Памяти Евгения Леонидовича Тонкова посвящается

УДК 517.518.6

© ***Л. И. Данилов***

РЕКУРРЕНТНЫЕ И ПОЧТИ РЕКУРРЕНТНЫЕ МНОГОЗНАЧНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ И ИХ СЕЧЕНИЯ. III [1]

Пусть (U,ρ) — полное метрическое пространство, $\mathcal{R}^p(\mathbb{R},U)$, $p\geqslant 1$, и $\mathcal{R}(\mathbb{R},U)$ — пространства (сильно) измеримых функций $f:\mathbb{R}\to U$, преобразования Бохнера $\mathbb{R}\ni t\mapsto f_l^B(t;\cdot)=f(t+\cdot)$ которых являются рекуррентными функциями со значениями в метрических пространствах $L^p([-l,l],U)$ и $L^1([-l,l],(U,\rho'))$, где $l>0$ и (U,ρ') — полное метрическое пространство с метрикой $\rho'(x,y)=\min\{1,\rho(x,y)\}$, $x,\,y\in U$. Аналогично определяются пространства $\mathcal{R}^p(\mathbb{R},\mathrm{cl}_b\,U)$ и $\mathcal{R}(\mathbb{R},\mathrm{cl}_b\,U)$ функций (многозначных отображений) $F:\mathbb{R}\to\mathrm{cl}_b\,U$ со значениями в полном метрическом пространстве $(\mathrm{cl}_b\,U,\mathrm{dist})$ непустых замкнутых ограниченных подмножеств метрического пространства (U,ρ) с метрикой Хаусдорфа dist (при определении многозначных отображений $F\in\mathcal{R}(\mathbb{R},\mathrm{cl}_b\,U)$ рассматривается также метрика $\mathrm{dist}'(X,Y)=\min\{1,\mathrm{dist}(X,Y)\}$, $X,\,Y\in\mathrm{cl}_b\,U$). Доказано существование сечений $f\in\mathcal{R}(\mathbb{R},U)$ (соответственно $f\in\mathcal{R}^p(\mathbb{R},U)$) многозначных отображений $F\in\mathcal{R}(\mathbb{R},\mathrm{cl}_b\,U)$ (соответственно $F\in\mathcal{R}^p(\mathbb{R},\mathrm{cl}_b\,U)$), для которых множества почти периодов подчинены множествам почти периодов многозначных отображений F. Для функций $g\in\mathcal{R}(\mathbb{R},U)$ приведены условия существования сечений $f\in\mathcal{R}(\mathbb{R},U)$ и $f\in\mathcal{R}^p(\mathbb{R},U)$, для которых $\rho(f(t),g(t))=\rho(g(t),F(t))$ при п.в. $t\in\mathbb{R}$. В предположении, что для любого $\varepsilon>0$ существует относительно плотное множество общих ε-почти периодов функции g и многозначного отображения F, также доказано существование сечений $f\in\mathcal{R}(\mathbb{R},U)$ таких, что $\rho(f(t),g(t))\leqslant\rho(g(t),F(t))+\eta(\rho(g(t),F(t)))$ при п.в. $t\in\mathbb{R}$, где $\eta:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ — произвольная неубывающая функция, для которой $\eta(0)=0$ и $\eta(\xi)>0$ при всех $\xi>0$, при этом $f\in\mathcal{R}^p(\mathbb{R},U)$ в случае $F\in\mathcal{R}^p(\mathbb{R},\mathrm{cl}_b\,U)$. При доказательстве используется равномерная аппроксимация функций $f\in\mathcal{R}(\mathbb{R},U)$ элементарными функциями из пространства $\mathcal{R}(\mathbb{R},U)$, множества почти периодов которых подчинены множествам почти периодов функций f.

Ключевые слова: рекуррентная функция, сечение, многозначное отображение.

Введение

Настоящая работа посвящена вопросу о существовании рекуррентных сечений многозначных рекуррентных отображений. Она является продолжением работ [1, 2] и [3]. Пусть $\mathcal{CR}(\mathbb{R},U)$ — пространство рекуррентных функций $f:\mathbb{R}\to U$ со значениями в полном метрическом пространстве (U,ρ), $\mathcal{CR}(\mathbb{R},\mathrm{cl}_b\,U)$ — пространство многозначных рекуррентных отображений со значениями в метрическом пространстве $\mathrm{cl}_b\,U$ непустых замкнутых ограниченных подмножеств метрического пространства U с метрикой Хаусдорфа dist. Рассматриваются пространства $\mathcal{R}^p(\mathbb{R},U)$, $p\geqslant 1$, и $\mathcal{R}(\mathbb{R},U)$ (сильно) измеримых функций $f:\mathbb{R}\to U$, преобразования Бохнера $f_l^B(\cdot;\cdot)$ которых при всех $l>0$ принадлежат $\mathcal{CR}(\mathbb{R},L^p([-l,l],U))$ и $\mathcal{CR}(\mathbb{R},L^1([-l,l],(U,\rho')))$ соответственно, где ρ' — метрика на множестве U, для которой сходимость функций в пространстве $L^1([-l,l],(U,\rho'))$ эквивалентна сходимости функций по мере Лебега на отрезке $[-l,l]$. Таким же образом определяются пространства $\mathcal{R}^p(\mathbb{R},\mathrm{cl}_b\,U)$ и $\mathcal{R}(\mathbb{R},\mathrm{cl}_b\,U)$. Доказывается существование сечений $f\in\mathcal{R}(\mathbb{R},U)$ (соответственно $f\in\mathcal{R}^p(\mathbb{R},U)$) многозначных отображений $F\in\mathcal{R}(\mathbb{R},\mathrm{cl}_b\,U)$ (соответственно $F\in\mathcal{R}^p(\mathbb{R},\mathrm{cl}_b\,U)$) таких, что множества почти периодов сечений f подчинены множествам почти периодов многозначных отображений F. Для заданной функции $g\in\mathcal{R}(\mathbb{R},U)$ приведены условия существования сечений $f\in\mathcal{R}(\mathbb{R},U)$ и $f\in\mathcal{R}^p(\mathbb{R},U)$, для которых $\rho(f(t),g(t))=\rho(g(t),F(t))$ п.в. и $\rho(f(t),g(t))\leqslant\rho(g(t),F(t))+\eta(\rho(g(t),F(t)))$ п.в., где $\eta:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ — произвольная

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 12–01–00195).

неубывающая функция такая, что $\eta(0) = 0$ и $\eta(\xi) > 0$ при всех $\xi > 0$. Следствием полученных результатов является обобщение теоремы Лузина для рекуррентных функций (см. также [3]). В статье используется равномерная аппроксимация функций $f \in \mathcal{R}(\mathbb{R}, U)$ элементарными функциями из $\mathcal{R}(\mathbb{R}, U)$, множества почти периодов которых подчинены множествам почти периодов функций f. Более слабый вариант утверждения о равномерной аппроксимации был доказан в [1]. Равномерная аппроксимация функций $f : \mathbb{R} \to U$, принадлежащих разным классам, элементарными функциями из этих классов существенно используется при доказательстве существования сечений многозначных отображений, когда сечения и многозначные отображения принадлежат рассматриваемым классам функций (и многозначных отображений). Таким способом ранее было доказано существование сечений многозначных отображений для классов почти M-рекуррентных функций [1, 3], почти периодических (п.п.) по Степанову функций [4], п.п. по Вейлю функций [5], п.п. по Безиковичу функций [6] и обобщенных п.п. по Вейлю функций [7]. Существование п.п. по Степанову сечений многозначных п.п. по Степанову отображений было впервые доказано в [8] на основе результатов Фришковского [9]. (В [10] был предложен еще один вариант доказательства существования п.п. по Степанову сечений, использующий «овыпукливание» задачи и теорему Майкла [11].)

В § 1 приведены определения, сформулированы основные результаты работы и доказаны некоторые утверждения, используемые в дальнейшем. В § 2 рассматриваются элементарные рекуррентные функции. В § 3 доказывается теорема 15 из § 1, в § 4 — теоремы 6, 7 и 8, а в § 5 — теорема 11.

§ 1. Определения, обозначения и основные утверждения

Пусть (U, ρ) — полное метрическое пространство. Через $\overline{X}$ обозначается замыкание множества $X \subseteq U$. Множество $X \subseteq U$ *предкомпактно*, если $\overline{X}$ — компактное множество. Пусть mes — мера Лебега на $\mathbb{R}$. Функция $f : \mathbb{R} \to U$ называется *элементарной*, если существуют попарно непересекающиеся измеримые по Лебегу множества $T_j \subseteq \mathbb{R}$ и точки $x_j \in U$, $j \in \mathbb{N}$, такие, что $\operatorname{mes} \mathbb{R} \setminus \bigcup\limits_j T_j = 0$ и $f(t) = x_j$ при $t \in T_j$. Формально такая функция будет обозначаться через

$$\sum_j x_j \chi_{T_j}(\cdot), \tag{1.1}$$

где χ_T — характеристическая функция множества $T \subseteq \mathbb{R}$. Так как в (1.1) допускаются пустые множества, то сумма (1.1) может быть конечной. Также будет использоваться формальное обозначение

$$\sum_j f_j(\cdot)\chi_{T_j}(\cdot) \tag{1.2}$$

для функции, совпадающей с (произвольными) функциями $f_j : \mathbb{R} \to U$ на множествах T_j, $j \in \mathbb{N}$. Точки x_j, функции f_j и множества T_j в (1.1) и (1.2) будут в дальнейшем нумероваться также с помощью нескольких индексов.

Функция $f : \mathbb{R} \to U$ *сильно измерима*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует элементарная функция $f_\varepsilon : \mathbb{R} \to U$ такая, что $\rho(f(t), f_\varepsilon(t)) < \varepsilon$ при почти всех (*п.в.*) $t \in \mathbb{R}$. Для непустого измеримого (по Лебегу) множества $T \subseteq \mathbb{R}$ функция $f : T \to U$ сильно измерима, если она является сужением некоторой сильно измеримой функции $\widetilde{f} : \mathbb{R} \to U$ на множество T. Пусть $M(T, U)$ — множество сильно измеримых функций $f : T \to U$, при этом функции, совпадающие при п.в. $t \in T$, отождествляются (и могут не определяться на некоторых множествах $\widetilde{T} \subseteq T$, для которых $\operatorname{mes} \widetilde{T} = 0$).

Для метрических пространств U_1, U_2 через $C(U_1, U_2)$ (соответственно $C_b(U_1, U_2)$) обозначается множество непрерывных (соответственно ограниченных непрерывных) функций $\mathcal{F} : U_1 \to U_2$. Пусть $L^\infty(\mathbb{R}, U)$ — метрическое пространство сильно измеримых и в существенном ограниченных функций $f : \mathbb{R} \to U$ с метрикой

$$D^{(\rho)}_\infty(f, g) = \operatorname*{ess\,sup}_{t \in \mathbb{R}} \rho(f(t), g(t));$$

$C_b(\mathbb{R},U)\subseteq L^\infty(\mathbb{R},U)$.

На множестве $C(\mathbb{R},U)$ определим метрику

$$d_C^{(\rho)}(f,g)\,=\,\sum_{l=1}^{+\infty}2^{-l}\,\frac{\max\limits_{\tau\in[-l,l]}\rho(f(\tau),g(\tau))}{1+\max\limits_{\tau\in[-l,l]}\rho(f(\tau),g(\tau))}\,.$$

Метрическое пространство $(C(\mathbb{R},U),d_C^{(\rho)})$ полное. На метрическом пространстве $(C(\mathbb{R},U),d_C^{(\rho)})$ рассматривается динамическая система сдвигов: для каждой функции $f\in C(\mathbb{R},U)$ задается движение $\mathbb{R}\ni t\mapsto f(\cdot+t)$. Обозначим через $\mathcal{C}\mathcal{AR}(\mathbb{R},U)$ и $\mathcal{CR}(\mathbb{R},U)$ множества функций $f\in C(\mathbb{R},U)$, для которых движения $\mathbb{R}\ni t\mapsto f(\cdot+t)$ почти рекуррентны и, соответственно, рекуррентны [12,13]. Для функции $f\in C(\mathbb{R},U)$ обозначим

$$\widetilde{\Gamma}_C(f;\varepsilon)\,=\,\{t\in\mathbb{R}:d_C^{(\rho)}(f(\cdot),f(\cdot+t))<\varepsilon\},\quad \varepsilon>0.$$

Множество $T\subseteq\mathbb{R}$ называется *относительно плотным*, если существует число $a>0$ такое, что $T\cap[t,t+a]\neq\varnothing$ для всех $t\in\mathbb{R}$. Совокупность относительно плотных множеств обозначается через $\mathcal{S}_{\rm rd}$.

Функция $f\in C(\mathbb{R},U)$ принадлежит множеству $\mathcal{C}\mathcal{AR}(\mathbb{R},U)$, если $\widetilde{\Gamma}_C(f;\varepsilon)\in\mathcal{S}_{\rm rd}$ для всех $\varepsilon>0$ [13], при этом $f\in\mathcal{C}\mathcal{AR}(\mathbb{R},U)$ тогда и только тогда, когда для всех l, $\varepsilon>0$

$$\Gamma_C(f;l.\varepsilon)\,\doteq\,\{t\in\mathbb{R}:\max_{\tau\in[-l,l]}\rho(f(\tau),f(\tau+t))<\varepsilon\}\,\in\,\mathcal{S}_{\rm rd}.$$

Пусть $C^{\,\rm comp}(\mathbb{R},U)$ — множество функций $f\in C(\mathbb{R},U)$, для которых движения $\mathbb{R}\ni t\mapsto$ $\mapsto f(\cdot+t)$ устойчивы по Лагранжу [12]. Функция $f\in C(\mathbb{R},U)$ принадлежит $C^{\,\rm comp}(\mathbb{R},U)$ тогда и только тогда, когда она равномерно непрерывна и $\{f(t):t\in\mathbb{R}\}$ — предкомпактное множество в (U,ρ). Справедливо равенство

$$\mathcal{CR}(\mathbb{R},U)\,=\,\mathcal{C}\mathcal{AR}(\mathbb{R},U)\bigcap C^{\,\rm comp}(\mathbb{R},U).$$

Пусть $L^p([-l,l],U)$, $p\geqslant1$, $l>0$, — метрическое пространство сильно измеримых функций $f:[-l,l]\to U$, для которых

$$\int_{-l}^{l}\rho^p(f(\tau),x_0)\,d\tau\,<\,+\infty \tag{1.3}$$

для некоторого (и, следовательно, для всех) $x_0\in U$, с метрикой

$$D_{p,l}^{(\rho)}(f,g)\,=\,\biggl(\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}\rho^p(f(\tau),g(\tau))\,d\tau\biggr)^{\frac1p};$$

$L^p_{\rm loc}(\mathbb{R},U)$, $p\geqslant1$, — множество сильно измеримых функций $f:\mathbb{R}\to U$ таких, что неравенство (1.3) выполняется для любого $l>0$.

На множестве $L^p_{\rm loc}(\mathbb{R},U)$ определим метрику

$$d_p^{(\rho)}(f,g)\,=\,\sum_{l=1}^{+\infty}2^{-l}\,\frac{D_{p,l}^{(\rho)}(f(\cdot|_{[-l,l]}),g(\cdot|_{[-l,l]}))}{1+D_{p,l}^{(\rho)}(f(\cdot|_{[-l,l]}),g(\cdot|_{[-l,l]}))}\,.$$

Метрическое пространство $(L^p_{\rm loc}(\mathbb{R},U),d_p^{(\rho)})$ полное. На метрическом пространстве $(L^p_{\rm loc}(\mathbb{R},U),d_p^{(\rho)})$ также рассматривается динамическая система сдвигов, для которой каждой функции $f\in L^p_{\rm loc}(\mathbb{R},U)$ соответствует движение $\mathbb{R}\ni t\mapsto f(\cdot+t)$. Пусть $\mathcal{AR}^p(\mathbb{R},U)$ и $\mathcal{R}^p(\mathbb{R},U)$ —

множества функций $f \in L^p_{\rm loc}(\mathbb{R},U)$, для которых движения $\mathbb{R} \ni t \mapsto f(\cdot + t)$ соответственно почти рекуррентны и рекуррентны (в [1] функции из $\mathcal{A}R^p(\mathbb{R},U)$ и $\mathcal{R}^p(\mathbb{R},U)$ были названы почти $L^p_{\rm loc}$-рекуррентными и $L^p_{\rm loc}$-рекуррентными). Для функции $f \in L^p_{\rm loc}(\mathbb{R},U)$ обозначим

$$\widetilde{\Gamma}_p(f;\varepsilon) \, = \, \{t \in \mathbb{R} : d^{(\rho)}_p(f(\cdot), f(\cdot + t)) < \varepsilon\}, \quad \varepsilon > 0.$$

Функция $f \in L^p_{\rm loc}(\mathbb{R},U)$ принадлежит $\mathcal{A}R^p(\mathbb{R},U)$, если $\widetilde{\Gamma}_p(f;\varepsilon) \in \mathcal{S}_{\rm rd}$ для всех $\varepsilon > 0$, при этом $f \in \mathcal{A}R^p(\mathbb{R},U)$ тогда и только тогда, когда для всех $l,\,\varepsilon > 0$

$$\Gamma_p(f;l.\varepsilon) \, \doteq \, \{t \in \mathbb{R} : D^{(\rho)}_{p,\,l}(f(\cdot|_{[-l,l]}), f(\cdot|_{[-l,l]} + t)) < \varepsilon\} \, \in \, \mathcal{S}_{\rm rd}.$$

Пусть $L^{p,\,{\rm comp}}_{\rm loc}(\mathbb{R},U)$ — множество функций $f \in L^p_{\rm loc}(\mathbb{R},U)$, для которых движения $\mathbb{R} \ni t \mapsto$ $\mapsto f(\cdot + t)$ устойчивы по Лагранжу;

$$\mathcal{R}^p(\mathbb{R},U) \, = \, \mathcal{A}R^p(\mathbb{R},U) \bigcap L^{p,\,{\rm comp}}_{\rm loc}(\mathbb{R},U).$$

Для всех $l > 0$ определим *преобразование Бохнера*, ставящее в соответствие функциям $f \in M(\mathbb{R},U)$ функции

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto f^B_l(t;\cdot) \in M([-l,l],U), \tag{1.4}$$

для которых $f^B_l(t;\tau) = f(t+\tau)$, $\tau \in [-l,l]$, $t \in \mathbb{R}$.

Функция $f \in L^p_{\rm loc}(\mathbb{R},U)$ принадлежит $L^{p,\,{\rm comp}}_{\rm loc}(\mathbb{R},U)$, $\mathcal{A}R^p(\mathbb{R},U)$ или $\mathcal{R}^p(\mathbb{R},U)$, $p \geqslant 1$, тогда и только тогда, когда для некоторого (и, следовательно, для всех) $l > 0$ преобразование Бохнера $f^B_l(\cdot;\cdot)$ принадлежит $C^{\,\rm comp}(\mathbb{R}, L^p([-l,l],U))$, $\mathcal{C}AR\,(\mathbb{R}, L^p([-l,l],U))$ или $\mathcal{C}R\,(\mathbb{R}, L^p([-l,l],U))$ соответственно.

Справедливы вложения

$$\mathcal{C}AR\,(\mathbb{R},U) \, \subseteq \, \mathcal{A}R^{p_2}(\mathbb{R},U) \, \subseteq \, \mathcal{A}R^{p_1}(\mathbb{R},U),$$

$$\mathcal{C}R\,(\mathbb{R},U) \, \subseteq \, \mathcal{R}^{p_2}(\mathbb{R},U) \, \subseteq \, \mathcal{R}^{p_1}(\mathbb{R},U), \quad 1 \leqslant p_1 \leqslant p_2\,.$$

Если $f \in \mathcal{C}AR\,(\mathbb{R},U)$, то $\widetilde{\Gamma}_C(f;\varepsilon) \subseteq \widetilde{\Gamma}_p(f;\varepsilon)$ и $\Gamma_C(f;l,\varepsilon) \subseteq \Gamma_p(f;l,\varepsilon)$ для всех $l,\,\varepsilon > 0$ и $p \geqslant 1$. Если $f \in \mathcal{A}R^{p_2}(\mathbb{R},U)$, то $\widetilde{\Gamma}_{p_2}(f;\varepsilon) \subseteq \widetilde{\Gamma}_{p_1}(f;\varepsilon)$ и $\Gamma_{p_2}(f;l,\varepsilon) \subseteq \Gamma_{p_1}(f;l,\varepsilon)$ для всех $l,\,\varepsilon > 0$ и при $1 \leqslant p_1 \leqslant p_2\,$.

На множестве U определим также метрику

$$\rho'(x,y) \, = \, \min\{1, \rho(x,y)\}, \quad x,\,y \in U.$$

Метрическое пространство (U,ρ') (как и пространство (U,ρ)) полное. Совокупности замкнутых и компактных подмножеств метрического пространства (U,ρ) не меняются при переходе к метрике ρ'.

На множестве $M(\mathbb{R},U) = M(\mathbb{R},(U,\rho'))$ определяется метрика $d^{(\rho)}(f,g) = d^{(\rho')}_1(f,g)$. Метрическое пространство $(M(\mathbb{R},U), d^{(\rho)})$ полное и является фазовым пространством динамической системы сдвигов: для каждой функции $f \in M(\mathbb{R},U)$ задается движение $\mathbb{R} \ni t \mapsto f(\cdot + t)$. Множества функций $f \in M(\mathbb{R},U)$, для которых движения $\mathbb{R} \ni t \mapsto f(\cdot + t)$ почти рекуррентны и рекуррентны, обозначим соответственно через $\mathcal{A}R\,(\mathbb{R},U)$ и $\mathcal{R}\,(\mathbb{R},U)$ (в [1] функции из $\mathcal{A}R\,(\mathbb{R},U)$ были названы почти M-рекуррентными, а функции из $\mathcal{R}\,(\mathbb{R},U)$ — M-рекуррентными); $\mathcal{A}R\,(\mathbb{R},U) = \mathcal{A}R^1(\mathbb{R},(U,\rho'))$, $\mathcal{R}\,(\mathbb{R},U) = \mathcal{R}^1(\mathbb{R},(U,\rho'))$. Для всех $f \in M(\mathbb{R},U)$ и $\varepsilon > 0$ обозначим

$$\widetilde{\Gamma}(f;\varepsilon) \, = \, \{t \in \mathbb{R} : d^{(\rho)}(f(\cdot), f(\cdot + t)) < \varepsilon\}.$$

(Множество $\widetilde{\Gamma}(f;\varepsilon)$ является множеством *ε-почти периодов* функции $f \in M(\mathbb{R},U)$.) Функция $f \in M(\mathbb{R},U)$ принадлежит $\mathcal{A}R\,(\mathbb{R},U)$, если $\widetilde{\Gamma}(f;\varepsilon) \in \mathcal{S}_{\rm rd}$ для всех $\varepsilon > 0$, при этом $f \in \mathcal{A}R\,(\mathbb{R},U)$ тогда и только тогда, когда для всех $l,\,\varepsilon,\,\delta > 0$

$$\Gamma(f;l,\varepsilon,\delta) \doteq \{t \in \mathbb{R} : {\rm mes}\,\{\tau \in [-l,l] : \rho(f(\tau), f(\tau + t)) \geqslant \varepsilon\} < 2l\delta\} \in \mathcal{S}_{\rm rd}\,.$$

Обозначим через $M^{\,\mathrm{comp}}(\mathbb{R},U)$ множество функций $f\in M(\mathbb{R},U)$, для которых движения $\mathbb{R}\ni t\mapsto f(\cdot+t)$ устойчивы по Лагранжу;

$$\mathcal{R}\,(\mathbb{R},U)\;=\;\mathcal{A}R\,(\mathbb{R},U)\bigcap M^{\,\mathrm{comp}}(\mathbb{R},U).$$

Функция $f\in M(\mathbb{R},U)$ принадлежит $M^{\,\mathrm{comp}}(\mathbb{R},U)$, $\mathcal{A}R\,(\mathbb{R},U)$ или $\mathcal{R}\,(\mathbb{R},U)$ тогда и только тогда, когда для некоторого (и, следовательно, для всех) $l>0$ преобразование Бохнера $f_l^B(\cdot;\cdot)$ принадлежит соответственно $C^{\,\mathrm{comp}}(\mathbb{R},L^1([-l,l],(U,\rho')))$, $\mathcal{C}AR\,(\mathbb{R},L^1([-l,l],(U,\rho')))$ или $\mathcal{C}R\,(\mathbb{R},L^1([-l,l],(U,\rho')))$.

Пусть $\widetilde{M}^p(\mathbb{R},U)$, $p\geqslant 1$, — множество функций $f\in L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},U)$ таких, что для некоторых (и, следовательно, для всех) $l>0$ и $x_0\in U$

$$\lim_{\delta\to+0}\ \sup_{t\in\mathbb{R}}\ \sup_{T\subseteq[t-l,t+l]\,:\,\mathrm{mes}\,T\leqslant\delta}\ \int_T\rho^p(f(\tau),x_0)\,d\tau=0.$$

Лемма 1 (см. [1]). *Для всех $p\geqslant 1$ выполняется равенство*

$$L^{p,\,\mathrm{comp}}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},U)\;=\;M^{\,\mathrm{comp}}(\mathbb{R},U)\bigcap\widetilde{M}^p(\mathbb{R},U).$$

Справедливы вложения $\mathcal{A}R^1(\mathbb{R},U)\subseteq\mathcal{A}R\,(\mathbb{R},U)$, $\mathcal{R}^1(\mathbb{R},U)\subseteq\mathcal{R}\,(\mathbb{R},U)$. Если $f\in\mathcal{A}R^1(\mathbb{R},U)$, то $\widetilde{\Gamma}_1(f;\varepsilon)\subseteq\widetilde{\Gamma}(f;\varepsilon)$ для всех $\varepsilon>0$.

Лемма 2 (см. [1]). *Для всех $p\geqslant 1$*

$$\mathcal{R}^p(\mathbb{R},U)\;=\;\mathcal{R}\,(\mathbb{R},U)\bigcap\widetilde{M}^p(\mathbb{R},U)\;=\;\mathcal{A}R\,(\mathbb{R},U)\bigcap L^{p,\,\mathrm{comp}}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},U).$$

Замечание 1. В настоящей работе используются обозначения для пространств почти рекуррентных и рекуррентных функций, отличающиеся от обозначений в [1, 3]. В последних работах пространства $\mathcal{C}AR\,(\mathbb{R},U)$, $\mathcal{A}R^p(\mathbb{R},U)$, $\mathcal{A}R\,(\mathbb{R},U)$ и $\mathcal{C}R\,(\mathbb{R},U)$, $\mathcal{R}^p(\mathbb{R},U)$, $\mathcal{R}\,(\mathbb{R},U)$ обозначались как $\mathcal{R}^{(C)}(\mathbb{R},U)$, $\mathcal{R}^p(\mathbb{R},U)$, $\mathcal{R}\,(\mathbb{R},U)$ и $\mathcal{R}^{(C),\,\mathrm{comp}}(\mathbb{R},U)$, $\mathcal{R}^{p,\,\mathrm{comp}}(\mathbb{R},U)$, $\mathcal{R}^{\,\mathrm{comp}}(\mathbb{R},U)$ соответственно.

Для функций $f\in C_b(\mathbb{R},U)$ обозначим

$$\Gamma_C^{(\mathrm{unif})}(f;\varepsilon)\;\doteq\;\{t\in\mathbb{R}:D^{(\rho)}_\infty(f(\cdot),f(\cdot+t))<\varepsilon\},\quad\varepsilon>0.$$

Функция $f\in C_b(\mathbb{R},U)$ принадлежит пространству $CAP\,(\mathbb{R},U)$ *почти периодических* (*п.п.*) *по Бору* функций, если $\Gamma_C^{(\mathrm{unif})}(f;\varepsilon)\in\mathcal{S}_{\mathrm{rd}}$ для всех $\varepsilon>0$. При этом $CAP\,(\mathbb{R},U)\subseteq\mathcal{C}R\,(\mathbb{R},U)$ (и $\Gamma_C^{(\mathrm{unif})}(f;\varepsilon)\subseteq\widetilde{\Gamma}_C(f;\varepsilon)$, $\Gamma_C^{(\mathrm{unif})}(f;\varepsilon)\subseteq\Gamma_C(f;l,\varepsilon)$ для всех $f\in CAP\,(\mathbb{R},U)$ и $l,\ \varepsilon>0$). Функция $f\in L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},U)$ принадлежит пространству $S^p(\mathbb{R},U)$ *почти периодических по Степанову* функций *степени* $p\geqslant 1$, если для некоторого (и, следовательно, для всех) $l>0$ ее преобразование Бохнера (1.4) (со значениями в пространстве $L^p([-l,l],U)$) является п.п. по Бору функцией. Справедливо вложение $S^p(\mathbb{R},U)\subseteq\mathcal{R}^p(\mathbb{R},U)$. Для всех функций $f\in S^p(\mathbb{R},U)$ и чисел $l,\ \varepsilon>0$

$$\Gamma_p^{(\mathrm{unif})}(f;l,\varepsilon)\;\doteq\;\{t\in\mathbb{R}:\ \sup_{\xi\in\mathbb{R}}\biggl(\frac{1}{2l}\int_{\xi-l}^{\xi+l}\rho^p(f(\tau),f(\tau+t))\,d\tau\biggr)^{\frac1p}<\varepsilon\}\;\in\;\mathcal{S}_{\mathrm{rd}}$$

(и $\Gamma_p^{(\mathrm{unif})}(f;l,\varepsilon)\subseteq\Gamma_p(f;l,\varepsilon)$). Пусть $S(\mathbb{R},U)=S^1(\mathbb{R},(U,\rho'))$ — множество *почти периодических по Степанову* функций. Функция $f\in M(\mathbb{R},U)$ принадлежит $S(\mathbb{R},U)$, если для некоторого (и, следовательно, для всех) $l>0$ ее преобразование Бохнера (1.4) (со значениями в пространстве $L^1([-l,l],(U,\rho'))$) является п.п. по Бору функцией. Имеем $S(\mathbb{R},U)\subseteq\mathcal{R}(\mathbb{R},U)$. Для всех функций $f\in S(\mathbb{R},U)$ и чисел $l,\ \varepsilon,\ \delta>0$

$$\Gamma^{(\mathrm{unif})}(f;l,\varepsilon,\delta)\;\doteq\;\{t\in\mathbb{R}:\ \sup_{\xi\in\mathbb{R}}\,\mathrm{mes}\,\{\tau\in[\xi-l,\xi+l]:\rho(f(\tau),f(\tau+t))\geqslant\varepsilon\}<2l\delta\}\;\in\;\mathcal{S}_{\mathrm{rd}}$$

(и $\Gamma^{(\mathrm{unif})}(f;l,\varepsilon,\delta)\subseteq\Gamma(f;l,\varepsilon,\delta)$).

Для числа $t\in\mathbb{R}$ и непустых множеств T, T_1, $T_2\subseteq\mathbb{R}$ будут использоваться обозначения $t+T\doteq\{t+\tau:\tau\in T\}$, $T_1+T_2\doteq\{\tau_1+\tau_2:\tau_j\in T_j, j=1,2\}$.

Частично упорядоченное множество $\mathcal{A}=(\mathcal{A},\geqslant)$ называется *направленным* множеством, если для любых элементов α_1, $\alpha_2\in\mathcal{A}$ существует элемент $\alpha\in\mathcal{A}$ такой, что $\alpha\geqslant\alpha_1$ и $\alpha\geqslant\alpha_2$. Если $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ — частично упорядоченные множества, то через $\mathcal{A}_1\times\mathcal{A}_2$ обозначается частично упорядоченное декартово произведение множеств $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ (если $(\alpha_1,\alpha_2)\in\mathcal{A}_1\times\mathcal{A}_2$ и $(\alpha_1',\alpha_2')\in\in\mathcal{A}_1\times\mathcal{A}_2$, то $(\alpha_1,\alpha_2)\leqslant(\alpha_1',\alpha_2')$ тогда и только тогда, когда $\alpha_1\leqslant\alpha_1'$ и $\alpha_2\leqslant\alpha_2'$). Если $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ — направленные множества, то множество $\mathcal{A}_1\times\mathcal{A}_2$ также направленное.

Для направленного множества $\mathcal{A}$ обозначим через $\mathcal{N}(\mathcal{A})$ совокупность многозначных функций (направленностей) $\mathcal{A}\ni\alpha\mapsto\Gamma(\alpha)\subseteq\mathbb{R}$, удовлетворяющих следующим условиям:

($\mathbf{0}_{\mathcal{A}}$) $0\in\Gamma(\alpha)$ для всех $\alpha\in\mathcal{A}$;

($\mathbf{1}_{\mathcal{A}}$) если α, $\alpha'\in\mathcal{A}$ и $\alpha\leqslant\alpha'$, то $\Gamma(\alpha)\supseteq\Gamma(\alpha')$;

($\mathbf{2}_{\mathcal{A}}$) для любого $\alpha\in\mathcal{A}$ существует элемент $\alpha'\geqslant\alpha$ такой, что для каждого числа $t\in\Gamma(\alpha')$ найдется такой элемент $\alpha''\in\mathcal{A}$, что $t+\Gamma(\alpha'')\subseteq\Gamma(\alpha)$;

($\mathbf{3}_{\mathcal{A}}$) для любого элемента $\alpha\in\mathcal{A}$ найдутся элемент $\alpha'\geqslant\alpha$ и число $\delta>0$ такие, что $\Gamma(\alpha)\supseteq\Gamma(\alpha')+(-\delta,\delta)$.

Для направленностей $\Gamma_j\in\mathcal{N}(\mathcal{A}_j)$, $j=1,2$, определим направленность $\mathcal{A}_1\times\mathcal{A}_2\ni\widetilde{\alpha}==(\alpha_1,\alpha_2)\mapsto(\Gamma_1\cap\Gamma_2)(\widetilde{\alpha})\doteq\Gamma_1(\alpha_1)\cap\Gamma_2(\alpha_2)$. При этом также $\Gamma_1\cap\Gamma_2\in\mathcal{N}(\mathcal{A}_1\times\mathcal{A}_2)$.

Пусть $\mathcal{A}_j$ — направленные множества и $\Gamma_j\in\mathcal{N}(\mathcal{A}_j)$, $j=1,2$. Направленность Γ_1 *подчинена* направленности Γ_2 (в этом случае пишем $\Gamma_1\prec\Gamma_2$), если для любого $\alpha_1\in\mathcal{A}_1$ найдется элемент $\alpha_2\in\mathcal{A}_2$ такой, что $\Gamma_1(\alpha_1)\supseteq\Gamma_2(\alpha_2)$. Если $\Gamma_1\prec\Gamma_2$ и $\Gamma_2\prec\Gamma_1$, то направленности Γ_1 и Γ_2 *эквивалентны*.

Если $\Gamma\in\mathcal{N}(\mathcal{A})$, $\Gamma_j\in\mathcal{N}(\mathcal{A}_j)$ и $\Gamma_j\prec\Gamma$, $j=1,2$, то $\Gamma_1\cap\Gamma_2\prec\Gamma$.

Пусть $\mathcal{N}_{\mathrm{rd}}(\mathcal{A})$ — множество направленностей $\Gamma\in\mathcal{N}(\mathcal{A})$, для которых $\Gamma(\alpha)\in\mathcal{S}_{\mathrm{rd}}$ при всех $\alpha\in\mathcal{A}$.

Для (произвольного) непустого множества $\Lambda\subseteq\mathbb{R}$ обозначим через $\widetilde{\mathcal{A}}^{\Lambda}$ направленное множество упорядоченных пар $(\varepsilon,\mathcal{K})$, где $\varepsilon>0$ и $\mathcal{K}$ — непустое конечное подмножество множества Λ, с отношением порядка: $(\varepsilon_1,\mathcal{K}_1)\geqslant(\varepsilon_2,\mathcal{K}_2)$ тогда и только тогда, когда $\varepsilon_1\leqslant\varepsilon_2$ и $\mathcal{K}_1\supseteq\mathcal{K}_2$. Определим направленность

$$\widetilde{\mathcal{A}}^{\Lambda}\ni(\varepsilon,\mathcal{K})\mapsto\widetilde{\Gamma}^{\Lambda}(\varepsilon,\mathcal{K})\doteq\{t\in\mathbb{R}:\bigl|1-e^{i\lambda t}\bigr|<\varepsilon\ \text{ для всех }\ \lambda\in\mathcal{K}\},$$

где $i^2=-1$, для которой $\widetilde{\Gamma}^{\Lambda}\in\mathcal{N}_{\mathrm{rd}}(\widetilde{\mathcal{A}}^{\Lambda})$ (см., например, [14]). При этом для любой направленности $\Gamma\in\mathcal{N}_{\mathrm{rd}}(\mathcal{A})$, где $\mathcal{A}$ — произвольное направленное множество, и любого непустого множества $\Lambda\subseteq\mathbb{R}$ справедливо включение $\Gamma\cap\widetilde{\Gamma}^{\Lambda}\in\mathcal{N}_{\mathrm{rd}}(\mathcal{A}\times\widetilde{\mathcal{A}}^{\Lambda})$ [2]. В дальнейшем для направленностей $\Gamma\in\mathcal{N}_{\mathrm{rd}}(\mathcal{A})$ и чисел $\mathcal{T}>0$ будет использоваться краткое обозначение

$$\Gamma^{\{\mathcal{T}\}}\doteq\Gamma\bigcap\widetilde{\Gamma}^{\left\{\frac{2\pi}{\mathcal{T}}\right\}}$$

(в качестве множества Λ выбирается одноэлементное множество $\bigl\{\frac{2\pi}{\mathcal{T}}\bigr\}$); $\Gamma^{\{\mathcal{T}\}}\in\mathcal{N}_{\mathrm{rd}}(\mathcal{A}\times\widetilde{\mathcal{A}}^{\left\{\frac{2\pi}{\mathcal{T}}\right\}})$ и $\Gamma\prec\Gamma^{\{\mathcal{T}\}}$.

Определим направленные множества $\mathcal{A}^{(1)}$, $\mathcal{A}^{(1)}_p$, где $p\geqslant1$, и $\mathcal{A}^{(2)}$. Пусть $\mathcal{A}^{(1)}$ — множество упорядоченных пар (l,ε) чисел l, $\varepsilon>0$ с отношением порядка: $(l_1,\varepsilon_1)\geqslant(l_2,\varepsilon_2)$ тогда и только тогда, когда $l_1\geqslant l_2$ и $\varepsilon_1\leqslant\varepsilon_2$; $\mathcal{A}^{(1)}_p$ — множество упорядоченных пар (l,ε), где l, $\varepsilon>0$, с отношением порядка: $(l_1,\varepsilon_1)\geqslant(l_2,\varepsilon_2)$ тогда и только тогда, когда $l_1\geqslant l_2$ и $l_1\varepsilon_1^p\leqslant l_2\varepsilon_2^p$; $\mathcal{A}^{(2)}$ — множество упорядоченных троек (l,ε,δ), где l, ε, $\delta>0$, с отношением порядка: $(l_1,\varepsilon_1,\delta_1)\geqslant(l_2,\varepsilon_2,\delta_2)$ тогда и только тогда, когда $l_1\geqslant l_2$, $\varepsilon_1\leqslant\varepsilon_2$ и $l_1\delta_1\leqslant l_2\delta_2$.

[2] Действительно, так как $\Gamma\in\mathcal{N}_{\mathrm{rd}}(\mathcal{A})$ и $\widetilde{\Gamma}^{\Lambda}\in\mathcal{N}_{\mathrm{rd}}(\widetilde{\mathcal{A}}^{\Lambda})$, то $\Gamma\cap\widetilde{\Gamma}^{\Lambda}\in\mathcal{N}(\mathcal{A}\times\widetilde{\mathcal{A}}^{\Lambda})$, при этом относительная плотность множеств $\Gamma(\alpha)\cap\widetilde{\Gamma}^{\Lambda}(\varepsilon,\mathcal{K})\subseteq\mathbb{R}$ (для всех $\alpha\in\mathcal{A}$, $\varepsilon>0$ и непустых конечных подмножеств множества $\Lambda\subseteq\mathbb{R}$) следует из теоремы 2 в [1].

Лемма 3 (см. [1,3]). *Если $f \in \mathcal{CAR}(\mathbb{R},U)$, то $\Gamma_C(f;\cdot,\cdot) \in \mathcal{N}_{\mathrm{rd}}(\mathcal{A}^{(1)})$. Если $f \in \mathcal{AR}^p(\mathbb{R},U)$, то $\Gamma_p(f;\cdot,\cdot) \in \mathcal{N}_{\mathrm{rd}}(\mathcal{A}^{(1)}_p)$. Если $f \in \mathcal{AR}(\mathbb{R},U)$, то $\Gamma(f;\cdot,\cdot,\cdot) \in \mathcal{N}_{\mathrm{rd}}(\mathcal{A}^{(2)})$.*

Пусть $\mathbb{R}^+_{\geqslant}$ — упорядоченное множество чисел $\varepsilon > 0$, отношение порядка на котором противоположно естественному отношению порядка.

Справедлива простая

Лемма 4. *Многозначные отображения (направленности)*

$$\mathbb{R}^+_{\geqslant} \ni \varepsilon \mapsto \widetilde{\Gamma}_C(f;\varepsilon) \subseteq \mathbb{R}, \quad \mathbb{R}^+_{\geqslant} \ni \varepsilon \mapsto \widetilde{\Gamma}_p(f;\varepsilon) \subseteq \mathbb{R}, \quad \mathbb{R}^+_{\geqslant} \ni \varepsilon \mapsto \widetilde{\Gamma}(f;\varepsilon) \subseteq \mathbb{R},$$

определенные соответственно для функций из пространств $\mathcal{CAR}(\mathbb{R},U)$, $\mathcal{AR}^p(\mathbb{R},U)$ и $\mathcal{AR}(\mathbb{R},U)$, принадлежат $\mathcal{N}_{\mathrm{rd}}(\mathbb{R}^+_{\geqslant})$. При этом для функций $f \in \mathcal{CAR}(\mathbb{R},U)$ направленности $\Gamma_C(f;\cdot,\cdot)$ и $\widetilde{\Gamma}_C(f;\cdot)$ эквивалентны, для функций $f \in \mathcal{AR}^p(\mathbb{R},U)$, $p \geqslant 1$, эквивалентны направленности $\Gamma_p(f;\cdot,\cdot)$ и $\widetilde{\Gamma}_p(f;\cdot)$, а для функций $f \in \mathcal{AR}(\mathbb{R},U)$ — направленности $\Gamma(f;\cdot,\cdot,\cdot)$ и $\widetilde{\Gamma}(f;\cdot)$.

Лемма 5. *Для функции $f \in \mathcal{CR}(\mathbb{R},U)$ направленности $\widetilde{\Gamma}_C(f;\cdot)$ и $\widetilde{\Gamma}(f;\cdot)$ эквивалентны.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $f \in \mathcal{CR}(\mathbb{R},U) \subseteq \mathcal{CAR}(\mathbb{R},U)$, то $\widetilde{\Gamma}_C(f;\varepsilon) \subseteq \widetilde{\Gamma}(f;\varepsilon)$ для всех $\varepsilon > 0$, поэтому $\widetilde{\Gamma}(f;\cdot) \prec \widetilde{\Gamma}_C(f;\cdot)$. С другой стороны, функция $f \in \mathcal{CR}(\mathbb{R},U) \subseteq C^{\,\mathrm{comp}}(\mathbb{R},U)$ равномерно непрерывна и, следовательно, $\omega_f(\varepsilon') \to 0$ при $\varepsilon' \to +0$, где

$$\omega_f(\varepsilon') = \sup_{t\in\mathbb{R}} \max_{\tau\in[-\varepsilon',\varepsilon']} \rho(f(t), f(t+\tau)), \quad \varepsilon' > 0,$$

— модуль непрерывности функции f. Для любых l, $\varepsilon > 0$ выберем числа ε_1, $\delta > 0$ такие, что $\varepsilon_1 + 2\omega_f(2l\delta) < \varepsilon$. Пусть $t \in \Gamma(f;l,\varepsilon_1,\delta)$. Тогда для любого $\tau \in [-l,l]$ найдется число $\tau_0 \in [-l,l]$, для которого $|\tau-\tau_0| \leqslant 2l\delta$ и $\rho(f(\tau_0), f(\tau_0+t)) < \varepsilon_1$, поэтому

$$\rho(f(\tau), f(\tau+t)) \leqslant \rho(f(\tau_0), f(\tau_0+t)) + \rho(f(\tau), f(\tau_0)) + \rho(f(\tau+t), f(\tau_0+t)) < \varepsilon_1 + 2\omega_f(2l\delta) < \varepsilon.$$

Последняя оценка означает, что $t \in \Gamma_C(f;l,\varepsilon)$. Теперь из произвольности выбора чисел l, $\varepsilon > 0$ получаем $\Gamma_C(f;\cdot,\cdot) \prec \Gamma(f;\cdot,\cdot,\cdot)$ и (см. лемму 4) $\widetilde{\Gamma}_C(f;\cdot) \prec \widetilde{\Gamma}(f;\cdot)$. □

Следующая лемма доказывается с помощью леммы 2.

Лемма 6. *Для функции $f \in \mathcal{R}^p(\mathbb{R},U)$, $p \geqslant 1$, направленности $\widetilde{\Gamma}_p(f;\cdot)$ и $\widetilde{\Gamma}(f;\cdot)$ эквивалентны.*

Если функция $f : \mathbb{R} \to U$ принадлежит нескольким из пространств $\mathcal{CR}(\mathbb{R},U)$, $\mathcal{R}^p(\mathbb{R},U)$, $p \geqslant 1$, и $\mathcal{R}(\mathbb{R},U)$, то из лемм 5 и 6 следует, что направленности $\widetilde{\Gamma}_C(f;\cdot)$, $\widetilde{\Gamma}_p(f;\cdot)$ и $\widetilde{\Gamma}(f;\cdot)$, которые определяются для этой функции с помощью метрик из соответствующих пространств, эквивалентны.

Для функций $f_j \in \mathcal{R}(\mathbb{R},U_j)$, $j = 1,2$, будем считать, что множество почти периодов функции f_1 *подчинено* множеству почти периодов функции f_2, если $\widetilde{\Gamma}(f_1;\cdot) \prec \widetilde{\Gamma}(f_2;\cdot)$.

Каждой п.п. функции из пространств $CAP(\mathbb{R},U)$, $S^p(\mathbb{R},U)$, $p \geqslant 1$, и $S(\mathbb{R},U)$ соответствует модуль частот (группа по сложению) $\mathrm{Mod}\, f \subset \mathbb{R}$ [14] (см. также [15,16], где приведены необходимые определения и утверждения). Если функция f принадлежит разным пространствам п.п. функций, то модуль частот $\mathrm{Mod}\, f$ от рассматриваемых пространств не зависит и определяется только самой функцией. Если функция f (п.в.) постоянная, то $\mathrm{Mod}\, f = \{0\}$. Если функция f не является п.в. постоянной, то $\mathrm{Mod}\, f$ — счетное множество. Для функции $f \in CAP(\mathbb{R},U)$ справедливо включение $\Gamma^{(\mathrm{unif})}_C(f;\cdot) \in \mathcal{N}_{\mathrm{rd}}(\mathbb{R}^+_{\geqslant})$ и направленность $\Gamma^{(\mathrm{unif})}_C(f;\cdot)$ эквивалентна направленности $\widetilde{\Gamma}^{\,\mathrm{Mod}\, f}(\cdot,\cdot) \in \mathcal{N}_{\mathrm{rd}}(\widetilde{\mathcal{A}}^{\,\mathrm{Mod}\, f})$ (см. [14]). Для функции $f \in S^p(\mathbb{R},U)$ направленность $\mathcal{A}^{(1)}_p \ni (l,\varepsilon) \mapsto \Gamma^{(\mathrm{unif})}_p(f;l,\varepsilon) \subseteq \mathbb{R}$ принадлежит $\mathcal{N}_{\mathrm{rd}}(\mathcal{A}^{(1)}_p)$ и эквивалентна направленности $\widetilde{\Gamma}^{\,\mathrm{Mod}\, f}(\cdot,\cdot) \in \mathcal{N}_{\mathrm{rd}}(\widetilde{\mathcal{A}}^{\,\mathrm{Mod}\, f})$. Если $f \in S(\mathbb{R},U)$, то направленность $\mathcal{A}^{(2)} \ni$ $\ni (l,\varepsilon,\delta) \mapsto \Gamma^{(\mathrm{unif})}(f;l,\varepsilon,\delta) \subseteq \mathbb{R}$ принадлежит $\mathcal{N}_{\mathrm{rd}}(\mathcal{A}^{(2)})$ и также эквивалентна направленности $\widetilde{\Gamma}^{\,\mathrm{Mod}\, f}(\cdot,\cdot) \in \mathcal{N}_{\mathrm{rd}}(\widetilde{\mathcal{A}}^{\,\mathrm{Mod}\, f})$.

Лемма 7. *Для любой функции $f \in S(\mathbb{R},U)$ направленности $\Gamma^{(\mathrm{unif})}(f;\cdot,\cdot,\cdot)$ и $\Gamma(f;\cdot,\cdot,\cdot)$ эквивалентны.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $\Gamma^{(\mathrm{unif})}(f;l,\varepsilon,\delta) \subseteq \Gamma(f;l,\varepsilon,\delta)$ для всех l, ε, $\delta > 0$, то $\Gamma(f;\cdot,\cdot,\cdot) \prec \Gamma^{(\mathrm{unif})}(f;\cdot,\cdot,\cdot)$. Определим направленности

$$\mathcal{A}_1^{(1)} \ni (l,\varepsilon) \mapsto \Gamma_*^{(\mathrm{unif})}(f;l,\varepsilon) = \{t \in \mathbb{R} : \sup_{\xi \in \mathbb{R}} \frac{1}{2l} \int_{\xi-l}^{\xi+l} \rho'(f(\tau), f(\tau+t))\, d\tau < \varepsilon\},$$

$$\mathcal{A}_1^{(1)} \ni (l,\varepsilon) \mapsto \Gamma_*(f;l,\varepsilon) = \{t \in \mathbb{R} : \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} \rho'(f(\tau), f(\tau+t))\, d\tau < \varepsilon\}.$$

Имеем $\Gamma_*^{(\mathrm{unif})}(f;\cdot,\cdot) \in \mathcal{N}_{\mathrm{rd}}(\mathcal{A}^{(1)})$ и $\Gamma_*(f;\cdot,\cdot) \in \mathcal{N}_{\mathrm{rd}}(\mathcal{A}^{(1)})$. При этом нетрудно видеть, что направленность $\Gamma_*^{(\mathrm{unif})}(f;\cdot,\cdot)$ эквивалентна направленности $\Gamma^{(\mathrm{unif})}(f;\cdot,\cdot,\cdot)$, а направленность $\Gamma_*(f;\cdot,\cdot)$ — направленности $\Gamma(f;\cdot,\cdot,\cdot)$. Выберем любые числа $l, \varepsilon > 0$. Пусть $\varepsilon_1 \in (0, \frac{\varepsilon}{4})$. Так как $f \in S(\mathbb{R},U)$, то число $l_1 \geqslant l$ можно выбрать так, чтобы для любого $\xi \in \mathbb{R}$ существовало число $\xi_1 = \xi_1(\xi) \in \mathbb{R}$ такое, что $\xi - \xi_1 \in \Gamma_*^{(\mathrm{unif})}(f;l,\varepsilon_1)$ и $[\xi_1 - l, \xi_1 + l] \subseteq [-l_1, l_1]$. Положим $\varepsilon_2 = \frac{l}{l_1}\frac{\varepsilon}{2}$. Пусть $t \in \Gamma_*(f;l_1,\varepsilon_2)$ и $\xi \in \mathbb{R}$ — произвольное число. Тогда

$$\frac{1}{2l} \int_{\xi-l}^{\xi+l} \rho'(f(\tau), f(\tau+t))\, d\tau \leqslant \frac{1}{2l} \int_{\xi-l}^{\xi+l} \rho'(f(\tau), f(\tau-\xi+\xi_1(\xi)))\, d\tau +$$

$$+ \frac{1}{2l} \int_{\xi_1(\xi)-l}^{\xi_1(\xi)+l} \rho'(f(\tau), f(\tau+t))\, d\tau + \frac{1}{2l} \int_{\xi-l}^{\xi+l} \rho'(f(\tau-\xi+\xi_1(\xi)+t), f(\tau+t))\, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant 2\varepsilon_1 + \frac{l_1}{l}\frac{1}{2l_1} \int_{-l_1}^{l_1} \rho'(f(\tau), f(\tau+t))\, d\tau < 2\varepsilon_1 + \frac{l_1}{l}\varepsilon_2 < \varepsilon.$$

Следовательно, $\Gamma_*(f;l_1,\varepsilon_2) \subseteq \Gamma_*^{(\mathrm{unif})}(f;l,\varepsilon)$. Так как числа $l, \varepsilon > 0$ выбираются произвольно, то $\Gamma_*^{(\mathrm{unif})}(f;\cdot,\cdot) \prec \Gamma_*(f;\cdot,\cdot)$. Поэтому также $\Gamma^{(\mathrm{unif})}(f;\cdot,\cdot,\cdot) \prec \Gamma(f;\cdot,\cdot,\cdot)$. □

Из лемм 5, 6 и 7 следует, что для любой функции $f \in CAP(\mathbb{R},U)$ направленности $\Gamma_C^{(\mathrm{unif})}(f;\cdot)$ и $\Gamma_C(f;\cdot,\cdot)$ эквивалентны, а для любой функции $f \in S^p(\mathbb{R},U)$, $p \geqslant 1$, эквивалентны направленности $\Gamma_p^{(\mathrm{unif})}(f;\cdot,\cdot)$ и $\Gamma_p(f;\cdot,\cdot)$.

Если $f_j \in S(\mathbb{R},U_j)$, $j=1,2$, то $\Gamma^{(\mathrm{unif})}(f_1;\cdot,\cdot,\cdot) \prec \Gamma^{(\mathrm{unif})}(f_2;\cdot,\cdot,\cdot)$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{Mod}\, f_1 \subseteq \mathrm{Mod}\, f_2$ [14] (см. также [4,15]). Поэтому из леммы 7 следует

Лемма 8. *Если $f_j \in S(\mathbb{R},U_j)$, $j=1,2$, то $\Gamma(f_1;\cdot,\cdot,\cdot) \prec \Gamma(f_2;\cdot,\cdot,\cdot)$ тогда и только тогда, когда* $\mathrm{Mod}\, f_1 \subseteq \mathrm{Mod}\, f_2$.

Функция $f \in \mathcal{C}AR(\mathbb{R},U)$, для которой $\Gamma_C(f;\cdot,\cdot) \prec \widetilde{\Gamma}^{\mathbb{R}}$ (тогда $\Gamma_C(f;\cdot,\cdot) \prec \widetilde{\Gamma}^{\Lambda}$ для некоторого счетного (или непустого конечного) множества $\Lambda \subset \mathbb{R}$), называется *почти периодической по Левитану.*

Пусть $\Gamma \in \mathcal{N}_{\mathrm{rd}}(\mathcal{A})$, где $\mathcal{A}$ — произвольное направленное множество. Обозначим через $\mathcal{C}AR_\Gamma(\mathbb{R},U)$ (соответственно через $\mathcal{C}R_\Gamma(\mathbb{R},U)$) множество функций $f \in \mathcal{C}AR(\mathbb{R},U)$ (соответственно функций $f \in \mathcal{C}R(\mathbb{R},U)$), для которых $\widetilde{\Gamma}_C(f;\cdot) \prec \Gamma$. Аналогичным образом, пусть $\mathcal{A}R_\Gamma^p(\mathbb{R},U)$, $\mathcal{R}_\Gamma^p(\mathbb{R},U)$, $p \geqslant 1$, и $\mathcal{A}R_\Gamma(\mathbb{R},U)$, $\mathcal{R}_\Gamma(\mathbb{R},U)$ — множества функций из $\mathcal{A}R^p(\mathbb{R},U)$, $\mathcal{R}^p(\mathbb{R},U)$ и $\mathcal{A}R(\mathbb{R},U)$, $\mathcal{R}(\mathbb{R},U)$, для которых $\widetilde{\Gamma}_p(f;\cdot) \prec \Gamma$ и $\widetilde{\Gamma}(f;\cdot) \prec \Gamma$ соответственно. При этом

$$\mathcal{R}_\Gamma(\mathbb{R},U) = \mathcal{A}R_\Gamma(\mathbb{R},U) \bigcap M^{\mathrm{comp}}(\mathbb{R},U), \tag{1.5}$$

$$\mathcal{R}_\Gamma^p(\mathbb{R},U) = \mathcal{A}R_\Gamma^p(\mathbb{R},U) \bigcap L_{\mathrm{loc}}^{p,\mathrm{comp}}(\mathbb{R},U), \quad p \geqslant 1.$$

Если $\Gamma_j \in \mathcal{N}_{\mathrm{rd}}(\mathcal{A}_j)$, $j=1,2$, и $\Gamma_1 \prec \Gamma_2$, то

$$\mathcal{C}AR_{\Gamma_1}(\mathbb{R},U) \subseteq \mathcal{C}AR_{\Gamma_2}(\mathbb{R},U), \quad \mathcal{C}R_{\Gamma_1}(\mathbb{R},U) \subseteq \mathcal{C}R_{\Gamma_2}(\mathbb{R},U),$$

$$\mathcal{A}R^p_{\Gamma_1}(\mathbb{R},U) \subseteq \mathcal{A}R^p_{\Gamma_2}(\mathbb{R},U), \quad \mathcal{R}^p_{\Gamma_1}(\mathbb{R},U) \subseteq \mathcal{R}^p_{\Gamma_2}(\mathbb{R},U), \quad p \geqslant 1,$$

$$\mathcal{A}R_{\Gamma_1}(\mathbb{R},U) \subseteq \mathcal{A}R_{\Gamma_2}(\mathbb{R},U), \quad \mathcal{R}_{\Gamma_1}(\mathbb{R},U) \subseteq \mathcal{R}_{\Gamma_2}(\mathbb{R},U).$$

Функция $f \in L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},U)$ принадлежит $\mathcal{A}R^p_\Gamma(\mathbb{R},U)$ или $\mathcal{R}^p_\Gamma(\mathbb{R},U)$, $p \geqslant 1$, тогда и только тогда, когда для некоторого (и, следовательно, для всех) $l>0$ преобразование Бохнера $f^B_l(\cdot;\cdot)$ принадлежит $\mathcal{C}AR_\Gamma(\mathbb{R},L^p([-l,l],U))$ или $\mathcal{C}R_\Gamma(\mathbb{R},L^p([-l,l],U))$ соответственно. Функция $f \in M(\mathbb{R},U)$ принадлежит $\mathcal{A}R_\Gamma(\mathbb{R},U)$ или $\mathcal{R}_\Gamma(\mathbb{R},U)$ в том и только том случае, если для некоторого (и, следовательно, для всех) $l>0$ преобразование Бохнера $f^B_l(\cdot;\cdot)$ принадлежит $\mathcal{C}AR_\Gamma(\mathbb{R},L^1([-l,l],(U,\rho')))$ или $\mathcal{C}R_\Gamma(\mathbb{R},L^1([-l,l],(U,\rho')))$ соответственно.

Следующая лемма уточняет лемму 2.

Лемма 9 (см. [1]). *Для всех* $p \geqslant 1$

$$\mathcal{R}^p_\Gamma(\mathbb{R},U) \,=\, \mathcal{R}_\Gamma(\mathbb{R},U) \bigcap \widetilde{M}^p(\mathbb{R},U) \,=\, \mathcal{A}R_\Gamma(\mathbb{R},U) \bigcap L^{p,\,\mathrm{comp}}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},U).$$

Пусть $\mathrm{cl}_b\,U$ — множество непустых замкнутых ограниченных подмножеств полного метрического пространства (U,ρ), $\mathrm{comp}\,U$ — подмножество множества $\mathrm{cl}_b\,U$, состоящее из непустых компактных множеств. На $\mathrm{cl}_b\,U$ определяется метрика Хаусдорфа

$$\mathrm{dist}\,(X,Y) = \mathrm{dist}^{(\rho)}(X,Y) = \max\,\{\sup_{x\,\in X}\rho(x,Y),\, \sup_{y\,\in Y}\rho(y,X)\}, \quad X,\,Y \in \mathrm{cl}_b\,U,$$

где $\rho(x,Z) = \inf\limits_{y\,\in Z}\rho(x,y)$ — расстояние от точки $x\in U$ до непустого множества $Z \subseteq U$. Метрическое пространство $(\mathrm{cl}_b\,U,\mathrm{dist})$ является полным. Также будет рассматриваться полное метрическое пространство $(\mathrm{cl}_b\,U,\mathrm{dist}')$, где

$$\mathrm{dist}'(X,Y) = \mathrm{dist}^{(\rho')}(X,Y) = \min\,\{1,\mathrm{dist}\,(X,Y)\}, \quad X,\,Y \in \mathrm{cl}_b\,U.$$

Многозначные отображения $\mathbb{R} \ni t \mapsto F(t) \in \mathrm{cl}_b\,U$ далее будут отождествляться с однозначными функциями со значениями в метрическом пространстве $(\mathrm{cl}_b\,U,\mathrm{dist})$. Поэтому обозначения, которые были введены для сильно измеримых, рекуррентных, почти рекуррентных и почти периодических функций, будут также использоваться для таких многозначных отображений.

Сильно измеримая функция $f:\mathbb{R}\to U$ называется *сечением* (сильно измеримого) многозначного отображения $F \in M(\mathbb{R},(\mathrm{cl}_b\,U,\mathrm{dist}))$, если $f(t)\in F(t)$ при п.в. $t\in\mathbb{R}$.

Теорема 1. *Пусть (U,ρ) — полное метрическое пространство, многозначное отображение $F:\mathbb{R}\to \mathrm{cl}_b U$ принадлежит пространству $\mathcal{R}_\Gamma(\mathbb{R},\mathrm{cl}_b U) = \mathcal{R}^1_\Gamma(\mathbb{R},(\mathrm{cl}_b\,U,\mathrm{dist}'))$ и $g \in \mathcal{R}_\Gamma(\mathbb{R},U)$, где $\Gamma\in\mathcal{N}_{\mathrm{rd}}(\mathcal{A})$. Тогда для любой неубывающей функции $\eta:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$, для которой $\eta(0)=0$ и $\eta(\xi)>0$ при $\xi>0$, найдется функция $f\in\mathcal{R}_\Gamma(\mathbb{R},U)$ такая, что $f(t)\in F(t)$ и $\rho(f(t),g(t)) \leqslant \rho(g(t),F(t)) + \eta(\rho(g(t),F(t)))$ при п.в. $t\in\mathbb{R}$. Если, кроме того, $F\in\mathcal{R}^p_\Gamma(\mathbb{R},\mathrm{cl}_b\,U)$ при некотором $p\geqslant 1$, то также $f\in\mathcal{R}^p_\Gamma(\mathbb{R},U)$.*

Следствие 1. *Пусть (U,ρ) — полное метрическое пространство и $F\in\mathcal{R}\,(\mathbb{R},\mathrm{cl}_b\,U)$. Тогда существует функция $f\in\mathcal{R}\,(\mathbb{R},U)$ такая, что $f(t)\in F(t)$ при п.в. $t\in\mathbb{R}$ и множество почти периодов сечения f подчинено множеству почти периодов многозначного отображения F. Если, кроме того, $F\in\mathcal{R}^p(\mathbb{R},\mathrm{cl}_b\,U)$, $p\geqslant 1$, то также $f\in\mathcal{R}^p(\mathbb{R},U)$.*

Теорема 1 и приводимые далее теоремы 6, 10 и 11 (а также теорема 21 из § 5) являются основными результатами работы. Доказательство теоремы 1 сводится к доказательству теоремы 15, сформулированной в § 2. Аналогичные теореме 1 утверждения справедливы также для классов почти рекуррентных и почти периодических многозначных отображений и функций, а также для многозначных отображений и функций из классов $M^{\,\mathrm{comp}}(\mathbb{R},\mathrm{cl}_b\,U)$ и $M^{\,\mathrm{comp}}(\mathbb{R},U)$.

Теорема 2 (см. [3]). *Пусть (U,ρ) — полное метрическое пространство, $F\in\mathcal{A}R_\Gamma(\mathbb{R},\mathrm{cl}_b\,U)$ и $g\in\mathcal{A}R_\Gamma(\mathbb{R},U)$, где $\Gamma\in\mathcal{N}_{\mathrm{rd}}(\mathcal{A})$. Тогда для любой неубывающей функции $\eta:[0,+\infty)\to\to[0,+\infty)$, для которой $\eta(0)=0$ и $\eta(\xi)>0$ при $\xi>0$, найдется функция $f\in\mathcal{A}R_\Gamma(\mathbb{R},U)$ такая, что $f(t)\in F(t)$ и $\rho(f(t),g(t))\leqslant\rho(g(t),F(t))+\eta(\rho(g(t),F(t)))$ при п.в. $t\in\mathbb{R}$. Если, кроме того, $F\in\mathcal{A}R^p_\Gamma(\mathbb{R},\mathrm{cl}_b\,U)$ при некотором $p\geqslant1$, то также $f\in\mathcal{A}R^p_\Gamma(\mathbb{R},U)$.*

Следствие 2. *Пусть (U,ρ) — полное метрическое пространство и $F\in\mathcal{A}R_{\widetilde{\Gamma}\,\Lambda}(\mathbb{R},\mathrm{cl}_b\,U)$ для некоторого множества $\Lambda\subseteq\mathbb{R}$. Тогда существует функция $f\in\mathcal{A}R_{\widetilde{\Gamma}\,\Lambda}(\mathbb{R},U)$ такая, что $f(t)\in\in F(t)$ при п.в. $t\in\mathbb{R}$. (То есть у многозначного отображения $F\in M(\mathbb{R},\mathrm{cl}_b\,U)$, преобразование Бохнера $F^B_l(\cdot;\cdot)$ которого является почти периодическим по Левитану, существует сечение $f\in M(\mathbb{R},U)$, преобразование Бохнера $f^B_l(\cdot;\cdot)$ которого также является почти периодическим по Левитану.)*

Теорема 3 (см. [17]). *Пусть (U,ρ) — полное метрическое пространство, $F\in S(\mathbb{R},\mathrm{cl}_b\,U)$ и $g\in S(\mathbb{R},U)$. Тогда для любой неубывающей функции $\eta:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$, для которой $\eta(0)=0$ и $\eta(\xi)>0$ при $\xi>0$, найдется функция $f\in S(\mathbb{R},U)$ такая, что* $\mathrm{Mod}\,f\subseteq\mathrm{Mod}\,F+{}+\mathrm{Mod}\,g$, *$f(t)\in F(t)$ и $\rho(f(t),g(t))\leqslant\rho(g(t),F(t))+\eta(\rho(g(t),F(t)))$ при п.в. $t\in\mathbb{R}$. Если, кроме того, $F\in S^p(\mathbb{R},\mathrm{cl}_b\,U)$ при некотором $p\geqslant1$, то также $f\in S^p(\mathbb{R},U)$.*

Теорема 4 (см. [1]). *Пусть (U,ρ) — полное метрическое пространство, $F\in M^{\,\mathrm{comp}}(\mathbb{R},\mathrm{cl}_b\,U)$ и $g\in M^{\,\mathrm{comp}}(\mathbb{R},U)$. Тогда для любой неубывающей функции $\eta:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$, для которой $\eta(0)=0$ и $\eta(\xi)>0$ при $\xi>0$, существует функция $f\in M^{\,\mathrm{comp}}(\mathbb{R},U)$ такая, что $f(t)\in F(t)$ и $\rho(f(t),g(t))\leqslant\rho(g(t),F(t))+\eta(\rho(g(t),F(t)))$ при п.в. $t\in\mathbb{R}$. Если, кроме того, $F\in L^{p,\,\mathrm{comp}}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},\mathrm{cl}_b\,U)$ при некотором $p\geqslant1$, то также $f\in L^{p,\,\mathrm{comp}}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},U)$.*

Ранее были также доказаны аналогичные теореме 1 утверждения для многозначных отображений и функций, которые п.п. по Вейлю [5], п.п. по Безиковичу [6] и принадлежат классам обобщенных п.п. по Вейлю функций [7].

Для многозначного отображения $\mathbb{R}\ni t\mapsto F(t)\in\mathrm{cl}_b\,U$ и функции $\mathbb{R}\ni t\mapsto g(t)\in U$ определим многозначные отображения

$$\mathbb{R}\ni t\mapsto F(g(t);t)\;=\;\{y\in F(t):\rho(y,g(t))=\rho(g(t),F(t))\},$$

$$\mathbb{R}\ni t\mapsto F(g(t),\varepsilon;t)\;=\;\{y\in F(t):\rho(y,g(t))\leqslant\rho(g(t),F(t))+\varepsilon\},\quad \varepsilon>0.$$

Для любой точки $x\in U$ будем также обозначать

$$F(x;t)\;=\;\{y\in F(t):\rho(y,x)=\rho(x,F(t))\},\quad t\in\mathbb{R}.$$

Если $F\in M(\mathbb{R},\mathrm{comp}\,U)$, $g\in M(\mathbb{R},U)$, то $F(g(t);t)\neq\varnothing$ при п.в. $t\in\mathbb{R}$, $F(g(\cdot);\cdot)\in\in M(\mathbb{R},\mathrm{comp}\,U)$ и $F(g(\cdot),\varepsilon;\cdot)\in M(\mathbb{R},\mathrm{comp}\,U)$ для всех $\varepsilon>0$.

В условиях теоремы 1 (и теорем 2, 3 и 4) не предполагается, что множества $F(t)$ являются компактными, поэтому возможны случаи, когда $F(g(t);t)=\varnothing$ при всех $t\in\mathbb{R}$.

Приведем пример многозначного отображения $F\in CAP\,(\mathbb{R},\mathrm{comp}\,\mathbb{R})$ такого, что у многозначного отображения $F(0;\cdot)$ нет сечений $f\in\mathcal{A}R\,(\mathbb{R},\mathbb{R})$ (тогда также $F(0;\cdot)\notin\mathcal{A}R\,(\mathbb{R},\mathrm{comp}\,\mathbb{R})$).

Пример 1. Пусть $\mathcal{C}_n=2^{n-1}+2^n\mathbb{Z}$, $n\in\mathbb{N}$. Множества $\mathcal{C}_n$ попарно не пересекаются и $\mathbb{Z}={}=\{0\}\bigcup\big(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{C}_n\big)$. Определим многозначное (двузначное) отображение $\mathbb{R}\ni t\mapsto F(t)\in\mathrm{comp}\,\mathbb{R}$. Если $t\in[0,1)$, то положим $F(t)=\{-1,1\}$. Если $t\in[m,m+1)$, где $m\in\mathcal{C}_n$ для некоторого $n\in\mathbb{N}$, то положим

$$F(t)\;=\;\{-1+2^{-n}\,\sin\,2^n\pi(t-m),1+2^{-n}\,\sin\,2^n\pi(t-m)\}.$$

Справедливо включение $F\in C_b(\mathbb{R},\mathrm{comp}\,\mathbb{R})$. Для любого $N\in\mathbb{N}$ многозначное отображение $\mathbb{R}\ni t\mapsto F_N(t)\in\mathrm{comp}\,\mathbb{R}$, для которого $F_N(t)=\{-1,1\}$, если $t\in[0,1)$ или $t\in[m,m+1)$ при

$m \in \mathcal{C}_n$, $n > N$, и $F_N(t) = F(t)$, если $t \in [m, m+1)$ при $m \in \mathcal{C}_n$, $n \leqslant N$, является непрерывным (в метрике Хаусдорфа $\mathrm{dist}^{(\rho_{\mathbb{R}})}$) и периодическим с периодом 2^N. С другой стороны,

$$\max_{t \in \mathbb{R}} \mathrm{dist}^{(\rho_{\mathbb{R}})} (F(t), F_N(t)) \,=\, 2^{-N-1} \to 0$$

при $N \to +\infty$. Поэтому $F \in CAP\,(\mathbb{R}, \mathrm{comp}\,\mathbb{R})$. Если $t \in [m, m+1)$, где $m \in \mathcal{C}_n$, $n \in \mathbb{N}$, то

$$F(0;t) \,=\, -1 + 2^{-n}\,\sin\,2^n \pi(t-m) \;\text{ при }\; \sin\,2^n\pi(t-m) > 0,$$

$$F(0;t) \,=\, 1 + 2^{-n}\,\sin\,2^n \pi(t-m) \;\text{ при }\; \sin\,2^n\pi(t-m) < 0$$

и $F(0;t) = \{-1, 1\}$ при $\sin\,2^n\pi(t-m) = 0$. Теперь предположим, что многозначное отображение $F(0;\cdot)$ имеет сечение $f \in \mathcal{A}R\,(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ среди чисел $2^{n-1}\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ найдется (сколь угодно большое) число q_n такое, что

$$\int_0^1 |f(\tau) - f(\tau + q_n)|\, d\tau \,<\, 2^{-n} \tag{1.6}$$

(эти числа образуют относительно плотное множество [1]). При этом из определения множеств $\mathcal{C}_n$ следует, что для любого $n \in \mathbb{N}$ найдется натуральное число $n_1 \geqslant n$ такое, что $f(\tau+q_n) = -1+2^{-n_1}\,\sin\,2^{n_1}\pi\tau$ при $\sin\,2^{n_1}\pi\tau > 0$, $f(\tau+q_n) = 1+2^{-n_1}\,\sin\,2^{n_1}\pi\tau$ при $\sin\,2^{n_1}\pi\tau < 0$ и $f(\tau+q_n) = \{-1, 1\}$ при $\sin\,2^{n_1}\pi\tau = 0$, где $\tau \in [0,1)$. Но тогда функции $f(\cdot + q_n)$ не могут сходиться в $L^1([0,1], \mathbb{R})$ при $n \to +\infty$ ни к какой функции (из $L^1([0,1], \mathbb{R})$), и в том числе к функции $f(\cdot)$ (которая на отрезке $[0,1]$ принимает значения либо -1, либо 1), что противоречит условию (1.6). Полученное противоречие показывает, что у многозначного отображения $F(0;\cdot)$ нет сечений из пространства $\mathcal{A}R\,(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Замечание 2. Многозначное отображение $F(0;\cdot)$ из примера 1 также не имеет сечений из пространства $M^{\,\mathrm{comp}}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

В [4, 18] (см. также [19]) доказано следующее утверждение.

Теорема 5. *Пусть (U, ρ) — полное метрическое пространство, $F \in S(\mathbb{R}, \mathrm{comp}\,U)$, $g \in S(\mathbb{R}, U)$. Предположим, что для некоторого (и, следовательно, для всех) $l > 0$*

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}} \frac{1}{2l} \int_{\xi - l}^{\xi + l} \mathrm{dist}'(F(g(\tau);\tau), F(g(\tau), \varepsilon; \tau))\, d\tau \to 0 \tag{1.7}$$

при $\varepsilon \to +0$. Тогда $F(g(\cdot);\cdot) \in S(\mathbb{R}, \mathrm{comp}\,U)$ и $\mathrm{Mod}\,F(g(\cdot);\cdot) \subseteq \mathrm{Mod}\,F + \mathrm{Mod}\,g$. Если, более того, $F \in S^p(\mathbb{R}, \mathrm{comp}\,U)$ при некотором $p \geqslant 1$, то также $F(g(\cdot);\cdot) \in S^p(\mathbb{R}, \mathrm{comp}\,U)$.

Аналогичные утверждения справедливы также для рекуррентных и почти рекуррентных многозначных отображений F и функций g.

Теорема 6. *Пусть (U, ρ) — полное метрическое пространство, $F \in \mathcal{R}_\Gamma(\mathbb{R}, \mathrm{comp}\,U)$, $g \in \mathcal{R}_\Gamma(\mathbb{R}, U)$, где $\Gamma \in \mathcal{N}_{\mathrm{rd}}\,(\mathcal{A})$. Предположим, что для некоторого (и, следовательно, для всех) $l > 0$ выполнено условие (1.7). Тогда $F(g(\cdot);\cdot) \in \mathcal{R}_\Gamma(\mathbb{R}, \mathrm{comp}\,U)$. Если, более того, $F \in \mathcal{R}^p_\Gamma(\mathbb{R}, \mathrm{comp}\,U)$, $p \geqslant 1$, то также $F(g(\cdot);\cdot) \in \mathcal{R}^p_\Gamma(\mathbb{R}, \mathrm{comp}\,U)$.*

Теорема 7. *Пусть (U, ρ) — полное метрическое пространство, $F \in \mathcal{A}R_\Gamma(\mathbb{R}, \mathrm{comp}\,U)$, $g \in \mathcal{A}R_\Gamma(\mathbb{R}, U)$, где $\Gamma \in \mathcal{N}_{\mathrm{rd}}\,(\mathcal{A})$. Предположим, что для некоторого (и, следовательно, для всех) $l > 0$ выполнено условие (1.7). Тогда $F(g(\cdot);\cdot) \in \mathcal{A}R_\Gamma(\mathbb{R}, \mathrm{comp}\,U)$. Если, более того, $F \in \mathcal{A}R^p_\Gamma(\mathbb{R}, \mathrm{comp}\,U)$ при некотором $p \geqslant 1$, то также $F(g(\cdot);\cdot) \in \mathcal{A}R^p_\Gamma(\mathbb{R}, \mathrm{comp}\,U)$.*

Теоремы 6 и 7, а также теорема 8 доказаны в § 4.

Теорема 8. *Пусть (U,ρ) — полное метрическое пространство, $F \in M^{\,\mathrm{comp}}(\mathbb{R}, \mathrm{comp}\, U)$, $g \in M^{\,\mathrm{comp}}(\mathbb{R}, U)$, где $\Gamma \in \mathcal{N}_{\mathrm{rd}}\,(\mathcal{A})$. Предположим, что для некоторого (и, следовательно, для всех) $l > 0$ выполнено условие* (1.7). *Тогда $F(g(\cdot);\cdot) \in M^{\,\mathrm{comp}}(\mathbb{R}, \mathrm{comp}\, U)$. Если, более того, $F \in L^{p,\,\mathrm{comp}}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, \mathrm{comp}\, U)$, $p \geqslant 1$, то также $F(g(\cdot);\cdot) \in L^{p,\,\mathrm{comp}}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, \mathrm{comp}\, U)$.*

Для измеримых по Лебегу множеств $T \subseteq \mathbb{R}$ обозначим

$$\varkappa_l(T) \,=\, \sup_{\xi\,\in\,\mathbb{R}}\, \frac{1}{2l}\, \mathrm{mes}\,[\xi - l, \xi + l] \bigcap T, \quad l > 0.$$

Для любого измеримого (по Лебегу) множества $T \subseteq \mathbb{R}$ и любых чисел $l_1 > 0$ и $l_2 \geqslant l_1$ выполняются оценки

$$\frac{l_1}{l_2}\, \varkappa_{l_1}(T) \,\leqslant\, \varkappa_{l_2}(T) \,\leqslant\, \frac{l_1}{l_2} \left(- \left[-\frac{l_2}{l_1} \right] \right) \varkappa_{l_1}(T), \tag{1.8}$$

где $[\xi]$ — целая часть числа $\xi \in \mathbb{R}$. Положим $\varkappa(T) \doteq \varkappa_1(T)$.

Пусть $\Gamma \in \mathcal{N}_{\mathrm{rd}}\,(\mathcal{A})$ (где $\mathcal{A}$ — произвольное направленное множество). Обозначим через $\mathcal{R}\,\{\mathbb{R}\}$ совокупность множеств $T \subseteq \mathbb{R}$, для которых $\chi_T \in \mathcal{R}\,(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Пусть $\mathcal{A}R_\Gamma\{\mathbb{R}\}$ — совокупность множеств $T \subseteq \mathbb{R}$, для которых $\chi_T \in \mathcal{A}R_\Gamma(\mathbb{R}, \mathbb{R})$; $\mathcal{R}_\Gamma\{\mathbb{R}\}$ — совокупность множеств $T \subseteq \mathbb{R}$, для которых $\chi_T \in \mathcal{R}_\Gamma(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (что эквивалентно условию $\chi_T \in \mathcal{R}^1_\Gamma(\mathbb{R}, \mathbb{R})$), и $M^{\,\mathrm{comp}}\{\mathbb{R}\}$ — совокупность множеств $T \subseteq \mathbb{R}$, для которых $\chi_T \in M^{\,\mathrm{comp}}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Справедливо равенство $\mathcal{R}_\Gamma\{\mathbb{R}\} = \mathcal{A}R_\Gamma\{\mathbb{R}\} \cap M^{\,\mathrm{comp}}\{\mathbb{R}\}$.

Если $T \in \mathcal{R}_\Gamma\{\mathbb{R}\}$, то $\mathbb{R} \setminus T \in \mathcal{R}_\Gamma\{\mathbb{R}\}$. Для множеств T_1, $T_2 \in \mathcal{R}_\Gamma\{\mathbb{R}\}$ множества $T_1 \cap T_2$, $T_1 \cup T_2$ и $T_1 \setminus T_2$ также принадлежат $\mathcal{R}_\Gamma\{\mathbb{R}\}$ (см. [1]). Если $T_j \in \mathcal{R}_\Gamma\{\mathbb{R}\}$, $j \in \mathbb{N}$, и $\sum\limits_{j\,\in\,\mathbb{N}} \varkappa(T_j) < +\infty$, то также $\bigcup\limits_{j\,\in\,\mathbb{N}} T_j \in \mathcal{R}_\Gamma\{\mathbb{R}\}$ и $\varkappa\big(\bigcup\limits_{j\,\in\,\mathbb{N}} T_j\big) \leqslant \sum\limits_{j\,\in\,\mathbb{N}} \varkappa(T_j)$.

Любое (полное) метрическое пространство (U,ρ) можно изометрически вложить в некоторое вещественное банахово пространство $(\mathcal{B}, \|\cdot\|)$, при этом сильно измеримые функции $\mathbb{R} \ni t \mapsto f(t) \in U \subseteq \mathcal{B}$ принадлежат $M(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ и для всех f, $g \in L^p([-l,l], U)$, $l > 0$, $p \geqslant 1$, выполняется равенство $D^{(\rho)}_{p,\,l}(f,g) = \|f - g\|_{p,\,l}$, где $\|\cdot\|_{p,\,l}$ — норма в пространстве $L^p([-l,l], \mathcal{B})$:

$$\|f\|_{p,\,l} \,\doteq\, \left(\frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} \|f(\tau)\|^p\, d\tau \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Также для всех f, $g \in L^\infty(\mathbb{R}, U)$ имеем $D^{(\rho)}_\infty(f,g) = \|f - g\|_\infty$, где $\|\cdot\|_\infty$ — норма в пространстве $L^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{B})$:

$$\|f\|_\infty \,\doteq\, \operatorname*{ess\,sup}_{t\,\in\,\mathbb{R}} \|f(t)\|.$$

В дальнейшем в качестве метрического пространства (U,ρ) будет также рассматриваться вещественное банахово пространство $(\mathcal{B}, \|\cdot\|)$, $\rho(x,y) = \|x - y\|$, x, $y \in \mathcal{B}$.

Для произвольного направленного множества $\mathcal{A}$ пусть $\mathcal{N}^*_{\mathrm{rd}}\,(\mathcal{A})$ — множество направленностей $\Gamma \in \mathcal{N}_{\mathrm{rd}}\,(\mathcal{A})$, для которых (для некоторых метрических пространств (U,ρ)) существуют функции $f \in \mathcal{R}_\Gamma(\mathbb{R}, U)$, не являющиеся п.в. постоянными. Если функция $f \in \mathcal{R}_\Gamma(\mathbb{R}, U)$, где $\Gamma \in \mathcal{N}_{\mathrm{rd}}\,(\mathcal{A})$, не является п.в. постоянной, то $\Gamma \in \mathcal{N}^*_{\mathrm{rd}}\,(\mathcal{A})$ и существует функция $\widetilde{f} \in \mathcal{R}_\Gamma(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, которая также не является п.в. постоянной, при этом в качестве функции $\widetilde{f}$ можно выбрать одну из функций $\mathbb{R} \ni t \mapsto \rho(f(t), x)$, $x \in U$ (см. [1]).

В [3] доказана

Теорема 9. *Пусть $(\mathcal{B}, \|\cdot\|)$ — вещественное банахово пространство, $\Gamma \in \mathcal{N}_{\mathrm{rd}}\,(\mathcal{A})$, где $\mathcal{A}$ — произвольное направленное множество, и $f \in \mathcal{R}_\Gamma(\mathbb{R}, \mathcal{B})$. Тогда для любых $\delta > 0$ и $\mathcal{T} > 0$ существуют множество $T \in \mathcal{R}_{\Gamma\{\mathcal{T}\}}\{\mathbb{R}\}$ и функция $\mathcal{F} \in \mathcal{C}R_{\Gamma\{\mathcal{T}\}}(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ такие, что $\varkappa(\mathbb{R} \setminus T) < \delta$ и $f(t) = \mathcal{F}(t)$ при всех $t \in T$.*

При доказательстве теоремы 9 (в [3]) использовалась теорема 13. Доказательство следующей теоремы здесь не приводится (как и доказательства теорем 16 и 1), так как оно без существенных изменений повторяет доказательство теоремы 9, но с использованием теоремы 16 вместо теоремы 13.

Теорема 10. *Пусть* $(\mathcal{B},\|\cdot\|)$ — *вещественное банахово пространство,* $\Gamma\in\mathcal{N}_{\mathrm{rd}}(\mathcal{A})$, *где* $\mathcal{A}$ — *произвольное направленное множество, и* $f\in\mathcal{R}_\Gamma(\mathbb{R},\mathcal{B})$. *Тогда для любого* $\delta>0$ *существуют множество* $T\in\mathcal{R}_\Gamma\{\mathbb{R}\}$ *и функция* $\mathcal{F}\in\mathcal{C}R_\Gamma(\mathbb{R},\mathcal{B})$ *такие, что* $\varkappa(\mathbb{R}\setminus T)<\delta$ *и* $f(t)=\mathcal{F}(t)$ *при всех* $t\in T$.

Если в условиях теоремы 10 $f\in\mathcal{R}^p_\Gamma(\mathbb{R},\mathcal{B})$, $p\geqslant 1$, то (см. [3, замечание 5]) для любых $\delta,\,\varepsilon>0$ можно выбрать множество $T\in\mathcal{R}_\Gamma\{\mathbb{R}\}$ и функцию $\mathcal{F}\in\mathcal{C}R_\Gamma(\mathbb{R},\mathcal{B})$ так, чтобы (кроме приведенных в теореме 10 свойств) для всех $\xi\in\mathbb{R}$ выполнялось также неравенство

$$\int_\xi^{\xi+1}\|\mathcal{F}(\tau)\|^p\,d\tau\leqslant\int_\xi^{\xi+1}\|f(\tau)\|^p\,d\tau+\varepsilon^p.$$

Аналогичное теореме 10 утверждение для функций $f\in S(\mathbb{R},\mathcal{B})$ доказано в [20].

Теорема 11. *Пусть* $T\in\mathcal{R}_\Gamma\{\mathbb{R}\}$, *где* $\Gamma\in\mathcal{N}^*_{\mathrm{rd}}(\mathcal{A})$. *Тогда для любого* $\delta>0$ *найдутся замкнутое множество* $K\in\mathcal{R}_\Gamma\{\mathbb{R}\}$ *и открытое множество* $\mathcal{O}\in\mathcal{R}_\Gamma\{\mathbb{R}\}$ *такие, что* $K\subseteq T\subseteq\mathcal{O}$ *и* $\varkappa(\mathcal{O}\setminus K)<\delta$.

Теорема 11 позволяет в условиях теоремы 10, если $\Gamma\in\mathcal{N}^*_{\mathrm{rd}}(\mathcal{A})$ (в частности, если функция f не является п.в. постоянной), выбирать замкнутые множества T.

Доказательство теоремы 11 приведено в § 5.

§ 2. Элементарные рекуррентные функции

Пусть $\Gamma\in\mathcal{N}_{\mathrm{rd}}(\mathcal{A})$. Для произвольных измеримых (по Лебегу) множеств $\widetilde{T}_j\subseteq\mathbb{R}$, $j\in\mathbb{N}$, будем писать $\widetilde{T}_j\xrightarrow{\Gamma}\varnothing$ при $j\to+\infty$, если для любых $l,\,\delta>0$ найдутся элемент $\alpha\in\mathcal{A}$ и число $j_0\in\mathbb{N}$ такие, что при всех $j\geqslant j_0$ и $t\in\Gamma(\alpha)$ выполняется неравенство $\operatorname{mes}[t-l,t+l]\cap\widetilde{T}_j<2l\delta$. Обозначим через $\mathfrak{AM}_\Gamma$ совокупность последовательностей $\{T_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, состоящих из попарно непересекающихся измеримых (по Лебегу) подмножеств $T_j\subseteq\mathbb{R}$ таких, что $T_j\in\mathcal{A}R_\Gamma\{\mathbb{R}\}$, $j\in\mathbb{N}$, и $\mathbb{R}\setminus\bigcup\limits_{j\leqslant J}T_j\xrightarrow{\Gamma}\varnothing$ при $J\to+\infty$. Если $\{T_j\}_{j\in\mathbb{N}}\in\mathfrak{AM}_\Gamma$, то $\operatorname{mes}\mathbb{R}\setminus\bigcup\limits_j T_j=0$. Пусть $\mathfrak{M}^{\mathrm{comp}}$ — совокупность последовательностей $\{T_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, состоящих из попарно непересекающихся измеримых (по Лебегу) подмножеств $T_j\subseteq\mathbb{R}$ таких, что $T_j\in M^{\mathrm{comp}}\{\mathbb{R}\}$, $j\in\mathbb{N}$, и $\varkappa\bigl(\mathbb{R}\setminus\bigcup\limits_{j\leqslant J}T_j\bigr)\to 0$ при $J\to+\infty$. Если $\{T_j\}_{j\in\mathbb{N}}\in\mathfrak{M}^{\mathrm{comp}}$, то также $\operatorname{mes}\mathbb{R}\setminus\bigcup\limits_j T_j=0$. Через $\mathfrak{M}_\Gamma$ обозначим совокупность тех последовательностей $\{T_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ из $\mathfrak{M}^{\mathrm{comp}}$, для которых $T_j\in\mathcal{R}_\Gamma\{\mathbb{R}\}$, $j\in\mathbb{N}$. Если $\widetilde{T}_j\subseteq\mathbb{R}$, $j\in\mathbb{N}$, — измеримые (по Лебегу) множества и $\varkappa(\widetilde{T}_j)\to 0$ при $j\to+\infty$, то $\widetilde{T}_j\xrightarrow{\Gamma}\varnothing$ при $j\to+\infty$. Поэтому $\mathfrak{M}_\Gamma\subset\mathfrak{AM}_\Gamma$. Более того, справедливо равенство $\mathfrak{M}_\Gamma=\mathfrak{AM}_\Gamma\cap\mathfrak{M}^{\mathrm{comp}}$ [1].

Замечание 3. В данной работе для множеств $\mathfrak{AM}_\Gamma$ и $\mathfrak{M}_\Gamma$ используются обозначения, отличающиеся от обозначений в [1] и [3]. В последних работах эти множества обозначались как $\mathfrak{M}_\Gamma$ и $\mathfrak{M}^{\mathrm{comp}}_\Gamma$ соответственно.

Через $EM^{\mathrm{comp}}(\mathbb{R},U)$ обозначим множество элементарных функций (1.1), для которых $\{T_j\}_{j\in\mathbb{N}}\in\mathfrak{M}^{\mathrm{comp}}$. Справедливо вложение $EM^{\mathrm{comp}}(\mathbb{R},U)\subseteq M^{\mathrm{comp}}(\mathbb{R},U)$. Более того (см. [1]), если $\{T_j\}_{j\in\mathbb{N}}\in\mathfrak{M}^{\mathrm{comp}}$, то для любых функций $f_j\in M^{\mathrm{comp}}(\mathbb{R},U)$, $j\in\mathbb{N}$, имеем

$$\sum_{j\in\mathbb{N}}f_j(\cdot)\chi_{T_j}(\cdot)\in M^{\mathrm{comp}}(\mathbb{R},U).$$

Пусть $\mathcal{E}R_{\Gamma}(\mathbb{R},U)$ — множество элементарных функций (1.1), для которых $\{T_j\}_{j\,\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{M}_{\Gamma}$. Если $\{T_j\}_{j\,\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{M}_{\Gamma}$, то для любых функций $f_j \in \mathcal{R}_{\Gamma}(\mathbb{R},U)$, $j \in \mathbb{N}$, также (см. [1])

$$\sum_{j\,\in\mathbb{N}} f_j(\cdot)\chi_{T_j}(\cdot) \,\in\, \mathcal{R}_{\Gamma}(\mathbb{R},U)$$

(и, в частности, $\mathcal{E}R_{\Gamma}(\mathbb{R},U) \subseteq \mathcal{R}_{\Gamma}(\mathbb{R},U)$).

В [1] доказана

Теорема 12. *Пусть $f \in \mathcal{R}_{\Gamma}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, где $\Gamma \in \mathcal{N}_{\mathrm{rd}}(\mathcal{A})$. Тогда для любых $a \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ и $\mathcal{T} > 0$ существует множество $T \in \mathcal{R}_{\Gamma\{\mathcal{T}\}}\{\mathbb{R}\}$ такое, что $f(t) < a+\varepsilon$ при всех $t \in T$ и $f(t) > a-\varepsilon$ при п.в. $t \in \mathbb{R}\setminus T$.*

Теорема 12 являлась ключевым утверждением при доказательстве теоремы 13.

Теорема 13 (см. [1]). *Пусть $\Gamma \in \mathcal{N}_{\mathrm{rd}}(\mathcal{A})$, где $\mathcal{A}$ — произвольное направленное множество. Тогда для любой функции $f \in \mathcal{R}_{\Gamma}(\mathbb{R},U)$ и любых $\varepsilon > 0$ и $\mathcal{T} > 0$ существует элементарная функция $f_{\varepsilon} \in \mathcal{E}R_{\Gamma\{\mathcal{T}\}}(\mathbb{R},U)$ такая, что $\rho(f(t),f_{\varepsilon}(t)) < \varepsilon$ при п.в. $t \in \mathbb{R}$. Если, кроме того, $f \in \mathcal{R}^p_{\Gamma}(\mathbb{R},U)$ при некотором $p \geqslant 1$, то $f_{\varepsilon} \in \mathcal{E}R_{\Gamma\{\mathcal{T}\}}(\mathbb{R},U) \cap \mathcal{R}^p_{\Gamma\{\mathcal{T}\}}(\mathbb{R},U)$.*

На теорему 13, в свою очередь, опиралось доказательство теоремы 14.

Теорема 14 (см. [1]). *Пусть (U,ρ) — полное метрическое пространство, $F \in \mathcal{R}_{\Gamma}(\mathbb{R},\mathrm{cl}_b\,U)$ и $g \in \mathcal{R}_{\Gamma}(\mathbb{R},U)$, где $\Gamma \in \mathcal{N}_{\mathrm{rd}}(\mathcal{A})$. Тогда для любого $\mathcal{T} > 0$ и любой неубывающей функции $\eta : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$, для которой $\eta(0) = 0$ и $\eta(\xi) > 0$ при $\xi > 0$, найдется функция $f \in \in \mathcal{R}_{\Gamma\{\mathcal{T}\}}(\mathbb{R},U)$ такая, что $f(t) \in F(t)$ и $\rho(f(t),g(t)) \leqslant \rho(g(t),F(t)) + \eta(\rho(g(t),F(t)))$ при п.в. $t \in \mathbb{R}$. Если, кроме того, $F \in \mathcal{R}^p_{\Gamma}(\mathbb{R},\mathrm{cl}_b\,U)$ при некотором $p \geqslant 1$, то также $f \in \mathcal{R}^p_{\Gamma\{\mathcal{T}\}}(\mathbb{R},U)$.*

Следующая теорема доказывается в § 3.

Теорема 15. *Пусть $f \in \mathcal{R}_{\Gamma}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, где $\Gamma \in \mathcal{N}_{\mathrm{rd}}(\mathcal{A})$. Тогда для любых $a \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ существует множество $T \in \mathcal{R}_{\Gamma}\{\mathbb{R}\}$ такое, что $f(t) < a+\varepsilon$ при всех $t \in T$ и $f(t) > a-\varepsilon$ при п.в. $t \in \mathbb{R}\setminus T$. Если $f \in \mathcal{C}R_{\Gamma}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, то множество T можно считать замкнутым.*

В [3] приведен пример функции $f \in \mathcal{C}R(\mathbb{R},\mathbb{R})$, для которой $|f(t)| < 1$ при всех $t \in \mathbb{R}$ и такой, что для любого $\lambda \in (-1,1)$

$$\{t \in \mathbb{R} : f(t) < \lambda\} \notin \mathcal{R}\{\mathbb{R}\}$$

(и, кроме того, равенство $f(t) = \lambda$ выполняется для счетного множества чисел $t \in \mathbb{R}$, не имеющего конечных предельных точек).

Так как $\Gamma \prec \Gamma^{\{\mathcal{T}\}}$ для всех $\mathcal{T} > 0$, то

$$\mathcal{R}_{\Gamma}(\mathbb{R},U) \subseteq \bigcap_{J>0} \mathcal{R}_{\Gamma\{\mathcal{T}\}}(\mathbb{R},U), \quad \mathcal{E}R_{\Gamma}(\mathbb{R},U) \subseteq \bigcap_{J>0} \mathcal{E}R_{\Gamma\{\mathcal{T}\}}(\mathbb{R},U), \quad \mathcal{R}_{\Gamma}\{\mathbb{R}\} \subseteq \bigcap_{J>0} \mathcal{R}_{\Gamma\{\mathcal{T}\}}\{\mathbb{R}\}.$$

Поэтому теорема 15 сильнее теоремы 12. Также теорема 1 сильнее теоремы 14 и приводимая ниже теорема 16 сильнее теоремы 13.

Теорема 16. *Пусть $\Gamma \in \mathcal{N}_{\mathrm{rd}}(\mathcal{A})$, где $\mathcal{A}$ — произвольное направленное множество, и $f \in \in \mathcal{R}_{\Gamma}(\mathbb{R},U)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует элементарная функция $f_{\varepsilon} \in \mathcal{E}R_{\Gamma}(\mathbb{R},U)$ такая, что $\rho(f(t),f_{\varepsilon}(t)) < \varepsilon$ при п.в. $t \in \mathbb{R}$. Если, кроме того, $f \in \mathcal{R}^p_{\Gamma}(\mathbb{R},U)$ при некотором $p \geqslant 1$, то $f_{\varepsilon} \in \mathcal{E}R_{\Gamma}(\mathbb{R},U) \cap \mathcal{R}^p_{\Gamma}(\mathbb{R},U)$.*

Теорема 16 следует из теоремы 15, а теорема 1 — из теоремы 16. Доказательства теорем 16 и 1 в данной работе не приводятся, так как они в основном повторяют доказательства теорем 13 и 14 в [1]. При этом при доказательстве теоремы 16 нужно использовать теорему 15 вместо теоремы 12, а при доказательстве теоремы 1 — теорему 16 вместо теоремы 13.

В [1] доказаны следующие два утверждения.

Теорема 17. *Пусть $f \in M^{\,\mathrm{comp}}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Тогда для любых $a \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ существует множество $T \in M^{\,\mathrm{comp}}\{\mathbb{R}\}$ такое, что $f(t) < a+\varepsilon$ при всех $t \in T$ и $f(t) > a-\varepsilon$ при п.в. $t \in \mathbb{R}\setminus T$.*

Теорема 18. *Для любой функции $f \in M^{\,\mathrm{comp}}(\mathbb{R},U)$ и любого $\varepsilon > 0$ существует элементарная функция $f_\varepsilon \in EM^{\,\mathrm{comp}}(\mathbb{R},U)$ такая, что $\rho(f(t),f_\varepsilon(t)) < \varepsilon$ при п.в. $t \in \mathbb{R}$. Если, кроме того, $f \in L^{p,\,\mathrm{comp}}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},U)$, $p \geqslant 1$, то $f_\varepsilon \in EM^{\,\mathrm{comp}}(\mathbb{R},U) \cap L^{p,\,\mathrm{comp}}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},U)$.*

Аналогичные теоремам 15 и 16 утверждения справедливы также для функций $f \in \mathcal{A}R_\Gamma(\mathbb{R},U)$ (см. [3]).

§ 3. Доказательство теоремы 15

Если функция $f \in \mathcal{R}_\Gamma(\mathbb{R},\mathbb{R})$ является п.в. постоянной, то для любого $a \in \mathbb{R}$ (и любого $\varepsilon > 0$) достаточно выбрать множество $T = \{t \in \mathbb{R} : f(t) \leqslant a\}$. Поэтому (при доказательстве теоремы 15) можно считать, что функция $f \in \mathcal{R}_\Gamma(\mathbb{R},\mathbb{R})$ п.в. постоянной не является и, следовательно, $\Gamma \in \mathcal{N}^*_{\mathrm{rd}}(\mathcal{A})$.

Пусть $\mathfrak{LF}_1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ — совокупность функций $\widetilde{f} \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, для которых при некотором (и, следовательно, при любом) $l > 0$

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\ \sup_{\delta\in[0,\widetilde{\delta}]}\ \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}|\widetilde{f}(t+\tau+\delta)-\widetilde{f}(t+\tau)|\,d\tau \ \to\ 0 \tag{3.1}$$

при $\widetilde{\delta} \to +0$. Для любой функции $\widetilde{f} \in L^{1,\,\mathrm{comp}}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ (при всех $l > 0$) множество $\{\widetilde{f}(\cdot|_{[-l,l]}+t) : t \in \mathbb{R}\}$ предкомпактно в $(L^1([-l,l],\mathbb{R}), D^{(\rho_\mathbb{R})}_{1,\,l})^3$, поэтому выполняется условие (3.1) и, следовательно, $L^{1,\,\mathrm{comp}}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \subset \mathfrak{LF}_1(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Теорема 19 (см. [1]). *Для любых $\varepsilon > 0$ и $\delta \in (0,1]$ существует число $h = h(\varepsilon,\delta) > 0$ такое, что для любого $l > 0$ и любой функции $\widetilde{f} \in \mathfrak{LF}_1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ существует число $\widetilde{\lambda} = \widetilde{\lambda}(\varepsilon,\delta;l,\widetilde{f}) > 0$ такое, что для всех $\lambda \geqslant \widetilde{\lambda}$, всех функций $g_* \in L^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, для которых $\|g_*\|_\infty \leqslant h$, и всех $\tau_0 \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство*

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\ \mathrm{mes}\,\{\tau \in [-l,l] : |\widetilde{f}(t+\tau)+g_*(t+\tau)+\varepsilon\sin\lambda(\tau+\tau_0)| < h\} < 2l\delta.$$

Для функции $\widetilde{f} \in M(\mathbb{R},\mathbb{R})$ и числа $R > 0$ определим функцию

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto \widetilde{f}^{\{R\}}(t) \doteq \begin{cases} R\,, & \text{если } f(t) \geqslant R,\\ f(t)\,, & \text{если } -R < f(t) < R,\\ -R\,, & \text{если } f(t) \leqslant -R.\end{cases}$$

Пусть $\mathfrak{LF}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ — множество функций $\widetilde{f} \in M(\mathbb{R},\mathbb{R})$, для которых $\widetilde{f}^{\{R\}} \in \mathfrak{LF}_1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ при всех $R > 0$. Если $\widetilde{f} \in M^{\,\mathrm{comp}}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, то для всех $R > 0$ выполняется включение $\widetilde{f}^{\{R\}} \in L^{1,\,\mathrm{comp}}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ (см. [1, леммы 1 и 13]) и, следовательно, $M^{\,\mathrm{comp}}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \subset \mathfrak{LF}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Следствие 3. *Теорема 19 остается справедливой, если функцию $\widetilde{f}$ выбирать из множества $\mathfrak{LF}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.*

---

[3] На $\mathbb{R}$ рассматривается естественная метрика $\rho_\mathbb{R}(x,y) = |x-y|$, $x,y \in \mathbb{R}$.

Далее используемые в этом параграфе простые утверждения будут формулироваться (без доказательств) в виде лемм.

Лемма 10. *Если* $\widetilde{f} \in \mathfrak{LF}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *и* $\widetilde{f}_1 \in C^{\,\mathrm{comp}}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, *то* $\widetilde{f} + \widetilde{f}_1 \in \mathfrak{LF}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

На множестве $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ бесконечно дифференцируемых функций $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ определим метрику

$$D_{(\infty)}(g_1,g_2) \doteq \sum_{m\,\in\,\mathbb{Z}_+,\ l\,\in\,\mathbb{N}} 2^{-m-l-1}\ \frac{\max\limits_{\tau\,\in\,[-l,l]} |g_1^{(m)}(\tau) - g_2^{(m)}(\tau)|}{1 + \max\limits_{\tau\,\in\,[-l,l]} |g_1^{(m)}(\tau) - g_2^{(m)}(\tau)|}$$

(где $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N}\cup\{0\}$, $g^{(0)} = g$, $g^{(m)}$ — производная функции g порядка $m \in \mathbb{N}$). Метрическое пространство $(C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}), D_{(\infty)})$ является полным. Для функций $g \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ обозначим

$$\widetilde{\Gamma}^{(\infty)}(g;\varepsilon) = \{t \in \mathbb{R} : D_{(\infty)}(g(\cdot), g(\cdot+t)) < \varepsilon\}, \quad \varepsilon > 0.$$

Справедливо включение $\widetilde{\Gamma}^{(\infty)}(g;\cdot) \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^+_{\geqslant})$. На метрическом пространстве $(C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}), D_{(\infty)})$ рассматривается динамическая система сдвигов: для каждой функции $g \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ задается движение $\mathbb{R} \ni t \mapsto g(\cdot+t)$. Пусть $\mathcal{C}R^{\,(\infty)}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ — множество функций $g \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, для которых движения $\mathbb{R} \ni t \mapsto g(\cdot+t)$ рекуррентны. Функция $g \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ принадлежит $\mathcal{C}R^{\,(\infty)}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ тогда и только тогда, когда $\widetilde{\Gamma}^{(\infty)}(g;\varepsilon) \in \mathcal{S}_{\mathrm{rd}}$ для всех $\varepsilon > 0$ (что эквивалентно условию $\widetilde{\Gamma}^{(\infty)}(g;\cdot) \in \mathcal{N}_{\mathrm{rd}}(\mathbb{R}^+_{\geqslant})$) и движение $\mathbb{R} \ni t \mapsto g(\cdot+t)$ устойчиво по Лагранжу.

Лемма 11. *Пусть* $g \in (C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}), D_{(\infty)})$. *Тогда движение* $\mathbb{R} \ni t \mapsto g(\cdot+t)$ *устойчиво по Лагранжу в том и только том случае, если найдутся числа* $C_m \geqslant 0$, $m \in \mathbb{Z}_+$, *такие, что* $|g^{(m)}(t)| \leqslant C_m$ *для всех* $t \in \mathbb{R}$ *и* $m \in \mathbb{Z}_+$.

Пусть $\mathcal{C}R^{(\infty)}_\Gamma(\mathbb{R},\mathbb{R})$ — множество функций $g \in \mathcal{C}R^{\,(\infty)}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, для которых $\widetilde{\Gamma}^{(\infty)}(g;\cdot) \prec \Gamma$.

Выберем (и зафиксируем) функцию $\Omega \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, для которой $\Omega(t) = 0$ при $|t| \geqslant 1$, $\Omega(t) > 0$ при $|t| < 1$ и $\int_{-\infty}^{+\infty} \Omega(t)\,dt = 1$. Пусть $\Omega_h(t) = \frac{1}{h}\,\Omega\bigl(\frac{t}{h}\bigr)$, $t \in \mathbb{R}$, $h > 0$. Для любой функции $g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ будем обозначать

$$g_{(h)}(\cdot) \doteq (g * \Omega_h)(\cdot) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\cdot-\xi)\,\Omega_h(\xi)\,d\xi.$$

Функции $g_{(h)}$ принадлежат $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Если функция $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ не является п.в. постоянной, то при всех достаточно малых числах $h > 0$ функции $g_{(h)}$ также не являются постоянными.

Лемма 12. *Если* $g \in \mathcal{R}^1_\Gamma(\mathbb{R},\mathbb{R})$, *то* $g_{(h)} \in \mathcal{C}R^{(\infty)}_\Gamma(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *для всех* $h > 0$.

Пусть теперь $\Gamma \in \mathcal{N}^*_{\mathrm{rd}}(\mathcal{A})$ для некоторого направленного множества $\mathcal{A}$. Тогда существует не являющаяся п.в. постоянной функция $\widetilde{f} \in \mathcal{R}_\Gamma(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Выберем число $R > 0$ так, чтобы функция $\widetilde{f}^{\{R\}}$ также не являлась п.в. постоянной, при этом $\widetilde{f}^{\{R\}} \in \mathcal{R}^1_\Gamma(\mathbb{R},\mathbb{R})$ (см., например, [1]). Тогда для некоторого достаточно малого числа $h > 0$ можно выбрать не являющуюся постоянной функцию $g = (\widetilde{f}^{\{R\}})_{(h)} \in \mathcal{C}R^{(\infty)}_\Gamma(\mathbb{R},\mathbb{R})$, которая (без пояснений) будет использоваться в дальнейшей части этого параграфа[4].

Для функции $g \in \mathcal{C}R^{(\infty)}_\Gamma(\mathbb{R},\mathbb{R})$ обозначим через $\mathcal{H}^{\,(\infty)}(g)$ замыкание множества $\{g(\cdot+t) : t \in \mathbb{R}\}$ (орбиты функции g) в метрическом пространстве $(C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}), D_{(\infty)})$. Множество $\mathcal{H}^{\,(\infty)}(g) \subset (C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}), D_{(\infty)})$ компактное. Если функция g не является периодической, то отображение $\mathbb{R} \ni t \mapsto g(\cdot+t) \in \mathcal{H}^{\,(\infty)}(g)$ инъективно. Так как при всех $t \in \mathbb{R}$ и $m \in \mathbb{Z}_+$ для некоторых чисел $C_m \geqslant 0$ выполняются оценки $|g^{(m)}(t)| \leqslant C_m$, то также $|g_1^{(m)}(t)| \leqslant C_m$ для всех $g_1 \in \mathcal{H}^{\,(\infty)}(g)$, всех $t \in \mathbb{R}$ и $m \in \mathbb{Z}_+$.

[4] Функцию g можно определить с помощью функции $f \in \mathcal{R}_\Gamma(\mathbb{R},\mathbb{R})$ (из условия теоремы 15), но далее она будет также использоваться при доказательстве других утверждений, поэтому функция g определена независимо для направленности $\Gamma \in \mathcal{N}^*_{\mathrm{rd}}(\mathcal{A})$.

Лемма 13. *Для любой непрерывной функции* $L : (\mathcal{H}^{(\infty)}(g), D_{(\infty)}) \to \mathbb{R}$ *функция* $\mathbb{R} \ni t \mapsto \mapsto \mathbb{G}(L;t) \doteq L(g(\cdot + t)) \in \mathbb{R}$ *принадлежит* $\mathcal{C}R_\Gamma(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Доказательство. Так как $g \in \mathcal{C}R_\Gamma^{(\infty)}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, то (см. лемму 11) функция $\mathbb{R} \ni t \mapsto \mapsto g(\cdot + t) \in (C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}), D_{(\infty)})$ равномерно непрерывна. С другой стороны, функция L непрерывна на компактном множестве $\mathcal{H}^{(\infty)}(g) \subset (C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}), D_{(\infty)})$, поэтому функция $\mathbb{G}(L;\cdot)$ также равномерно непрерывна и ограничена. Обозначим через

$$\omega(L;\delta) = \max_{g_1,\, g_2 \in \mathcal{H}^{(\infty)}(g) : D_{(\infty)}(g_1,g_2) \leqslant \delta} |L(g_1) - L(g_2)|, \quad \delta > 0,$$

модуль непрерывности функции L. Пусть l, $\varepsilon > 0$. Выберем число $\varepsilon_1 > 0$ так, что $\omega(L;\varepsilon_1) < \varepsilon$. Существует число $\varepsilon_2 > 0$ такое, что для всех $t \in \widetilde{\Gamma}^{(\infty)}(g;\varepsilon_2)$ и всех $\tau \in [-l,l]$ выполняется оценка $D_{(\infty)}(g(\cdot + \tau), g(\cdot + \tau + t)) \leqslant \varepsilon_1$. Тогда также $|\mathbb{G}(L;\tau) - \mathbb{G}(L;\tau + t)| \leqslant \omega(L;\varepsilon_1) < \varepsilon$ и, следовательно, $\widetilde{\Gamma}^{(\infty)}(g;\varepsilon_2) \subseteq \Gamma_C(\mathbb{G}(L;\cdot); l, \varepsilon)$. Последнее вложение (в силу равномерной непрерывности функции $\mathbb{G}(L;\cdot)$ и произвольности выбора чисел l, $\varepsilon > 0$) означает, что $\mathbb{G}(L;\cdot) \in \mathcal{C}R_\Gamma(\mathbb{R},\mathbb{R})$. $\square$

Пусть H — вещественное гильбертово пространство функций $\widetilde{g} \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, для которых

$$\|\widetilde{g}\|_H \doteq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\widetilde{g}(t)|^2 \, e^{-t^2} \, dt \right)^{\frac{1}{2}} < +\infty,$$

со скалярным произведением

$$(\widetilde{g}_1, \widetilde{g}_2)_H = \int_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{g}_1(t) \widetilde{g}_2(t) \, e^{-t^2} \, dt.$$

Справедливо вложение $\mathcal{H}^{(\infty)}(g) \subset H$, при этом тождественное отображение $\mathcal{H}^{(\infty)}(g) \to \to \mathcal{H}^{(\infty)}(g)$ непрерывно из компактного метрического пространства $(\mathcal{H}^{(\infty)}(g), D_{(\infty)})$ в гильбертово пространство H. Поэтому $\mathcal{H}^{(\infty)}(g)$ также компакт в гильбертовом пространстве H и, следовательно, на множестве $\mathcal{H}^{(\infty)}(g)$ метрика $D_{(\infty)}$ и метрика ρ_H, определяемая нормой $\|\cdot\|_H$, задают одну и ту же топологию.

Имеют место следующие леммы.

Лемма 14. *Если* $g_j, \widetilde{g}_j \in \mathcal{H}^{(\infty)}(g)$, $j \in \mathbb{N}$, *то условие* $D_{(\infty)}(g_j, \widetilde{g}_j) \to 0$ *при* $j \to +\infty$ *эквивалентно условию* $\|g_j - \widetilde{g}_j\|_H \to 0$ *при* $j \to +\infty$.

Следствие 4. *Если* $g_j, \widetilde{g}_j \in \mathcal{H}^{(\infty)}(g)$, $j \in \mathbb{N}$, *и* $\|g_j - \widetilde{g}_j\|_H \to 0$ *при* $j \to +\infty$, *то также* $\|g_j^{(1)} - \widetilde{g}_j^{(1)}\|_H \to 0$.

Лемма 15. *Существует число* $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(g) > 0$ *такое, что* $\|\widetilde{g}^{(1)}\|_H \geqslant \varepsilon_1$ *для всех функций* $\widetilde{g} \in \mathcal{H}^{(\infty)}(g)$.

Лемма 15 следует из того, что функция $g \in \mathcal{C}R_\Gamma^{(\infty)}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ не является постоянной.

Лемма 16. *Отображение* $(\mathcal{H}^{(\infty)}(g), D_{(\infty)}) \ni (\widetilde{g}, t) \mapsto \widetilde{g}(\cdot + t) \in H$ *непрерывно (по совокупности переменных).*

Для функций $\widetilde{g} \in \mathcal{H}^{(\infty)}(g)$ и чисел b, $l > 0$ определим множества

$$U_b(\widetilde{g}) = \{g_1 \in \mathcal{H}^{(\infty)}(g) : \|g_1 - \widetilde{g}\|_H < b \text{ и } (g_1 - \widetilde{g}, \widetilde{g}^{(1)})_H = 0\},$$

$$B_b(\widetilde{g}) = \{g_1 \in \mathcal{H}^{(\infty)}(g) : \|g_1 - \widetilde{g}\|_H \leqslant b \text{ и } (g_1 - \widetilde{g}, \widetilde{g}^{(1)})_H = 0\},$$

$$\mathcal{O}_{b,l}(\widetilde{g}) = \{g_1(\cdot + \tau) : g_1 \in U_b(\widetilde{g}), -l < \tau < l\}, \quad \mathcal{B}_{b,l}(\widetilde{g}) = \{g_1(\cdot + \tau) : g_1 \in B_b(\widetilde{g}), -l \leqslant \tau \leqslant l\}.$$

При этом (см. лемму 16) $B_b(\widetilde{g})$ и $\mathcal{B}_{b,l}(\widetilde{g})$ — замкнутые (и, следовательно, компактные) подмножества метрического пространства $(\mathcal{H}^{(\infty)}(g), \rho_H)$.

Лемма 17. *Существуют достаточно малые числа $b = b(g) > 0$ и $l = l(g) > 0$ такие, что для любой функции $\widetilde{g} \in \mathcal{H}^{(\infty)}(g)$ отображение*

$$B_b(\widetilde{g}) \times [-l, l] \ni (g_1, \tau) \mapsto g_1(\cdot + \tau) \in \mathcal{B}_{b,l}(\widetilde{g}) \tag{3.2}$$

является биекцией.

Доказательство. По определению множеств $\mathcal{B}_{b,l}(\widetilde{g})$, рассматриваемые отображения $(g_1, \tau) \mapsto g_1(\cdot + \tau)$ при всех $b,\ l > 0$ являются сюръекциями. Поэтому достаточно доказать для некоторых (достаточно малых) чисел $b,\ l > 0$ их инъективность. В силу следствия 4 и леммы 16 числа $b > 0$ и $l > 0$ можно выбрать так, чтобы для всех $\widetilde{g} \in \mathcal{H}^{(\infty)}(g)$ и всех функций $g_* \in \mathcal{B}_{b,\,2l}(\widetilde{g})$ выполнялось неравенство $\|g_*^{(1)} - \widetilde{g}^{(1)}\|_H < \frac{\varepsilon_1}{2}$, где $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(g) > 0$ — число из леммы 15. Тогда (в силу леммы 15) для всех $\widetilde{g} \in \mathcal{H}^{(\infty)}(g)$, $g_1 \in B_b(\widetilde{g})$ и $\tau \in [0, 2l]$

$$(g_1^{(1)}(\cdot + \tau), \widetilde{g}^{(1)}(\cdot))_H \geqslant \|\widetilde{g}^{(1)}\|_H^2 - \|g_1^{(1)}(\cdot + \tau) - \widetilde{g}^{(1)}(\cdot)\|_H \cdot \|\widetilde{g}^{(1)}\|_H > \frac{\varepsilon_1^2}{2}. \tag{3.3}$$

Предположим теперь, что отображение (3.2) для какой-либо функции $\widetilde{g} \in \mathcal{H}^{(\infty)}(g)$ не является инъективным. Так как для разных функций $g_1,\ g_2 \in B_b(\widetilde{g})$ при всех $\tau \in \mathbb{R}$ функции $g_1(\cdot + \tau)$ и $g_2(\cdot + \tau)$ также разные, то найдутся функции $g_1,\ g_2 \in B_b(\widetilde{g})$ и числа $\tau_1,\ \tau_2 \in [-l, l]$ такие, что $\tau_2 < \tau_1$ и $g_2(\cdot + \tau_2) = g_1(\cdot + \tau_1)$. Пусть $\Delta = \tau_1 - \tau_2 \in (0, 2l]$. Тогда $g_2(\cdot) = g_1(\cdot + \Delta)$ и, следовательно (в силу определения множества $B_b(\widetilde{g})$ и оценки (3.3)),

$$(g_1, \widetilde{g}^{(1)})_H = (\widetilde{g}, \widetilde{g}^{(1)})_H = (g_2, \widetilde{g}^{(1)})_H = (g_1(\cdot + \Delta), \widetilde{g}^{(1)}(\cdot))_H = \int_{-\infty}^{+\infty} g_1(t + \Delta)\, \widetilde{g}^{(1)}(t)\, e^{-t^2}\, dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(g_1(t) + \int_0^{\Delta} g_1^{(1)}(t + \tau)\, d\tau \right) \widetilde{g}^{(1)}(t)\, e^{-t^2}\, dt = (g_1, \widetilde{g}^{(1)})_H + \int_0^{\Delta} (g_1^{(1)}(\cdot + \tau), \widetilde{g}^{(1)}(\cdot))_H\, d\tau \geqslant$$

$$\geqslant (g_1, \widetilde{g}^{(1)})_H + \frac{1}{2}\, \varepsilon_1^2 \Delta > (g_1, \widetilde{g}^{(1)})_H.$$

Полученное противоречие доказывает лемму 17. □

Для заданной функции $g \in \mathcal{C}R_{\Gamma}^{(\infty)}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ зафиксируем числа $b = b(g) > 0$ и $l = l(g) > 0$, которые определяются в лемме 17. При этом будем считать, что $l \in (0, 1]$. Из выбора чисел b и l (при доказательстве леммы 17) следует, что для всех $b_1 \in (0, b]$ и $\widetilde{g} \in \mathcal{H}^{(\infty)}(g)$ множества $\mathcal{O}_{b_1,\,l}(\widetilde{g})$ являются открытыми в метрическом пространстве $(\mathcal{H}^{(\infty)}(g), \rho_H)$.

Из лемм 17, 14 и 16 непосредственно вытекает

Лемма 18. *Для всех функций $\widetilde{g} \in \mathcal{H}^{(\infty)}(g)$ биективное отображение*

$$(B_b(\widetilde{g}), D_{(\infty)}) \times ([-l, l], \rho_{\mathbb{R}}) \ni (g_1, \tau) \mapsto g_1(\cdot + \tau) \in (\mathcal{B}_{b,\,l}(\widetilde{g}), D_{(\infty)})$$

является гомеоморфизмом.

Пусть $\mathcal{G} : [-l, l] \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция, для которой $\mathcal{G}(-l) = \mathcal{G}(l) = 0$. Для каждой функции $\widetilde{g} \in \mathcal{H}^{(\infty)}(g)$ определим функцию $\mathcal{H}^{(\infty)}(g) \ni g_1 \mapsto \mathcal{L}(\widetilde{g}, \mathcal{G}; g_1) \in \mathbb{R}$. Если $g_1 \in \mathcal{H}^{(\infty)}(g) \setminus \mathcal{B}_{b,\,l}(\widetilde{g})$, то положим $\mathcal{L}(\widetilde{g}, \mathcal{G}; g_1) = 0$. Если $(g_1, \tau) \in U_{\frac{b}{2}}(\widetilde{g}) \times [-l, l]$ (тогда $g_1(\cdot + \tau) \in \mathcal{O}_{\frac{b}{2},\,l}(\widetilde{g})$), то положим $\mathcal{L}(\widetilde{g}, \mathcal{G}; g_1(\cdot + \tau)) = \mathcal{G}(\tau)$. Наконец, если $(g_1, \tau) \in (B_b(\widetilde{g}) \setminus U_{\frac{b}{2}}(\widetilde{g})) \times [-l, l]$ (тогда $g_1(\cdot + \tau) \in \mathcal{B}_{b,\,l}(\widetilde{g}) \setminus \mathcal{O}_{\frac{b}{2},\,l}(\widetilde{g})$), то положим $\mathcal{L}(\widetilde{g}, \mathcal{G}; g_1(\cdot + \tau)) = 2(1 - b^{-1}\|g_1 - \widetilde{g}\|_H)\, \mathcal{G}(\tau)$. Из леммы 18 следует непрерывность функций $(\mathcal{H}^{(\infty)}(g), D_{(\infty)}) \ni g_1 \mapsto \mathcal{L}(\widetilde{g}, \mathcal{G}; g_1) \in \mathbb{R}$.

Так как $\mathcal{H}^{(\infty)}(g)$ — компактное множество в (вещественном) гильбертовом пространстве H, то найдется конечное множество функций $\widetilde{g}_j \in \mathcal{H}^{(\infty)}(g)$, $j = 1, \ldots, N$ (где $N \geqslant 2$), таких, что

$$\mathcal{H}^{(\infty)}(g) = \bigcup_{j=1}^{N} \mathcal{O}_{\frac{b}{2},\,l}(\widetilde{g}_j)$$

(число $b > 0$ не зависит от выбора функций $\widetilde{g}_j$, поэтому можно считать, что $\widetilde{g}_j$ — сдвиги функции g).

Теперь выберем некоторые непрерывные функции $\mathcal{G}_j : [-l, l] \to \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, N$, для которых $\mathcal{G}_j(-l) = \mathcal{G}_j(l) = 0$ (и конкретный вид которых будет определен в дальнейшем). Будем рассматривать функции

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto \mathbb{G}_j(t) \doteq \mathbb{G}(\mathcal{L}(\widetilde{g}_j, \mathcal{G}_j; \cdot); t) = \mathcal{L}(\widetilde{g}_j, \mathcal{G}_j; g(\cdot + t)), \quad j = 1, \dots, N.$$

В силу леммы 13 $\mathbb{G}_j \in \mathcal{C}R_\Gamma(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Так как $g \in \mathcal{C}R_\Gamma^{(\infty)}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, то для любых $\widetilde{g} \in \mathcal{H}^{(\infty)}(g)$ и $b_1 \in (0, b)$ числа $t \in \mathbb{R}$, для которых $g(\cdot + t) \in B_{b_1}(\widetilde{g})$, образуют относительно плотное и дискретное множество (без конечных предельных точек). Это множество счетное. Пусть $t_{j,k} \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, — произвольно перенумерованные числа, для которых $g(\cdot + t_{j,k}) \in U_{\frac{b}{2}}(\widetilde{g}_j)$, $j = 1, \dots, N$. Аналогичным образом, если существуют числа $t \in \mathbb{R}$, для которых $g(\cdot + t) \in B_b(\widetilde{g}_j) \setminus U_{\frac{b}{2}}(\widetilde{g}_j)$, то они образуют либо счетное (без конечных предельных точек), либо конечное множество. Пусть $\widetilde{t}_{j,n} \in \mathbb{R}$ — произвольно перенумерованные такие числа (где либо $n \in \mathbb{N}$, либо $n = 1, \dots, n_0$ для некоторого $n_0 \in \mathbb{N}$), но не исключается возможность отсутствия таких чисел. Для всех $j = 1, \dots, N$ все интервалы $(t_{j,k} - l, t_{j,k} + l)$, $k \in \mathbb{N}$, и $(\widetilde{t}_{j,n} - l, \widetilde{t}_{j,n} + l)$ попарно не пересекаются и множества $\bigcup\limits_{k \in \mathbb{N}} (t_{j,k} - l, t_{j,k} + l)$ относительно плотны. В силу выбора функций $\widetilde{g}_j \in \mathcal{H}^{(\infty)}(g)$

$$\mathbb{R} = \bigcup_{j=1}^{N} \bigcup_{k=1}^{+\infty} (t_{j,k} - l, t_{j,k} + l). \tag{3.4}$$

Если $t \in [t_{j,k} - l, t_{j,k} + l]$, то $\mathbb{G}_j(t) = \mathcal{G}_j(t - t_{j,k})$. Если $t \in [\widetilde{t}_{j,n} - l, \widetilde{t}_{j,n} + l]$, то $\mathbb{G}_j(t) = \Theta_{j,n}\, \mathcal{G}_j(t - \widetilde{t}_{j,n})$, где $\Theta_{j,n} \in [0, 1)$. Если число $t \in \mathbb{R}$ не принадлежит ни одному из рассматриваемых отрезков, то $\mathbb{G}_j(t) = 0$.

Лемма 19. *Множество $\mathcal{C}R_\Gamma(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ является линейным подпространством (вещественного) банахова пространства $(C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$.*

Из леммы 19, в частности, следует, что

$$\sum_{j=1}^{N} \mathbb{G}_j(\cdot) \in \mathcal{C}R_\Gamma(\mathbb{R}, \mathbb{R}).$$

Лемма 20. *Множества $\mathcal{R}_\Gamma^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ и $\mathcal{R}_\Gamma(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ являются линейными многообразиями.*

Теорема 20. *Пусть $\widetilde{f} \in \mathfrak{LF}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ и $\Gamma \in \mathcal{N}^*_{\mathrm{rd}}(\mathcal{A})$. Тогда для любых $\varepsilon > 0$ и $\delta \in (0, 1]$ существуют число $h > 0$ и функция $\mathcal{F} \in \mathcal{C}R_\Gamma(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, для которой $\|\mathcal{F}\|_\infty < \varepsilon$, такие, что для всех $t \in \mathbb{R}$*

$$\operatorname{mes}\{\tau \in [-1, 1] : |\widetilde{f}(t + \tau) + \mathcal{F}(t + \tau)| < h\} < 2\delta.$$

Доказательство. Пусть $g \in \mathcal{C}R_\Gamma^{(\infty)}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ — функция, не являющаяся постоянной. Для функции g (как и выше) определяются числа b, $l > 0$, функции $\widetilde{g}_j \in \mathcal{H}^{(\infty)}(g)$, $j = 1, \dots, N$ (где $N \geqslant 2$), и числа $t_{j,k} \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$. Непрерывные функции $\mathcal{G}_j : [-l, l] \to \mathbb{R}$, для которых $\mathcal{G}_j(-l) = \mathcal{G}_j(l) = 0$, будут определены по ходу доказательства. Им соответствуют функции $\mathbb{R} \ni t \mapsto \mathbb{G}_j(t) = \mathcal{L}(\widetilde{g}_j, \mathcal{G}_j; g(\cdot + t)) \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, N$. Пусть $\varepsilon > 0$ и $\delta \in (0, 1]$. Положим $\delta_j = 2^{-j-1}\delta$, $j = 1, \dots, N$. Выберем число $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2}$. Из теоремы 19 и следствия 3 следует, что найдутся числа $h_1 > 0$ и $n_1 \in \mathbb{N}$ такие, что для функции

$$[-l, l] \ni \tau \mapsto \mathcal{G}_1(\tau) \doteq \varepsilon_1 \sin \frac{\pi n_1 \tau}{l}$$

и любой функции $\mathfrak{g}_1 \in L^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, для которой $\|\mathfrak{g}_1\|_\infty \leqslant h_1$,

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \operatorname{mes}\{\tau \in [-l,l] : |\widetilde{f}(t_{1,k}+\tau)+\mathfrak{g}_1(t_{1,k}+\tau)+\mathcal{G}_1(\tau)| < h_1\} < 2l\delta_1.$$

При $j = 2,\ldots,N$ будем последовательно определять числа $\varepsilon_j > 0$, $h_j > 0$, $n_j \in \mathbb{N}$ и функции

$$[-l,l] \ni \tau \mapsto \mathcal{G}_j(\tau) \doteq \varepsilon_j \sin\frac{\pi n_j \tau}{l}$$

(зависящие от выбора чисел ε_j и n_j). Если числа $\varepsilon_{j-1} > 0$, $h_{j-1} > 0$ и $n_{j-1} \in \mathbb{N}$ уже выбраны для некоторого индекса $j \in \{2,\ldots,N\}$, то число $\varepsilon_j > 0$ выберем так, чтобы выполнялись неравенства $\varepsilon_j \leqslant 2^{-j}\varepsilon$ и $\varepsilon_j \leqslant \frac{1}{2}h_{j-1}$, $\varepsilon_j \leqslant \frac{1}{4}h_{j-2}$, $\ldots$, $\varepsilon_j \leqslant 2^{-j+1}h_1$. Так как (см. леммы 10 и 19)

$$\widetilde{f}(\cdot) + \sum_{m=1}^{j-1}\mathbb{G}_m(\cdot) \in \mathfrak{LF}(\mathbb{R},\mathbb{R}),$$

то в силу теоремы 19 и следствия 3 существуют числа $h_j > 0$ и $n_j \in \mathbb{N}$ такие, что для функции $\mathcal{G}_j$ и любой функции $\mathfrak{g}_j \in L^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, для которой $\|\mathfrak{g}_j\|_\infty \leqslant h_j$,

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \operatorname{mes}\{\tau \in [-l,l] : |\widetilde{f}(t_{j,k}+\tau)+\sum_{m=1}^{j-1}\mathbb{G}_m(t_{j,k}+\tau)+\mathfrak{g}_j(t_{j,k}+\tau)+\mathcal{G}_j(\tau)| < h_j\} < 2l\delta_j$$

(если $j = N$, то можно потребовать, чтобы последняя оценка выполнялась только для функции $\mathfrak{g}_N \equiv 0$). В результате числа $\varepsilon_j > 0$, $h_j > 0$, $n_j \in \mathbb{N}$ и функции $\mathcal{G}_j(\cdot)$ определяются при всех $j = 1,\ldots,N$ (при этом числа h_j зависят только от ε, δ и номера j). Положим

$$\mathcal{F}(\cdot) \doteq \sum_{j=1}^{N}\mathbb{G}_j(\cdot) \in \mathcal{C}R_\Gamma(\mathbb{R},\mathbb{R}).$$

Из определения чисел ε_j получаем, что

$$\|\mathcal{F}\|_\infty \leqslant \sum_{j=1}^{N}\varepsilon_j < \varepsilon.$$

Теперь определим функции

$$\mathfrak{g}_j(\cdot) = \sum_{m=j+1}^{N}\mathbb{G}_m(\cdot) \in \mathcal{C}R_\Gamma(\mathbb{R},\mathbb{R}) \subset C_b(\mathbb{R},\mathbb{R}), \quad j = 1,\ldots,N-1, \quad \mathfrak{g}_N(\cdot) \equiv 0.$$

Тогда (при $j = 1,\ldots,N-1$)

$$\|\mathfrak{g}_j\|_\infty \leqslant \varepsilon_{j+1} + \ldots + \varepsilon_N < h_j.$$

Поэтому при $h \doteq \min\limits_{j=1,\ldots,N} h_j$ для всех $j = 1,\ldots,N$

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \operatorname{mes}\{\tau \in [-l,l] : |\widetilde{f}(t_{j,k}+\tau)+\mathcal{F}(t_{j,k}+\tau)| < h\} < 2l\delta_j.$$

Для каждого числа $t \in \mathbb{R}$ обозначим через $A_j(t)$, $j = 1,\ldots,N$, объединение отрезков $[t_{j,k}-l, t_{j,k}+l]$, $k \in \mathbb{N}$, которые пересекаются с интервалом $(t-1, t+1)$. Определим также множества

$$\widetilde{A}_j(t) = A_j(t) \setminus \bigcup_{m=j+1}^{N} A_m(t), \quad j = 1,\ldots,N-1,$$

и $\widetilde{A}_N(t) \,=\, A_N(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Имеем

$$\operatorname{mes}\{t' \in A_j(t) : |\widetilde{f}(t') + \mathcal{F}(t')| < h\} \;<\; \delta_j \operatorname{mes} A_j(t),$$

поэтому при всех $t \in \mathbb{R}$ (предполагая, что $l \in (0,1]$)

$$\operatorname{mes}\{t' \in [t-1, t+1] : |\widetilde{f}(t') + \mathcal{F}(t')| < h\} \;\leqslant\; \operatorname{mes}\{t' \in \bigcup_{j=1}^{N} A_j(t) : |\widetilde{f}(t') + \mathcal{F}(t')| < h\} \;=$$

$$=\; \operatorname{mes}\{t' \in \bigcup_{j=1}^{N} \widetilde{A}_j(t) : |\widetilde{f}(t') + \mathcal{F}(t')| < h\} \;=\; \sum_{j=1}^{N} \operatorname{mes}\{t' \in \widetilde{A}_j(t) : |\widetilde{f}(t') + \mathcal{F}(t')| < h\} \;\leqslant$$

$$\leqslant\; \sum_{j=1}^{N} \operatorname{mes}\{t' \in A_j(t) : |\widetilde{f}(t') + \mathcal{F}(t')| < h\} \;<\; \sum_{j=1}^{N} \delta_j \operatorname{mes} A_j(t) \;\leqslant\; 4 \sum_{j=1}^{N} \delta_j \;<\; 2\delta.$$

Теорема 20 доказана. □

Следствие 5. *Пусть $\widetilde{f} \in \mathcal{R}_\Gamma(\mathbb{R},\mathbb{R})$, где $\Gamma \in \mathcal{N}_{\mathrm{rd}}(\mathcal{A})$. Тогда для любых $\varepsilon > 0$ и $\delta \in (0,1]$ существуют число $h > 0$ и функция $\mathcal{F} \in \mathcal{C}R_\Gamma(\mathbb{R},\mathbb{R})$, для которой $\|\mathcal{F}\|_\infty < \varepsilon$, такие, что для всех $t \in \mathbb{R}$*

$$\operatorname{mes}\{\tau \in [-1,1] : |\widetilde{f}(t+\tau) + \mathcal{F}(t+\tau)| < h\} \;<\; 2\delta.$$

Функция $\widetilde{f} \in M(\mathbb{R},\mathbb{R})$ обладает σ-свойством (см. [21]), если $\varkappa(\{t \in \mathbb{R} : |\widetilde{f}(t)| < \varepsilon\}) \to 0$ при $\varepsilon \to +0$ (в частности, это означает, что $\operatorname{mes}\{t \in \mathbb{R} : \widetilde{f}(t) = 0\} = 0$).

Лемма 21 (см. [1]). *Если функция $\widetilde{f} \in \mathcal{R}_\Gamma(\mathbb{R},\mathbb{R})$ обладает σ-свойством, то $\{t \in \mathbb{R} : \widetilde{f}(t) \leqslant \leqslant 0\} \in \mathcal{R}_\Gamma\{\mathbb{R}\}$.*

Теорема 21. *Пусть $\widetilde{f} \in \mathfrak{L}\mathfrak{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ и $\Gamma \in \mathcal{N}^*_{\mathrm{rd}}(\mathcal{A})$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует функция $\mathcal{F} \in \mathcal{C}R_\Gamma(\mathbb{R},\mathbb{R})$ такая, что $\|\mathcal{F}\|_\infty < \varepsilon$ и функция $\widetilde{f} + \mathcal{F}$ обладает σ-свойством.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\varepsilon > 0$, $\varepsilon_j = 2^{-j-1}\varepsilon$, $j \in \mathbb{Z}_+$, и $\delta_j \in (0,1]$, $j \in \mathbb{Z}_+$, — любые числа, для которых $\delta_j \to 0$ при $j \to +\infty$. Из теоремы 20 следует существование числа $h_0 > 0$ и функции $\mathcal{F}_0 \in \mathcal{C}R_\Gamma(\mathbb{R},\mathbb{R})$, для которой $\|\mathcal{F}_0\|_\infty < \varepsilon_0$, таких, что для всех $t \in \mathbb{R}$

$$\operatorname{mes}\{\tau \in [-1,1] : |\widetilde{f}(t+\tau) + \mathcal{F}_0(t+\tau)| < h_0\} \;<\; 2\delta_0.$$

Будем последовательно при $j = 1, 2, \ldots$ находить числа $h_j > 0$ и функции $\mathcal{F}_j \in \mathcal{C}R_\Gamma(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Если они уже определены для некоторого индекса $j-1$, то (в силу лемм 10 и 19)

$$\widetilde{f}(\cdot) \;+\; \sum_{k=0}^{j-1} \mathcal{F}_k(\cdot) \;\in\; \mathfrak{L}\mathfrak{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}),$$

поэтому в соответствии с теоремой 20 можно выбрать число $h_j > 0$ и функцию $\mathcal{F}_j \in \mathcal{C}R_\Gamma(\mathbb{R},\mathbb{R})$, для которой $\|\mathcal{F}_j\|_\infty < \varepsilon_j$ и $\|\mathcal{F}_j\|_\infty \leqslant 2^{-2}h_{j-1}$, $\ldots$, $\|\mathcal{F}_j\|_\infty \leqslant 2^{-j-1}h_0$, такие, что для всех $t \in \mathbb{R}$

$$\operatorname{mes}\{\tau \in [-1,1] : |\widetilde{f}(t+\tau) + \sum_{k=0}^{j-1} \mathcal{F}_k(t+\tau) + \mathcal{F}_j(t+\tau)| < h_j\} \;<\; 2\delta_j.$$

В результате числа h_j и функции $\mathcal{F}_j$ определяются при всех $j \in \mathbb{Z}_+$. Обозначим

$$\mathcal{F}(\cdot) \;=\; \sum_{k=0}^{+\infty} \mathcal{F}_k(\cdot).$$

Из леммы 19 следует, что $\mathcal{F} \in \mathcal{C}R_\Gamma(\mathbb{R},\mathbb{R})$, и при этом $\|\mathcal{F}\|_\infty < \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \varepsilon_k = \varepsilon$. Если для некоторых $j \in \mathbb{Z}_+$ и $\xi \in \mathbb{R}$ выполняется оценка $|\widetilde{f}(\xi) + \mathcal{F}(\xi)| < \frac{1}{2}\, h_j$, то

$$\Bigl| \widetilde{f}(\xi) + \sum_{k=0}^{j} \mathcal{F}_k(\xi) \Bigr| < \frac{1}{2}\, h_j + \Bigl| \sum_{k=j+1}^{+\infty} \mathcal{F}_k(\xi) \Bigr| \leqslant \frac{1}{2}\, h_j + \sum_{k=j+1}^{+\infty} 2^{-k-j-1} h_j \; = \; h_j.$$

Поэтому для всех $t \in \mathbb{R}$

$$\{\tau \in [-1,1] : |\widetilde{f}(t+\tau) + \mathcal{F}(t+\tau)| < \frac{1}{2}\, h_j\} \subseteq \{\tau \in [-1,1] : \Bigl| \widetilde{f}(t+\tau) + \sum_{k=0}^{j} \mathcal{F}_k(t+\tau) \Bigr| < h_j\}$$

и, следовательно,

$$\varkappa(\{t \in \mathbb{R} : |\widetilde{f}(t) + \mathcal{F}(t)| < \frac{1}{2}\, h_j\}) \leqslant \delta_j.$$

Последнее означает (так как $\delta_j \to 0$ при $j \to +\infty$), что функция $\widetilde{f} + \mathcal{F}$ обладает σ-свойством. Теорема 21 доказана. $\square$

Следствие 6. *Пусть $\widetilde{f} \in \mathcal{R}_\Gamma(\mathbb{R},\mathbb{R})$, где $\Gamma \in \mathcal{N}_{\rm rd}(\mathcal{A})$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует функция $\mathcal{F} \in \mathcal{C}R_\Gamma(\mathbb{R},\mathbb{R})$ такая, что $\|\mathcal{F}\|_\infty < \varepsilon$ и функция $\widetilde{f} + \mathcal{F}$ обладает σ-свойством.*

Доказательство. Если функция $\widetilde{f}$ является п.в. постоянной, то достаточно выбрать подходящую постоянную функцию $\mathcal{F}$. Если функция $\widetilde{f} \in \mathcal{R}_\Gamma(\mathbb{R},\mathbb{R})$ не является п.в. постоянной, то $\Gamma \in \mathcal{N}^*_{\rm rd}(\mathcal{A})$ и в этом случае следствие 6 непосредственно вытекает из теоремы 21, так как $\mathcal{R}_\Gamma(\mathbb{R},\mathbb{R}) \subset M^{\rm comp}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \subset \mathfrak{L}\mathfrak{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. $\square$

Доказательство теоремы 15. Для функции $f(\cdot) - a$ (где $a \in \mathbb{R}$ — заданное число) в соответствии со следствием 6 выберем функцию $\mathcal{F} \in \mathcal{C}R_\Gamma(\mathbb{R},\mathbb{R})$, для которой $\|\mathcal{F}\|_\infty < \varepsilon$ и функция $f(\cdot) - a + \mathcal{F}(\cdot)$ обладает σ-свойством. Тогда (см. лемму 21) $T \doteq \{t \in \mathbb{R} : f(t) - a + \mathcal{F}(t) \leqslant 0\} \in \mathcal{R}_\Gamma\{\mathbb{R}\}$ и при этом $f(t) \leqslant a - \mathcal{F}(t) < a + \varepsilon$ для всех $t \in T$ и $f(t) > a - \mathcal{F}(t) > a - \varepsilon$ для п.в. $t \in \mathbb{R} \setminus T$. Если $f \in \mathcal{C}R_\Gamma(\mathbb{R},\mathbb{R})$, то множество T замкнуто. Теорема 15 доказана. $\square$

§ 4. Доказательства теорем 6, 7 и 8

Справедлива простая

Лемма 22. *Если $f \in C_b(\mathbb{R},U)$, $f_j \in C_b(\mathbb{R},U) \cap \mathcal{C}AR_\Gamma(\mathbb{R},U)$, $j \in \mathbb{N}$, и $D^{(\rho)}_\infty(f,f_j) \to 0$ при $j \to +\infty$, то $f \in \mathcal{C}AR_\Gamma(\mathbb{R},U)$.*

Лемма 23. *Если $f \in M(\mathbb{R},U)$, $f_j \in \mathcal{A}R_\Gamma(\mathbb{R},U)$, $j \in \mathbb{N}$, и для некоторого (следовательно, для всех) $l > 0$*

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{1}{2l} \int_{t-l}^{t+l} \rho'(f(\tau), f_j(\tau))\, d\tau \to 0 \tag{4.1}$$

при $j \to +\infty$, то $f \in \mathcal{A}R_\Gamma(\mathbb{R},U)$.

Доказательство. Так как (для всех $l > 0$)

$$f^B_l(\cdot;\cdot),\ (f_j)^B_l(\cdot;\cdot) \in C_b(\mathbb{R}, L^1([-l,l],(U,\rho'))), \quad (f_j)^B_l(\cdot;\cdot) \in \mathcal{C}AR_\Gamma(\mathbb{R}, L^1([-l,l],(U,\rho'))), \quad j \in \mathbb{N},$$

и условие (4.1) означает, что

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} D^{(\rho')}_{1,l}(f^B_l(t;\cdot), (f_j)^B_l(t;\cdot)) \to 0$$

при $j \to +\infty$, то из леммы 22 получаем, что также

$$f^B_l(\cdot;\cdot) \in \mathcal{C}AR_\Gamma(\mathbb{R}, L^1([-l,l],(U,\rho')))$$

и, следовательно, $f \in \mathcal{A}R_\Gamma(\mathbb{R},U)$. $\square$

Также имеет место простая

Лемма 24. *Если* $f \in C_b(\mathbb{R}, U)$, $f_j \in C^{\,\mathrm{comp}}(\mathbb{R}, U)$, $j \in \mathbb{N}$, *и* $D^{(\rho)}_\infty(f, f_j) \to 0$ *при* $j \to +\infty$, *то* $f \in C^{\,\mathrm{comp}}(\mathbb{R}, U)$.

Доказательство следующей леммы аналогично доказательству леммы 23 (с использованием леммы 24 вместо леммы 22).

Лемма 25. *Если* $f \in M(\mathbb{R}, U)$, $f_j \in M^{\,\mathrm{comp}}(\mathbb{R}, U)$, $j \in \mathbb{N}$, *и для некоторого* (*следовательно, для всех*) $l > 0$ *выполняется условие* (4.1), *то* $f \in M^{\,\mathrm{comp}}(\mathbb{R}, U)$.

Из равенства (1.5) и лемм 23 и 25 непосредственно следует

Лемма 26. *Если* $f \in M(\mathbb{R}, U)$, $f_j \in \mathcal{R}_\Gamma(\mathbb{R}, U)$, $j \in \mathbb{N}$, *и для некоторого* (*следовательно, для всех*) $l > 0$ *выполняется условие* (4.1), *то* $f \in \mathcal{R}_\Gamma(\mathbb{R}, U)$.

Доказательство теоремы 6. Пусть $\varepsilon > 0$. Из теоремы 16 следует существование последовательностей $\{T_j\}_{j\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{M}_\Gamma$ и $\{T'_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{M}_\Gamma$ таких, что $\mathrm{dist}'(F(t_1), F(t_2)) < \varepsilon$ для всех t_1, $t_2 \in T_j$ и $\rho'(g(t'_1), g(t'_2)) < \varepsilon$ для всех t'_1, $t'_2 \in T'_k$. Справедливо включение $\{T_j \cap T'_k\}_{j,k\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{M}_\Gamma$ (см. [1]). Для всех j, $k \in \mathbb{N}$ (если $T_j \cap T'_k \neq \varnothing$) определим множества

$$F_{jk} = \overline{\bigcup_{t \in T_j \cap T'_k} F(g(t); t)} \in \mathrm{cl}_b\, U.$$

Если t_1, $t \in T_j \cap T'_k$ и $x_1 \in F(g(t_1); t_1)$, то (так как $\mathrm{dist}'(F(t_1), F(t)) < \varepsilon$) найдется точка $x \in F(t)$ такая, что $\rho'(x_1, x) < \varepsilon$. Поэтому

$$\rho'(g(t), x) \leqslant \rho'(g(t), g(t_1)) + \rho'(g(t_1), x_1) + \rho'(x_1, x) < \rho'(g(t_1), F(t_1)) + 2\varepsilon.$$

С другой стороны,

$$|\rho'(g(t_1), F(t_1)) - \rho'(g(t), F(t))| \leqslant \rho'(g(t_1), g(t)) + \mathrm{dist}'(F(t_1), F(t)) < 2\varepsilon.$$

Поэтому $\rho'(g(t), x) < \rho'(g(t), F(t)) + 4\varepsilon$ и, следовательно, $x \in F(g(t), 4\varepsilon; t)$. Теперь можно найти точку $y \in F(g(t); t)$ такую, что

$$\rho'(x, y) < \mathrm{dist}'(F(g(t); t), F(g(t), 4\varepsilon; t)) + \varepsilon.$$

Тогда

$$\rho'(x_1, y) \leqslant \rho'(x_1, x) + \rho'(x, y) < \mathrm{dist}'(F(g(t); t), F(g(t), 4\varepsilon; t)) + 2\varepsilon$$

и из определения множества F_{jk} (и включения $F(g(t); t) \subseteq F_{jk}$) для всех $t \in T_j \cap T'_k$ получаем

$$\mathrm{dist}'(F_{jk}, F(g(t); t)) \leqslant \mathrm{dist}'(F(g(t); t), F(g(t), 4\varepsilon; t)) + 2\varepsilon. \tag{4.2}$$

Определим элементарную функцию (многозначное отображение)

$$F_\varepsilon(\cdot) = \sum_{j,k\in\mathbb{N}} F_{jk}\, \chi_{T_j \cap T'_k}(\cdot) \in \mathcal{R}_\Gamma(\mathbb{R}, \mathrm{cl}_b\, U).$$

В силу условия (1.7) и оценки (4.2) (для всех $l > 0$)

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \frac{1}{2l} \int_{t-l}^{t+l} \mathrm{dist}'(F(g(\tau); \tau), F_\varepsilon(\tau))\, d\tau \to 0$$

при $\varepsilon \to +0$. Доказываемое включение $F(g(\cdot); \cdot) \in \mathcal{R}_\Gamma(\mathbb{R}, \mathrm{comp}\, U)$ теперь следует из леммы 26. Если $F \in \mathcal{R}^p_\Gamma(\mathbb{R}, \mathrm{comp}\, U) \subseteq \widetilde{M}^p(\mathbb{R}, \mathrm{comp}\, U)$ при некотром $p \geqslant 1$, то $F(g(\cdot); \cdot) \in \widetilde{M}^p(\mathbb{R}, \mathrm{comp}\, U)$. Поэтому (в силу леммы 9) $F(g(\cdot); \cdot) \in \mathcal{R}_\Gamma(\mathbb{R}, \mathrm{comp}\, U) \cap \widetilde{M}^p(\mathbb{R}, \mathrm{comp}\, U) = \mathcal{R}^p_\Gamma(\mathbb{R}, \mathrm{comp}\, U)$. $\square$

Доказательства теорем 7 и 8 аналогичны доказательству теоремы 6. Отметим только утверждения, которые нужно использовать при доказательстве этих теорем вместо соответствующих утверждений из доказательства теоремы 6. При доказательстве теоремы 7 выбираются последовательности $\{T_j\}_{j\in\mathbb{N}}\in\mathfrak{AM}_\Gamma$ и $\{T'_k\}_{k\in\mathbb{N}}\in\mathfrak{AM}_\Gamma$. Тогда также $\{T_j\cap T'_k\}_{j,\,k\in\mathbb{N}}\in\mathfrak{AM}_\Gamma$ (см. [1, лемма 37]). Элементарные функции (многозначные отображения) $F_\varepsilon(\cdot)$ принадлежат $\mathcal{A}R_\Gamma(\mathbb{R},\mathrm{cl}_b\,U)$ в силу леммы 28 из [1]. Включение $F(g(\cdot);\cdot)\in\mathcal{A}R_\Gamma(\mathbb{R},\mathrm{comp}\,U)$ следует из условия (1.7) и леммы 22. Если $F\in\mathcal{A}R^p_\Gamma(\mathbb{R},\mathrm{comp}\,U)$, то включение $F(g(\cdot);\cdot)\in\mathcal{A}R_\Gamma(\mathbb{R},\mathrm{comp}\,U)$ доказывается с помощью теоремы 11 из [1]. При доказательстве теоремы 8 выбираются последовательности $\{T_j\}_{j\in\mathbb{N}}\in\mathfrak{M}^{\mathrm{comp}}$ и $\{T'_k\}_{k\in\mathbb{N}}\in\mathfrak{M}^{\mathrm{comp}}$, для которых также $\{T_j\cap T'_k\}_{j,\,k\in\mathbb{N}}\in\mathfrak{M}^{\mathrm{comp}}$ (см. [1, лемма 36]). При этом элементарные функции (многозначные отображения) $F_\varepsilon(\cdot)$ принадлежат $M^{\mathrm{comp}}(\mathbb{R},\mathrm{cl}_b\,U)$ в силу леммы 12 из [1], а включение $F(g(\cdot);\cdot)\in M^{\mathrm{comp}}(\mathbb{R},\mathrm{comp}\,U)$ вытекает из условия (1.7) и леммы 24. Если $F\in L^{p,\,\mathrm{comp}}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},\mathrm{comp}\,U)$, то включение $F(g(\cdot);\cdot)\in L^{p,\,\mathrm{comp}}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},\mathrm{comp}\,U)$ является следствием того, что $F(g(t);t)\subseteq F(t)$ при п.в. $t\in\mathbb{R}$, и леммы 1.

§ 5. Доказательство теоремы 11

Лемма 27. *Пусть множество $T\subset\mathbb{R}$ имеет нулевую меру Лебега. Тогда для любого $\delta>0$ и любой направленности $\Gamma\in\mathcal{N}^*_{\mathrm{rd}}(\mathcal{A})$ существует открытое множество $\mathcal{O}\in\mathcal{R}_\Gamma\{\mathbb{R}\}$ такое, что $\varkappa(\mathcal{O})<\delta$ и $T\subset\mathcal{O}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $\Gamma\in\mathcal{N}^*_{\mathrm{rd}}(\mathcal{A})$, то существует функция $g\in\mathcal{C}R^{(\infty)}_\Gamma(\mathbb{R},\mathbb{R})$, не являющаяся постоянной (см. § 3). Для функции g (как и в § 3) определим числа $b>0$, $l\in(0,1]$, функции $\widetilde g_j\in\mathcal{H}^{(\infty)}(g)$, $j=1,\dots,N$, множества $U_{\frac b2}(\widetilde g_j)$, $\mathcal{O}_{\frac b2,l}(\widetilde g_j)\subset\mathcal{H}^{(\infty)}(g)$ и числа $t_{j,k}\in\mathbb{R}$, $j,\,k\in\mathbb{N}$. Лемму 27 достаточно доказать для множеств $T_{j,k}\doteq T\cap(t_{j,k}-l,t_{j,k}+l)$, $j,\,k\in\mathbb{N}$. Действительно, если она справедлива для таких множеств, то для любого $\delta>0$ и всех $j,\,k\in\mathbb{N}$ можно выбрать открытые множества $\mathcal{O}_{j,k}\in\mathcal{R}_\Gamma\{\mathbb{R}\}$ такие, что $\varkappa(\mathcal{O}_{j,k})<2^{-j-k}\delta$ и $T_{j,k}\subset\mathcal{O}_{j,k}$. Тогда множество $\mathcal{O}=\bigcup\limits_{j,k}\mathcal{O}_{j,k}$ является открытым, выполняется вложение $T=\bigcup\limits_{j,k}T_{j,k}\subset\bigcup\limits_{j,k}\mathcal{O}_{j,k}=\mathcal{O}$ (см. (3.4)) и $\varkappa(\mathcal{O})\leqslant\sum\limits_{j,\,k\in\mathbb{N}}\varkappa(\mathcal{O}_{j,k})<\sum\limits_{j,\,k\in\mathbb{N}}2^{-j-k}\delta=\delta$. Следовательно, также $\mathcal{O}\in\mathcal{R}_\Gamma\{\mathbb{R}\}$. Поэтому будем далее считать, что $T=T_{j,k_0}\subset(t_{j,k_0}-l,t_{j,k_0}+l)$ для некоторых (фиксированных) индексов j и k_0. Пусть $\delta>0$. Число $\widetilde\delta>0$ выберем так, что $l(-[-l^{-1}])\widetilde\delta<\delta$. Так как $\mathrm{mes}\,T=0$, то множество $-t_{j,k_0}+T$ можно покрыть попарно непересекающимися открытыми интервалами $(t_m-\delta_m,t_m+\delta_m)$, $m\in\mathbb{N}$, принадлежащими интервалу $(-l,l)$, где $\delta_m>0$, такими, что $\sum\limits_m\delta_m<\frac12\widetilde\delta$. Числа $t_{j,k}\in\mathbb{R}$ определяются (см. § 3) так, что $g_{j,k}(\cdot)\doteq g(\cdot+t_{j,k})\in U_{\frac b2}(\widetilde g_j)$. Поэтому $\|g_{j,k}-\widetilde g_j\|_H<\frac b2$. Определим функции $\mathcal{H}^{(\infty)}(g)\ni g_1\mapsto L_s(g_1)\in\mathbb{R}$, $s\in\mathbb{N}$. Если $g_1\in\mathcal{H}^{(\infty)}(g)\setminus\mathcal{O}_{\frac b2,l}(\widetilde g_j)$, то положим $L_s(g_1)=0$. Пусть теперь $g_1(\cdot+\tau)\in\mathcal{O}_{\frac b2,l}(\widetilde g_j)$, где $(g_1,\tau)\in U_{\frac b2}(\widetilde g_j)\times(-l,l)$. Обозначим

$$\delta_m(g_1)=\begin{cases}\delta_m\,, & \text{если } \|g_1-\widetilde g_j\|_H\leqslant\|g_{j,k_0}-\widetilde g_j\|_H,\\ \bigl(\frac b2-\|g_1-\widetilde g_j\|_H\bigr)\bigl(\frac b2-\|g_{j,k_0}-\widetilde g_j\|_H\bigr)^{-1}\delta_m\,, & \text{если } \|g_{j,k_0}-\widetilde g_j\|_H<\|g_1-\widetilde g_j\|_H<\frac b2,\end{cases}$$

и пусть $\Xi_s(g_1;\tau)=\min\{1,s(\delta_m(g_1)-|\tau-t_m|)\}$, если $\tau\in(t_m-\delta_m(g_1),t_m+\delta_m(g_1))$ для некоторого $m\in\mathbb{N}$, и $\Xi_s(g_1;\tau)=0$, если число $\tau\in(-l,l)$ не принадлежит ни одному из интервалов $(t_m-\delta_m(g_1),t_m+\delta_m(g_1))$, $m\in\mathbb{N}$. Положим $L_s(g_1(\cdot+\tau))=\Xi_s(g_1;\tau)$. Из леммы 18 получаем, что функции L_s корректно определены и непрерывны на $\mathcal{H}^{(\infty)}(g)$. Поэтому (в силу леммы 13) функции $\mathbb{R}\ni t\mapsto\mathbb{G}(L_s;t)=L_s(g(\cdot+t))$ принадлежат $\mathcal{C}R_\Gamma(\mathbb{R},\mathbb{R})$ (и $\mathbb{G}(L_s;t)\in[0,1]$ для всех $t\in\mathbb{R}$). Если $t\in(t_{j,k}-l,t_{j,k}+l)$ при некотором $k\in\mathbb{N}$, то $\mathbb{G}(L_s;t)=\Xi_s(g_{j,k};t-t_{j,k})$. Если число $t\in\mathbb{R}$ не принадлежит ни одному из интервалов $(t_{j,k}-l,t_{j,k}+l)$, $k\in\mathbb{N}$, то $\mathbb{G}(L_s;t)=0$. Определим открытое множество

$$\mathcal{O}=\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\bigcup_{m\in\mathbb{N}}(t_{j,k}+t_m-\delta_m(g_{j,k}),t_{j,k}+t_m+\delta_m(g_{j,k})).$$

Из выбора функций $\mathbb{G}(L_s;\cdot)$, $s\in\mathbb{N}$, следует, что

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\frac{1}{2}\int_{t-1}^{t+1}|\chi_{\mathcal{O}}(\tau)-\mathbb{G}(L_s;\tau)|\,d\tau\to 0$$

при $s\to+\infty$. Поэтому (в силу леммы 26) $\chi_{\mathcal{O}}\in\mathcal{R}_\Gamma(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Последнее включение означает, что $\mathcal{O}\in\mathcal{R}_\Gamma\{\mathbb{R}\}$. С другой стороны, так как $\delta_m(g_{j,k_0})=\delta_m$ при всех $m\in\mathbb{N}$, то

$$T\subset\bigcup_{m\in\mathbb{N}}(t_{j,k_0}+t_m-\delta_m,t_{j,k_0}+t_m+\delta_m)\subset\mathcal{O}.$$

Кроме того, $\varkappa_l(\mathcal{O})\leqslant 2\sum\limits_{m\in\mathbb{N}}\delta_m\leqslant\widetilde{\delta}$. Следовательно (см. (1.8)), $\varkappa(\mathcal{O})\leqslant l(-[-l^{-1}])\,\varkappa_l(\mathcal{O})<\delta$. Лемма 27 доказана. □

Лемма 28. *Пусть $T\in\mathcal{R}_\Gamma\{\mathbb{R}\}$, где $\Gamma\in\mathcal{N}^*_{\mathrm{rd}}(\mathcal{A})$. Тогда для любого $\delta>0$ существует замкнутое множество $K\in\mathcal{R}_\Gamma\{\mathbb{R}\}$ такое, что $K\subseteq T$ и $\varkappa(T\setminus K)<\delta$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим

$$f_\varepsilon(t)=\frac{1}{2\varepsilon}\operatorname{mes}[t-\varepsilon,t+\varepsilon]\cap T,\quad t\in\mathbb{R},\quad \varepsilon>0.$$

Так как $T\in\mathcal{R}_\Gamma\{\mathbb{R}\}$, то $f_\varepsilon(\cdot)\in\mathcal{C}R_\Gamma(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Из теоремы 15 следует, что для всех $\varepsilon>0$ существуют замкнутые множества $T(\varepsilon)\in\mathcal{R}_\Gamma\{\mathbb{R}\}$ такие, что $f_\varepsilon(t)>\frac{1}{3}$ при всех $t\in T(\varepsilon)$ и $f_\varepsilon(t)<\frac{2}{3}$ при (п.в.) $t\in\mathbb{R}\setminus T(\varepsilon)$. Функции $\chi_T(\cdot+t)$, $t\in\mathbb{R}$, образуют предкомпактное множество в $(L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},\mathbb{R}),d_1^{(\rho_{\mathbb{R}})})$, поэтому

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\frac{1}{2}\int_{t-1}^{t+1}|\chi_T(\tau)-f_\varepsilon(\tau)|\,d\tau\to 0$$

при $\varepsilon\to+0$. Откуда следует, что для заданного числа $\delta>0$ и любого $j\in\mathbb{N}$ найдется такое число $\delta_j>0$, что

$$\varkappa(T\setminus T(\delta_j))<2^{-j-1}\delta,\quad \varkappa(T(\delta_j)\setminus T)<2^{-j}\delta.$$

Определим замкнутое множество $K_1=\bigcap\limits_{j\in\mathbb{N}}T(\delta_j)$. Так как (для всех $j\in\mathbb{N}$) $\varkappa(K_1\setminus T)\leqslant$ $\leqslant\varkappa(T(\delta_j)\setminus T)<2^{-j}\delta$, то $\varkappa(K_1\setminus T)=0$ и, следовательно, $\operatorname{mes}K_1\setminus T=0$. Из леммы 27 вытекает существование такого открытого множества $\mathcal{O}\in\mathcal{R}_\Gamma\{\mathbb{R}\}$, что $K_1\setminus T\subseteq\mathcal{O}$ и $\varkappa(\mathcal{O})<\frac{\delta}{2}$. С другой стороны, $T\setminus T(\delta_j)\in\mathcal{R}_\Gamma\{\mathbb{R}\}$, $j\in\mathbb{N}$, и

$$\varkappa(T\setminus K_1)\leqslant\sum_{j\in\mathbb{N}}\varkappa(T\setminus T(\delta_j))<\frac{\delta}{2}.$$

Поэтому $T\setminus K_1=\bigcup\limits_{j\in\mathbb{N}}(T\setminus T(\delta_j))\in\mathcal{R}_\Gamma\{\mathbb{R}\}$. Теперь выберем замкнутое множество $K=K_1\setminus\mathcal{O}\in$ $\in\mathcal{R}_\Gamma\{\mathbb{R}\}$. Тогда $K\subseteq T$ и $\varkappa(T\setminus K)\leqslant\varkappa(T\setminus K_1)+\varkappa(\mathcal{O})<\frac{\delta}{2}+\frac{\delta}{2}=\delta$. □

Теорема 11 непосредственно следует из леммы 28. Действительно, пусть $\delta>0$. Для множества T в соответствии с леммой 28 выберем замкнутое множество $K\in\mathcal{R}_\Gamma\{\mathbb{R}\}$, для которого $K\subseteq T$ и $\varkappa(T\setminus K)<\frac{\delta}{2}$, и замкнутое множество $\widetilde{K}\in\mathcal{R}_\Gamma\{\mathbb{R}\}$, для которого $\widetilde{K}\subseteq\mathbb{R}\setminus T$ и $\varkappa((\mathbb{R}\setminus T)\setminus\widetilde{K})<\frac{\delta}{2}$. Множество $\mathcal{O}\doteq\mathbb{R}\setminus\widetilde{K}\in\mathcal{R}_\Gamma\{\mathbb{R}\}$ является открытым, $T\subseteq\mathcal{O}$ и $\varkappa(\mathcal{O}\setminus T)=$ $=\varkappa((\mathbb{R}\setminus T)\setminus\widetilde{K})<\frac{\delta}{2}$. Следовательно, $\varkappa(\mathcal{O}\setminus K)\leqslant\varkappa(\mathcal{O}\setminus T)+\varkappa(T\setminus K)<\frac{\delta}{2}+\frac{\delta}{2}=\delta$. Теорема 11 доказана. □

МАТЕМАТИКА 2014. Вып. 4

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Данилов Л.И. Рекуррентные и почти рекуррентные многозначные отображения и их сечения // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2011. Вып. 2. С. 19–51.
2. Данилов Л.И. Рекуррентные и почти рекуррентные многозначные отображения и их сечения. II // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2012. Вып. 4. С. 3–21.
3. Данилов Л.И. Равномерная аппроксимация рекуррентных и почти рекуррентных функций // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2013. Вып. 4. С. 36–54.
4. Данилов Л.И. Почти периодические сечения многозначных отображений // Известия отдела математики и информатики УдГУ. 1993. Вып. 1. С. 16–78.
5. Danilov L.I. On Weyl almost periodic selections of multivalued maps // J. Math. Anal. Appl. 2006. Vol. 316. № 1. P. 110–127.
6. Данилов Л.И. О почти периодических по Безиковичу сечениях многозначных отображений // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2008. Вып. 1. С. 97–120.
7. Данилов Л.И. Об одном классе почти периодических по Вейлю сечений многозначных отображений // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2009. Вып. 1. С. 34–55.
8. Долбилов А.М., Шнейберг И.Я. Почти периодические многозначные отображения и их сечения // Сибирский математический журнал. 1991. Т. 32. № 2. С. 172–175.
9. Fryszkowski A. Continuous selections for a class of non-convex multivalued maps // Studia Math. 1983. Vol. 76. № 2. P. 163–174.
10. Данилов Л.И. О почти периодических сечениях многозначных отображений // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2008. Вып. 2. С. 34–41.
11. Michael E. Continuous selections. I // Ann. Math. 1956. Vol. 63. № 2. P. 361–381.
12. Немыцкий В.В., Степанов В.В. Качественная теория дифференциальных уравнений. М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2004. 456 с.
13. Аносов Д.В., Арансон С.Х., Арнольд В.И., Бронштейн И.У., Гринес В.З., Ильяшенко Ю.С. Динамические системы–1 // Итоги науки и техники. Сер. «Современные проблемы математики. Фундаментальные направления». Т. 1. М.: Изд-во ВИНИТИ АН СССР, 1985. 244 с.
14. Левитан Б.М. Почти-периодические функции. М.: ГИТТЛ, 1953. 396 с.
15. Данилов Л.И. Мерозначные почти периодические функции и почти периодические сечения многозначных отображений // Математический сборник. 1997. Т. 188. № 10. С. 3–24.
16. Данилов Л.И. О почти периодических многозначных отображениях // Математические заметки. 2000. Т. 68. № 1. С. 82–90.
17. Данилов Л.И. Равномерная аппроксимация почти периодических по Степанову функций и почти периодические сечения многозначных отображений / ФТИ УрО РАН. Ижевск, 2003. 70 с. Деп. в ВИНИТИ 21.02.2003, № 354-В2003.
18. Данилов Л.И., Иванов А.Г. К теореме о поточечном максимуме в почти периодическом случае // Известия вузов. Математика. 1994. № 6. С. 50–59.
19. Иванов А.Г. Элементы математического аппарата задач почти периодической оптимизации. I // Известия Института математики и информатики УдГУ. 2002. Вып. 1 (24). С. 3–100.
20. Данилов Л.И. О равномерной аппроксимации почти периодических по Степанову функций // Известия вузов. Математика. 1998. № 5. С. 10–18.
21. Крейн М.Г., Нудельман А.А. Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. Идеи и проблемы П.Л. Чебышева и А.А. Маркова и их дальнейшее развитие. М.: Наука, 1973. 551 с.

Поступила в редакцию 18.10.2014

Данилов Леонид Иванович, к. ф.-м. н., старший научный сотрудник, Физико-технический институт УрО РАН, 426000, Россия, г. Ижевск, ул. Кирова, 132.
E-mail: lidanilov@mail.ru

МАТЕМАТИКА 2014. Вып. 4

L. I. Danilov

Recurrent and almost recurrent multivalued maps and their selections. III

Keywords: recurrent function, selector, multivalued map.

MSC: 42A75, 54C65

Let (U,ρ) be a complete metric space and let $\mathcal{R}^p(\mathbb{R},U)$, $p\geqslant 1$, and $\mathcal{R}(\mathbb{R},U)$ be the spaces of (strongly) measurable functions $f:\mathbb{R}\to U$ for which the Bochner transforms $\mathbb{R}\ni t\mapsto f_l^B(t;\cdot)=f(t+\cdot)$ are recurrent functions with ranges in the metric spaces $L^p([-l,l],U)$ and $L^1([-l,l],(U,\rho'))$ where $l>0$, and (U,ρ') is the complete metric space with the metric $\rho'(x,y)=\min\{1,\rho(x,y)\}$, $x,\ y\in U$. Analogously, we define the spaces $\mathcal{R}^p(\mathbb{R},\mathrm{cl}_b\,U)$ and $\mathcal{R}(\mathbb{R},\mathrm{cl}_b\,U)$ of functions (multivalued mappings) $F:\mathbb{R}\to\mathrm{cl}_b\,U$ with ranges in the complete metric space $(\mathrm{cl}_b\,U,\mathrm{dist})$ of nonempty closed bounded subsets of the metric space (U,ρ) with the Hausdorff metric dist (while defining the multivalued mappings $F\in\mathcal{R}(\mathbb{R},\mathrm{cl}_b\,U)$ the metric $\mathrm{dist}'(X,Y)=\min\{1,\mathrm{dist}(X,Y)\}$, $X,\ Y\in\mathrm{cl}_b\,U$, is also considered). We prove the existence of selectors $f\in\in\mathcal{R}(\mathbb{R},U)$ (accordingly $f\in\mathcal{R}^p(\mathbb{R},U)$) of multivalued maps $F\in\mathcal{R}(\mathbb{R},\mathrm{cl}_b\,U)$ (accordingly $F\in\mathcal{R}^p(\mathbb{R},\mathrm{cl}_b\,U)$) for which the sets of almost periods are subordinated to the sets of almost periods of multivalued maps F. For functions $g\in\mathcal{R}(\mathbb{R},U)$, the conditions for the existence of selectors $f\in\mathcal{R}(\mathbb{R},U)$ and $f\in\mathcal{R}^p(\mathbb{R},U)$ such that $\rho(f(t),g(t))=\rho(g(t),F(t))$ for a.e. $t\in\mathbb{R}$ are obtained. On the assumption that the function g and the multivalued map F have relatively dense sets of common ε-almost periods for all $\varepsilon>0$, we also prove the existence of selectors $f\in\mathcal{R}(\mathbb{R},U)$ such that $\rho(f(t),g(t))\leqslant\rho(g(t),F(t))+\eta(\rho(g(t),F(t)))$ for a.e. $t\in\mathbb{R}$, where $\eta:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ is an arbitrary nondecreasing function for which $\eta(0)=0$ and $\eta(\xi)>0$ for all $\xi>0$, and, moreover, $f\in\mathcal{R}^p(\mathbb{R},U)$ if $F\in\mathcal{R}^p(\mathbb{R},\mathrm{cl}_b\,U)$. To prove the results we use the uniform approximation of functions $f\in\mathcal{R}(\mathbb{R},U)$ by elementary functions belonging to the space $\mathcal{R}(\mathbb{R},U)$ which have the sets of almost periods subordinated to the sets of almost periods of the functions f.

REFERENCES

1. Danilov L.I. Recurrent and almost recurrent multivalued maps and their selections, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2011, no. 2, pp. 19–51 (in Russian).
2. Danilov L.I. Recurrent and almost recurrent multivalued maps and their selections. II, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2012, no. 4, pp. 3–21 (in Russian).
3. Danilov L.I. The uniform approximation of recurrent functions and almost recurrent functions, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2013, no. 4, pp. 36–54 (in Russian).
4. Danilov L.I. Almost periodic selections of multivalued mappings, *Izv. Otd. Mat. Inform. Udmurt. Gos. Univ.*, 1993, no. 1, pp. 16–78. (in Russian).
5. Danilov L.I. On Weyl almost periodic selections of multivalued maps, *J. Math. Anal. Appl.*, 2006, vol. 316, no. 1, pp. 110–127.
6. Danilov L.I. On Besicovich almost periodic selections of multivalued maps, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2008, no. 1, pp. 97–120 (in Russian).
7. Danilov L.I. On a class of Weyl almost periodic selections of multivalued maps, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2009, no. 1, pp. 34–55 (in Russian).
8. Dolbilov A.M., Shneiberg I.Y. Multivalued almost periodic mappings and selections of them, *Siberian Math. J.*, 1991, vol. 32, no. 2, pp. 326–328.
9. Fryszkowski A. Continuous selections for a class of non-convex multivalued maps, *Studia Math.*, 1983, vol. 76, no. 2, pp. 163–174.
10. Danilov L.I. On almost periodic sections of multivalued maps, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2008, no. 2, pp. 34–41 (in Russian).
11. Michael E. Continuous selections. I, *Ann. Math.*, 1956, vol. 63, no. 2, pp. 361–381.
12. Nemytskii V.V., Stepanov V.V. *Kachestvennaya teoriya differentsial'nykh uravnenii* (Qualitative theory of differential equations), Moscow–Izhevsk: RCD, 2004, 456 p.
13. Anosov D.V., Aranson S.Kh., Arnold V.I., Bronshtein I.U., Grines V.Z., Il'yashenko Yu.S. *Ordinary differential equations and smooth dynamical systems*, Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag, 1997.
14. Levitan B.M. *Pochti periodicheskie funktsii* (Almost periodic functions), Moscow: GITTL, 1953, 396 p.
15. Danilov L.I. Measure-valued almost periodic functions and almost periodic selections of multivalued maps, *Sbornik: Mathematics*, 1997, vol. 188, no. 10, pp. 1417–1438.
16. Danilov L.I. On almost periodic multivalued maps, *Mathematical Notes*, 2000, vol. 68, no. 1, pp. 71–77.

17. Danilov L.I. Uniform approximation of Stepanov almost periodic functions and almost periodic selections of multivalued maps, Physical Technical Institute of Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Izhevsk, 2003, 70 p. Deposited in VINITI 21.02.2003, no. 354-B2003 (in Russian).

18. Danilov L.I., Ivanov A.G. On a pointwise maximum theorem in the almost periodic case, *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii. Matematika*, 1994, no. 6, pp. 50–59 (in Russian).

19. Ivanov A.G. Elements of the mathematical apparatus in the almost periodic optimization problems. I, *Izv. Inst. Mat. Inform. Udmurt. Gos. Univ.*, 2002, no. 1 (24), pp. 3–100 (in Russian).

20. Danilov L.I. On the uniform approximation of a function that is almost periodic in the sense of Stepanov, *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii. Matematika*, 1998, no. 5, pp. 10–18 (in Russian).

21. Krein M.G., Nudel'man A.A. *Problema momentov Markova i ekstremal'nye zadachi. Idei i problemy P.L. Chebysheva i A.A. Markova i ikh dal'neishee razvitie* (The Markov moment problem and extremal problems. Ideas and problems of P.L. Chebyshev and A.A. Markov and their further development), Moscow: Nauka, 1973, 561 p.

Received 18.10.2014

Danilov Leonid Ivanovich, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher, Physical Technical Institute, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. Kirova, 132, Izhevsk, 426000, Russia.
E-mail: lidanilov@mail.ru