмываемого берега.

В данной работе сформулирована одномерная математическая постановка задачи, позволяющая моделировать процесс отступления берегового склона с учетом турбулентно-диффузионного и лавинного механизмов транспорта донных наносов [1, 8, 9]. На основе предложенной математической модели получена асимптотическая формула движения берегового склона для прямого песчаного канала.

§ 1. Математическая модель задачи

Рассмотрим установившийся поток широкого симметричного русла $H \ll B$, где B — ширина русла, H — глубина, когда изменениями донной поверхности ζ на уровень водного потока η можно пренебречь. С учетом симметрии русла можно рассматривать лишь правый берег сечения канала, представленный на рис. 1.

¹Работа выполнена в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России», госконтракт № 02.740.11.0626.

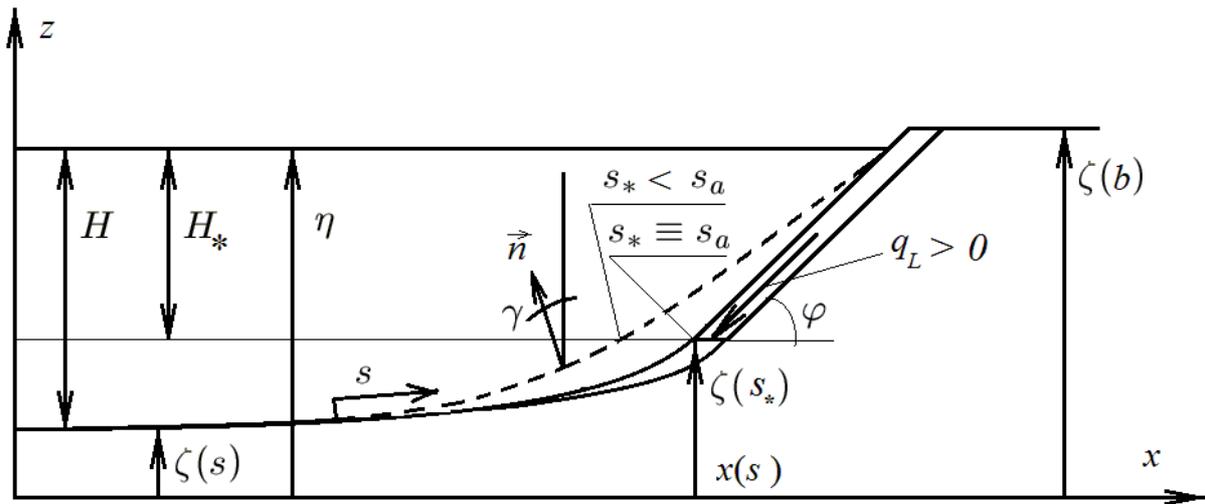


Рис. 1. Геометрия расчетной области

Полагая водный поток квазиустановившимся, будем считать, что касательные напряжения τ , возникающие при протекании водного потока по несвязному дну, определяются по формуле

$$\tau = \lambda \rho_w U^2 \quad (1)$$

или

$$\tau = \rho_w g H J, \quad (2)$$

где $H = \eta - \zeta$; g — ускорение свободного падения; ρ_w — плотность воды; J — уклон свободной поверхности; λ — коэффициент гидродинамического сопротивления; U — скорость потока.

Изменение донной поверхности ζ под действием протекающей по ней воды будем моделировать с помощью уравнения русловых деформаций [1, 2]

$$(1 - \epsilon) \frac{\partial \zeta}{\partial t} = C_0 \frac{\partial}{\partial s} \left((\eta - \zeta)^{3/2} \frac{\partial \zeta}{\partial s} \right) + D_L \frac{\partial^2 \zeta}{\partial s^2}, \quad (3)$$

где

$$C_0 = \left[\frac{16 \sqrt{g} J^{3/2}}{15 \kappa \rho_b \text{tg}^2 \varphi \cos^2 \gamma} : \tau > \tau_*; \quad 0 : \tau \leq \tau_* \right],$$

$$D_L = \left[\left(\frac{\partial \zeta}{\partial s} - \text{tg} \varphi \cos \gamma \right) : \gamma > \varphi; \quad 0 : \gamma \leq \varphi \right],$$

$$\tau_* = \frac{2d(\rho_s - \rho_w)g \text{tg} \varphi \cos \gamma}{8c_x}, \quad \rho_b = \frac{\rho_s - \rho_w}{\rho_w},$$

где ϵ — пористость донного материала; ρ_s — плотность донных частиц; γ — острый угол между нормалью к поверхности ζ и вертикальной линией; φ — угол внутреннего трения донных частиц; τ_* — критическое касательное напряжение, при котором донные частицы начинают двигаться; d — диаметр частиц; c_x — коэффициент лобового сопротивления частиц, h — максимальная глубина потока; t — время; s — ось локальной системы координат; κ — постоянная Кармана.

Задача (2)–(3) замыкается начальным

$$\zeta(s, 0) = \zeta_0(s), \quad 0 \leq s \leq b, \quad (4)$$

и граничными условиями

$$\frac{\partial \zeta(0, t)}{\partial s} = 0, \quad (5)$$

$$\zeta(b, t) = \zeta_0(b), \quad (6)$$

где $\zeta_0(s)$ — начальный профиль донного русла, $b = B/2$.

2. Метод расщепления

Прямое решение задачи (2)–(6) сталкивается с значительными трудностями, обусловленными быстрым ростом коэффициента диффузии уравнения (3) в областях, для которых реализуется лавинное движение наносов. В связи с этим для решения задачи используем метод расщепления расчетной области [8]. Расчетная область расщепляется на две подобласти (см. рис. 1), в каждой из которых реализуется одна из моделей деформации дна (турбулентно-диффузионная и лавинная).

В первой подобласти ($0 \leq s \leq s_*$), где деформация донной поверхности ζ определяется турбулентно-диффузионным механизмом изменения донной поверхности ($D_L \equiv 0$), русловое уравнение (3) принимает вид

$$(1 - \epsilon) \frac{\partial \zeta}{\partial t} = C_0 \frac{\partial}{\partial s} \left((\eta - \zeta)^{3/2} \frac{\partial \zeta}{\partial s} \right). \quad (7)$$

Граница применимости уравнения (7) определяется из условия $C_0 \rightarrow 0$, которое реализуется при $\tau \rightarrow \tau_*$. Предельное условие $\tau = \tau_*$ позволяет определить границу подобласти s_* , в которой существует турбулентно-диффузионный размыв дна. Точка s_* определяется по критической глубине размыва $H_* = \eta - \zeta(s_*)$ из условия $\zeta(s_*) = \eta - \frac{\tau_*}{\rho_w g J}$. Если в точке s_* реализуется

условие $\frac{\partial \zeta}{\partial s} < \sin \varphi$, то донная поверхность деформируется только посредством турбулентно-диффузионного механизма (рис. 1 пунктирный береговой склон), а область лавинного обрушения донной поверхности берега отсутствует. Если в точке s_* реализуется условие $\frac{\partial \zeta}{\partial s} = \sin \varphi$, то появляется область с лавинным механизмом деформирования донной поверхности и точка $s_* \equiv s_a$ становится точкой сопряжения подобластей с турбулентно-диффузионным и лавинным механизмом деформирования донной поверхности (рис. 1 сплошной береговой склон).

Уравнение (7) замыкается начальным условием

$$\zeta(s, 0) = \zeta_0(s), \quad 0 \leq s \leq s_*, \quad (8)$$

граничным условием на оси симметрии потока

$$\frac{\partial \zeta(0, t)}{\partial s} = 0, \quad (9)$$

и граничным условием в точке $s = s_*$

$$C_0 (\eta - \zeta(s_*, t))^{3/2} \frac{\partial \zeta}{\partial s} = \begin{cases} q_L, & \frac{\partial \zeta(s_*)}{\partial s} = \sin \varphi, \\ 0 & \frac{\partial \zeta(s_*)}{\partial s} < \sin \varphi, \end{cases} \quad (10)$$

где q_L — лавинный расход берегового материала, перемещаемого из лавинной области в область турбулентно-диффузионных донных деформаций при движении берегового склона в точке s_a .

При рассмотрении второй подобласти, в которой доминирует механизм лавинного движения материала $C_0 \rightarrow 0$, можно пренебречь нестационарным членом уравнения (3) $\partial \zeta / \partial t \cong 0$ [8]. Тогда интегрирование уравнения (3) с граничными условиями $\zeta(s_a) = \zeta_a$ и $\partial \zeta(s_a) / \partial s = \sin \varphi$ позволяет получить топографический профиль дна в зоне лавинного обрушения

$$\zeta(s) = \zeta(s_a) + (s - s_a) \sin \varphi. \quad (11)$$

Используя полученный донный профиль (11), определим объемный удельный расход донного материала q_L , поступающего в турбулентно-диффузионную подобласть (см. рис. 1), как пористый объем берегового материала, заметаемый профилем ζ при его горизонтальном движении со скоростью $V(s_a)$ [8]:

$$q_L = (1 - \epsilon)H(s_a)V(s_a), \quad (12)$$

или

$$q_L = (1 - \epsilon)(\zeta(b) - \zeta(s_a))\frac{\partial\zeta}{\partial t} \sin \varphi, \quad (13)$$

где $H(s_a)$ — высота обрушения берегового склона в точке s_a , при установившемся отступлении берега $H(s_a) = \zeta(b) - \zeta(s_a)$ — глубина потока в точке s_a , $V(s_a) = \frac{\partial\zeta}{\partial t} \sin \varphi$ — горизонтальная скорость движения точки s_a .

3. Определение скорости движения берегового склона

Рассмотрим случай, когда возвышение берега $\zeta(b)$ над свободной поверхностью η невелико, что, как правило, справедливо при прохождении руслоформирующих расходов. Тогда из (13) получим

$$q_L = (1 - \epsilon)(\eta - \zeta(s_a))\frac{\partial\zeta}{\partial t} \sin(\varphi). \quad (14)$$

Из (10) и (14) следует, что в точке $s = s_a$ должно выполняться условие:

$$(1 - \epsilon)(\eta - \zeta(s_a))\frac{\partial\zeta}{\partial t} \sin \varphi = C_0(\eta - \zeta(s_a))^{3/2}\frac{\partial\zeta}{\partial s}, \quad (15)$$

или

$$(1 - \epsilon)\frac{\partial\zeta}{\partial t} = C_0(\eta - \zeta)^{1/2}. \quad (16)$$

Выражение (16) позволяет определить горизонтальную скорость движения точки сопряжения s_a

$$V(s_a) = C_1\sqrt{\eta - \zeta}, \quad (17)$$

где $C_1 = \frac{C_0 \sin \varphi}{1 - \epsilon}$.

Полученная формула движения берега с точностью до коэффициента согласуется с эмпирической формулой Викуловой, полученной в работе [7]

$$V(s_a) = K\sqrt{\eta - \zeta}, \quad (18)$$

где K — эмпирический коэффициент, зависящий от характеристик грунта берегов и ширины русла.

Заключение

Сформулирована математическая модель развития песчаного берегового склона равнинной реки. При определении береговых деформаций транспорт влекомых наносов определяется по оригинальному аналитическому закону, не содержащему в себе феноменологических параметров и зависящему от физико-механических и гранулометрических параметров донного материала.

Для решения русловой задачи выполнено расщепление расчетной области на подобласти по преобладающим механизмам деформирования донной и береговой поверхности.

Получена асимптотическая формула, позволяющая определить скорость движения берегового склона в зависимости от гидродинамических параметров речного потока и физико-механических и гранулометрических параметров донного материала.

Полученная формула с точностью до постоянного коэффициента согласуется с известной эмпирической формулой Л.И. Викуловой

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Потапов И. И., Бондаренко Б. В. Моделирование эволюции поперечного сечения песчаного канала // Вычислительные технологии. 2009. Т. 14. № 5. С. 79–91.
2. Callander R. A. Instability and river channels // J. Fluid Mech. 1969. Vol. 36. № 3. P. 465–480.
3. Parker G. On the cause and characteristic scales of meandering and braiding in rivers // J. Fluid Mech. 1976. Vol. 76. № 3. P. 457–480.
4. Blondeaux P., Seminara G. A unified barbend theory of river meanders // J. Fluid Mech. 1985. Vol. 157. P. 449–470.
5. Ikeda S., Parker G., Saway K. Bend theory of river meanders. Part 1. Linear development // J. Fluid Mech. 1981. Vol. 112. P. 363–377.
6. Ikeda S., Parker G., Kimura Y. Stable width and depth of straight gravel rivers with heterogeneous bed materials // Water Resour. Res. 1988. Vol. 24. № 5. P. 713–722.
7. Викулова Л. И. Вопросы методики расчета саморазмыва каналов // Труды Гидропроекта. 1964. Сб. 12. С. 294–305.
8. Devauchelle O., Jossierand C., Lagree P.-Y., Zaleski S. Mobile bank conditions for laminar microrivers // Comptes Rendus Geoscience. 2008. Vol. 340. № 11. P. 732–740.
9. Петров А. Г., Потапов И. И. О развитии возмущений песчаного дна канала // ДАН. 2010. Т. 431. № 2. С. 191–195.

Поступила в редакцию 13.07.11

I. I. Potapov, M. A. Shchekacheva

Determination of the coastal rate of erosion for the rivers with sandy bottom

We propose a mathematical model for a coastal slope development of a plains river with a sandy bottom. To determine the transportation of bed sediments the original analytical law, which does not contain phenomenological parameters has been used. To solve the problem we suggest splitting the computational domain into two subregions according to the dominant mechanisms of deformation of the bottom. We have obtained an asymptotic formula, which determines the rate of retreat for the coastal slope, and accurate to the factor complies with the empirical formula of L. I. Vikulova.

Keywords: coastal deformation, channel processes, sediment transport.

Mathematical Subject Classifications: 76B07

Потапов Игорь Иванович, д. ф.-м. н., заведующий лабораторией вычислительной механики, Вычислительный центр ДВО РАН, 680000, Россия, г. Хабаровск, ул. Ким Ю Чена, 65.

E-mail: potapovii@rambler.ru,

Щекачева Маргарита Александровна, м.н.с., лаборатория вычислительной механики, Вычислительный центр ДВО РАН, 680000, Россия, г. Хабаровск, ул. Ким Ю Чена, 65.

E-mail: margaritka91@mail.ru

Potapov Igor' Ivanovich, Doctor of Physics and Mathematics, Head of the Laboratory of Computational Mechanics, Computer Center, Far Eastern Branch of RAS, ul. Kim Yu Chena, 65, Khabarovsk, 680063, Russia

Shchekacheva Margarita Aleksandrovna, Junior Researcher, Laboratory of Computational Mechanics, Computer Center, Far Eastern Branch of RAS, ul. Kim Yu Chena, 65, Khabarovsk, 680063, Russia