УДК 531.011

© *И. И. Овсянников*

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ ШАРА ЧАПЛЫГИНА НА ПЛОСКОСТИ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ЗАКОНОМ ТРЕНИЯ [1]

Рассматривается шар Чаплыгина на плоскости, на который действует сила трения, удовлетворяющая условию: $(\mathbf{F}, \mathbf{u}) < 0$ при $\mathbf{u} \neq 0$ и $\mathbf{F} = 0$ при $\mathbf{u} = 0$, где $\mathbf{u}$ — скорость проскальзывания шара. Контакт с опорной плоскостью предполагается точечным (иными словами, отсутствуют пятно контакта и момент трения верчения). Основной задачей работы является нахождение множества возможных стационарных (финальных) движений и определение типов их устойчивости.

В работе показано, что стационарных движений возможно ровно три; все они представляют собой равномерные и прямолинейные качения шара по прямой без проскальзывания, при которых он вращается вокруг одной из главных осей тензора инерции. При этом вращение вокруг оси наибольшего момента инерции устойчиво, вокруг среднего и наименьшего — неустойчиво.

Ключевые слова: шар Чаплыгина, стационарные движения, устойчивость.

Введение

Задача о движении динамически несимметричного уравновешенного шара (шара Чаплыгина) по поверхности привлекает внимание исследователей достаточно давно. Первые результаты на эту тему появились в начале XX века в работах С. А. Чаплыгина [1] и Э. Дж. Гэллопа [2]. В своей знаменитой работе [1] С. А. Чаплыгин рассмотрел задачу о качении шара с разными главными моментами инерции по абсолютно шероховатой плоскости при условии, что его центр масс совпадает с геометрическим центром. С. А. Чаплыгин нашел четыре интеграла такой системы (геометрический, интеграл площадей, кинетического момента и полной механической энергии) и проинтегрировал ее, дав тем самым полное решение данной задачи. Однако, несмотря на то, что в статье С. А. Чаплыгина приводится некоторая геометрическая интерпретация полученного решения, характер движения такого шара на плоскости в ней не рассматривается. Движение шара Чаплыгина в абсолютном пространстве изучалось в работе А. А. Килина [3], в которой также приведены явные уравнения траектории точки контакта.

Отметим, что в работах [1, 3] рассматривается консервативная модель, допускающая четыре первых интеграла и инвариантную меру. Поэтому, согласно модифицированной теории Рауса (см. [4]), среди стационарных движений устойчивыми по Ляпунову будут такие, которые доставляют локальный максимум или локальный минимум полной механической энергии. Вращение шара Чаплыгина вокруг оси наименьшего момента инерции отвечает максимуму, вокруг наибольшего — минимуму энергии, то есть оба этих движения устойчивы (эллиптического типа), вращение вокруг среднего момента — неустойчиво (седлового типа).

Что касается движения шара Чаплыгина с проскальзыванием при наличии трения, то такую задачу рассматривал еще Э. Дж. Гэллоп в работе [2]. В этой статье также изучаются несколько других случаев вращения твердых тел на плоскости, таких как сферический волчок, однородный шар с полостью и прочие. Гэллоп утверждает, что вращающиеся тела на плоскости под действием силы трения стремятся к положению, когда ось вращения вертикальна, а из таких вращений — к тому, которое соответствует минимальной энергии. Для шара Чаплыгина это соответствует вращению вокруг оси наибольшего момента инерции[2].

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Правительства РФ (грант No.11.Г34.31.0039), Российского фонда фундаментальных исследований (гранты 10–01–00429 и 11–01–97017–р–Поволжье) и Федеральной целевой программой «Кадры» (грант No.14.B37.21.0361).

[2]Однако заметим, что такие движения возможны только для тех начальных условий, при которых кинетический момент шара относительно точки контакта вертикален.

Весьма интересные результаты на тему движения шара Чаплыгина при наличии малого трения были получены Н. К. Мощуком в работах [5, 6]. Основным результатом этих работ для случая движения шара по плоскости с малым вязким трением является доказательство того, что вращение вокруг наибольшего момента инерции асимптотически устойчиво, вокруг среднего и наименьшего — неустойчиво.

В настоящей работе обобщаются результаты работ [5, 6] на случай произвольного трения, которое может не быть малым. Задача исследуется в предположении, что шар постоянно касается опорной плоскости одной своей точкой (отсутствует пятно контакта) и, таким образом, момент трения верчения отсутствует. Уравнения движения здесь допускают три интеграла — геометрический, интеграл площадей и кинетического момента. Предполагается также, что шар, вообще говоря, движется с проскальзыванием, и поэтому его энергия терятся в результате работы силы трения. Однако при этом существуют так называемые *стационарные движения* шара, когда трение отсутствует на его соответствующей траектории. Под стационарным здесь понимается движение, доставляющее стационарное значение полной механической энергии при фиксированных значениях постоянных интегралов движения. Что касается природы силы трения, то мы предполагаем только, что выполняется следующее условие: $(\mathbf{F}, \mathbf{u}) < 0$ при $\mathbf{u} \neq 0$ и $\mathbf{F} = 0$ при $\mathbf{u} = 0$, где $\mathbf{u}$ — скорость проскальзывания шара по плоскости.

В статье показывается, что система имеет три стационарных движения, при каждом из которых шар вращается вокруг одной из главных осей тензора инерции и катится при этом равномерно и без проскальзывания вдоль некоторой прямой. Энергия сохраняется только на указанных стационарных движениях и строго убывает на всех остальных. Вращение шара вокруг оси наибольшего момента асимптотически устойчиво, вокруг среднего и наименьшего — неустойчиво, что согласуется также с результатами работ [5, 6].

§ 1. Постановка задачи и формулировка основных результатов

Рассмотрим шар массой m и радиусом R, центр масс которого находится в геометрическом центре, обладающий различными центральными моментами инерции. В подвижной (неинерциальной) системе отсчета, связанной с шаром, уравнения движения следующие (общий вид см., например, в [7]):

$$m\dot{\mathbf{v}} + [\boldsymbol{\omega}, m\mathbf{v}] = \mathbf{F}, \qquad J\dot{\boldsymbol{\omega}} + [\boldsymbol{\omega}, J\boldsymbol{\omega}] = -R[\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{F}], \qquad \dot{\boldsymbol{\gamma}} + [\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma}] = 0, \tag{1}$$

где $\mathbf{v}$ — скорость центра масс шара, $\boldsymbol{\omega}$ — вектор угловой скорости, $\boldsymbol{\gamma}$ — вектор нормали опорной плоскости, проведенный из точки контакта, $\mathbf{F}$ — сила трения, $J = diag(A, B, C)$ — центральный тензор инерции шара. Первые два уравнения в системе (1) описывают закон изменения импульса и кинетического момента относительно центра масс, третье — постоянство вектора $\boldsymbol{\gamma}$ в неподвижной системе отсчета. Скорость проскальзывания шара равна $\mathbf{u} = \mathbf{v} - R[\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma}]$. Отметим, что из системы (1) следует $\dfrac{d}{dt}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\gamma}) = 0$, поэтому если начальная скорость шара была направлена горизонтально, $\mathbf{v} \perp \boldsymbol{\gamma}$ при $t = 0$, то это условие будет выполняться также и при $t \geqslant 0$. Таким образом, уравнения (1) описывают безотрывное движение шара.

Система (1) обладает тремя следующими интегралами (геометрическим, интегралом площадей и кинетического момента соответственно):

$$(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}) = 1, \qquad (J\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma}) = G, \qquad (\mathbf{K}, \mathbf{K}) = K^2. \tag{2}$$

Здесь $\mathbf{K} = J\boldsymbol{\omega} + mR[\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{v}]$ — вектор кинетического момента шара относительно точки контакта. Формулы (2) хорошо известны (см., например, [1, 8]). Отметим, что $(\mathbf{K}, \boldsymbol{\gamma}) = (J\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma}) = G$, то есть G — одна из проекций вектора $\mathbf{K}$, и следовательно, $|G| \leqslant K$.

Полная механическая энергия системы (1) имеет вид

$$H \equiv 1/2m(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) + 1/2(Aw_1^2 + Bw_2^2 + Cw_3^2). \tag{3}$$

Поскольку в нашей задаче возможно проскальзывание, интеграл энергии, в отличие от [1, 3], отсутствует. Именно, справедливо следующее соотношение: $\dot{H} = (\mathbf{F}, \mathbf{u}) \leqslant 0$.

В настоящей работе изучаются финальные движения шара Чаплыгина под действием силы трения, на которую накладываются следующие условия: $(\mathbf{F}, \mathbf{u}) < 0$ при $\mathbf{u} \neq 0$ и $\mathbf{F} = 0$ при $\mathbf{u} = 0$. Результаты работы сформулированы в виде следующей теоремы:

Теорема 1. *При всех допустимых значениях постоянных интегралов* (2) *система* (1) *имеет ровно три стационарных движения. Каждое из них представляет собой вращение вокруг одной из главных осей тензора инерции, при котором шар катится равномерно, прямолинейно и без проскальзывания.*

Вращение вокруг оси наибольшего момента инерции асимптотически устойчиво, вокруг осей среднего и наименьшего моментов — неустойчиво.

§ 2. Стационарные движения системы (1)

Согласно [4], стационарные движения системы (1) соответствуют критическим значениям функции H при фиксированных значениях постоянных интегралов (2). Для их нахождения рассмотрим функцию $L = H - \lambda_1((\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}) - 1) - \lambda_2((J\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma}) - G) - \lambda_3((\mathbf{K}, \mathbf{K}) - K^2)$, где $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ — неопределенные множители Лагранжа. Условия стационарности функции L приводят к следующей системе уравнений, из которой мы будем находить параметры стационарных движений:

$$\begin{gathered} \mathbf{v} = 2\lambda_3 R[\mathbf{K}, \boldsymbol{\gamma}], \qquad \boldsymbol{\omega} = \lambda_2\boldsymbol{\gamma} + 2\lambda_3\mathbf{K}, \qquad \lambda_2 J\boldsymbol{\omega} = -2\lambda_1\boldsymbol{\gamma} + 2\lambda_3 mR[\mathbf{K}, \mathbf{v}], \\ \mathbf{K} = J\boldsymbol{\omega} + mR[\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{v}], \qquad (\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}) = 1, \quad (J\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma}) = G, \quad (\mathbf{K}, \mathbf{K}) = K^2. \end{gathered} \tag{4}$$

Из формул (4) видно, что вектор $\mathbf{v}$ перпендикулярен к векторам $\mathbf{K}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\omega}, J\boldsymbol{\omega}$, которые, следовательно, лежат в одной плоскости. Разложим векторы $\boldsymbol{\omega}$ и $J\boldsymbol{\omega}$ по $\mathbf{K}$ и $\boldsymbol{\gamma}$ (это возможно, если они неколлинеарны[3]). Из (4) получаются следующие соотношения на неопределенные множители Лагранжа:

$$-2\lambda_1 = \lambda_2 G + 4mR^2\lambda_3^2(K^2 - G^2), \qquad \lambda_2 = \frac{4mR^2G\lambda_3^2}{1 - 2\lambda_3 mR^2}, \tag{5}$$

из которых находим разложения:

$$\boldsymbol{\omega} = 2\lambda_3\mathbf{K} + \frac{4mR^2G\lambda_3^2}{1 - 2\lambda_3 mR^2}\boldsymbol{\gamma}, \qquad J\boldsymbol{\omega} = (1 - 2\lambda_3 mR^2)\mathbf{K} + 2\lambda_3 mR^2 G\boldsymbol{\gamma}. \tag{6}$$

Таким образом, из (6) видно, что векторы $\boldsymbol{\omega}$ и $J\boldsymbol{\omega}$ коллинеарны, то есть стационарное вращение возможно только вокруг одной из главных осей инерции шара. Пусть, для определенности, это будет ось, отвечающая моменту инерции A. Тогда окончательно получаем следующие параметры стационарного движения (для вращений вокруг главных осей B и C формулы будут аналогичны):

$$\begin{gathered} v_1 = 0, \quad v_2 = -R\gamma_3\omega_1, \quad v_3 = R\gamma_2\omega_1, \qquad \omega_1 = \frac{S}{A(mR^2 + A)}, \quad \omega_2 = \omega_3 = 0, \\ \gamma_1 = \frac{G(mR^2 + A)}{S}, \quad \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1 - \gamma_1^2, \qquad S = \sqrt{(K^2 - G^2)A^2 + G^2(mR^2 + A)^2}, \\ K_1 = \frac{AK^2 + mR^2G^2}{S}, \qquad K_2 = -\frac{mR^2G\gamma_2}{A}, \qquad K_3 = -\frac{mR^2G\gamma_3}{A}, \\ \lambda_1 = -\frac{mR^2(AK^2 + G^2mR^2)}{2A(mR^2 + A)^2}, \qquad \lambda_2 = \frac{mR^2G}{A(mR^2 + A)}, \qquad \lambda_3 = \frac{1}{2(mR^2 + A)}. \end{gathered} \tag{7}$$

При таком движении шар катится по плоскости без проскальзывания, причем его центр масс движется по прямой с постоянной скоростью, а вращение происходит вокруг оси, которая лежит в плоскости, перпендикулярной $\mathbf{v}$ и составляет постоянный угол θ ($\cos\theta = \gamma_1$) с вертикалью. Решение (7) существует при всех допустимых значениях постоянных интегралов (2), в

[3] В случае, когда $\mathbf{K}$ и $\boldsymbol{\gamma}$ коллинеарны, основные формулы получаются теми же самыми, в частности формулы (5) и (6) остаются справедливыми.

частности, естественное условие $|\gamma_1| \leqslant 1$ эквивалентно неравенству $|G| \leqslant K$. Также движения вида (7) для осей A, B и C всегда изолированы друг от друга в смысле [4][4].

Отметим, что общий вид стационарных движений (7) включает также в себя граничные частные случаи $G = \pm K$ (чистые вращения, то есть когда центр шара неподвижен и ось вращения вертикальна) и $G = 0$ (шар катится, ось вращения горизонтальна).

Далее, для того чтобы применять теоремы из [4] для исследования устойчивости полученных стационарных движений, докажем следующую лемму:

Лемма 1. *На движениях, отличных от* (7)*, полная механическая энергия системы* (1) *строго убывает.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу невозрастания энергии для доказательства леммы достаточно показать, что энергия сохраняется только на движениях вида (7). Рассмотрим произвольное движение с энергией H_0, на котором $\mathbf{u} \equiv 0$. В таком случае $\mathbf{F} \equiv 0$, и рассматриваемое движение удовлетворяет уравнениям:

$$m\dot{\mathbf{v}} + [\boldsymbol{\omega}, m\mathbf{v}] = 0, \qquad J\dot{\boldsymbol{\omega}} + [\boldsymbol{\omega}, J\boldsymbol{\omega}] = 0, \qquad \dot{\boldsymbol{\gamma}} + [\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma}] = 0, \qquad \mathbf{v} - R[\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma}] = 0. \tag{8}$$

Дифференцируя четвертое уравнение системы (8) по времени и подставляя выражения для $\dot{\mathbf{v}}$ и $\dot{\boldsymbol{\gamma}}$ из первого и третьего уравнений, получаем

$$[\dot{\boldsymbol{\omega}}, \boldsymbol{\gamma}] = 0. \tag{9}$$

Докажем от противного, что $\dot{\boldsymbol{\omega}} = 0$. Пусть это не так, тогда $\dot{\boldsymbol{\omega}} = \alpha\boldsymbol{\gamma}$, где $\alpha \neq 0$. Домножим второе уравнение системы (8) скалярно на $\boldsymbol{\gamma}$. Непосредственной проверкой можно убедиться, что $(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\omega}, J\boldsymbol{\omega}) = const$, следовательно, $\alpha(\boldsymbol{\gamma}, J\boldsymbol{\gamma}) = const \neq 0$ в силу положительной определенности J. На сфере $(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}) = 1$ функция $(\boldsymbol{\gamma}, J\boldsymbol{\gamma})$ достигает своих наибольшего и наименьшего значений, поэтому α имеет постоянный знак и принимает значения только из некоторого отрезка:

$$0 < \alpha_1 \leqslant |\alpha| \leqslant \alpha_2. \tag{10}$$

Далее, $\frac{d}{dt}(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\omega}) = \alpha$, и за счет (10) скалярное произведение $(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\omega})$, начиная с некоторого момента, монотонно растет по абсолютной величине с конечной скоростью, поэтому превысит любую наперед заданную величину $\tilde{\omega}$ за конечное время $\tau(\tilde{\omega})$. Поскольку $|(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\omega})| \leqslant |\boldsymbol{\omega}|$, то при $t > \tau(\tilde{\omega})$ будет также $|\boldsymbol{\omega}| > \tilde{\omega}$, и среди компонент $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ найдется такая, что $|\omega_i| > \tilde{\omega}/\sqrt{3}$.

Наконец, если выбрать $\tilde{\omega} = \sqrt{\dfrac{3H_0}{I}}$, где I — наименьший из главных моментов инерции (A, B, C), то мы получим следующую оценку на энергию системы при $t > \tau(\tilde{\omega})$:

$$H_0 \geqslant I\omega_i^2 > I\tilde{\omega}^2/3 = H_0. \tag{11}$$

Противоречие (11) означает, что предположение неверно и $\dot{\boldsymbol{\omega}} = 0$. Тогда из второго уравнения системы (8) получаем $\boldsymbol{\omega} \parallel J\boldsymbol{\omega}$, то есть шар может двигаться без проскальзывания, только если он вращается вокруг одной из главных осей. Снова, не нарушая общности, можем считать, что с ее направлением связан момент инерции A.

Из формул (2) следует:

$$A(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma}) = G, \qquad K^2 = (A + mR^2)^2(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}) - \frac{G^2mR^2}{A^2}(mR^2 + 2A), \tag{12}$$

откуда непосредственно выводятся равенства (7). Лемма доказана. □

§ 3. Устойчивость стационарных движений

Теперь исследуем стационарные движения вида (7) на устойчивость. Как известно из [4], стационарное движение будет устойчивым, если оно доставляет строгий локальный минимум

[4] С точки зрения теории динамических систем такие решения отвечают грубым периодическим движениям (или грубым состояниям равновесия в приведенных системах).

функции L на пересечении линейных многообразий, соответствующих интегралам (2). Если же стационарное движение не доставляет минимума, то оно будет неустойчивым (в частности, седловым).

Формулы (7) задают одномерное многообразие, на котором функция L принимает стационарное значение. Согласно [4], для исследования устойчивости системы на многообразии (7) достаточно доказать наличие или отсутствие минимума функции L по отклонениям от него. Введем новые переменные x_i, $i = 1 \dots 8$, характеризующие это отклонение (здесь индексы 0 означают невозмущенные значения (7)):

$$\begin{gathered} v_1 = x_1, \quad v_2 = v_{20} + x_2, \quad v_3 = v_{30} + x_3, \qquad \omega_1 = \omega_{10} + x_4, \quad \omega_2 = x_5, \quad \omega_3 = x_6, \\ \gamma_1 = \gamma_{10} + x_7, \quad \gamma_2 = (1 + x_8)\sqrt{1 - \gamma_{10}^2}\cos\varphi, \quad \gamma_3 = (1 + x_8)\sqrt{1 - \gamma_{10}^2}\sin\varphi. \end{gathered} \tag{13}$$

Соотношения (2) задают связи между этими переменными в виде системы трех линейных уравнений, из которой мы выражаем, например, x_4, x_7 и x_8 через остальные переменные. После этого исследуем квадратичную форму от оставшихся пяти переменных с помощью критерия Сильвестра, то есть составляем матрицу этой формы и находим ее главные диагональные миноры $\triangle_j$, $j = 1, \dots, 5$. Если все пять миноров окажутся положительными, то квадратичная форма будет положительно определена, и следовательно, движение (7) доставляет функции L локальный минимум. Если же хотя бы один из миноров отрицателен, то локального минимума у функции L на движении (7) нет. Справедлива следующая лемма:

Лемма 2. *Главные миноры имеют вид:*

$$\begin{gathered} \triangle_1 = \frac{m(A^3K^2 + 3A^2G^2mR^2 + 3AG^2m^2R^4 + G^2m^3R^6)}{(mR^2 + A)S^2}, \qquad \triangle_2 = \frac{m^2}{2AS^2(mR^2 + A)} \times \\ \times\Big(A^3K^2 + 3A^2G^2mR^2 + 3AG^2m^2R^4 + G^2m^3R^6\Big)\Big(2A^4K^2 + A^2G^2m^2R^4(7 - 5\cos 2\varphi) + \\ + A^3G^2mR^2(5 - \cos 2\varphi) + 2mR^2\sin^2\varphi(A^3K^2 + 4AG^2m^2R^4 + G^2m^3R^4)\Big), \\ \triangle_3 = m^3, \qquad \triangle_4 = \frac{m^3B(A - B)}{A}, \qquad \triangle_5 = \frac{m^3BC(A - B)(A - C)}{A^2}. \end{gathered} \tag{14}$$

Лемма доказывается стандартными методами линейной алгебры, поэтому детали мы здесь не приводим. Упрощение выражений производилось с помощью программы Mathematica 4.0.

Из (14) видно, что квадратичная форма L_2 будет положительно определенной, а движение (7) — асимптотически устойчивым тогда и только тогда, когда вращение происходит вокруг оси, соответствующей наибольшему моменту инерции, то есть $A > B$ и $A > C$. Если A — средний по величине момент инерции, то матрица квадратичной формы имеет одно отрицательное собственное значение, если наименьший — два отрицательных собственных значения; движения эти будут, соответственно, неустойчивыми. Данный результат подтверждается компьютерными экспериментами по численному интегрированию уравнений системы (1).

Автор благодарит А. В. Борисова за постановку задачи и С. В. Гонченко за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чаплыгин С.А. О катании шара по горизонтальной плоскости // Математический сборник. 1903. Т. XXIV. С. 76–101.
2. Gallop E.G. On the rise of a spinning top // Proc. Cambr. Phylos. Soc. 1904. Vol. 19. Part 3. P. 356–373.
3. Kilin A.A. The dynamics of Chaplygin ball: the qualitative and computer analysis // Regular and Chaotic Dynamics. 2001. Vol. 6. № 3. P. 291–306.
4. Карапетян А.В. Устойчивость стационарных движений. М.: Эдиториал УРСС, 1998. 166 с.
5. Мощук Н.К. О движении шара Чаплыгина на горизонтальной плоскости // Прикл. мат. и мех. 1983. Т. 47. Вып. 6. С. 916–921.

6. Мощук Н.К. О движении тяжелого твердого тела на горизонтальной плоскости с вязким трением // Прикл. мат. и мех. 1985. Т. 49. Вып. 1. С. 66–71.
7. Карапетян А.В. Глобальный качественный анализ динамики китайского волчка (тип-топ) // Известия РАН. Механика твердого тела. 2008. Вып. 3. С. 33–41.
8. Маркеев А.П. Динамика тела, соприкасающегося с твердой поверхностью. М.: Наука, 1992. 336 с.; 2-е издание: Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика. 2011.

Поступила в редакцию 24.09.2012

Овсянников Иван Ильич, к. ф.-м. н., младший научный сотрудник, НИИ Прикладной математики и кибернетики, Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, 603605, Россия, г. Н. Новгород, ул. Ульянова, 10.
E-mail: Ivan.I.Ovsyannikov@gmail.com

I. I. Ovsyannikov
On stability of the Chaplygin ball motion on a plane with an arbitrary friction law

Keywords: Chaplygin ball, stationary motions, stability.

Mathematical Subject Classifications: 37N15, 70E18, 70K20

The Chaplygin ball on a plane is considered under the action of the friction force which satisfies the following condition: $(\mathbf{F}, \mathbf{u}) < 0$ as $\mathbf{u} \neq 0$ and $\mathbf{F} = 0$ as $\mathbf{u} = 0$, where $\mathbf{u}$ is the gliding velocity. The ball is supposed to have a point contact with the supporting plane (this means that the contact spot is absent and also there is no rotation friction torque). The main task of the paper is to determine a set of possible stationary (or final) motions and their stability.

In the current paper it is shown that exactly three stationary motions are possible; these motions represent straightline uniform rolling motions of the ball without sliding, at that the ball is rotating around one of the primary axes of the inertia tensor. Rotation around the axis of the greatest moment of inertia is stable, around the middle one and the lowest one it is unstable.

REFERENCES

1. Chaplygin S.A. On rolling of a ball on a horizontal plane, *Mat. Sb.*, 1903, vol. XXIV, pp. 76–101.
2. Gallop E.G. On the rise of a spinning top, *Proc. Cambr. Phylos. Soc.*, 1904, vol. 19, part 3, pp. 356–373.
3. Kilin A.A. The dynamics of Chaplygin ball: the qualitative and computer analysis, *Regular and Chaotic Dynamics*, 2001, vol. 6, no. 3, pp. 291–306.
4. Karapetyan A.V. *Ustoichivost' statsionarnykh dvizhenii* (Stability of stationary motions), Moscow: Editorial URSS, 1998, 166 p.
5. Moshchuk N.K. On the Chaplygin ball motion on a horizontal plane, *Prikl. Mat. Mekh.*, 1983, vol. 47, no. 6, pp. 916–921.
6. Moshchuk N.K. On a motion of a heavy rigid body on a horizontal plane with a viscous friction, *Prikl. Mat. Mekh.*, 1985, vol. 49, no. 1, pp. 66–71.
7. Karapetyan A.V. Global qualitative analysis of dynamics of the tippe-top, *Izv. Ross. Akad. Nauk, Mekh. Tverd. Tela*, 2008, no. 3, pp. 33–41.
8. Markeev A.P. *Dinamika tela, soprikasayushchegosya s tverdoi poverkhnost'yu* (The dynamics of the body in contact with a solid surface), Moscow: Nauka, 1992, 336 p.; Second edition: Izhevsk: Regular and Chaotic Dynamics, 2011.

Received 24.09.2012

Ovsyannikov Ivan Il'ich, Candidate of Physics and Mathematics, Junior Researcher, Research Institute for Applied Mathematics and Cybernetics, Nizhny Novgorod State University, ul. Ul'yanova, 10, Nizhny Novgorod, 603605, Russia.
E-mail: Ivan.I.Ovsyannikov@gmail.com