УДК 517.95

© *И. В. Лисаченко, В. И. Сумин*

ОБ ОСОБЫХ УПРАВЛЕНИЯХ ПРИНЦИПА МАКСИМУМА ДЛЯ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ СИСТЕМЫ ГУРСА–ДАРБУ[1]

Рассматривается терминальная задача оптимизации нелинейной управляемой системы Гурса–Дарбу с полной каратеодориевской правой частью уравнения в случае, когда необходимо искать решения системы в классе функций с суммируемой в некоторой степени $p > 1$ смешанной производной. Показывается, что если правая часть аффинна по производным и они в ней аддитивно отделены от управления, то вырождение поточечного принципа максимума (необходимого условия оптимальности первого порядка при игольчатом варьировании управления) всегда является сильным, то есть на особом управлении принципа максимума одновременно с принципом максимума вырождаются и условия оптимальности второго порядка. Приводятся необходимые условия оптимальности особых управлений в этой ситуации, обобщающие известные сходные условия, относящиеся к случаю решений с ограниченной смешанной производной и более гладких правых частей уравнений.

Ключевые слова: нелинейная система Гурса–Дарбу, решения с суммируемой смешанной производной, терминальная задача оптимизации, принцип максимума, особое управление.

Начиная с пионерских работ О. В. Васильева 1971–1972 годов вопросы получения *необходимых условий оптимальности* (НУО) *особых управлений* (ОУ) *поточечного принципа максимума* (ППМ) в теории оптимизации распределенных систем изучались в основном для управляемых систем Гурса–Дарбу и близких к ним (см. обзор литературы в [1, § 1] и в [2, 3], библиографию в [4], обзоры [5, 6]). При этом система Гурса–Дарбу рассматривалась, как правило, в классах функций с ограниченными смешанной и первыми частными производными.

Достаточно общий способ изучения ОУ ППМ для распределенных задач оптимизации, опирающийся на возможность представления управляемой системы в форме вольтеррова функционального уравнения в лебеговом пространстве, был предложен в [7]. В [2] представлена схема, обобщающая способ [7] изучения ОУ. Применительно к ОУ ППМ схема [2] подробно описана в [3]. В [3, 7] показано, что для распределенных задач достаточно характерно сильное вырождение ППМ, когда вместе с ППМ (НУО 1-го порядка при игольчатом варьировании) вырождаются и НУО 2-го порядка (или, иначе говоря, вырождаются ОУ ППМ); получены содержательные НУО вырожденных ОУ. В частности, в [7] изучен случай сильного вырождения ППМ для терминальной задачи оптимизации нелинейной системы Гурса–Дарбу, рассматриваемой в классе абсолютно непрерывных функций с ограниченными смешанной и первыми производными.

Представляют определенный интерес (см., например, [8, 9] и библиографию в [8, 9]) задачи оптимизации систем типа Гурса–Дарбу, рассматриваемых в классах AC_p^n абсолютно непрерывных n-вектор-функций с суммируемыми в некоторой степени p смешанной и первыми производными. В этом случае, видимо, ОУ ППМ систематически никем не изучались. В данной публикации рассматривается терминальная задача оптимизации нелинейной системы Гурса–Дарбу с полной каратеодориевской правой частью в случае, когда необходимо искать решения системы в классе AC_p^n, $p > 1$. Изучается ситуация, когда эта необходимость обусловлена принадлежностью соответствующему лебегову пространству производных граничных функций. Показывается, что если правая часть аффинна по производным и они в ней аддитивно отделены от управления, то ОУ ППМ вырождаются. Уточняются результаты [10]. Приводятся содержательные НУО вырожденных ОУ.

[1]Финансовая поддержка Минобрнауки РФ в рамках проектной части государственного задания в сфере научной деятельности в 2014–2016 гг. (проект № 1727) и грантом (соглашение от 27.08.13 № 02.B.49.21.0003 между Минобрнауки РФ и ННГУ).

Изучению ОУ ППМ для терминальной задачи оптимизации системы Гурса–Дарбу с аффинной по производным правой частью посвящено немало работ (см., например, [1, глава 1, § 2], [4, глава 1, § 5], библиографию в [1,4], обзоры [5,6]). Однако известные авторам статьи НУО ОУ, сходные с приведенными ниже и полученные ранее другими авторами, касались случая решений системы Гурса–Дарбу с ограниченными смешанной и первыми производными в предположениях определенной гладкости правой части уравнения (как правило, предполагалось, что правая часть и ее производные по «фазовым» переменным непрерывны по совокупности переменных; см. [1, глава 1, § 2], [4, глава 1, § 5], обзоры [5, 6] и др.).

Данная публикация примыкает к статье [11], где можно найти более обширную библиографию и дополнительные комментарии; в [11] основное внимание уделяется случаю так называемого полного вырождения ППМ (определение см. ниже), здесь же мы сразу рассматриваем общий случай вырождения.

Примем следующие соглашения: векторы, если не оговорено противное, считаются столбцами; $\mathbf{R}^n$ — пространство n-вектор-столбцов; в покомпонентном представлении n-вектор-столбец $a \in \mathbf{R}^n$ записываем в строку в фигурных скобках: $a \equiv \{a^1, \ldots, a^n\}$; $\langle a, b\rangle_n \equiv \sum\limits_{i=1}^{n} a^i b^i$ — скалярное произведение векторов $a, b \in \mathbf{R}^n$; для a, $b \in \mathbf{R}^n$ пишем $a \geqslant b$, если $a^i \geqslant b^i$ $(i = 1, \ldots, n)$; если $a_1, \ldots, a_k \in \mathbf{R}^n$, то $\{a_i\}_{i=1}^k \equiv \{a_1, \ldots, a_k\} \equiv \{a_1^1, \ldots, a_1^n, \ldots, a_k^1, \ldots, a_k^n\} \in \mathbf{R}^{kn}$; модуль вектора равен сумме модулей его компонент; если X, Y — нормированные пространства, то $\mathfrak{L}(X, Y)$ — пространство линейных ограниченных операторов из X в Y, а норма в прямом произведении $X \times Y$ задается формулой $\|\{x, y\}\|_{X\times Y} \equiv \|x\|_X + \|y\|_Y$; если X — функциональное пространство, то X^n — пространство n-вектор-функций, а $X^{n\times m}$ — $(n \times m)$-матриц-функций, составленных из функций пространства X; производная скалярной функции по векторному аргументу есть вектор-строка; знаком $*$ обозначаются операции перехода к сопряженному пространству и сопряженному оператору, операция транспонирования; $p \in (1, \infty)$ — заданное число; $q \equiv p/(p-1)$.

1. Оптимизационная задача. Рассмотрим управляемую задачу Гурса–Дарбу:

$$x''_{t^1t^2}(t) = g(t, x(t), x'_{t^1}(t), x'_{t^2}(t), u(t)),\ t \equiv \{t^1, t^2\} \in \Pi \equiv [0, 1]^2, \tag{1}$$

$$x(t^1, 0) = \varphi_1(t^1),\ x(0, t^2) = \varphi_2(t^2),\ t^1 \in [0, 1],\ t^2 \in [0, 1], \tag{2}$$

где $g(t, l_0, l_1, l_2, v) \equiv g(t, l, v)\colon \Pi \times \mathbf{R}^{3n} \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ $\big(l \equiv \{l_0, l_1, l_2\} \in (\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n) \equiv \mathbf{R}^{3n}\big)$ и $\varphi_i(t^i)\colon [0, 1] \to \mathbf{R}^n$ $(i = 1, 2)$ заданы, $u(t)\colon \Pi \to \mathbf{R}^m$ — управление. Считаем, что $\varphi'_i \in L^n_p([0, 1])$, $\varphi_i(0) = 0$, $i \in \{1, 2\}$; допустимы $u(\cdot)$, принимающие значения из ограниченного множества $V \subset \mathbf{R}^m$ (класс таких управлений обозначим D). Далее, как было сказано во введении, изучаем класс управляемых систем (1) с правыми частями вида

$$g(t, l, v) \equiv g_1(t, l_0)l_1 + g_2(t, l_0)l_2 + g_0(t, l_0, v)$$

и считаем выполненными следующие условия:

(a) функция $g_0(t, l_0, v)$ дважды дифференцируема по l_0 при каждом v для почти всех t и вместе с производными g'_{0l_0}, $g''_{0l_0l_0}$ измерима по t при любых $\{l_0, v\}$, непрерывна по $\{l_0, v\}$ для почти каждого t и ограничена на любом ограниченном множестве;

(b) $(n \times n)$-матрицы-функции $g_1(t, l_0)$ и $g_2(t, l_0)$ дважды дифференцируемы по l_0 для почти всех t и вместе с производными g'_{1l_0}, $g''_{1l_0l_0}$, g'_{2l_0}, $g''_{2l_0l_0}$ измеримы по t при любых l_0, непрерывны по l_0 для почти каждого t и ограничены на любом ограниченном множестве;

(c) на любом ограниченном множестве элементов l_0 функции g'_{1l_0}, g'_{2l_0} непрерывны по l_0 равномерно относительно $t \in \Pi$;

(d) $g_1(t, l_0)$ (соответственно $g_2(t, l_0)$) непрерывна по t^1 (соответственно по t^2) для каждого l_0 при почти всех t^2 (соответственно t^1).

Заметим, что условие (a) заведомо выполнено (соответственно условия (b), (c), (d) заведомо выполнены), если функция g_0 непрерывна (соответственно функции g_i $(i = 1, 2)$ непрерывны) по совокупности переменных вместе с производными g'_{0l_0}, $g''_{0l_0l_0}$ (соответственно g'_{il_0}, $g''_{il_0l_0}$ $(i = 1, 2)$).

Для сокращения записи введем обозначения[2]: $\mathfrak{M} \equiv L_\infty^n \times L_p^n \times L_p^n$, $\mathfrak{N}_0 \equiv L_p^{n\times n}$, $\mathfrak{N}_1 \equiv L_\infty^{n\times n}$, $\mathfrak{N} \equiv \mathfrak{N}_0 \times \mathfrak{N}_1 \times \mathfrak{N}_1$; элементы $\mathfrak{M}$ нам удобно считать $3n$-вектор-функциями, а элементы $\mathfrak{N}$ — $(n \times 3n)$-матрицами-функциями.

При сформулированных условиях естественно рассматривать решения задачи (1)–(2) из класса W функций $x(\cdot) \in AC_p^n$, удовлетворяющих условиям (2). Функцию $x \in W$ назовем отвечающим управлению $u \in D$ глобальным решением задачи (1)–(2), если пара x, u обращает (1) в тождество почти всюду на Π. Как показано в [8], управлению $u \in D$ не может отвечать более одного такого решения. Множество тех $u \in D$, каждому из которых отвечает глобальное решение $x \in W$ задачи (1)–(2), обозначим Ω.

Введем обозначения для нужных нам операторов:

$$A_0[z](t) \equiv \int_0^{t^1}\int_0^{t^2} z(\xi_1,\xi_2)\,d\xi_1\,d\xi_2,\ \ A_1[z](t) \equiv \int_0^{t^2} z(t^1,\xi)\,d\xi,\ \ A_2[z](t) \equiv \int_0^{t^1} z(\xi,t^2)\,d\xi,$$
$$A[z]\,(t) \equiv \{A_0[z](t), A_1[z](t), A_2[z](t)\},\ t \in \Pi,\ z \in L_p^n;$$

$E\,[x]\,(t) \equiv \left\{x(t), x'_{t^1}(t), x'_{t^2}\,(t)\right\}$, $t \in \Pi$, $x \in AC_p^n$. Очевидно, $A \in \mathfrak{L}(L_p^n, \mathfrak{M})$, $E\left[AC_p^n\right] \subset \mathfrak{M}$. Пусть $x_0 \in W$ — решение задачи (1)–(2), отвечающее управлению $u_0 \in \Omega$. Для $v \in V$ положим

$$\Delta_v g(\cdot) \equiv g(\cdot, x_0(\cdot), x'_{0t^1}(\cdot), x'_{0t^2}(\cdot), v) - g(\cdot, x_0(\cdot), x'_{0t^1}(\cdot), x'_{0t^2}(\cdot), u_0(\cdot)),$$

аналогичный смысл у обозначений $\Delta_v g_0(\cdot)$ и $\Delta_v g'_l(\cdot)$. Для $u \in D$ положим $r(u) \equiv \|A[\Delta_{u(\cdot)} g(\cdot)]\|_{\mathfrak{M}}$. Справедлива следующая теорема об условиях сохранения (при возмущении управления) глобальной разрешимости задачи (1)–(2) (см. [8]).

Теорема 1. *Для любого $u_0 \in \Omega$ существуют числа $\varkappa > 0$, $C > 0$ такие, что всякое управление $u \in D$, удовлетворяющее неравенству $r(u) < \varkappa$, принадлежит Ω и при этом*

$$\|E[x - x_0]\|_{\mathfrak{M}} \leqslant C r(u), \quad \left\|(x - x_0)''_{t^1 t^2}\right\|_{L_p^n} \leqslant C \|\Delta_{u(\cdot)} g(\cdot)\|_{L_p^n},$$

где $x \in W$ — глобальное решение задачи (1)–(2), отвечающее управлению u.

Рассмотрим задачу оптимизации

$$J[u] \equiv G(x_u(1,1)) \to \max, \quad u \in \Omega, \tag{3}$$

где $G(\cdot)\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция, x_u — решение (1)–(2), отвечающее управлению $u \in \Omega$. Везде ниже: u_0 — фиксированное решение задачи (3), $x_0 \equiv x_{u_0}$; u — некоторый элемент Ω.

2. Принцип максимума и особые управления. Сформулируем для задачи (3) ППМ. Считая оператор A элементом класса $\mathfrak{L}\left(L_p^n, \mathfrak{M}\right)$, рассмотрим сопряженный к нему оператор A^*, представляемый на подпространстве $L_1^n \times L_q^n \times L_q^n$ пространства $\mathfrak{M}^*$ формулами

$$A^*[z]\,(t) \equiv A_0^*[z^{(0)}]\,(t) + A_1^*[z^{(1)}]\,(t) + A_2^*[z^{(2)}](t), \quad t \in \Pi,$$
$$A_0^*[z^{(0)}](t) \equiv \int_{t^1}^1\int_{t^2}^1 z^{(0)}(\xi_1,\xi_2)\,d\xi_1\,d\xi_2, \quad A_1^*[z^{(1)}](t) \equiv \int_{t^2}^1 z^{(1)}(t^1,\xi)\,d\xi,$$
$$A_2^*[z^{(2)}](t) \equiv \int_{t^1}^1 z^{(2)}(\xi,t^2)\,d\xi, \quad z = \left\{z^{(0)}, z^{(1)}, z^{(2)}\right\} \in L_1^n \times L_q^n \times L_q^n.$$

Пусть $\mathfrak{X}_0 \equiv (G'(x_0(1,1)))^*$. Уравнение

$$\psi(t) - A^*\left[\left\{g'_l(\cdot)\right\}^* \psi(\cdot)\right](t) = \mathfrak{X}_0, \quad t \in \Pi, \tag{4}$$

где $g'_l(t) \equiv g'_l(t, x_0(t), x'_{0t^1}(t), x'_{0t^2}(t), u_0(t))$, $t \in \Pi$, имеет единственное в L_∞^n решение ψ (см. [9]). Положим

$$\pi(t,v) \equiv \langle\psi(t), \Delta_v g(t)\rangle_n, \quad t \in \Pi,\ v \in V.$$

Для задачи (3) справедливо следующее НУО в виде ППМ [9, теорема 3].

---

[2]Значок Π в обозначениях, как правило, опускаем; в скалярном случае опускаем значок, обозначающий размерность. Например, вместо $AC_p^n(\Pi)$, $L_p^n(\Pi)$, $L_p^1(\Pi)$ пишем соответственно AC_p^n, L_p^n, L_p.

Теорема 2. *Для любого $v \in V$ при почти всех $\tau \in \Pi$ выполняется неравенство $\pi(\tau, v) \leqslant 0$.*

Сформулированный ППМ можно считать НУО первого порядка относительно традиционного игольчатого варьирования, которое можно ввести следующим образом. Пусть Σ — совокупность всех наборов $\sigma \equiv \{\tau, v\}$, в каждом из которых v — какой-то элемент V, $\tau \in \Pi$ — некоторая правильная точка Лебега функции $\pi(\cdot, v)$; $\mathcal{H}$ — семейство всех пар $h \equiv \{\sigma, \varepsilon\}$, в каждой из которых $\sigma \equiv \{\tau, v\} \in \Sigma$, а ε — такое положительное число, что множество $\Pi_\varepsilon(\tau) \equiv \tau - \varepsilon[0,1]^2$ принадлежит Π. Каждому $h \equiv \{\sigma, \varepsilon\} \in \mathcal{H}$ отвечает допустимое управление $u_h(t) \equiv \{v,\ t \in \Pi_\varepsilon(\tau);\ u_0(t),\ t \in \Pi \setminus \Pi_\varepsilon(\tau)\}$, а каждому набору *параметров варьирования* $\sigma \in \Sigma$ — семейство функций $\{u_h(\cdot)\}_{h \equiv \{\sigma,\varepsilon\} \in \mathcal{H}}$ — *простейшая одноточечная игольчатая варианта* (ПОИВ) управления u_0.

Назовем $\mathcal{M} \equiv \{\{t, v\} \in \Pi \times V\colon\ \pi(t, v) = 0\}$ особым множеством ППМ для управления u_0. При почти каждом $t \in \Pi$ значение $u_0\,(t)$ оптимального управления u_0 принадлежит сечению $\mathcal{M}(t) \equiv \{v \in V\colon\ \{t, v\} \in \mathcal{M}\}$ множества $\mathcal{M}$. Управление u_0 называем *особым управлением* (ОУ) ППМ, если

$$\operatorname{mes}\{t \in \Pi\colon \mathcal{M}(t) \neq \{u_0(t)\}\} > 0.$$

Говорим тогда, что ППМ вырождается на ОУ ППМ, и называем ОУ ППМ также *вырожденным управлением* ППМ. Пусть $\Pi_* \equiv \{t \in \Pi\colon\ \mathcal{M}(t) \neq \{u_0(t)\}\}$. Случай, когда $\operatorname{mes}\Pi_* = \operatorname{mes}\Pi$ и при почти всех $t \in \Pi$ сечения $\mathcal{M}(t)$ совпадают с V, назовем случаем *полного вырождения* ППМ. В случае полного вырождения ППМ можно получить НУО ОУ с помощью простейшего одноточечного игольчатого варьирования (см. [11]). В общем случае такое варьирование, вообще говоря, не дает содержательных НУО ОУ, так как график простейшей игольчатой варианты может не принадлежать множеству $\mathcal{M}$. Чтобы исследовать общий случай, воспользуемся более общим способом одноточечного варьирования, чем ПОИВ.

3. Вырожденные особые управления. Пусть u_0 — ОУ ППМ. Положим $\Delta_u J \equiv J[u] - -J[u_0]$, $u \in \Omega$. Заметим, что $\pi(t, v) : \Pi \times \overline{V} \to \mathbf{R}$ — функция Каратеодори, и поэтому (см. [12, п. 8.1.5]) отображение $\overline{\mathcal{M}(\cdot)} : \Pi \to 2^{\overline{V}}$ измеримо и имеет счетное аппроксимирующее его семейство измеримых функций $\mathbf{K} \equiv \{v_k(t), t \in \Pi\}_{k=1}^{\infty}$, то есть существует $\Pi_0 \subset \Pi$ такое, что

$$\overline{\mathcal{M}(t)} = \overline{\left\{\bigcup_{k=1}^{\infty}\{v_k(t)\}\right\}}, \quad t \in \Pi_0, \qquad \operatorname{mes}\Pi_0 = \operatorname{mes}\Pi.$$

Обозначим через Π_l ту часть множества Π_0, каждая точка которой есть точка Лебега суперпозиции $\pi(\cdot, v_k(\cdot))$ для любой функции v_k семейства $\mathbf{K}$. Очевидно, $\operatorname{mes}\Pi_l = \operatorname{mes}\Pi$.

Пусть $\mathbf{\Sigma}$ — совокупность всех наборов $\zeta \equiv \{\tau, v_k\}$, в каждом из которых τ — некоторая точка множества Π_l, а v_k — какой-то элемент $\mathbf{K}$; $\mathbf{H}$ — семейство всех пар $\mathbf{h} \equiv \{\zeta, \varepsilon\}$, в каждой из которых $\zeta \equiv \{\tau, v_k\} \in \mathbf{\Sigma}$, а ε — такое положительное число, что $\Pi_\varepsilon(\tau) \subset \Pi$. Каждому $\mathbf{h} \equiv \{\zeta, \varepsilon\} \in \mathbf{H}$ отвечает допустимое управление

$$u_{\mathbf{h}}(t) \equiv \{v_k(t),\ t \in \Pi_\varepsilon(\tau);\ u_0(t),\ t \in \Pi \setminus \Pi_\varepsilon(\tau)\},$$

а каждому набору *параметров варьирования* $\zeta \equiv \{\tau, v_k\} \in \mathbf{\Sigma}$ — семейство $\{u_{\mathbf{h}}(\cdot)\}_{\mathbf{h} \equiv \{\zeta,\varepsilon\} \in \mathbf{H}}$, одноточечная игольчатая варианта управления u_0. Такой специальный способ варьирования назовем *одноточечным игольчатым варьированием, связанным с множеством $\mathcal{M}$*. Предел $\delta^{\gamma-1}J(\zeta) \equiv \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{-\gamma}\Delta_{u_{\mathbf{h}}}J$, если он существует при некотором $\gamma \geqslant 2$, назовем *вариацией порядка $\gamma - 1$ функционала J на варианте* $\{u_{\mathbf{h}}(\cdot)\}_{\mathbf{h} \equiv \{\zeta,\varepsilon\} \in \mathbf{H}}$; соответственно, НУО вида $\delta^{\gamma-1}J(\zeta) \leqslant 0$ ($\zeta \in \mathbf{\Sigma}$) назовем НУО порядка $\gamma - 1$ управления u_0 при одноточечном игольчатом варьировании, связанном с множеством $\mathcal{M}$. Для указанного способа варьирования первая вариация $\delta J(\zeta) \equiv \equiv \delta J(\tau, v_k) \equiv \lim\limits_{\varepsilon \to 0}\left(\varepsilon^{-2}\Delta_{u_{\mathbf{h}}}J\right)$ при любом $\zeta \equiv \{\tau, v_k\} \in \mathbf{\Sigma}$ существует и равна $\pi(\tau, v_k(\tau))$. Так как $\mathbf{K}$ аппроксимирует отображение $\overline{\mathcal{M}(\cdot)}$, то для ОУ u_0 имеем $\delta J(\zeta) \equiv 0$, $\zeta \in \mathbf{\Sigma}$. Назовем ОУ u_0 *вырожденным* ОУ *для одноточечного игольчатого варьирования, связанного с множеством $\mathcal{M}$*, если тождественно зануляется вариация 2-го порядка: $\delta^2 J(\zeta) \equiv 0$, $\zeta \in \mathbf{\Sigma}$.

При условиях (a), (b), (c), (d) получаем $\Delta_{u_{\mathbf{h}}} J = O(\varepsilon^4)$, $\varepsilon \to 0$ ($\zeta \in \mathbf{\Sigma}$). То есть справедлива следующая теорема о вырождении ОУ.

Теорема 3. *Если управление* u_0 — ОУ *для* ППМ, *то* u_0 — *вырожденное* ОУ *для одноточечного игольчатого варьирования, связанного с особым множеством* ППМ *для этого управления, и содержательными для* u_0 *могут быть лишь* НУО *порядка, большего* 2.

В условиях теоремы 3 при одноточечном игольчатом варьировании, связанном с множеством $\mathcal{M}$, на любой варианте управления u_0 существует третья вариация функционала J, что позволяет получить для вырожденного ОУ содержательные НУО третьего порядка. Чтобы сформулировать соответствующий результат (теорема 4), введем специальные обозначения: $\Gamma \equiv \{\{i,j\}\colon\ i \in \overline{1,n},\ j \in \overline{1,3n};\ \Delta_v g^{i'}_{l^j}(t) = 0$ для любого $v \in V$ при почти всех $t \in \Pi\}$; если $X = (X_{ij})$ — $(n \times 3n)$-матрица, то $\widetilde{X} = (\widetilde{X}_{ij})$ — $(n \times 3n)$-матрица, в которой

$$\widetilde{X}_{ij} \equiv \{0,\ \{i,j\} \in \Gamma;\ X_{ij},\ \{i,j\} \notin \Gamma\},$$

X^0 — $3n^2$-столбец, полученный развертыванием X по правилу «столбец за столбцом»: $X^0 \equiv$ $\equiv \{X_{11}, X_{21}, \ldots, X_{n1}, X_{12}, X_{22}, \ldots, X_{n\,3n}\}$, а $M[\cdot]$ — обратный оператор свертывания $3n^2$-столбца в $(n \times 3n)$-матрицу; $g''_{ll}(\cdot)[x,y] \equiv \sum\limits_{i=1}^{3n}\sum\limits_{j=1}^{3n} g''_{l^il^j}(\cdot)x^iy^j,\ x,y \in \mathbf{R}^{3n}$.

Формулы

$$\mathbf{b}_0[x,y] \equiv 2^{-1}\left\langle G''(x_0(1,1)) \iint_\Pi x(t)\,dt, \iint_\Pi y(t)\,dt\right\rangle_n, \quad x,\ y \in L_1^n,$$

$$\mathbf{b}_1[x,y] \equiv 2^{-1}\iint_\Pi \left\langle \psi(t),\ g''_{ll}(t, x_0(t), u_0(t))[A[x](t), A[y](t)]\right\rangle_n dt, \quad x,\ y \in L_1^n,$$

$$\mathbf{b}_2[x,y] \equiv \iint_\Pi \left\langle \psi(t),\ \widetilde{M[y(t)]}A[x](t)\right\rangle_n dt, \quad x \in L_1^n,\ y \in L_1^{3n^2},$$

задают ограниченные билинейные функционалы над $L_1^n \times L_1^n$, $L_1^n \times L_1^n$, $L_1^n \times L_1^{3n^2}$ соответственно. Любой ограниченный билинейный над $L_1^{n_1} \times L_1^{n_2}$ функционал $\mathbf{b}[\cdot,\cdot]$ единственным образом представим в виде

$$\mathbf{b}[x,y] = \iint_\Pi dt \iint_\Pi x^*(t)\Theta(t,s)y(s)\,ds, \quad x \in L_1^{n_1}, \quad y \in L_1^{n_2}, \tag{5}$$

где $\Theta \in L_\infty^{n_1 \times n_2}(\Pi \times \Pi)$. Пусть Θ_0 и Θ_1 — $(n \times n)$-матрицы, отвечающие по формуле (5) функционалам $\mathbf{b}_0$ и $\mathbf{b}_1$; Θ_2 — $(n \times 3n^2)$-матрица, отвечающая функционалу $\mathbf{b}_2$. Непосредственно по определению матриц Θ_i находим $\Theta_0(t,s) \equiv 2^{-1}G''(x_0(1,1))$;

$$\Theta_1(t,s) \equiv 2^{-1}\Bigg\{ \int_{\max\{t^1,s^1\}}^1 \int_{\max\{t^2,s^2\}}^1 \Xi_{00}(\xi)\,d\xi + \mathfrak{K}(s^1 - t^1)\int_{\max\{t^2,s^2\}}^1 \Xi_{01}(s^1,\xi^2)\,d\xi^2 +$$
$$+ \mathfrak{K}(s^2 - t^2)\int_{\max\{t^1,s^1\}}^1 \Xi_{02}(\xi^1,s^2)\,d\xi^1 + \mathfrak{K}(t^1 - s^1)\int_{\max\{t^2,s^2\}}^1 \Xi_{10}(t^1,\xi^2)\,d\xi^2 +$$
$$+ \mathfrak{K}(t^2 - s^2)\int_{\max\{t^1,s^1\}}^1 \Xi_{20}(\xi^1,t^2)\,d\xi^1 \Bigg\} \quad (t,s \in \Pi),$$

где $\mathfrak{K}(\cdot)$ — функция Хевисайда,

$$\Xi_{ij}(t) \equiv \left\{\langle \psi(t), g(t,l,u_0(t))\rangle_n\right\}''_{l_il_j}\Big|_{l=\{E[x_0](t)\}},\ i,j = 0,1,2,\ t \in \Pi;$$

$$\Theta_2(t,s) \equiv \left(\Theta_2^{ij}(t,s)\right),\ 1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant 3n^2 \quad (t,s \in \Pi),$$

где

$$\Theta_2^{ij}(t,s)=\begin{cases}\psi^{j-(i-1)n}(s)\mathfrak{K}(s^1-t^1)\mathfrak{K}(s^2-t^2), & \text{если } (i-1)n+1\leqslant j\leqslant in,\\ 0, & \text{если } j\leqslant (i-1)n \text{ или } j>in.\end{cases}$$

Формулы $K[z](t)\equiv g_l'(t)A[z](t),\ S[z](t)\equiv z(t)-K[z](t),\ z\in L_1^n,\ t\in\Pi$, задают операторы $K,\ S\in\mathfrak{L}(L_1^n,L_1^n)$. Левая часть (4) равна $S^*[\psi](t)\equiv\psi(t)-K^*[\psi](t),\ t\in\Pi$, причем оператор $K^*\in\mathfrak{L}(L_\infty^n,L_\infty^n)$ квазинильпотентен. Так как замкнутое в L_∞^n, инвариантное (в силу условия (d)) относительно K^* подпространство $C^n(\Pi)$ содержит функцию-постоянную $\mathfrak{X}_0$, то и L_∞^n-решение ψ уравнения (4) принадлежит $C^n(\Pi)$. Из приведенных выше формул следует, что $\Theta_1(t,s)$ непрерывна на $\Pi\times\Pi$, а $\Theta_2(t,s)$ непрерывна везде на $\Pi\times\Pi$, за исключением, может быть, точек границы тела $\Delta\equiv\{\{t,s\}\in\Pi\times\Pi\colon s\geqslant t\}$, в которых возможен ее конечный скачок[3]. Таким образом, $\Theta_0,\ \Theta_1\in L_\infty^{n\times n}(\Pi\times\Pi)$, $\Theta_2\in L_\infty^{n\times 3n^2}(\Pi\times\Pi)$.

Пусть I_k — тождественный оператор в L_1^k; $L_1^n\otimes L_1^k$ — проективное тензорное произведение L_1^n и L_1^k, натянутое на элементы $x(t)\otimes y(s)\equiv x(t)y^*(s)$ $(x\in L_1^n,\ y\in L_1^k)$ и совпадающее с $L_1^{n\times k}(\Pi\times\Pi)$. Рассматриваемое над $L_\infty^{n\times n}(\Pi\times\Pi)$ уравнение

$$(S\otimes S)^*[\eta(t,s)]=\Theta_i(t,s) \tag{6}$$

имеет единственное решение $\eta_i(t,s)$ $(i=0,1)$. Уравнение

$$(S\otimes I_{3n^2})^*[\eta(t,s)]=\Theta_2(t,s) \tag{7}$$

имеет единственное в $L_\infty^{n\times 3n^2}(\Pi\times\Pi)$ решение $\eta_2(t,s)$. В более подробной записи уравнения (6) и (7) имеют вид соответственно

$$\eta(t,s)-(I_n^*\otimes A^*)\left[\eta(t,s)\cdot\left\{g_l'(s)\right\}\right]-(A^*\otimes I_n^*)\left[\left\{g_l'(t)\right\}^*\cdot\eta(t,s)\right]+\\ +(A^*\otimes A^*)\left[\left\{g_l'(t)\right\}^*\cdot\eta(t,s)\cdot\left\{g_l'(s)\right\}\right]=\Theta_i(t,s)\ \ (t,s\in\Pi)$$

$(i=0,1)$ и

$$\eta(t,s)-\left(A^*\otimes I_{3n^2}^*\right)\left[\left\{g_l'(t)\right\}^*\cdot\eta(t,s)\right]=\Theta_2(t,s)\quad (t,s\in\Pi).$$

Здесь каждый первый сомножитель в тензорном произведении операторов «действует по переменной t», а каждый второй — по переменной s, I_n^* — тождественный оператор в L_∞^n.

Вид уравнений (6), (7) позволяет утверждать, что функции $\eta_0(t,s)$ и $\eta_1(t,s)$ непрерывны на $\Pi\times\Pi$, а функция $\eta_2(t,s)$ кусочно-непрерывна на $\Pi\times\Pi$, причем она может иметь лишь разрывы типа конечного скачка в точках границы тела Δ, вне которого она равна нулю. Действительно, уравнение (6) представимо в виде

$$\eta(t,s)-\mathcal{A}^*[\eta](t,s)=\Theta_i(t,s),\ t\in\Pi,\ s\in\Pi,$$

где оператор $\mathcal{A}^*\equiv(K\otimes I_n+I_n\otimes K-K\otimes K)^*\in\mathfrak{L}\big(L_\infty^{n\times n}(\Pi\times\Pi),L_\infty^{n\times n}(\Pi\times\Pi)\big)$ квазинильпотентен. Замкнутое подпространство $C^{n\times n}(\Pi\times\Pi)$ пространства $L_\infty^{n\times n}(\Pi\times\Pi)$ инвариантно относительно $\mathcal{A}^*$ (в силу условия (d)) и содержит функции Θ_i $(i=0,\ 1)$, поэтому $L_\infty^{n\times n}(\Pi\times\Pi)$-решение уравнения (6) и при $i=0$ и при $i=1$ принадлежит $C^{n\times n}(\Pi\times\Pi)$. Уравнение (7) представимо в виде

$$\eta(t,s)-\mathcal{B}^*[\eta](t,s)=\Theta_2(t,s),\ t\in\Pi,\ s\in\Pi,$$

где оператор $\mathcal{B}^*\equiv(K\otimes I_{3n^2})^*\in\mathfrak{L}\big(L_\infty^{n\times 3n^2}(\Pi\times\Pi),L_\infty^{n\times 3n^2}(\Pi\times\Pi)\big)$ квазинильпотентен. Множество $\mathcal{G}$ функций, кусочно-непрерывных на $\Pi\times\Pi$ с единственно возможными разрывами типа конечного скачка в точках границы тела Δ и равных нулю вне этого тела, замкнуто в $L_\infty^{n\times 3n^2}(\Pi\times\Pi)$, инвариантно относительно $\mathcal{B}^*$ (в силу условия (d)) и содержит функцию $\Theta_2(t,s)$. Поэтому $L_\infty^{n\times 3n^2}(\Pi\times\Pi)$-решение $\eta_2(t,s)$ уравнения (7) также принадлежит $\mathcal{G}$. Далее

[3]Говорим, что функция Θ имеет в точке границы тела $\Delta\subset\Pi\times\Pi$ конечный скачок, если в этой точке существуют различные конечные пределы Θ по внутренности $\overset{\circ}{\Delta}$ множества Δ и по множеству $(\Pi\times\Pi)\setminus\Delta$.

будем считать, что η_2 — тот представитель соответствующего класса эквивалентности, для которого $\eta_2(\tau,\tau) = \lim\limits_{\{t,s\}\to\{\tau,\tau\},\ \{t,s\}\in\mathring{\Delta}} 2^{-2}\eta_2(t,s)$ при почти всех $\tau\in\Pi$. Переходя к пределу в уравнении (7), находим, что для почти каждого $\tau\in\Pi$

$$\eta_2^{ij}(\tau,\tau) = \begin{cases} 2^{-2}\psi^{j-(i-1)n}(\tau), & \text{если } (i-1)n+1\leqslant j\leqslant in, \\ 0, & \text{если } j\leqslant (i-1)n \text{ или } j>in, \end{cases} \quad 1\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant j\leqslant 3n^2.$$

Положим

$$\Upsilon(t,s;w,v)\equiv \left\langle \Delta_w g(t), \{\eta_0(t,s)+\eta_1(t,s)\}\Delta_v g(s) + \eta_2(t,s)\{\Delta_v g_l'(s)\}^0 \right\rangle_n,\ t,s\in\Pi,\ w,v\in V.$$

При условиях (a), (b), (c), (d) для каждого $v_k\in\mathbf{K}$ при почти всех $\tau\in\Pi$ существует вариация $\delta^3 J(\tau,v_k)\equiv \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\big(\varepsilon^{-4}\Delta_{v_\mathbf{h}}J\big)$, и она равна $\Upsilon(\tau,\tau;v_k(\tau),v_k(\tau))$. Так как $\mathbf{K}$ аппроксимирует отображение $\overline{\mathcal{M}(\cdot)}$, то отсюда вытекает следующее НУО порядка 3.

Теорема 4. *Пусть* u_0 — ОУ *для* ППМ. *Для оптимальности управления* u_0 *необходимо выполнение следующего условия:* $\Upsilon(\tau,\tau;\mathbf{w},\mathbf{w})\leqslant 0$ *для любого* $\mathbf{w}\in\mathcal{M}(\tau)$ *при почти всех* $\tau\in\Pi$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Васильев О.В., Срочко В.А., Терлецкий В.А. Методы оптимизации и их приложения. Ч. 2. Оптимальное управление. Новосибирск: Наука, 1990. 151 с.
2. Сумин В.И. Сильное вырождение особых управлений в распределенных задачах оптимизации // ДАН СССР. 1991. Т. 320. №2. С. 295–299.
3. Сумин В.И. Об особых управлениях поточечного принципа максимума в распределенных задачах оптимизации // Вестник Удмуртского государственного университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2010. Вып. 3. С. 70–80.
4. Мансимов К.Б., Марданов М.Дж. Качественная теория оптимального управления системами Гурса–Дарбу. Баку: Элм, 2010. 360 с.
5. Габасов Р., Кириллова Ф.М., Мансимов К.Б. Необходимые условия оптимальности второго порядка для систем с распределенными параметрами // Препринт / Ин-т математики АН БССР. № 31. Минск, 1982. 32 с.
6. Мансимов К.Б. Особые управления в задачах управления системами с распределенными параметрами // Современная математика и ее приложения. Т. 42. Тбилиси: Институт кибернетики АН Грузии, 2006. С. 39–83.
7. Сумин В.И. Оптимизация управляемых обобщенных вольтерровых систем: дисс. . . . канд. физ.-матем. наук. Горький: ГГУ, 1975. 158 с.
8. Лисаченко И.В., Сумин В.И. Нелинейная управляемая задача Гурса–Дарбу: условия сохранения глобальной разрешимости // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47. № 6. С. 858–870.
9. Лисаченко И.В., Сумин В.И. Принцип максимума для терминальной задачи оптимизации системы Гурса–Дарбу в классе функций с суммируемой смешанной производной // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2011. Вып. 2. С. 52–67.
10. Лисаченко И.В., Сумин В.И. Об особых управлениях принципа максимума для терминальной задачи оптимизации системы Гурса–Дарбу // Известия Института математики и информатики УдГУ. 2012. Вып. 1 (39). С. 80–81.
11. Лисаченко И.В., Сумин В.И. Об особых управлениях принципа максимума в терминальной задаче оптимизации системы Гурса–Дарбу // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2015. Т. 20. Вып. 5. С. 1264–1274.
12. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974. 480 с.

Поступила в редакцию 02.10.2015

Лисаченко Ирина Владимировна, к. ф.-м. н., доцент, кафедра прикладной математики, Нижегородский государственный технический университет им. Р. Е. Алексеева, 603950, Россия, г. Нижний Новгород, ул. К. Минина, 24; доцент, кафедра математической физики и оптимального управления, Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, 603950, Россия, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.
E-mail: i_lisach@mail.ru

Сумин Владимир Иосифович, д. ф.-м. н., профессор, кафедра математической физики и оптимального управления, Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, 603950, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.
E-mail: v_sumin@mail.ru

I. V. Lisachenko, V. I. Sumin

On singular controls of a maximum principle for the problem of the Goursat-Darboux system optimization

Keywords: nonlinear Goursat–Darboux system, solutions having summable mixed derivatives, terminal optimization problem, maximum principle, singular controls.

MSC: 49K20

The paper deals with the terminal optimization problem connected with the Goursat–Darboux control system. The right-hand side of the differential equation is a full nonlinear Caratheodory function. We consider the case in which solutions of the Goursat–Darboux system necessarily belong to a class of functions with p-integrable (for some $p > 1$) mixed derivatives. In our case a choice of this class is defined by boundary functions. We study singular controls in the sense of the pointwise maximum principle that are controls for which this principle is strong degenerate, i. e., degenerate together with second-order optimality conditions. It is shown that for strong degeneration of the pointwise maximum principle it is sufficient that right-hand side with respect to state derivatives is affine and these derivatives and control are separated additively. Necessary optimality conditions of the singular controls are given for this case. These conditions generalize similar necessary optimality conditions which were obtained for more smooth right-hand sides in the case of solutions with bounded mixed derivatives.

REFERENCES

1. Vasil'ev O.V., Srochko V.A., Terletskii V.A. *Metody optimizatsii i ikh prilozheniya. Chast' 2. Optimal'noe upravlenie* (Optimization methods and their applications. Part 2. Optimal Control), Novosibirsk: Nauka, 1990, 151 p.
2. Sumin V.I. Strong degeneration of singular controls in distributed optimization problems, *Sov. Math., Dokl.*, 1992, vol. 44, no. 2, pp. 453–458.
3. Sumin V.I. On singular controls in the sence of the pointwise maximum principle in distributed optimization problems, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2010, no. 3, pp. 70–80 (in Russian).
4. Mansimov K.B., Mardanov M.J. *Kachestvennaya teoriya optimal'nogo upravleniya sistemami Gursa–Darbu* (Qualitative theory of optimal control connected with Goursat–Darboux system), Baku: Elm, 2010, 360 p.
5. Gabasov R., Kirillova F.M., Mansimov K.B. Necessary second-order optimality conditions for systems with distributed parameters, *Akad. Nauk Beloruss. SSR, Inst. Mat., Prepr.*, Minsk, 1982, no. 31, 32 p. (in Russian).
6. Mansimov K.B. Singular controls in control problems of distributed parameter systems, *J. Math. Sci.*, New York, 2008, vol. 148, no. 3, pp. 331–381.
7. Sumin V.I. Optimization of control Volterra systems, *Cand. Sci. (Phys.-Math.) Dissertation*, Gor'kii, 1975, 158 p.
8. Lisachenko I.V., Sumin V.I. Nonlinear Goursat–Darboux control problem: conditions for the preservation of global solvability, *Differential Equations*, 2011, vol. 47, no. 6, pp. 858–870.
9. Lisachenko I.V., Sumin V.I. The maximum principle for terminal optimization problem connected with Goursat–Darboux system in the class of functions having summable mixed derivatives, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2011, no. 2, pp. 52–67 (in Russian).

10. Lisachenko I.V., Sumin V.I. On singular controls in the sense of the maximum principle for terminal optimization problem connected with Goursat–Darboux system, *Izv. Inst. Mat. Inform. Udmurt. Gos. Univ.*, 2012, no. 1 (39), pp. 80–81 (in Russian).
11. Lisachenko I.V., Sumin V.I. About singular controls of maximum principle for terminal optimization problem connected with Goursat–Darboux system, *Vestn. Tambov. Univ. Ser. Estestv. Tekh. Nauki*, 2015, vol. 20, no. 5, pp. 1264–1274 (in Russian).
12. Ioffe A.D., Tikhomirov V.M. *Teoriya ekstremal'nykh zadach* (Theory of extremal problems), Moscow: Nauka, 1974, 479 p.

Received 02.10.2015

Lisachenko Irina Vladimirovna, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Applied Mathematics, Nizhni Novgorod State Technical University, ul. Minina, 24, Nizhni Novgorod, 603950, Russia; Associate Professor, Department of Mathematical Physics and Optimal Control, Nizhni Novgorod State University, pr. Gagarina, 23, Nizhni Novgorod, 603950, Russia.
E-mail: i_lisach@mail.ru

Sumin Vladimir Iosifovich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Department of Mathematical Physics and Optimal Control, Nizhni Novgorod State University, pr. Gagarina, 23, Nizhni Novgorod, 603950, Russia.
E-mail: v_sumin@mail.ru