УДК 517.91.4

© *В. Я. Дерр*

О РАВНОМЕРНО НЕПРЕРЫВНОЙ ЗАВИСИМОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ОТ ПАРАМЕТРА

Утверждается, что если в дополнение к условиям существования и единственности решения $x(t, t_0, \mu)$ n-векторной задачи Коши $\dfrac{dx}{dt} = f(t, x, \mu)$ $(t \in \mathcal{I}, \mu \in \mathcal{M})$, $x(t_0) = x^0$ и непрерывной зависимости его от параметра $\mu \in \mathcal{M}$ потребовать равностепенную непрерывность семейства $\{f(t, x, \cdot)\}_{(t,x)}$, то $x(t, t_0, \mu)$ *равномерно* непрерывно зависит от параметра μ на открытом множестве $\mathcal{M}$. Для линейной $n\times n$-матричной задачи Коши $\dfrac{dX}{dt} = A(t, \mu)X + \Phi(t, \mu)$ $(t \in \mathcal{I}, \mu \in \mathcal{M})$, $X(t_0, \mu) = X^0(\mu)$ аналогичное утверждение доказывается в предположении равномерной произвольной малости интегралов $\int_{\mathcal{I}} \|A(t, \mu_1) - A(t, \mu_2)\|\, dt$ и $\int_{\mathcal{I}} \|\Phi(t, \mu_1) - \Phi(t, \mu_2)\|\, dt$ при достаточной малости $\|\mu_1 - \mu_2\|$ $(\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M})$.

Ключевые слова: равномерная непрерывность, равностепенная непрерывность.

Введение

Пусть $\mathcal{I}$ — промежуток в $\mathbb{R}$, $\mathcal{X}$ — область (открытое связное множество) в $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{M}$ — область в $\mathcal{R}^m$, $\mathcal{D} \doteq \mathcal{I} \times \mathcal{X}$, $\mathcal{G} \doteq \mathcal{I} \times \mathcal{M}$, $\mathcal{O} \doteq \mathcal{I} \times \mathcal{X} \times \mathcal{M}$, $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^n$, $t_0 \in \mathcal{I}$, $x^0 \in \mathcal{X}$.

Рассмотрим задачу Коши

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, \mu) \quad (t \in \mathcal{I},\ \mu \in \mathcal{M}), \quad x(t_0) = x^0. \tag{0.1}$$

Вопросы существования и единственности решения задачи (0.1), продолжения его до границы области $\mathcal{D}$ (на максимальный промежуток существования), непрерывной зависимости решения от параметра $\mu \in \mathcal{M}$ широко обсуждаются, например, в [1, с. 53–73] (см. также [2, с. 19–28, 119]). Сведем здесь в одно утверждение целый ряд теорем из [1].

Теорема 1. *Пусть функция f обладает свойствами:*

1) *f измерима на множестве $\mathcal{O}$;*

2) *f непрерывна по совокупности переменных $(x, \mu) \in \mathcal{X} \times \mathcal{M}$ при каждом фиксированном $t \in \mathcal{I}$;*

3) *существует такая локально суммируемая по Лебегу на $\mathcal{I}$ функция m, что*

$$\|f(t, x, \mu)\| \leqslant m(t) \qquad \big((x, \mu) \in \mathcal{X} \times \mathcal{M}\big);$$

4) *при почти всех $t \in \mathcal{I}$ и всех $\mu \in \mathcal{M}$ f удовлетворяет условию Липшица по x :*

$$\|f(t, x', \mu) - f(t, x'', \mu)\| \leqslant L\|x' - x''\|, \ \ x', x'' \in \mathcal{X},$$

где константа Липшица L не зависит от t и μ.

Тогда существует промежуток $\mathcal{J} \subset \mathcal{I}$ (максимальный промежуток существования) такой, что при любом $\mu \in \mathcal{M}$ задача (0.1) имеет единственное абсолютно непрерывное на $\mathcal{J}$ решение $x(t, \mu)$, непрерывно зависящее от параметра $\mu \in \mathcal{M}$.

Здесь и всюду ниже $\|\cdot\|$ означает (произвольную) норму вектора в пространстве $\mathbb{R}^k$ при любом натуральном k; точно так же обозначаем *произвольную* норму матрицы.

При исследовании дифференциальных уравнений в пространстве обобщенных функций Коломбо (см. [3]) требуется равномерно непрерывная зависимость решения от параметра, изменяющегося (что весьма существенно) в *открытом* множестве. Открытость множества $\mathcal{M}$ не позволяет воспользоваться теоремой Кантора, а как показывает простой пример задачи $\dfrac{dx}{dt} = \sin\frac{1}{\mu}$, $x(0) = 0$, $t \in [0,1]$, $\mu \in \mathcal{M} \doteq (0,1)$, для которой выполнены все условия теоремы, решение $x(t,\mu) = t\sin\frac{1}{\mu}$ $(t \in [0,1])$ не является равномерно непрерывным на $\mathcal{M} = (0,1)$.

В самом деле, выполнение условий теоремы для этого примера очевидно. Пусть $t > 0$ и δ произвольны. Полагаем $\mu_1 = \dfrac{1}{\pi n}$, $\mu_2 = \dfrac{1}{\pi n + \frac{\pi}{2}}$; тогда $|\mu_1 - \mu_2| = \dfrac{1}{\pi n(2n+1)} < \delta$ при достаточно большом натуральном n, в то время как $|x(t,\mu_1) - x(t,\mu_2)| = \left|t\sin\frac{1}{\mu_1} - t\sin\frac{1}{\mu_2}\right| = t$.

В связи со сказанным возникает вопрос: какие требования надо добавить к условиям теоремы 1, чтобы решение $x(t,\mu)$ зависело от μ равномерно непрерывно?

§ 1. Нелинейная задача Коши.

Пусть $F : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^{n\times p}$. Скажем, что семейство $\{F(t,x,\cdot)\}_{(t,x)\in\mathcal{D}}$ функций $\mathcal{M} \to \mathbb{R}^{n\times p}$ равностепенно непрерывно, если

$$\begin{gathered}(\forall\varepsilon > 0)\ (\exists\delta > 0)\ \big(\forall(t,x) \in \mathcal{D},\ \forall\mu_1,\mu_2 \in \mathcal{M} :\ \|\mu_1 - \mu_2\| < \delta\big)\\ \big(\|F(t,x,\mu_1) - F(t,x,\mu_2)\| < \varepsilon\big).\end{gathered} \tag{1.1}$$

Например, если $F(t,x,\mu) = g(t,x)h(\mu)$, где $g : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^{n\times m}$, $h : \mathcal{M} \to \mathbb{R}^{m\times p}$, g непрерывна и ограничена на $\mathcal{D}$, то семейство $\{F(t,x,\cdot)\}_{(t,x)\in\mathcal{D}}$ равностепенно непрерывно в том и только том случае, когда h равномерно непрерывна на $\mathcal{M}$.

Лемма 1. *Пусть F удовлетворяет условию Липшица по $\mu \in \mathcal{M}$ равномерно относительно $(t,x) \in \mathcal{D}$, то есть $\|F\big(t,x,\mu_1\big) - F\big(t,x,\mu_2\big)\| \leqslant M\|\mu_1 - \mu_2\|$ $((t,x) \in \mathcal{D})$, где константа M не зависит от t и x. Тогда семейство $\{F(t,x,\cdot)\}_{(t,x)\in\mathcal{D}}$ равностепенно непрерывно.*

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно и μ_1, $\mu_2 \in \mathcal{M}$ таковы, что $\|\mu_1 - \mu_2\| < \delta \doteq \frac{\varepsilon}{M}$. Тогда $\|F\big(t,x,\mu_1\big) - F\big(t,x,\mu_2\big)\| \leqslant M\|\mu_1 - \mu_2\| < \varepsilon$. □

Заметим, что семейство $\{F(t,x,\cdot)\}_{(t,x)\in\mathcal{D}}$ может быть равностепенно непрерывным и тогда, когда функция F не удовлетворяет условию Липшица по μ. Например, если в рассмотренном выше примере положить $m = p = 1$, $h(\mu) \doteq \mu\sin\frac{\pi}{\mu}$, $\mathcal{M} = (0,1)$, то h, а следовательно, и F не удовлетворяет условию Липшица по μ на $\mathcal{M}$, в то время как h равномерно непрерывна на $(0,1)$, и значит, соответствующее семейство равностепенно непрерывно.

Теорема 2. *Пусть функция f удовлетворяет свойствам* 1)–4) *теоремы* 1 *и условию* 5) : *семейство $\{f(t,x,\cdot)\}_{(t,x)\in\mathcal{D}}$ равностепенно непрерывно на $\mathcal{M}$.*

Тогда решение $x(t,\mu)$ задачи (0.1) *равномерно непрерывно зависит от μ на множестве $\mathcal{M}$ (равномерно относительно $t \in [a,b] \subset \mathcal{J}$, $t_0 \in [a,b]$).*

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольно, а $\delta > 0$ выбрано в соответствии с определением (1.1) и пусть $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}$ таковы, что $\|\mu_1 - \mu_2\| < \delta$.

Так как $x(t,\mu_i) = x^0 + \displaystyle\int_{t_0}^{t} f\big(s, x(s,\mu_i), \mu_i\big)\,ds$ $(i = 1,2)$, то, считая сначала, что $t > t_0$ и применяя условия 4) и 5), придем к оценке

$$\begin{aligned}\|x(t,\mu_1) - x(t,\mu_2)\| &\leqslant \int_{t_0}^{t} \big\|f\big(s,x(s,\mu_1),\mu_1\big) - f\big(s,x(s,\mu_2),\mu_2\big)\big\|\,ds \leqslant\\ &\leqslant \int_{t_0}^{t} \big\|f\big(s,x(s,\mu_1),\mu_1\big) - f\big(s,x(s,\mu_2),\mu_1\big)\big\|\,ds + \int_{t_0}^{t} \big\|f\big(s,x(s,\mu_1),\mu_2\big) - f\big(s,x(s,\mu_2),\mu_2\big)\big\|\,ds <\\ &< L\int_{t_0}^{t} \|x(t,\mu_1) - x(t,\mu_2)\|\,ds + \varepsilon(b-a).\end{aligned}$$

В силу неравенства Гронуэлла–Беллмана [2, с. 37] получаем отсюда

$$\|x(t,\mu_1)-x(t,\mu_2)\|<\varepsilon(b-a)e^{L(b-a)}.$$

При $t<t_0$ рассуждения аналогичны. Полученное неравенство и означает равномерную непрерывность x от μ на множестве $\mathcal{M}$ (равномерно относительно $t\in[a,b]$). $\square$

В силу леммы 1 имеет место следующее утверждение.

Следствие 1. *Пусть функция f удовлетворяет свойствам* 1)–4) *теоремы* 1 *и условию Липшица:*

$$\big\|f(t,x,\mu_1)-f(t,x,\mu_2)\big\|\leqslant M\|\mu_1-\mu_2\| \quad \big((t,x)\in\mathcal{D},\ \ \mu_1,\mu_2\in\mathcal{M}\big),$$

где константа M не зависит от t и x. Тогда выполнено утверждение теоремы 2.

Согласно сделанному выше замечанию условие 5) теоремы 2 шире условия следствия. Так, для задачи $\dfrac{dx}{dt}=\mu\sin\frac{1}{\mu},\ x(0)=0,\ \ t\in[0,1],\ \mu\in\mathcal{M}\doteq(0,1)$ условия теоремы 2 выполнены, а условия следствия — нет.

§ 2. Линейная задача Коши.

Рассмотрим задачу (0.1) в линейном случае:

$$\frac{dx}{dt}=A(t,\mu)x+\varphi(t,\mu)\quad (t\in\mathcal{I},\ \mu\in\mathcal{M}),\quad x(t_0)=x^0. \tag{2.1}$$

Теперь решение существует на всем $\mathcal{I}$ и, возможно, окажется неограниченным. По этой причине требование равностепенной непрерывности семейства

$$\{f(t,x,\cdot)\}_{(t,x)\in\mathcal{D}}=\{A(t,\cdot)x+\varphi(t,\cdot)\}_{(t,x)\in\mathcal{D}}$$

будет чрезмерным. Разумеется, можно и в этом случае ограничиться некоторым отрезком $[a,b]\subset\mathcal{I}$, тогда решение x будет ограниченным на $[a,b]$ и можно будет применить теорему 2 и следствие 1. Однако желательно все же получить условие равномерной непрерывности решения x от параметра, когда аргумент t пробегает весь промежуток $\mathcal{I}$.

В дальнейшем будет удобнее рассматривать матричную задачу (ср. (2.1))

$$\frac{dX}{dt}=A(t,\mu)X+\varPhi(t,\mu)\quad (t\in\mathcal{I},\ \mu\in\mathcal{M}),\quad X(t_0,\mu)=X^0(\mu), \tag{2.2}$$

где $A,\varPhi:\mathcal{I}\times\mathcal{M}\to\mathbb{R}^{n\times n}$ суммируемы по t на $\mathcal{I}$ при всех $\mu\in\mathcal{M},\ X:\mathcal{I}\times\mathcal{M}\to\mathbb{R}^{n\times n}$ абсолютно непрерывна по t на $\mathcal{I}$ при всех $\mu\in\mathcal{M},\ X^0:\mathcal{M}\to\mathbb{R}^{n\times n}$ непрерывна и ограничена на $\mathcal{M}$.

Пусть $\mathfrak{X}$ — множество абсолютно непрерывных на $\mathcal{I}$ при всех $\mu\in\mathcal{M}$ $n\times n$-матриц $X(t,\mu)$ с метрикой

$$\rho\big(X(t,\mu_1),\,X(t,\mu_2)\big)\doteq\widehat{\rho}(\mu_1,\mu_2)\doteq\|X(t_0,\mu_1)-X(t_0,\mu_2)\|+\int_{\mathcal{I}}\|\dot X(t,\mu_1)-\dot X(t,\mu_2)\|\,dt.$$

Это полное метрическое пространство. Через $\mathfrak{X}_{t_0}\subset\mathfrak{X}$ обозначим подпространство невырожденных $n\times n$-матриц $X(t,\mu)$, нормированных в точке t_0 : $X(t_0,\mu)=E$. В $\mathfrak{X}_{t_0}$ индуцируется метрика

$$\rho\big(X(\cdot,\mu_1),\,X(\cdot,\mu_2)\big)\doteq\widehat{\rho}(\mu_1,\mu_2)\doteq\int_{\mathcal{I}}\|\dot X(t,\mu_1)-\dot X(t,\mu_2)\|\,dt.$$

Далее, пусть $\mathfrak{A}$ — множество суммируемых на $\mathcal{I}$ при всех $\mu\in\mathcal{M}$ $n\times n$-матриц $A(t,\mu)$ с нормой $\mathfrak{n}(A)=\big(\widehat{\mathfrak{n}}(\mu)\big)=\displaystyle\int_{\mathcal{I}}\|A(t,\mu)\|\,dt$, $\mathfrak{A}_0$ — пространство непрерывных и ограниченных на $\mathcal{M}$ $n\times n$-матриц с нормой $\|X^0\|\doteq\sup\limits_{\mu\in\mathcal{M}}\|X^0(\mu)\|$, E — единичная $n\times n$-матрица. Очевидно, $\mathfrak{A},\mathfrak{A}_0$ —

банаховы пространства. Из теорем 1 и 2 следует, что задача Коши (2.2) представляет собой непрерывное отображение $\mathfrak{F}(\mu) : \mathfrak{A}\times\mathfrak{A}\times\mathfrak{A}_0 \to \mathfrak{X}$, непрерывно зависящее также от μ на $\mathcal{M}$. Точно так же, задача Коши

$$\frac{dX}{dt} = A(t,\mu)X \qquad (t \in \mathcal{I},\ \mu \in \mathcal{M}), \quad X(t_0,\mu) = X^0(\mu) \tag{2.3}$$

есть непрерывное (биективное) отображение $\mathfrak{F}_0(\mu) : \mathfrak{A}\times\mathfrak{A}_0 \to \mathfrak{X}_{t_0}$, непрерывно зависящее также от μ на $\mathcal{M}$. Наша задача состоит в том, чтобы установить условия, при которых эти отображения зависят от μ равномерно непрерывно на $\mathcal{M}$.

Скажем, что $B \in \mathfrak{A}$ интегрально равномерно непрерывна на $\mathcal{M}$, если

$$(\forall\varepsilon > 0)\ \ (\exists\delta > 0)\ \ (\forall\mu_1,\mu_2 \in \mathcal{M} : \|\mu_1 - \mu_2\| < \delta) \quad \left(\int_{\mathcal{I}} \|B(t,\mu_1) - B(t,\mu_2)\|\,dt < \varepsilon\right).$$

Теорема 3. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) *функции* $\widehat{\mathfrak{n}}$, φ, $\eta : \mathcal{M} \to [0,+\infty)$, *где* $\varphi(\mu) = \int_{\mathcal{I}} \|\varPhi(t,\mu)\|\,dt$, $\eta(\mu) \doteq \|X^0(\mu)\|$, *ограничены на* $\mathcal{M}$;

2) *функция* $X^0 \in \mathfrak{A}_0$ *равномерно непрерывна, а функции* A, $\varPhi \in \mathfrak{A}$ *интегрально равномерно непрерывны на* $\mathcal{M}$.

Тогда решение $Y(t,\mu)$ *задачи* (2.2) *равномерно непрерывно по параметру* μ *на множестве* $\mathcal{M}$ (*равномерно относительно* $t \in \mathcal{I}$), *а отображения* $\mathfrak{F}_0(\mu)(A,\, X^0)$ *и* $\mathfrak{F}(\mu)(A,\, \varPhi,\, X^0)$ *равномерно непрерывны на* $\mathcal{M}$ (*равномерно относительно* $t \in \mathcal{I}$).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть константа K такова, что выполняются неравенства

$$\widehat{\mathfrak{n}}(\mu) \leqslant K, \quad \varphi(\mu) \leqslant K, \quad \eta(\mu) \leqslant K, \quad \xi \doteq \|E\| \leqslant K. \tag{2.4}$$

Обозначим также

$$\mathfrak{a}(\mu_1,\mu_2) \doteq \int_{\mathcal{I}} \|A(t,\mu_1) - A(t,\mu_2)\|\,dt, \quad \mathfrak{f}(\mu_1,\mu_2) \doteq \int_{\mathcal{I}} \|\varPhi(t,\mu_1) - \varPhi(t,\mu_2)\|\,dt,$$
$$\mathfrak{x}(\mu_1,\mu_2) \doteq \|X^0(\mu_1) - X^0(\mu_2)\|.$$

Дальше надо получить ряд оценок; оформим это в виде нескольких лемм, некоторые из них (например, леммы 3 и 5) представляют и самостоятельный интерес.

Пусть $C(t,s,\mu) = X(t,\mu)X^{-1}(s,\mu)$ — матрица Коши однородной системы (2.3), $\big(X(t,\mu)$ — ее фундаментальная матрица, нормированная в точке $t_0\big)$.

Лемма 2. *Имеют место оценки*

$$\|X(t,\mu)\| \leqslant \xi e^{\widehat{\mathfrak{n}}(\mu)} \leqslant Ke^K \quad (t \in \mathcal{I},\, \mu \in \mathcal{M}); \tag{2.5}$$

$$\|X^{-1}(t,\mu)\| \leqslant \xi e^{\widehat{\mathfrak{n}}(\mu)} \leqslant Ke^K \quad (t \in \mathcal{I},\, \mu \in \mathcal{M}); \tag{2.6}$$

$$\|X(t,\mu_1) - X(t,\mu_2\| \leqslant \xi^3 e^{2\widehat{\mathfrak{n}}(\mu_1)+\widehat{\mathfrak{n}}(\mu_2)} \int_{\mathcal{I}} \|A(s,\mu_1) - A(s,\mu_2)\|\,ds \leqslant K^3e^{3K}\mathfrak{a}(\mu_1,\mu_2) \tag{2.7}$$

$(t \in \mathcal{I},\, \mu_1,\mu_2 \in \mathcal{M})$;

$$\|X^{-1}(t,\mu_1) - X^{-1}(t,\mu_2\| \leqslant \xi^3 e^{2\widehat{\mathfrak{n}}(\mu_1)+\widehat{\mathfrak{n}}(\mu_2)} \int_{\mathcal{I}} \|A(s,\mu_1) - A(s,\mu_2)\|\,ds \leqslant K^3e^{3K}\mathfrak{a}(\mu_1,\mu_2) \tag{2.8}$$

$(t \in \mathcal{I},\, \mu_1,\mu_2 \in \mathcal{M})$;

$$\|C(t,s,\mu)\| \leqslant \xi^2 e^{2\widehat{\mathfrak{n}}(\mu)} \leqslant K^2e^{2K} \quad (t,s \in \mathcal{I},\, \mu \in \mathcal{M}), \tag{2.9}$$

$$\|C(t,s,\mu_1)-C(t,s,\mu_2)\| \leqslant$$
$$\leqslant \xi^4 e^{2\widehat{\mathfrak{n}}(\mu_1)+\widehat{\mathfrak{n}}(\mu_2)}\big(e^{\widehat{\mathfrak{n}}(\mu_1)}+e^{\widehat{\mathfrak{n}}(\mu_2)}\big)\int_{\mathcal{I}}\|A(s,\mu_1)-A(s,\mu_2)\|\,ds \leqslant 2K^4e^{4K}\mathfrak{a}(\mu_1,\mu_2) \quad (2.10)$$

$(t,s\in\mathcal{I},\ \mu_1,\mu_2\in\mathcal{M})$.

Доказательство. Из уравнений $\dot{X}(t,\mu_i)=A(t,\mu_i)X(t,\mu_i)\quad(i=1,2)$ получаем уравнение (задачу Коши)

$$\frac{d\big(X(t,\mu_1)-X(t,\mu_2)\big)}{dt}=A(t,\mu_1)\big(X(t,\mu_1)-X(t,\mu_2)\big)+\big(A(t,\mu_1)-A(t,\mu_2)\big)X(t,\mu_2),$$
$$\big(X(t_0,\mu_1)-X(t_0,\mu_2)\big)=0, \quad (2.11)$$

которое можно рассматривать как неоднородное матричное дифференциальное уравнение относительно $Y\doteq X(t,\mu_1)-X(t,\mu_2)$ с матрицей $A(t,\mu_1)$, правой частью

$$\big(A(t,\mu_1)-A(t,\mu_2)\big)X(t,\mu_2)$$

и нулевым начальным условием. По формуле Коши имеем:

$$Y(t)=\int_{t_0}^{t}X(t,\mu_1)X^{-1}(s,\mu_1)\big(A(s,\mu_1)-A(s,\mu_2)\big)X(s,\mu_2)\,ds,$$

откуда

$$\|Y\|\leqslant\|X(t,\mu_1)\|\int_{t_0}^{t}\|X^{-1}(s,\mu_1)\|\cdot\|A(s,\mu_1)-A(s,\mu_2)\|\cdot\|X(s,\mu_2)\|\,ds. \quad (2.12)$$

Так как $X(t,\mu_1)=E+\int_{t_0}^{t}A(s,\mu_1)X(s,\mu_1)\,ds$, то $\|X(t,\mu_1)\|\leqslant\xi+\int_{t_0}^{t}\|A(s,\mu_1)\|\cdot\|X(s,\mu_1)\|\,ds$; согласно неравенству Гронуэлла–Беллмана [2, с. 37],

$$\|X(t,\mu_1)\|\leqslant\xi\exp\left(\int_{t_0}^{t}\|A(s,\mu_1)\|\,ds\right)\leqslant\xi\exp\left(\int_{\mathcal{I}}\|A(s,\mu_1)\|\,ds\right)\leqslant\xi e^{\widehat{\mathfrak{n}}(\mu_1)}\quad(t\in\mathcal{I}).$$

Так как $\dfrac{dX^{-1}(t,\mu_1)}{dt}=-X^{-1}(t,\mu_1)A(t,\mu_1)$, то, повторяя все рассуждения для $X^{-1}(t,\mu_1)$, придем к оценке (2.6). Из неравенств (2.5), (2.6), (2.12) получаем оценку (2.7). Аналогичные рассуждения приводят также к оценке (2.8).

Из (2.5)–(2.6) следует:

$$\|C(t,s,\mu)\|\leqslant\|X(t,\mu)\|\cdot\|X^{-1}(s,\mu)\|\leqslant\xi^2e^{2\widehat{\mathfrak{n}}(\mu)}\quad(t,s\in\mathcal{I}).$$

А с помощью оценок (2.7) и (2.8) получаем

$$\|C(t,s,\mu_1)-C(t,s,\mu_2)\|=\|X(t,\mu_1)\big(X^{-1}(s,\mu_1)-X^{-1}(s,\mu_2)\big)-\big(X(t,\mu_1)-X(t,\mu_2)\big)X^{-1}(s,\mu_2)\|\leqslant$$
$$\leqslant\|X(t,\mu_1)\|\cdot\|X^{-1}(s,\mu_1)-X^{-1}(s,\mu_2)\|+\|X(t,\mu_1)-X(t,\mu_2)\|\cdot\|X^{-1}(s,\mu_2)\|\leqslant$$
$$\leqslant\xi^4e^{2\widehat{\mathfrak{n}}(\mu_1)+\widehat{\mathfrak{n}}(\mu_2)}\big(e^{\widehat{\mathfrak{n}}(\mu_1)}+e^{\widehat{\mathfrak{n}}(\mu_2)}\big)\int_{\mathcal{I}}\|A(s,\mu_1)-A(s,\mu_2)\|\,ds\quad(t,s\in\mathcal{I}).\qquad\square$$

Оценим сверху расстояние $\rho\big(X(\cdot,\mu_1),\,X(\cdot,\mu_2)\big)=\widehat{\rho}(\mu_1,\mu_2)$.

Лемма 3.

$$\widehat{\rho}(\mu_1,\mu_2)\leqslant\xi e^{\widehat{\mathfrak{n}}(\mu_1)}\Big(\widehat{\mathfrak{n}}(\mu_1)\xi^2e^{\widehat{\mathfrak{n}}(\mu_1)+\widehat{\mathfrak{n}}(\mu_2)}+1\Big)\int_{\mathcal{I}}\|A(s,\mu_1)-A(s,\mu_2)\|\,ds\leqslant\big(K^4e^{3K}+Ke^K\big)\mathfrak{a}(\mu_1,\mu_2)$$

$(\mu_1,\mu_2\in\mathcal{M})$.

Доказательство. Из (2.11), (2.12) и (2.7) имеем

$$\widehat{\rho}(\mu_1,\mu_2)=\int_{\mathcal{I}}\|\dot X(t,\mu_1)-\dot X(t,\mu_2)\|\,dt=$$
$$=\int_{\mathcal{I}}\|A(t,\mu_1)\big(X(t,\mu_1)-X(t,\mu_2)\big)+\big(A(t,\mu_1)-A(t,\mu_2)\big)X(t,\mu_2)\|\,dt\leqslant$$
$$\int_{\mathcal{I}}\|A(t,\mu_1)\|\,\|(X(t,\mu_1)-X(t,\mu_2)\|\,dt+\int_{\mathcal{I}}\|A(t,\mu_1)-A(t,\mu_2)\|\,\|X(t,\mu_2)\|\,dt\leqslant$$
$$\leqslant \xi e^{\widehat{\mathfrak{n}}(\mu_1)}\Big(\widehat{\mathfrak{n}}(\mu_1)\xi^2 e^{\widehat{\mathfrak{n}}(\mu_1)+\widehat{\mathfrak{n}}(\mu_2)}+1\Big)\int_{\mathcal{I}}\|A(s,\mu_1)-A(s,\mu_2)\|\,ds. \qquad \square$$

Перейдем к оценкам для неоднородной задачи (2.2). Напомним: ее решение $Y=Y(t,\mu)$.

Лемма 4. *Имеют место оценки*

$$\|Y(t,\mu)\|\leqslant\|X^0(\mu)\|\,\xi e^{\mathfrak{n}(\mu)}+\xi^2e^{2\mathfrak{n}(\mu)}\cdot\int_{\mathcal{I}}\|\varPhi(s,\mu)\|\,ds\leqslant K^2e^K+K^3e^{2K}\quad(t\in\mathcal{I},\,\mu\in\mathcal{M}). \tag{2.13}$$

$$\|Y(t,\mu_1)-Y(t,\mu_2)\|\leqslant\xi e^{\mathfrak{n}(\mu_2)}\,\|X^0(\mu_1)-X^0(\mu_2)\|+$$
$$+\,\xi^3e^{2\mathfrak{n}(\mu_1)+\mathfrak{n}(\mu_2)}\left(\|X^0(\mu_1)\|+\xi e^{\mathfrak{n}(\mu_1)}+e^{\mathfrak{n}(\mu_2)}\int_{\mathcal{I}}\|\varPhi(s,\mu_1)\|\,ds\right)\int_{\mathcal{I}}\|A(s,\mu_1)-A(s,\mu_2)\|\,ds+$$
$$+\,\xi^2e^{2\mathfrak{n}(\mu_2)}\cdot\int_{\mathcal{I}}\|\varPhi(s,\mu_1)-\varPhi(s,\mu_2)\|\,ds\leqslant$$
$$\leqslant K_1\mathfrak{x}(\mu_1,\mu_2)+K_2\mathfrak{a}(\mu_1,\mu_2)+K_3\mathfrak{f}(\mu_1,\mu_2)\quad(t\in\mathcal{I},\,\mu_1,\mu_2\in\mathcal{M}), \tag{2.14}$$

где $K_1=Ke^K,\;\;K_2=K^4e^{3K}(1+K+e^K),\;\;K_3=K^2e^{2K}$.

Доказательство. По формуле Коши

$$Y(t,\mu)=X(t,\mu)X^0(\mu)+\int_{t_0}^{t}C(t,s,\mu)\varPhi(s,\mu)\,ds\quad(t\in\mathcal{I},\,\mu\in\mathcal{M}) \tag{2.15}$$

и согласно (2.5) и (2.9)

$$\|Y(t,\mu)\|\leqslant\|X(t,\mu)\|\,\|X^0(\mu)\|+\int_{t_0}^{t}\|C(t,s,\mu)\|\cdot\|\varPhi(s,\mu)\|\,ds\leqslant$$
$$\leqslant\|X^0(\mu)\|\,\xi e^{\mathfrak{n}(\mu)}+\xi^2e^{2\mathfrak{n}(\mu)}\cdot\int_{\mathcal{I}}\|\varPhi(s,\mu)\|\,ds\quad(t\in\mathcal{I},\,\mu\in\mathcal{M}).$$

В силу (2.5), (2.9), (2.7), (2.10) имеем

$$\|Y(t,\mu_1)-Y(t,\mu_2)\|\leqslant\|X(t,\mu_1)-X(t,\mu_2)\|\,\|X^0(\mu_1)\|+\|X(t,\mu_2)\|\,\|X^0(\mu_1)-X^0(\mu_2)\|+$$
$$+\max_{(t,s)\in=\mathcal{I}^2}\|C(t,s,\mu_1)-C(t,s,\mu_2)\|\cdot\int_{\mathcal{I}}\|\varPhi(s,\mu_1)\|\,ds+$$
$$+\max_{(t,s)\in=\mathcal{I}^2}\|C(t,s,\mu_2)\|\cdot\int_{\mathcal{I}}\|\varPhi(s,\mu_1)-\varPhi(s,\mu_2)\|\,ds\leqslant$$
$$\leqslant\|X^0(\mu_1)\|\,\|E\|^3e^{2\mathfrak{n}(\mu_1)+\mathfrak{n}(\mu_2)}\int_{\mathcal{I}}\|A(s,\mu_1)-A(s,\mu_2)\|\,ds+\|X^0(\mu_1)-X^0(\mu_2)\|\cdot\xi e^{\mathfrak{n}(\mu_2)}+$$
$$+\,\xi^4e^{2\mathfrak{n}(\mu_1)+\mathfrak{n}(\mu_2)}\big(e^{\mathfrak{n}(\mu_1)}+e^{\mathfrak{n}(\mu_2)}\big)\int_{\mathcal{I}}\|A(s,\mu_1)-A(s,\mu_2)\|\,ds\cdot\int_{\mathcal{I}}\|\varPhi(s,\mu_1)\|\,ds+$$
$$+\,\xi^2e^{2\mathfrak{n}(\mu_2)}\cdot\int_{\mathcal{I}}\|\varPhi(s,\mu_1)-\varPhi(s,\mu_2)\|\,ds=\xi e^{\mathfrak{n}(\mu_2)}\,\|X^0(\mu_1)-X^0(\mu_2)\|+$$
$$+\,\xi^3e^{2\mathfrak{n}(\mu_1)+\mathfrak{n}(\mu_2)}\left(\|X^0(\mu_1)\|+\xi e^{\mathfrak{n}(\mu_1)}+e^{\mathfrak{n}(\mu_2)}\int_{\mathcal{I}}\|\varPhi(s,\mu_1)\|\,ds\right)\int_{\mathcal{I}}\|A(s,\mu_1)-A(s,\mu_2)\|\,ds+$$
$$+\,\xi^2e^{2\mathfrak{n}(\mu_2)}\cdot\int_{\mathcal{I}}\|\varPhi(s,\mu_1)-\varPhi(s,\mu_2)\|\,ds\quad(t\in\mathcal{I},\,\mu_1,\mu_2\in\mathcal{M}). \qquad \square$$

Оценим сверху расстояние $\rho\big(Y(\cdot,\mu_1),\,Y(\cdot,\mu_2)\big)=\widehat{\rho}(\mu_1,\mu_2)$.

Лемма 5.

$$\begin{gathered}\widehat{\rho}(\mu_1,\mu_2)\leqslant\widetilde{K}_1\,\|X^0(\mu_1)-X^0(\mu_2)\|+\\+\widetilde{K}_2\int_{\mathcal{I}}\|A(t,\mu_1)-A(t,\mu_2)\|\,dt+\widetilde{K}_3\int_{\mathcal{I}}\|\varPhi(t,\mu_1)-\varPhi(t,\mu_2)\|\,dt,\end{gathered}\tag{2.16}$$

где $\widetilde{K}_1=1+K^2e^K,\ \ \widetilde{K}_2=K^2e^K(1+Ke^K+K^3e^{2K}+2K^3e^{3K}),\ \ \widetilde{K}_3=1+K^3e^{2K}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу (2.2) имеем

$$\begin{aligned}&\widehat{\rho}(\mu_1,\mu_2)=\|X^0(\mu_1)-X^0(\mu_2)\|+\int_{\mathcal{I}}\|\dot{Y}(t,\mu_1)-\dot{Y}(t,\mu_2)\|\,dt\leqslant\mathfrak{x}(\mu_1,\mu_2)+\\&+\int_{\mathcal{I}}\|A(t,\mu_1)\|\,\|Y(t,\mu_1)-Y(t,\mu_2)\|\,dt+\int_{\mathcal{I}}\|A(t,\mu_1)-A(t,\mu_2)\|\,\|Y(t,\mu_2)\|\,dt+\mathfrak{f}(\mu_1,\mu_2)\leqslant\\&\leqslant\mathfrak{x}\,(\mu_1,\mu_2)+K\Big(Ke^K\mathfrak{x}\,(\mu_1,\mu_2)+K^4e^{3K}(1+2e^K)\mathfrak{a}(\mu_1,\mu_2)+K^2e^{2K}\mathfrak{f}\,(\mu_1,\mu_2)\Big)+\\&+K^2\big(e^K+Ke^{2K}\big)\mathfrak{a}\,(\mu_1,\mu_2)+\mathfrak{f}(\mu_1,\mu_2)=\widetilde{K}_1\mathfrak{x}\,(\mu_1,\mu_2)+\widetilde{K}_2\mathfrak{a}(\mu_1,\mu_2)+\widetilde{K}_3\mathfrak{f}(\mu_1,\mu_2).\qquad\square\end{aligned}$$

Теперь мы можем завершить доказательство теоремы 3. Пусть $\varepsilon>0$ произвольно. В силу условий теоремы найдется такое $\delta>0$, что если $\|\mu_1-\mu_2\|<\delta$, то будут выполняться неравенства

$$\begin{gathered}\mathfrak{x}(\mu_1,\mu_2)<\frac{\varepsilon}{3K_1},\quad\mathfrak{a}(\mu_1,\mu_2)<\frac{\varepsilon}{3K_2},\quad\mathfrak{f}(\mu_1,\mu_2)<\frac{\varepsilon}{3K_3},\\\mathfrak{x}(\mu_1,\mu_2)<\frac{\varepsilon}{3\widetilde{K}_1},\quad\mathfrak{a}(\mu_1,\mu_2)<\frac{\varepsilon}{3\widetilde{K}_2},\quad\mathfrak{f}(\mu_1,\mu_2)<\frac{\varepsilon}{3\widetilde{K}_3}.\end{gathered}$$

Отсюда и из лемм 4 (оценка (2.14)) и 5 следует

$$\|Y(t,\mu_1)-Y(t,\mu)\|<\varepsilon\quad(t\in\mathcal{I}),\qquad\rho\big(Y(\cdot,\mu_1),\,Y(\cdot,\mu_2)\big)<\varepsilon.\qquad\square$$

Теорема 4. *Если в теореме* 3 *заменить функции* $\widehat{\mathfrak{n}}$, φ, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{f}$ *соответственно функциями*

$$\begin{gathered}\widehat{\mathfrak{n}}_q(\mu)\doteq\left(\int_{\mathcal{I}}\|A(\mu)\|^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}},\quad\varphi_q(\mu)\doteq\left(\int_{\mathcal{I}}\|\varPhi(\mu)\|^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}},\\\mathfrak{a}_p(\mu_1,\mu_2)\doteq\left(\int_{\mathcal{I}}\|A(t,\mu_1)-A(t,\mu_2)\|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}},\quad\mathfrak{f}_p(\mu_1,\mu_2)\doteq\left(\int_{\mathcal{I}}\|\varPhi(t,\mu_1)-\varPhi(t,\mu_2)\|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}\end{gathered}$$

$\Big(1<p<+\infty,\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\Big)$, *то ее заключение останется в силе.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В доказательстве оценок в теореме 3 при оценке интеграла от произведения надо применить неравенство Гельдера.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Коддингтон Э.А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Иностр. лит-ра, 1958. 475 с.
2. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970. 720 с.
3. Colombeau J.F. Elementary introduction to new generalized functions. Amsterdam: Elsevier Science Publishers B.V., 1985. 300 p.

МАТЕМАТИКА 2012. Вып. 4

Поступила в редакцию 11.11.2011

Дерр Василий Яковлевич, профессор, кафедра математического анализа, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: derr@uni.udm.ru

V. Ya. Derr
On uniform continuous dependence of solution of Cauchy problem on parameter

Keywords: uniformly continuity, equipower continuity.

Mathematical Subject Classifications: 34A12

We prove that if, in addition to the assumptions that guarantee existence, uniqueness and continuous dependence on parameter $\mu \in \mathcal{M}$ of solution $x(t, t_0, \mu)$ of a n-dimensional Cauchy problem $\dfrac{dx}{dt} = f(t, x, \mu)$ $(t \in \mathcal{I}, \mu \in \mathcal{M})$, $x(t_0) = x^0$ one requires that the family $\{f(t, x, \cdot)\}_{(t,x)}$ is equicontinuous, then the dependence of $x(t, t_0, \mu)$ on parameter μ in an open $\mathcal{M}$ is *uniformly* continuous. Analogous result for a linear $n \times n$-dimensional Cauchy problem $\dfrac{dX}{dt} = A(t, \mu)X + \Phi(t, \mu)$ $(t \in \mathcal{I}, \mu \in \mathcal{M})$, $X(t_0, \mu) = X^0(\mu)$ is valid under the assumption that the integrals $\int_{\mathcal{I}} \|A(t, \mu_1) - A(t, \mu_2)\|\, dt$ and $\int_{\mathcal{I}} \|\Phi(t, \mu_1) - \Phi(t, \mu_2)\|\, dt$ are uniformly arbitrarily small, provided that $\|\mu_1 - \mu_2\|$, $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}$, is sufficiently small.

REFERENCES

1. Coddington E.A., Levinson N. *Theory of ordinary differential equations*, New York–Toronto–London: McGraw–Hill, 1955, 415 p. Translated under the title *Teoriya obyknovennykh differentsialnykh uravnenii*, Moscow: Inostrannaya literatura, 1958, 475 p.
2. Hartman P. *Ordinary differential equations*, New York–London–Sydney: John Wiley & Sons, 1964. Translated under the title *Obyknovennye differentsialnye uravneniya*, Moscow: Mir, 1970.
3. Colombeau J.F. *Elementary introduction to new generalized functions,* Amsterdam: Elsevier Science Publishers B.V., 1985, 300 p.

Received 11.11.2011

Derr Vasilii Yakovlevich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Department of Mathematical Analysis, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
E-mail: derr@uni.udm.ru