

УДК 532.517.4

© А. А. Шаклеин, А. И. Карпов

**ВИХРЕРАЗРЕШАЮЩЕЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРИСТЕННЫХ  
ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЙ<sup>1</sup>**

Рассматриваются различные подходы к численному моделированию пристенных турбулентных течений, основанные на комбинированных моделях турбулентности, адекватно описывающих параметры вихревого течения в ядре потока и локальные характеристики трения в пристеночной области. Используются различные модификации и комбинации моделей турбулентности: параметрические модели осредненного течения, стандартный метод крупных вихрей и модификации модели отсоединенных вихрей. Проведены расчеты тестовых задач — течение на плоской пластине и течение в плоском канале. В качестве критериев сравнения с экспериментальными данными выбраны локальный коэффициент сопротивления, распределение величины завихренности и распределение функции скорости от расстояния до стенки.

*Ключевые слова:* вихреразрешающее моделирование, пристенные турбулентные течения, модель отсоединенных вихрей.

**Введение**

К настоящему времени разработано большое количество различных подходов к моделированию турбулентных течений, среди которых вихреразрешающее моделирование (метод крупных вихрей, LES — Large Eddy Simulation) основано на решении фильтрованных уравнений Навье–Стокса (например, [1]), где фильтр конструируется таким образом, чтобы энергосодержащие анизотропные крупные вихри разрешаются, в то время как изотропная мелкомасштабная турбулентность моделируется подсеточной моделью.

Существует обширный класс задач, основной особенностью которых является взаимодействие потока газа с твердыми стенками, таких как расчет внутрибаллистических параметров энергетических установок [2–4], исследование процессов распространения и подавления газозажженных пламен [5] и другие. Ключевой проблемой, возникающей при решении приведенных выше задач, является формулировка адекватной математической модели турбулентности, которая с равной мерой достоверности описывала бы как параметры вихревого течения в ядре потока, так и локальные характеристики трения (при необходимости и теплообмена) в пристеночной области. Основным направлением в данной области является модификация метода крупных вихрей — метод отсоединенных вихрей (DES — Detached Eddy Simulation [6]).

В настоящей работе последовательно рассмотрены различные модификации и комбинации моделей турбулентности: модель  $k-\omega$  SST (Shear Stress Transport), семейство моделей DES, а также стандартная LES с алгебраической моделью Смагоринского. Приведены результаты решения тестовых задач с использованием приведенных моделей и их сравнение с известными экспериментальными данными и результатами, полученными на основе прямого численного моделирования (DNS — Direct Numerical Simulation).

**§ 1. Математическая модель**

Турбулентное течение несжимаемой среды описывается системой уравнений Навье–Стокса

$$\nabla \cdot U = 0,$$

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке программы фундаментальных исследований УрО РАН (проект 12-П-1-1037).

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \nabla \cdot (UU) - \nabla \cdot (\nu (\nabla U + \nabla U^T)) = -\frac{1}{\rho} \nabla p. \quad (1)$$

После операции фильтрации уравнение (1) выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{U}\bar{U}) - \nabla \cdot (\nu (\nabla \bar{U} + \nabla \bar{U}^T)) - \nabla \cdot (\nu_{sgs} (\nabla \bar{U} + \nabla \bar{U}^T)) = -\frac{1}{\rho} \nabla \bar{p}, \quad (2)$$

где для члена  $\nu_{sgs}$ , описывающего подсеточную турбулентную вязкость, необходимо ввести замыкающие соотношения.

Для моделирования рассматриваемых здесь пристенных течений, под которыми понимается взаимодействие потока газа с твердыми стенками, важным критерием выбора замыкающей модели турбулентности является адекватное описание параметров течения, как в ядре потока, так и вблизи стенки.

В настоящее время создано большое количество различных моделей турбулентности, позволяющих решать задачи подобного вида. Одна часть моделей направлена на модифицирование модели подсеточной вихревой вязкости [1], вторая — на построение связи между RANS моделью вблизи стенки и LES моделью в остальной части расчетной области [7], третья — на модифицирование RANS моделей таким образом, чтобы вдали от стенки масштаб длины был пропорционален фильтру [6].

В качестве тестируемых моделей выбраны вихреразрешающая стандартная модель LES с замыканием подсеточной вихревой вязкости моделью Смагоринского [1], серия моделей DES, основанных на  $k-\omega$  модификациях, а именно: DES [6] и модель zonal DES (или DDES — delayed DES) с использованием функций F1 и F2 [8, 9]. Также в расчетах использовалась низкорейнольдсовая RANS модель —  $k-\omega$  SST Ментера [10].

Подсеточная вихревая вязкость в уравнении (2) в соответствии с моделью Смагоринского определяется следующим образом:

$$\nu_{sgs} = (C_S \Delta)^2 |\bar{S}|. \quad (3)$$

Модель DES заключается в замене масштаба длины

$$l_{k-\omega} = k^{1/2} / (\beta^* \omega)$$

на

$$\tilde{l} = \min (l_{k-\omega}, C_{DES} \Delta). \quad (4)$$

Применяя модификацию (4) к модели  $k-\omega$ , единственное слагаемое в двухпараметрической модели, требующее изменения, — это диссипационное слагаемое в уравнении кинетической энергии турбулентности, а именно

$$D_{RANS}^k = \rho \beta^* k \omega = \rho k^{3/2} / l_{k-\omega}. \quad (5)$$

Заменив масштаб длины в (5), получим модель DES

$$D_{DES}^k = \rho k^{3/2} / \tilde{l}.$$

В модели zonal DES (DDES) масштаб длины подвергается модификации не только исходя из размера фильтра, но также и ориентируясь на расстояние до стенки. Таким образом,

$$D_{zonal}^k = \rho \beta^* k \omega F_{zonal},$$

$$F_{zonal} = \max \left( \frac{l_{k-\omega}}{C_{DES} \Delta} (1 - F_{SST}), 1 \right),$$

где  $F_{SST}$  может равняться F1, F2 или 0, где F1 и F2 — одноименные функции в модели турбулентности  $k-\omega$ . Если  $F_{SST} = 0$ , то модель сворачивается до оригинальной DES модели.

Таким образом, подсеточная вязкость для моделей семейства DES, основанных на  $k-\omega$  модели турбулентности, определяется следующим образом:

$$\nu_{sgs} = \frac{a_1 k}{\max(a_1 \omega, |\bar{S}| F2)}. \quad (6)$$

Для описания течения вблизи стенки выбирались низкорейнольдсовы модели, позволяющие определять характеристики течения без использования пристеночных функций, поскольку логарифмический слой (на «попадание» в который рассчитаны пристеночные функции) сильно зависит от структуры течения и годится (по мнению авторов) только для моделирования тех течений, в которых нет необходимости в точном разрешении характеристик течения вблизи стенки.

## § 2. Вычислительный алгоритм

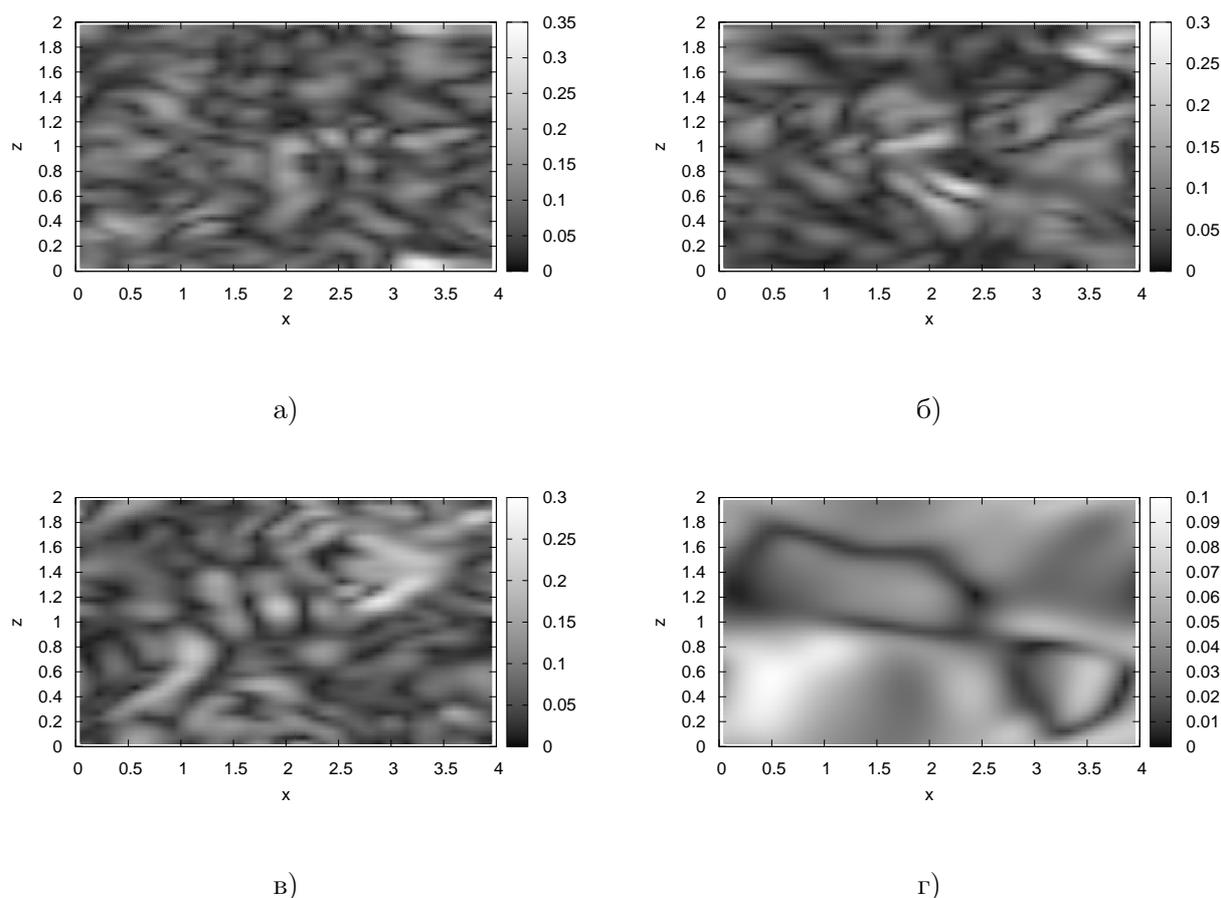
Для решения уравнений использовался открытый программный пакет OpenFOAM, основанный на методе конечных объемов [11]. Примитивные переменные располагались в центрах конечных объемов. Давление и скорость связывались с помощью выведения уравнения для давления через уравнение неразрывности (PISO метод [12]), реализованный в среде OpenFOAM Веллером. В соответствии с этим методом шаг интегрирования по времени делился на две части: шаг-предиктор, на котором по заранее известному полю давления (с предыдущего шага или начального условия) вычислялось значение скорости, и шаг-корректор, на котором высчитывалась поправка к давлению таким образом, чтобы поле скорости удовлетворяло уравнению неразрывности. Метод обладает вторым порядком аппроксимации по времени. Для исключения возможности появления «шахматного» распределения поля давления применялась методика Ри и Чоу [13]. Аппроксимация конвективных слагаемых в уравнении количества движения осуществлялась по центрально-разностной схеме второго порядка, остальные конвективные слагаемые определялись по схеме TVD Швеби [14], модифицированной Веллером. Вязкие потоки аппроксимировались со вторым порядком аппроксимации.

Алгоритм решения выглядит следующим образом. Сначала определялись основные газодинамические параметры течения (давление и скорость). Затем корректировалась подсеточная вязкость. При замыкании фильтрованной системы уравнений стандартной моделью Смагоринского  $\nu_{sgs}$  определялась по уравнению (3). При использовании моделей семейства DES, основанных на  $k-\omega$  SST модели турбулентности, решались дифференциальные уравнения относительно кинетической энергии турбулентности  $k$  и скорости диссипации  $\omega$ . Далее определялась подсеточная вязкость в соответствии с выражением (6). После этого процедура повторялась до достижения конечного времени расчета.

## § 3. Результаты тестовых расчетов

Для сравнения моделей турбулентности рассматривались две задачи: турбулентное течение на плоской пластине и развитое турбулентное течение в плоском канале. Целью проведения первого теста является необходимость сравнения численных результатов моделей с экспериментальными данными. Во втором случае основной целью являлось получение наглядной картины вихревого турбулентного течения.

**Течение в канале.** Моделировалась задача, решенная Кимом и другими с помощью DNS [16] и Виллерсом с помощью LES [17]. Сравнение производится с корреляцией Дина [18]. Задача представляет собой две бесконечные параллельные пластины, расположенные на расстоянии  $2h$  друг от друга. Моделируется развитое турбулентное течение с  $Re_\tau = 395$ . Длина и ширина расчетной области составляла  $L_x = 4\pi h$  и  $L_z = 2\pi h$ . Осреднение производилось на интервале  $50h/u_\tau$ . На параллельных стенках задавалось условие прилипания. На границах вдоль



**Рис. 1.** Распределение модуля завихренности течения в плоскости ( $y = h$ ): а — LES; б — DES; в — DDES F1; г — DDES F2

осей  $x$  и  $z$  задавались условия периодичности. Для более быстрого и менее затратного достижения развитого турбулентного течения задавалось первоначальное распределение скорости в соответствии с Виллерсом [17].

Из сравнения полученных мгновенных распределений модулей завихренности (рис. 1) можно сделать вывод, что из всех исследуемых моделей, созданных для проведения расчетов вблизи стенки, только DES и DDES F1 предсказывают схожие результаты с немодифицированной LES моделью Смагоринского (которая в данном случае принимается за эталонную). Функция, используемая в модели DDES F2 для принудительного «включения» RANS модели вблизи стенки, задерживает переключение с RANS на LES при удалении от стенки намного дольше, чем F1 в DDES F1. В данной постановке этого оказалось достаточно, чтобы погасить высокочастотные турбулентные пульсации, пропускаемые фильтром.

Коэффициенты сопротивления по различным моделям приведены в таблице 1. Несмотря на то, что модель DDES F2 оказалась неподходящей для вихреразрешающего моделирования, ее RANS модель в пристеночной области по-прежнему предсказывает согласование коэффициента сопротивления (следовательно, и напряжения трения на стенке) с моделями DES, DDES F1 и корреляцией Дина.

**Течение на пластине.** Для этой тестовой задачи существует большой ряд эмпирических данных для области развитого турбулентного режима течения для проведения сравнения с расчетом [15]. Таким образом, начало и конец расчетной области вдоль пластины являлись  $Re_{\Theta} = 1000$  и  $1500$  соответственно, где  $\Theta$  — толщина потери импульса, что аналогично  $Re_x = 414820$  и

Модель	Формула Дина	DNS	LES	DES	DDES F1	DDES F2	$k-\omega$ RANS
Cf	0.00679	0.00696	0.00334	0.00599	0.00623	0.00613	0.0060
$Cf/Cf_0$	1.0	1.02	0.49	0.88	0.92	0.90	0.88

Таблица 1. Коэффициенты сопротивления течения на пластине

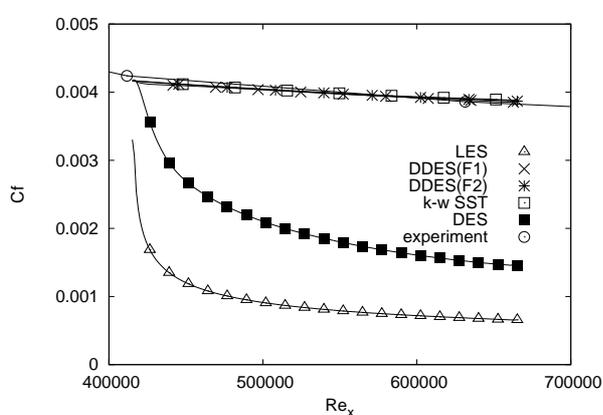
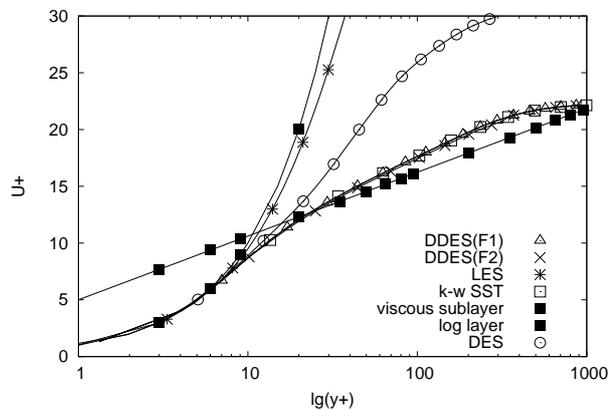


Рис. 2. Распределение коэффициента сопротивления по длине пластины

Рис. 3. Зависимость безразмерной скорости от безразмерного расстояния до стенки в сечении  $Re_x = 1e5$ 

665723 соответственно. Остальные размеры расчетной области выбирались на основе толщины пограничного слоя в начале рассчитываемого участка ( $\delta_0$ ). Высота и ширина составляли 4 и 3  $\delta_0$  соответственно. Расчетная область поделена на 200, 60 и 60 ячеек в направлениях вдоль пластины ( $x$ ), по высоте ( $y$ ) и по ширине ( $z$ ) соответственно. Таким образом, безразмерные длины составили  $\Delta y_0 = 1$ ,  $\Delta y_{max} = 50$ ,  $\Delta x = 20.5$  и  $\Delta z = 10$ . Осреднение производилось на интервале времени  $1000\delta_0/U_\infty$ , начиная с момента времени  $50\delta_0/U_\infty$ . На входе расчетной области задавались параметры, полученные из RANS-расчета, с созданием искусственного «шума». На пластине задавалось условие прилипания, на верхней поверхности — нулевой градиент для всех параметров потока, на выходной границе фиксировалось давление, для остальных параметров задавался нулевой градиент. Кроме того, для исключения сильного влияния выходной границы на параметры в расчетной области выходная граница была удалена от расчетной области на 3 ячейки с постепенным увеличением размера ячейки в направлении оси  $x$ . На границах по оси  $z$  задавались условия периодичности.

Распределение коэффициента сопротивления, полученное с помощью моделей DDES F1, DDES F2 и  $k-\omega$  SST RANS, хорошо согласуется с экспериментальными данными (рис. 2). Модели DES и LES, не имеющие в своем распоряжении инструментов, позволяющих принудительно, несмотря на ширину фильтра, понижать масштаб длины вблизи стенки, предсказали совершенно неверное распределение коэффициента сопротивления. При сравнении зависимости распределения безразмерной скорости от безразмерного расстояния до стенки (рис. 3) также видно, что модели DDES F1, DDES F2 и  $k-\omega$  SST RANS проявляют аналогичный характер.

Стоит отметить тот факт, что, правильно предсказав зависимость  $u^+(y^+)$  в вязком подслое, расчеты по LES и DES дали неверное распределение коэффициента сопротивления. Действительно, коэффициент сопротивления, зависящий от напряжения трения на стенке, рассчитывается как  $\tau_w = \mu \cdot (\partial u / \partial y)_{y=0}$ , а  $(\partial u / \partial y)_{y=0}$  неравно  $(\partial u^+ / \partial y^+)_{y=0}$ , а только пропорционально. Таким образом, попадание в вязкий подслой еще не гарантирует правильного предсказания моделью касательного напряжения на стенке.

## Заключение

В результате проведенных расчетов получено сравнение параметров потока, полученных при использовании турбулентных моделей  $k-\omega$  SST, LES, DES, zonal DES (DDES) на плоской пластине и в канале.

На основании полученных результатов проведенных численных исследований можно сделать заключение о том, что наилучшим образом проявила себя модель zonal DES (DDES) с использованием функции F1, предсказавшая количественное совпадение коэффициента сопротивления на пластине с экспериментом, а также количественное и качественное распределение модуля завихренности при течении в канале при сравнении с LES моделью.

Дальнейшее развитие разработанного подхода к моделированию турбулентных течений рассмотренной конфигурации направлено, в частности, на решение следующей задачи. Так, при рассмотрении турбулентных течений реагирующих сред, наиболее существенным является влияние взаимодействия химической кинетики реакций и вихревой структуры потока. С другой стороны, для решения задачи об автомодельном распространении пламени по поверхности твердого горючего материала в сопряженной постановке таким же важным является корректный учет взаимодействия процессов газофазного горения и термического разложения горючего материала, для чего необходимо достаточно точно рассчитать характеристики теплопереноса на поверхности. Для этого необходимо использовать модели, позволяющие адекватно описывать как параметры течения в ядре потока, так и локальные характеристики переноса в пристеночной области. Из результатов представленных выше расчетов следует, что очевидным кандидатом на роль наиболее подходящей модели турбулентности является модель zonal DES (DDES), основанная на  $k-\omega$  SST модели турбулентности, с функцией F1.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Волков К.Н., Емельянов В.Н. Моделирование крупных вихрей в расчетах турбулентных течений. М.: Физматлит, 2008. 368 с.
2. Волков К.Н., Емельянов В.Н. Метод моделирования крупных вихрей в приложении к проблемам внутренней газодинамики РДТТ // Химическая физика и мезоскопия. 2006. Т. 8. № 2. С. 198–208.
3. Булгаков В.К., Липанов А.М., Вилюнов В.Н., Карпов А.И. О механизме отрицательной эрозии при горении твердых топлив // Физика горения и взрыва. 1989. Т. 25. № 4. С. 32–35.
4. Булгаков В.К., Карпов А.И., Липанов А.М. Влияние конфигурации обдуваемого потока на скорость горения твердого топлива // Доклады АН СССР. 1990. Т. 312. № 2. С. 391–393.
5. Шумихин А.А., Карпов А.И., Корепанов М.А., Новожилов В.Б. Численное исследование воздействия тонкораспыленной воды на турбулентное диффузионное пламя // Химическая физика и мезоскопия. 2012. Т. 14. № 3. С. 391–400.
6. Strelets M. Detached-eddy simulation of massively separated flows // 39th AIAA Aerosp. Sci.: Proc. Meet. and Exhib. Reno, 2001. № AIAA 2001–0879. P. 1–18.
7. Davidson L., Peng S.-H. A hybrid LES-RANS model based on a one-equation SGS model and a two-equation  $k-\omega$  model // Turb. and Shear Flow Phenomena: Proc. Int. Symp. KTH. Stockholm, 2001. Vol. 2. P. 175–180.
8. Menter F.R., Kuntz M., Langtry R. Ten years of industrial experience with the SST turbulence model // Turb., Heat and Mass Transf. 2003. Vol. 4. P. 625–632.
9. Spalart P.R., Deck S., Shur M.L., Squires K.D., Strelets M.Kh., Travin A. A new version of detached eddy simulation, resistant to ambiguous grid densities // Theor. Comp. Fluid Dyn. 2006. Vol. 20. № 3. P. 181–195.
10. Menter F.R. Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications // AIAA J. 1994. Vol. 32. № 8. P. 1598–1605.
11. Jasak H. Error analysis and estimation for the finite volume method with applications to fluid flows: diss. . . Doctor of Philosophy / Imperial College. London, 1996. 394 p.
12. Issa R.I. Solution of the implicitly discretised fluid flow equations by operator-splitting // J. Comp. Phys. 1985. Vol. 62. P. 40–65.
13. Karrhorm F.P. Numerical modelling of diesel spray injection, turbulence interaction and combustion: diss. . . Doctor of Philosophy / Chalmers University of Technology. Goteborg, 2008. 86 p.

14. Sweby P.K. High resolution schemes using flux limiters for hyperbolic conservation laws // *SIAM J. on Num. Analysis*. 1984. Vol. 21. № 5. P. 995–1011.
15. Wieghardt K., Tillmann W. On the turbulent friction layer for rising pressure. NASA TM-1314, 1951. 47 p.
16. Moser R.D., Kim J., Mansour N.N. Direct numerical simulation of turbulent channel flow up to  $Re_\tau=590$  // *Phys. of Fluids*. 1999. Vol. 11. № 4. P. 943–945.
17. Villiers E. The potential of large eddy simulation for the modelling of wall bounded flows: diss. . . . Doctor of Philosophy / Imperial College. London, 2006. 351 p.
18. Kim J., Moin P., Moser R. Turbulence statistics in fully developed channel flow at low Reynolds number // *J. Fluid Mech*. 1987. Vol. 177. P. 133–166.

Поступила в редакцию 15.09.2012

Карпов Александр Иванович, д. ф.-м. н., зав. лаб. физико-химической механики, Институт механики УрО РАН, 426067, Россия, г. Ижевск, ул. Т. Барамзиной, 34; профессор, кафедра вычислительной механики, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.  
E-mail: karpov@udman.ru

Шаклеин Артем Андреевич, аспирант, Институт механики УрО РАН, 426067, Россия, г. Ижевск, ул. Т. Барамзиной, 34; ассистент, кафедра вычислительной механики, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.  
E-mail: mx.orgx@gmail.com

*A. A. Shaklein, A. I. Karpov*

### Large-eddy simulation of wall-bounded turbulent flows

*Keywords:* large-eddy simulation, wall-bounded turbulent flows, detached eddy simulation.

Mathematical Subject Classifications: 76F40, 76F65, 65N08

Various approaches to the numerical simulation of wall-bounded turbulent flows have been considered. Turbulence models have been assembled to allow equal proper description of the core-flow vortex parameters as well as local friction coefficient in near-wall domain. Different modifications and combinations of turbulence models have been applied, namely, RANS-based low-Reynolds models, standard LES approach and modified DES models. Testing calculations have been carried out for the flat plate flow and duct flow. The comparison of achieved results with known experimental and numerical data has been shown through the local friction coefficient, vorticity magnitude and distribution of velocity versus distance to the wall.

### REFERENCES

1. Volkov K.N., Emel'yanov V.N. *Modelirovanie krupnykh vikhrei v raschetakh turbulentnykh techenii* (Large eddy simulation in turbulent flows modelling), Moscow: Fizmatlib, 2008, 368 p.
2. Volkov K.N., Emel'yanov V.N. The large eddy simulation approach applied to internal gas dynamics problems of solid propellant engines, *Khim. Fizika i Mezoskop.*, 2006, vol. 8, no. 2, pp. 198–208.
3. Bulgakov V.K., Lipanov A.M., Vilyunov V.N., Karpov A.I. The negative-erosion mechanism in solid-fuel combustion, *Fizika goreniya i vzryva*, 1989, vol. 25, no. 4, pp. 32–35.
4. Bulgakov V.K., Karpov A.I., Lipanov A.M. Influence of blowing flow configuration on solid propellant combustion rate, *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 1990, vol. 312, no. 2, pp. 391–393.
5. Shumikhin A.A., Karpov A.I., Korepanov M.A., Novozhilov V.B. Numerical simulation of fine-dispersed water influence on turbulent diffusion flame, *Khim. Fizika i Mezoskop.*, 2012, vol. 14, no. 3, pp. 391–400.
6. Strelets M. Detached-eddy simulation of massively separated flows, *39th AIAA Aerosp. Sci.: Proc. Meet. and Exhib.*, Reno, 2001, no. AIAA 2001–0879, pp. 1–18.
7. Davidson L., Peng S.-H. A hybrid LES-RANS model based on a one-equation SGS model and a two-equation  $k-\omega$  model, *Turb. and Shear Flow Phenomena: Proc. Int. Symp.*, KTH, Stockholm, 2001, vol. 2, pp. 175–180.

8. Menter F.R., Kuntz M., Langtry R. Ten years of industrial experience with the SST turbulence model, *Turb., Heat and Mass Transf.*, 2003, vol. 4, pp. 625–632.
9. Spalart P.R., Deck S., Shur M.L., Squires K.D., Strelets M.Kh., Travin A. A new version of detached eddy simulation, resistant to ambiguous grid densities, *Theor. Comp. Fluid Dyn.*, 2006, vol. 20, no. 3, pp. 181–195.
10. Menter F.R. Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications, *AIAA J.*, 1994, vol. 32, no. 8, pp. 1598–1605.
11. Jasak H. Error analysis and estimation for the finite volume method with applications to fluid flows, *Ph. D. Dissertation*, Imperial College, London, 1996, 394 p.
12. Issa R.I. Solution of the implicitly discretised fluid flow equations by operator-splitting, *J. Comp. Phys.*, 1985, vol. 62, pp. 40–65.
13. Karrhorm F.P. Numerical modelling of diesel spray injection, turbulence interaction and combustion, *Ph. D. Dissertation*, Chalmers University of Technology, Goteborg, 2008, 86 p.
14. Sweby P.K. High resolution schemes using flux limiters for hyperbolic conservation laws, *SIAM J. on Num. Analysis*, 1984, vol. 21, no. 5, pp. 995–1011.
15. Wieghardt K., Tillmann W. On the turbulent friction layer for rising pressure, *NACA TM-1314*, 1951, 47 p.
16. Moser R.D., Kim J., Mansour N.N. Direct numerical simulation of turbulent channel flow up to  $Re_\tau = 590$ , *Phys. of Fluids.*, 1999, vol. 11, no. 4, pp. 943–945.
17. Villiers E. The potential of large eddy simulation for the modelling of wall bounded flows, *Ph. D. Dissertation*, Imperial College, London, 2006, 351 p.
18. Kim J., Moin P., Moser R. Turbulence statistics in fully developed channel flow at low Reynolds number, *J. Fluid Mech.*, 1987, vol. 177, pp. 133–166.

Received 15.09.2012

Karpov Alexandr Ivanovich, Doctor of Physics and Mathematics, Head of the Laboratory of Physical and Chemical Mechanics, Institute of Mechanics of the Ural Branch of Russian Academy of Sciences, ul. T. Baramzinoi, 34, Izhevsk, 426067, Russia;  
Professor, Department of Computational Mechanics, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.  
E-mail: karpov@udman.ru

Shaklein Artem Andreevich, Post-graduate student, Institute of Mechanics of the Ural Branch of Russian Academy of Sciences, ul. T. Baramzinoi, 34, Izhevsk, 426067, Russia;  
Assistant Lecturer, Department of Computational Mechanics, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.  
E-mail: mx.oryx@gmail.com