УДК 517.977

© ***Н. Н. Петров, К. А. Щелчков***

К ЗАДАЧЕ ЧЕРНОУСЬКО [1]

Рассматривается задача простого преследования группой преследователей одного убегающего при условии, что среди преследователей имеются как участники, максимальные скорости которых совпадают с максимальной скоростью убегающего, так и участники, у которых максимальные скорости строго меньше максимальной скорости убегающего, и при этом убегающий не покидает пределы выпуклого многогранного множества. Получены условия, при которых преследователи с меньшими возможностями не влияют на разрешимость задачи уклонения.

Ключевые слова: дифференциальная игра, простое движение, групповое преследование, фазовые ограничения.

Введение

В работе [1] доказано уклонение от встречи в задаче простого преследования одного убегающего от группы из любого конечного числа преследователей при условии, что скорости всех преследователей ограничены по величине и строго меньше скорости убегающего. В работах [2–6] рассмотрены задачи уклонения одного убегающего от группы преследователей при условии, что все участники обладают равными возможностями. В работах [2, 3] получено решение данной задачи без фазовых ограничений, причем в работе [2] рассмотрен случай, когда множество допустимых управлений игроков — шар, терминальные множества — начало координат, в работе [3] — множество допустимых управлений и терминальные множества — выпуклые компакты. В работе [4] получено решение задачи с фазовыми ограничениями в случае, когда множество, ограничивающее управления игроков, — шар единичного радиуса, терминальное множество — начало координат, фазовые ограничения — выпуклый компакт и число преследователей меньше размерности пространства. В работе [5] получены необходимые и достаточные условия разрешимости задачи уклонения в случае, если фазовым ограничением является выпуклое многогранное множество, множество допустимых управлений совпадает с шаром с центром в нуле и терминальное множество — начало координат. В работе [6] рассматривался случай, когда множество допустимых управлений игроков — выпуклый компакт, терминальные множества — выпуклые компакты, фазовые ограничения — выпуклое многогранное множество. Нестационарная задача простого преследования с равными возможностями и фазовыми ограничениями рассматривалась в [7–9].

В данной статье рассматривается задача простого преследования группой преследователей одного убегающего при условии, что среди преследователей имеются как участники, максимальные скорости которых совпадают с максимальной скоростью убегающего, так и участники, у которых максимальные скорости строго меньше максимальной скорости убегающего, и при этом убегающий не покидает пределы выпуклого многогранного множества. Получены условия, при которых преследователи с меньшими возможностями не влияют на разрешимость задачи уклонения.

Работа примыкает к исследованиям [10–13].

[1]Первый автор пользовался финансовой поддержкой программы Президиума РАН «Математическая теория управления» и гранта РФФИ (проект №12–01–00195).

§ 1. Постановка задачи

В пространстве $\mathbb{R}^k$ $(k \geqslant 2)$ рассматривается дифференциальная игра $\Gamma(n)$ $n+1$ лиц: n преследователей $P_1, \ldots, P_n$ и убегающий E. Закон движения каждого из преследователей P_i имеет вид

$$\dot{x}_i = u_i, \quad |u_i| \leqslant \alpha_i, \quad x_i(0) = x_i^0,$$

причем $\alpha_j = 1$ для всех $j = 1, \ldots, m < n$, $\alpha_j < 1$ для всех $j = m+1, \ldots, n$.

Закон движения убегающего E имеет вид

$$\dot{y} = v, \quad |v| \leqslant 1, \quad y(0) = y^0, \quad y^0 \neq x_i^0.$$

Здесь $i = 1, \ldots, n$, x_i, y, u_i, $v \in \mathbb{R}^k$. Дополнительно предполагается, что убегающий E не покидает пределы выпуклого многогранного множества

$$D = \{z \in \mathbb{R}^k \mid (p_j, z) \leqslant \mu_j,\ j = 1, \ldots, r\},$$

где $p_1, \ldots, p_r$ — единичные векторы $\mathbb{R}^k$, $\mu_1, \ldots, \mu_r$ — вещественные числа такие, что $\operatorname{Int} D \neq \emptyset$, $\operatorname{Int} D$ — внутренность множества D.

Определение 1. *Стратегией убегающего* E будем называть отображение V, ставящее в соответствие величинам $\big(t, x_1(t), \ldots, x_n(t), y(t)\big)$ измеримую функцию $v(t)$ такую, что $|v(t)| \leqslant 1$, $y(t) \in D$ для всех $t \geqslant 0$.

Определение 2. В игре $\Gamma(n)$ *происходит уклонение от встречи,* если существует стратегия V убегающего E такая, что для любых допустимых траекторий $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ преследователей $P_1, \ldots, P_n$ выполнено $x_i(t) \neq y(t)$ для всех $t \geqslant 0$ и для всех i.

Определение 3. В игре $\Gamma(n)$ *происходит уклонение от встречи на* $[0, T]$, если существует стратегия V убегающего E такая, что для любых допустимых траекторий $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ преследователей $P_1, \ldots, P_n$ выполнено $x_i(t) \neq y(t)$ для всех $t \in [0, T]$ и для всех i.

§ 2. Задача уклонения

Лемма 1. *Пусть* $z, v, \in \mathbb{R}^k, |v| = 1,\ (z, v) \geqslant 0, \tau > 0$. *Тогда*

$$\min\{|z + tv - tu| \;\big|\; t \in [0, \tau], |u| \leqslant 1\} \geqslant \sqrt{|z|^2 + \tau^2} - \tau.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Справедливы неравенства

$$|z + tv - tu| \ \geqslant |z + tv| - t = \sqrt{|z|^2 + 2(z, v)t + t^2} - t \geqslant \sqrt{|z|^2 + t^2} - t \geqslant \sqrt{|z|^2 + \tau^2} - \tau.$$

Последнее неравенство верно, так как функция $f(t) = \sqrt{|z|^2 + t^2} - t$ убывает на $[0, \tau]$. Лемма доказана. □

Теорема 1. *Пусть* $m < k$. *Тогда в игре* $\Gamma(n)$ *происходит уклонение от встречи.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Будем считать, что y^0 — внутренняя точка множества D. Если y^0 является граничной точкой, то первоначально убегающий переходит за достаточно малое время в какую-либо внутреннюю точку. Рассмотрим $D_r(z)$ — шар радиуса r с центром в точке z такой, что $y^0 \in \operatorname{Int} D_r(z) \subset D$. Пусть ε — расстояние от y^0 до границы $D_r(z)$. Введем следующие обозначения $(j \in N)$:

$$t_0 = 0, \quad \tau_j = \frac{\varepsilon}{2j}, \quad t_{j+1} = t_j + \tau_j, \quad \delta_j = \min_i \Big(\sqrt{|x_i(t_j) - y(t_j)|^2 + \tau_{j+1}^2} - \tau_{j+1}\Big),$$

$$\Delta_j = r - \tau_{j+1} - \sqrt{(r - \tau_j)^2 + \tau_{j+1}^2}, \quad b_j = \frac{1}{2}\min\{\delta_j, \Delta_j\}.$$

Отметим, что $\lim\limits_{j\to\infty} t_j = +\infty$, $\Delta_j > 0$.

Задаем поведение убегающего E на $[t_j, t_{j+1})$, $j = 0, 1, \ldots$ следующим образом. Зададим вектор v_j такой, что $|v_j| = 1$, $(v_j, y(t_j) - x_l(t_j)) = 0$ для всех $l = 1, \ldots, m$, $(v_j, z - y(t_j)) \geqslant 0$. Отметим, что такой вектор v_j существует, так как $m < k$. Пусть далее $v_j(t, t_j, v_j, b_j)$ — управление убегающего E, гарантирующее ему уклонение от преследователей $E_{m+1}, \ldots, E_n$ на $[t_j, t_{j+1})$ и такое, что

$$|y(t) - (y(t_j) + v_j(t - t_j))| < b_j \quad \text{для всех} \quad t \in [t_j, t_{j+1}).$$

В силу [1] такое управление убегающего существует. Полагаем управление убегающего в игре $\Gamma(n)$ на $[t_j, t_{j+1})$ равным $v_j^0(t) = v_j(t, t_j, v_j, b_j)$.

Докажем, что $x_i(t) \neq y(t)$ для всех $t \in [t_j, t_{j+1})$, $i = 1, \ldots, m$. По неравенству треугольника имеем

$$|x_i(t) - y(t)| \geqslant |x_i(t) - (y(t_j) + v_j(t - t_j))| - |y(t) - (y(t_j) + v_j(t - t_j))|.$$

Оценим первое слагаемое. Так как $\left|\int_{t_j}^{t} u(s)\, ds\right| \leqslant t - t_j$, то

$$|x_i(t) - y(t_j) - v_j(t - t_j)| = |x_i(t) + \int_{t_j}^{t} u_i(s)\, ds - y(t_j) - v_j(t - t_j)| \geqslant$$
$$\geqslant \sqrt{|x_i(t_j) - y(t_j)|^2 + (t - t_j)^2} - (t - t_j) \geqslant \sqrt{|x_i(t_j) - y(t_j)|^2 + \tau_{j+1}^2} - \tau_{j+1} = \delta_j.$$

Справедливо также неравенство

$$|y(t) - (y(t_j) + v_j(t - t_j))| < \frac{1}{2}\delta_j.$$

Поэтому для всех $t \in [t_i, t_{i+1})$ верно неравенство

$$|x_i(t) - y(t)| \geqslant \delta_j - \frac{1}{2}\delta_j > 0.$$

Из последнего неравенства следует, что если поимка не произошла до момента t_j, то она не произойдет и на отрезке $[t_j, t_{j+1})$. Следовательно, поимка не происходит на $[0, \infty)$.

Покажем, что убегающий не покидает пределы множества D. Докажем, что если справедливо неравенство $|y(t_j) - z| \leqslant r - \tau_j$, то $|y(t) - z| \leqslant r - \tau_{j+1}$ для всех $t \in [t_j, t_{j+1}]$. Действительно,

$$|y(t) - z| \leqslant |y(t) - y(t_j) - v_j(t - t_j)| + |y(t_j) + v_j(t - t_j) - z|.$$

Так как $|y(t) - y(t_j) - v_j(t - t_j)| < b_j$ и

$$|y(t_j) + v_j(t - t_j) - z| =$$
$$= \sqrt{|y(t_j) - z|^2 + 2(v_j, y(t_j) - z)(t - t_j) + (t - t_j)^2} \leqslant \sqrt{(r - \tau_j)^2 + \tau_{j+1}^2},$$

то

$$|y(t) - z| \leqslant b_j + \sqrt{(r - \tau_j)^2 + \tau_{j+1}^2} \leqslant r - \tau_{j+1}.$$

Тем самым доказано, что $y(t) \in D_r(z) \subset D$ для всех $t \geqslant 0$. Теорема доказана. □

Замечание 1. Отметим, что случай $k = 2$, $m = 1$, D — круг рассматривался ранее в работе [14], где был предложен другой подход к выбору параметров уклонения.

Замечание 2. Теорема 1 верна для произвольного выпуклого множества D с непустой внутренностью.

Теорема 2. *Пусть* $0 \notin \mathrm{Int}\,\mathrm{co}\{x_1^0 - y^0, \ldots, x_m^0 - y^0, p_1, \ldots, p_r\}$. *Тогда в игре* $\Gamma(n)$ *происходит уклонение на любом отрезке* $[0, T]$.

Доказательство. Будем считать, что y^0 — внутренняя точка множества D. Если y^0 является граничной точкой, то первоначально убегающий переходит за достаточно малое время в какую-либо внутреннюю точку. Из условия теоремы следует, что существует вектор $v_0, |v_0| = 1$, такой, что

$$(x_l^0 - y^0, v_0) \leqslant 0 \quad \text{для всех} \quad l = 1, \ldots, m, \quad (p_s, v_0) \leqslant 0 \quad \text{для всех} \quad s = 1, \ldots, r.$$

Пусть $y_0(t) = y^0 + v_0 t,\ z_i^0 = x_i^0 - y^0$, T — произвольное положительное число. Тогда

$$(p_s, y_0(t)) \leqslant (p_s, y^0) + t(p_s, v_0) \leqslant \mu_s,$$

и поэтому $y_0(t) \in D$ для всех $t \geqslant 0$. Кроме того, используя лемму 1, имеем

$$|x_i(t) - y_0(t)| = \left| x_i^0 + \int_0^t u(s)\,ds - y^0 - tv_0 \right| \geqslant |z_i^0 - tv_0| - t = \sqrt{|z_i^0|^2 - 2t(z_i^0, v_0) + t^2} - t \geqslant$$
$$\geqslant \sqrt{|z_i^0|^2 + t^2} - t \geqslant \sqrt{|z_i^0|^2 + T^2} - T \text{ для всех } t \in [0, T].$$

Определим число $\delta = \min\Big\{ \min\limits_{i \in 1, \ldots, m} \big(\sqrt{|z_i^0|^2 + T^2} - T \big), \min\limits_{t \in [0,T]} \rho(y_0(t), \partial D) \Big\}$, где ∂D — граница множества D, $\rho(a, X)$ — расстояние от точки a до множества X. Тогда $\delta > 0$. Обозначим через $v(t, v_0, \delta/2)$ стратегию уклонения Ф. Л. Черноусько для убегающего E от преследователей $P_{m+1}, \ldots, P_n$ такую, что $|y(t) - y_0(t)| < \delta/2$ для всех $t \geqslant 0$, где $y(t)$ — траектория убегающего E, порожденная $v(t, v_0, \delta/2)$. Тогда $y(t) \in D$ для всех $t \in [0, T]$ и, кроме того, для всех $i = 1, \ldots, n$

$$|x_i(t) - y(t)| = |x_i(t) - y_0(t) + y_0(t) - y(t)| \geqslant |x_i(t) - y_0(t)| - |y_0(t) - y(t)| \geqslant \delta - \delta/2 > 0$$

для всех $t \in [0, T]$. Тем самым доказано, что в игре $\Gamma(n)$ на отрезке $[0, T]$ происходит уклонение от встречи. Теорема доказана. □

Замечание 3. Условие теоремы 2 не гарантирует уклонение от встречи на всем промежутке $[0, \infty)$. Действительно, пусть $k = 2$, $m = 3$, $n = 4$,

$$x_1^0 = (-1, 0),\ x_2^0 = (1, 0),\ x_3^0 = (0, -1),\ x_4^0 = (0, 2),\ y^0 = (0, 0),$$
$$D = \{z = (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2 \mid z_2 \geqslant 0\}.$$

Тогда условие теоремы выполнено, $v_0 = (1, 0)$, уклонения от встречи на $[0, \infty)$ нет.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Черноусько Ф.Л. Одна задача уклонения от многих преследователей // Прикладная математика и механика. 1976. Т. 40. Вып. 1. С. 14–24.
2. Пшеничный Б.Н. Простое преследование несколькими объектами // Кибернетика. 1976. № 3. С. 145–146.
3. Григоренко Н.Л. Игра простого преследования–убегания группы преследователей и одного убегающего // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. 1983. № 1. С. 41-47.
4. Иванов Р.П. Простое преследование на компакте // ДАН СССР. 1978. Т. 254. № 6. С. 1318–1321.
5. Петров Н.Н. Простое преследование при наличии фазовых ограничений / ЛГУ. Л., 1984. 16 с. Деп. в ВИНИТИ 27.03.1984, № 1684-84.
6. Петров Н.Н. Одна задача простого преследования с фазовыми ограничениями // Автоматика и телемеханика. 1992. № 5. С. 22–26.
7. Банников А.С. Об одной задаче группового преследования // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2009. Вып. 3. С. 3–11.

8. Банников А.С., Петров Н.Н. К нестационарной задаче группового преследования // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16. № 1. С. 40–51.
9. Петров Н.Н. К нестационарной задаче группового преследования с фазовыми ограничениями // Математическая теория игр и ее приложения. 2010. Т. 2. № 4. С. 74–83.
10. Петров Н.Н. Об одной задаче группового преследования с фазовыми ограничениями // Прикладная математика и механика. 1988. Т. 52. Вып. 6. С. 1060–1063.
11. Петров Н.Н. Одна линейная задача уклонения от многих преследователей // Известия РАН. Теория и системы управления. 1988. № 1. С. 41–43.
12. Шуравина И.Н. Об одной задаче уклонения в конусе // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2009. Вып. 2. С. 13–16.
13. Сахаров Д.В. О двух дифференциальных играх простого группового преследования // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2012. Вып. 1. С. 50–59.
14. Жимовский В. Два следствия решения одной задачи уклонения от многих преследователей // Bull. Pol. Acad. Sci. Math. 1980. Т. 28. № 3–4. С. 155–159.

Поступила в редакцию 29.08.2012

Петров Николай Никандрович, профессор, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: npetrov@udmnet.ru

Щелчков Кирилл Александрович, студент, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: incognitobox@mail.ru

N. N. Petrov, K. A. Shchelchkov
To the problem of Chernous'ko

Keywords: differential game, simple motion, group pursuit, phase restrictions.

Mathematical Subject Classifications: 49N70, 49N75

The problem of simple pursuit of one evader by the group of pursuers is studied, provided that among the pursuers there are both members, the maximum speeds of which coincide with the maximum speed of the evader, and participants whose maximum speeds are strictly less than the maximum speed of the evader, while the evader does not leave a convex polyhedral set. The conditions under which the pursuers with fewer capabilities do not affect the solvability of problem of evasion are obtained.

REFERENCES

1. Chernous'ko F.L. One problem of evasion from many pursuers, *Prikl. Mat. Mekh.*, 1976, vol. 40, no. 1, pp. 14–24.
2. Pshenichnyi B.N. Simple pursuit by a few objects, *Kibernetika*, 1976, no. 3, pp. 145–146.
3. Grigorenko N.L. Simple pursuit–evasion game of pursuit group and one evader, *Vestnik Moskov. Univ. Ser. XV Vychisl. Mat. Kibernet.*, 1983, no. 1, pp. 41–47.
4. Ivanov R.P. Simple pursuit in a compact set, *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 1978, vol. 254, no. 6, pp. 1318–1321.
5. Petrov N.N. The simple pursuit with phase constraints, Leningrad State University, Leningrad, 1984, 16 p. Deposited in VINITI 27.03.1984., no. 1684-84.
6. Petrov N.N. A certain simple pursuit problem with phase constraints, *Automation and Remote Control*, 1992, vol. 53, no. 5, pp. 639–642.
7. Bannikov A.S. On one problem of simple pursuit, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2009, no. 3, pp. 3–11.
8. Bannikov A.S., Petrov N.N. On non-stationary problem group pursuit with phase restrictions, *Tr. Inst. Mat. Mekh. Ural. Otd. Ross. Akad. Nauk*, 2010, vol. 16, no. 1, pp. 40–51.

9. Petrov N.N. On the nonstationary problem of group pursuit with phase constraints, *Mat. Teor. Igr Prilozh.*, 2010, vol. 2, no. 4, pp. 74–83.

10. Petrov N.N. About one problem of group pursuit with phase constraints, *Prikl. Mat. Mekh.,* 1988, vol. 52, no. 6, pp. 1060–1063.

11. Petrov N.N. One linear problem of evasion from many pursuers, *Izv. Ross. Akad. Nauk, Teor. Sist. Upravl.*, 1988, no. 1, pp. 41–43.

12. Shuravina I.N. About the one problem of evasion in cone, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2009, no. 2, pp. 13–16.

13. Sakharov D.V. On two differential games of simple group pursuit, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2012, no. 1, pp. 50–59.

14. Zhimovsky V. Two results of solving one problem of evasion from many pursuers, *Bull. Pol. Acad. Sci., Math.*, 1980, vol. 28, no. 3–4, pp. 155–159.

Received 29.08.2012

Petrov Nikolai Nikandrovich, Professor, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
E-mail: npetrov@udmnet.ru

Shchelchkov Kirill Aleksandrovich, student, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
E-mail: incognitobox@mail.ru