УДК 519.21, 004.94

© *И. Е. Полосков*

СТОХАСТИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ СО СЛУЧАЙНЫМИ ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ В ФОРМЕ ДИСКРЕТНЫХ ЦЕПЕЙ МАРКОВА[1]

В работе дан обзор проблем, приводящих к необходимости анализа моделей линейных и нелинейных динамических систем в форме стохастических дифференциальных уравнений со случайными запаздываниями различного типа, а также представлены некоторые известные методы решения этих задач. Далее в статье предлагаются новые подходы к приближенному анализу линейных и нелинейных стохастических динамических систем, изменения запаздываний которых описываются дискретной марковской цепью с непрерывным временем. Используемые подходы базируются на сочетании классического метода шагов, расширения пространства состояния стохастической системы и метода статистического моделирования (Монте-Карло). В рассматриваемом случае такой подход позволил упростить задачу и привести исходные уравнения к системам стохастических дифференциальных уравнений без запаздывания. Более того, для линейных систем получена замкнутая последовательность систем обыкновенных дифференциальных уравнений увеличивающейся размерности относительно функций условных математических ожиданий и ковариаций вектора состояния. Изложенная схема демонстрируется на примере стохастической системы второго порядка, изменения запаздывания которой описываются марковской цепью с пятью состояниями. Все расчеты и построение графиков проводились в среде математического пакета Mathematica с помощью программы, написанной на входном языке этого пакета.

Ключевые слова: стохастическая динамическая система, случайное запаздывание, моделирование, вектор состояния, переходный процесс.

Введение

В последние годы важнейшим инструментом исследования в прикладной математике стали уравнения с последействием (запаздыванием, лагом), подклассы которых именуются дифференциально-разностными уравнениями (ДРУ), дифференциальными уравнениями с отклоняющимся аргументом, уравнениями с запаздыванием, нейтральными уравнениями [1–4] и т. д. Реальные явления могут моделироваться системами уравнений с последействием и более сложной структуры, например уравнениями, содержащими несколько дискретных лагов, распределенные и случайные запаздывания и их иные комбинации.

Стохастические дифференциальные уравнения (СДУ) с запаздыванием и, в частности, дифференциально-разностные уравнения (СДРУ) являются обобщениями и детерминистических уравнений с запаздыванием, и стохастических обыкновенных дифференциальных уравнений (СОДУ) [5, 6].

Как известно, задачи с переменным лагом имеют более богатую структуру, но, как правило, у них отсутствуют аналитические решения в замкнутой форме. Поэтому для интегрирования даже детерминистических ДРУ требуются приближенные численные процедуры, а анализ явлений с запаздыванием является в основном количественным. Дополнительный уровень адекватности моделей (но и усложнения тоже) получим, если перейти от детерминистических к стохастическим моделям (соответственно к СОДУ, СДРУ и др.). Круг основных стохастических концепций и их теоретические основания, включая СОДУ, рассматриваются в [5, 7–12]. Численные схемы анализа детерминистических ДРУ [13,14] и СОДУ [15,16] являются основой соответствующих алгоритмов для исследования СДРУ.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 14–01–96019) и в рамках базовой части государственного задания Минобразования России (проект № 2014/153).

Следующим шагом в сторону усложнения моделей различных процессов является трактовка запаздываний как случайных величин и функций. В частности, модели такого вида возникают при описании систем, меняющих свою структуру под воздействием случайных факторов. Несмотря на широкое поле приложений (см. ниже), уравнения подобного вида недостаточно исследованы.

При изучении стохастических систем с запаздыванием можно использовать следующую терминологию [17]: если на систему со случайными запаздываниями действуют случайные возмущения, то модель такой системы называется *системой стохастических дифференциальных уравнений с запаздыванием*; если случайны только входные воздействия, а все остальные параметры, включая запаздывания, детерминистические, — то *системой со случайными входными воздействиями*; если параметры, входные воздействия и начальная функция детерминистические, а запаздывание случайно, — то *системой со случайным запаздыванием*. При этом сложность исследования систем с переменными детерминистическими запаздываниями и случайными возмущениями обычно близка к сложности анализа динамических систем, находящихся под влиянием случайных флуктуаций. Специфику здесь определяет наличие начальной функции, которая требует особого определения и которая может быть как детерминистической, так и случайной.

Необходимость рассмотрения случайности запаздывания при анализе различных физических, технологических, экономических и других явлений исследователями была установлена еще в середине XX в. Прежде всего такой вывод был сделан по отношению к транспортному запаздыванию, где проявление эффекта последействия зависит из конечности скорости электрических зарядов, передачи сигналов и энергии на расстояние в неоднородной среде (например, при наличии препятствий, отражений и вообще в неоднородных средах акустические сигналы приходят в точку наблюдения многократно отраженными и искаженными по сравнению со своим первоначальным видом), протекания процессов в диэлектриках, лазерах, ректорах [18–20] и др.

Необходим учет случайности запаздывания в задачах биологии, например при оценке сроков беременности у людей и других живых существ, времен заражения и иммунного ответа, генетических изменений [21–24] и др. В экономике и финансах присутствуют случайные задержки заказов товаров и их доставки на рынок, поступления платежей по поставкам товаров, возврата кредитов и информации на фондовой бирже [22, 25–27] и др.

Большинство современных систем автоматического управления представляют собой технически сложные устройства, включающие в свой состав большое количество подсистем и обеспечивающие решение комплексных задач [28]. Но обычно компоненты этих систем размещены на некотором расстоянии друг от друга, а для связи компонентов используются сетевые каналы связи (сетевые системы управления, ССУ), что приводит к случайным задержкам передачи данных, потерям пакетов данных и их разупорядочению, а следовательно, и к неустойчивости ССУ и их низкой эффективности [29].

Чтобы решать перечисленные и другие проблемы, необходимо строить математические модели случайных лагов, которые выбираются в форме независимых случайных величин, однородных и неоднородных, дискретных и непрерывных цепей Маркова, скрытых цепей Маркова [29], а также в виде более общих стационарных и нестационарных случайных процессов, в том числе и функций векторов состояния динамических систем.

Вопросы, связанные с влиянием случайных запаздываний на динамику детерминистических и стохастических систем, привлекли внимание исследователей около пятидесяти лет назад [30–33]. В этих и последующих работах [34–36] рассматривались условия существования и единственности решений случайных дифференциальных уравнений, асимптотической устойчивости векторов состояния по вероятности и первому приближению; оценивалось влияние случайного запаздывания на колебательные процессы в нелинейных системах; демонстрировалась эквивалентность исходных детерминистических дифференциальных уравнений n-го порядка с запаздыванием в виде случайного процесса, имеющего в каждый момент времени t равномерное распределение на промежутке $[0, t]$, обыкновенному дифференциальному уравнению $(n+1)$-го порядка; доказывалось существование стационарного случайного решения, которое притягивает все другие решения случайной дифференциальной системы с запаздыванием и др.

К этому спектру задач изучения систем со случайным запаздыванием добавим прикладные области: проблему фильтрации (оценки состояния) [37]; анализ стохастического резонанса в ионном канале [38]; задачу оценки влияния запаздывания на систему взаимосвязанных частиц [39]; анализ влияния случайных запаздываний на сихронизацию хаотических осцилляторов и стохастической линейной устойчивости нейронной сети [40]; условия моментной экспоненциальной устойчивости ССУ [41], моделируемой системой со случайными запаздываниями — непрерывными цепями Маркова, и др.

В связи со сложностью задач методы исследования стохастических систем со случайным запаздыванием нетривиальны и немногочисленны. Прямые аналитические схемы анализа таких систем типа уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова (ФПК-уравнения) [42] отсутствуют, а приближенные ориентируются на исключение случайного запаздывания или полностью (например, с помощью процедуры усреднения, см. ниже, что возможно далеко не всегда и существенно искажает вероятностные характеристики вектора состояния), или сведением к системам с неслучайным постоянным или переменным запаздыванием (к СДУ с запаздыванием или нейтральным СДУ), а также на чисто численные схемы типа Эйлера–Маруямы [15], причем в отличие от систем с неслучайными запаздываниями алгоритмы, отличные от различных вариаций схемы Эйлера–Маруямы, в научной литературе отсутствуют. При этом только при применении процедуры усреднения для вычисления характеристик вектора состояния не требуется совмещение выбранной схемы исследования с методом Монте–Карло.

На практике целью построения численных интеграторов для СДУ, СДРУ и других классов стохастических уравнений является вычисление после дискретизации этих уравнений с использованием метода статистического моделирования (Монте-Карло) [43] сеточных представлений $\{\widehat{\boldsymbol{x}}_k\}$ $(k = 1, 2, \ldots, N)$ одной или многих реализаций $\boldsymbol{x}(t)$ вектора состояния системы в узлах сетки. Во втором случае эти реализации служат для оценки вероятностных характеристик вектора $\boldsymbol{X}(t)$ на основе методов математической статистики.

В монографии [17], посвященной исследованию как детерминистических, так и стохастических систем с переменным запаздыванием, рассмотрен ряд задач и для ДУ, и для СДУ со случайными запаздываниями. В частности, представлены: приближенный метод определения дисперсии выхода линейного уравнения n-го порядка с переменными коэффициентами и единственным термом $X\big(t - \mathcal{T}(t)\big)$ с запаздыванием $\mathcal{T}(t)$, величина которого флуктуирует относительно некоторого постоянного значения; схема вычисления дисперсии широкополосной радиотехнической системы с запаздыванием в виде узкополосного случайного процесса; представление периодического процесса в нелинейной системе со случайным запаздыванием методом гармонического баланса с целью определения плотности вероятности выходного процесса системы. Полученные уравнения (теперь это уже СДУ без запаздывания) для амплитуды–фазы позволяют применить аппарат диффузионных марковских процессов [42] для определения плотности вероятности распределения амплитуды и фазы выходного процесса нелинейной системы.

В монографии [44], наряду с другими рассмотренными задачами, упоминается более общая проблема, чем в [17], исследования системы дифференциально-разностных уравнений с одним или многими запаздываниями, которые представляют собой случайные функции времени. Для анализа одночастотных и многочастотных случайных колебаний рекомендуется сначала привести ее к стандартному виду (с помощью процедуры усреднения), а затем применить аналитический метод ФПК-уравнений.

В работе [45] предлагается модификация приближенной схемы Эйлера–Маруямы для интегрирования СДУ с запаздыванием, которое зависит от вектора состояния, а этот вектор, в свою очередь, от момента времени, сдвинутого в прошлое от текущего на случайную величину, в сочетании с методом Монте-Карло.

В [25] рассматривается метод решения СДРУ, который обобщает метод Эйлера–Маруямы с уравниванием, разработанный автором ранее для анализа систем при отсутствии запаздывания и при постоянном запаздывании, на случай переменного (в том числе случайного) запаздывания. Идея новой схемы заключается в решении уравнения на каждом элементарном отрезке методом последовательных приближений (простых итераций). Реализация этого метода применяет в качестве предиктора решение, полученное по явной схеме Эйлера, и использует вычисление стохастических интегралов по формуле прямоугольников, а также линейную интерполяцию решений внутри соответствующего отрезка.

В работе [46] система дифференциальных уравнений со случайным запаздыванием дискретизируется, после чего предполагается, что запаздывание представляется случайной последовательностью, реализация которой строится на основе заданного дискретного распределения.

Обычно целями исследования указанных выше систем является получение различных вероятностных характеристик векторов состояния систем как векторных случайных процессов. Наиболее полным будет решение, приводящее к определению одноточечной или многоточечной (переходной) плотности вероятности, а также характеристической функции изучаемого процесса, которые в зависимости от постановки задачи могут быть получены с разной степенью детализации. Но, как правило, на практике ограничиваются числовыми характеристиками векторов состояния, включающими векторы функций математических ожиданий, матрицы функций ковариации (дисперсии) и матрицы ковариационных функций.

Далее в работе представлены схемы анализа стохастических систем с запаздываниями в виде дискретных цепей Маркова. Эти схемы основаны на сочетании классического метода шагов [2], расширения пространства состояния [47–49] и метода статистического моделирования (Монте-Карло) [43].

§ 1. Нелинейные стохастические системы

Рассмотрим систему СДРУ в смысле Стратоновича [42] вида

$$\dot{\boldsymbol{X}}(t) = \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{X}(t), \boldsymbol{X}(t-\mathcal{T}(t)), t\big) + \mathcal{G}\big(\boldsymbol{X}(t), \boldsymbol{X}(t-\mathcal{T}(t)), t\big)\,\boldsymbol{V}(t), \quad t_0 < t \leqslant T < +\infty, \tag{1.1}$$

$$\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{\Xi}, \qquad t \leqslant t_0, \tag{1.2}$$

где точкой сверху обозначена производная по времени t, $\boldsymbol{X}(\cdot) = \boldsymbol{X}_{\mathcal{T}(\cdot),\boldsymbol{\Xi}}(\cdot) \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния, векторный случайный процесс (ВСП); $\boldsymbol{V}(\cdot) \in \mathbb{R}^m$ — вектор независимых гауссовых белых шумов с единичными интенсивностями,

$$\mathcal{E}[\boldsymbol{V}(t)] = 0, \qquad \mathcal{E}\big[\boldsymbol{V}(t)\,\boldsymbol{V}^{\intercal}(t')\big] = \mathbb{E}\,\delta(t-t');$$

$\boldsymbol{f} = \{f_i\}^T : \mathbb{R}^{2n} \times (t_0, \infty) \longmapsto \mathbb{R}^n$ и $\mathcal{G} = \{g_{ij}\} : \mathbb{R}^{2n} \times (t_0, \infty) \longmapsto \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ — детермининистические векторная и матричная функции соответственно; $\boldsymbol{\Xi}$ — векторная случайная величина (ВСВ) с известными вероятностными характеристиками, в частности, с заданной плотностью вероятности $\bar{p}^{\,0}(\cdot)$; $\intercal$ и $\mathcal{E}$ — символы транспонирования и математического ожидания; $\mathbb{E}$ — единичная матрица; $\mathbb{R}^r$ — стандартное евклидово пространство размерности r, $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$; $\delta(\cdot)$ — дельта-функция Дирака.

Пусть $\mathbb{S}$ — однородная дискретная цепь Маркова, которая управляет случайным процессом-запаздыванием $\mathcal{T}(t)$ и обладает следующими свойствами:

(a) в любой момент времени $t \geqslant t_0$ цепь $\mathbb{S}$ может находиться в одном из состояний S_1, $S_2, \ldots, S_M$, $1 \leqslant M < +\infty$;

(b) переходы цепи $\mathbb{S}$ из состояния в состояние могут происходить только в моменты времени $t_k = t_0 + k \cdot h$, $h > 0$, $k = 0, 1, 2, \ldots$;

(c) изменения состояния цепи описываются матрицей переходных вероятностей $\mathcal{P} = \{\pi_{ij}\}$, $i, j = 1, 2, \ldots, M$, где

$$\pi_{ij} = \mathbb{P}(\mathbb{S} = S_j \,|\, \mathbb{S} = S_i), \qquad \pi_{ij} \geqslant 0, \qquad \sum_{j=1}^{M} \pi_{ij} = 1, \qquad i = \overline{1, M},$$

$\mathbb{P}(\cdot\,|\,\cdot)$ — условная вероятность события;

(d) вектор вероятностей $\boldsymbol{p}_{\mathbb{S}k}$ нахождения системы $\mathbb{S}$ в состояниях S_1, S_2, …, S_M при $t \in [t_k, t_{k+1})$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, вычисляется из соотношения $\boldsymbol{p}_{\mathbb{S},k+1} = \mathcal{P}^{\intercal}\boldsymbol{p}_{\mathbb{S}k}$, причем $\boldsymbol{p}_{\mathbb{S}0}$ — заданный вектор начальных вероятностей нахождения системы $\mathbb{S}$ в состояниях S_1, S_2, …, S_M при $t = t_0$.

Свяжем с состояниями системы $\mathbb{S}$ реализации $\tau = \tau(t)$ случайного процесса $\mathcal{T}(t)$ следующим образом: $\tau(t) = q_i\,\tau_*$ $(0 \leqslant q_i \leqslant N_1 < +\infty)$, если $\mathbb{S} = S_i$ при $t \in [t_k, t_{k+1})$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, $i = 1, 2, \ldots, M$, где $\tau_* > 0$, $h = \bar{N}\cdot\tau_*$, $T - t_0 \leqslant N_2\cdot\tau_*$, $t_* = t_0 - \tau_*\,N_1$, а $\bar{N} > 0$, $N_1 > 0$, $N_2 > 0$, q_i — целые числа.

Предположим, что векторное случайное возмущение $\boldsymbol{V}(t)$, случайный процесс $\mathcal{T}(t)$ и вектор $\boldsymbol{\Xi}$ независимы в совокупности, а решение задачи (1.1), (1.2) существует и единственно для каждого возможного значения $\boldsymbol{\xi}$ ВСВ $\boldsymbol{\Xi}$ и всех реализаций $\tau(t)$ СП $\mathcal{T}(t)$ (понятия и условия существования и единственности решения см. в [12, раздел 5]). Тогда задача исследования будет состоять в вычислении необходимых вероятностных и числовых характеристик векторного случайного процесса $\boldsymbol{X}(t)$.

Для того чтобы применить аналитический аппарат уравнения ФПК-уравнения для решения данной задачи, заметим, что для каждой возможной реализации $\tau(t)$ СП $\mathcal{T}(t)$ система СДРУ (1.1) со случайным запаздыванием $\mathcal{T}(t)$ превращается в систему СДРУ с кусочно-постоянным запаздыванием $\tau(t)$, что позволяет применить схему, сочетающую классический метод шагов и расширение вектора состояния.

Итак, будем считать, что мы проводим серию из некоторого числа опытов, состоящих в разыгрывании значений $\boldsymbol{\xi}^{[\ell]}$ ВСВ $\boldsymbol{\Xi}$ и вероятностной структуры цепи $\mathbb{S}$, а следовательно, и СП $\mathcal{T}(t)$, который в этих опытах принимает форму функций $\tau^{[\ell]}(t)$, где ℓ — формальный индекс, определенный на, вообще говоря, несчетном множестве. Тогда условный вектор состояния для фиксированных значений $\boldsymbol{\Xi} = \boldsymbol{\xi}^{[\ell]}$ и $\mathcal{T}(t) = \tau^{[\ell]}(t)$ будем обозначать так:

$$\boldsymbol{X}^{[\ell]}(t) = \boldsymbol{X}_{\mathcal{T}(t)=\tau^{[\ell]}(t),\,\boldsymbol{\Xi}=\boldsymbol{\xi}^{[\ell]}}(t).$$

Для того чтобы изучить случайное изменение вектора $\boldsymbol{X}^{[\ell]}(t)$ при значениях времени $t > t_0$ посредством преобразования немарковского векторного процесса в марковский, мы расширяем фазовое пространство системы. В процессе реализации этой процедуры введем дополнительные обозначения:

$$\begin{gathered}
s \in [0, \tau_*], \quad \tau_r = t_0 + r\cdot\tau_*, \quad \Delta_r = (\tau_{r-1}, \tau_r], \quad r = -N_1+1, -N_1+2, \ldots, -1, 0, 1, 2, \ldots, N_2,\\
s_{r+1} = s + \tau_r, \quad \boldsymbol{X}_r^{[\ell]}(s) = \boldsymbol{X}(s_r), \quad \boldsymbol{V}_r(s) = \boldsymbol{V}(s_r), \quad p_r^{[\ell]}(\boldsymbol{x}, s) = p^{[\ell]}(\boldsymbol{x}, s_r), \quad p_1^{[\ell]}(\boldsymbol{x}, 0) = \bar{p}^{\,0}(\boldsymbol{x}),\\
\boldsymbol{X}_{-N_1+1}^{[\ell]}(s) = \boldsymbol{X}_{-N_1+2}^{[\ell]}(s) = \ldots = \boldsymbol{X}_0^{[\ell]}(s) = \boldsymbol{\Xi}, \quad \boldsymbol{Z}_0^{[\ell]}(s) = \operatorname{col}\bigl(\boldsymbol{X}_{-N_1+1}^{[\ell]}, \boldsymbol{X}_{-N_1+2}^{[\ell]}, \ldots, \boldsymbol{X}_0^{[\ell]}\bigr),\\
\boldsymbol{Z}_1^{[\ell]}(s) = \operatorname{col}\bigl(\boldsymbol{Z}_0^{[\ell]}(s), \boldsymbol{X}_1^{[\ell]}(s)\bigr), \quad \boldsymbol{Z}_2^{[\ell]}(s) = \operatorname{col}\bigl(\boldsymbol{Z}_1^{[\ell]}(s), \boldsymbol{X}_2^{[\ell]}(s)\bigr), \quad \ldots,\\
\boldsymbol{X}_r^{[\ell]}(0) = \boldsymbol{X}_{r-1}^{[\ell]}(\tau_*), \qquad \boldsymbol{V}_r(0) = \boldsymbol{V}_{r-1}(\tau_*), \qquad p_r^{[\ell]}(\boldsymbol{x}, 0) = p_{r-1}^{[\ell]}(\boldsymbol{x}, \tau_*),
\end{gathered}$$

$\operatorname{col}(\cdot)$ — вектор, состоящий из компонентов векторов–аргументов, $p(\cdot,\cdot)$ — одноточечная плотность вероятности. При этом реализацию последовательности запаздываний по полуинтервалам Δ_r, $0 < r \leqslant N_2$, обозначим через $\bar{\tau}^{[\ell]} = \{\bar{q}_{\ell 1}, \bar{q}_{\ell 2}, \ldots, \bar{q}_{\ell N_2}\}$, причем значения $\bar{q}_{\ell r}$ при $t \in [t_k, t_{k+1})$ одинаковы.

Рассмотрим последовательность полуотрезков Δ_r, $r = -N_1{+}1, -N_1{+}2, \ldots, -1, 0, 1, 2, \ldots, N_2$.

1°. Начнем с последовательности Δ_{-N_1+1}, …, Δ_0, Δ_1. Определенный на этой подпоследовательности ВСП $\boldsymbol{Z}_1^{[\ell]}(s)$ удовлетворяет системе СДУ:

$$\begin{gathered}
\dot{\boldsymbol{Z}}_0^{[\ell]}(s) = 0, \qquad \boldsymbol{Z}_0^{[\ell]}(0) = \operatorname{col}\bigl(\boldsymbol{\Xi}, \boldsymbol{\Xi}, \ldots, \boldsymbol{\Xi}\bigr),\\
\dot{\boldsymbol{X}}_1^{[\ell]}(s) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}_1^{[\ell]}(s), \boldsymbol{X}_{1-\bar{q}_{\ell 1}}^{[\ell]}(s), s_1) + \mathcal{G}(\boldsymbol{X}_1^{[\ell]}(s), \boldsymbol{X}_{1-\bar{q}_{\ell 1}}^{[\ell]}(s), s_1)\,\boldsymbol{V}_1(s), \qquad \boldsymbol{X}_1^{[\ell]}(0) = \boldsymbol{\Xi}
\end{gathered}$$

(здесь и далее в пределах раздела точкой обозначена производная по переменной s).

ФПК-уравнение для плотности вероятности расширенного вектора состояния $\boldsymbol{Z}_1^{[\ell]}(t)$ имеет вид

$$\frac{\partial \tilde{p}_1^{[\ell]}(\boldsymbol{z}_1, s)}{\partial s} = \boldsymbol{L}_1^{[\ell]} \tilde{p}_1^{[\ell]}(\boldsymbol{z}_1, s), \qquad \tilde{p}_1^{[\ell]}(\boldsymbol{z}_1, 0) = \bar{p}^0(\boldsymbol{x}_1) \prod_{r=-N_1+1}^{0} \delta(\boldsymbol{x}_r - \boldsymbol{x}_1), \quad \text{где}$$

$$\boldsymbol{L}_1^{[\ell]} \tilde{p}_1^{[\ell]} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{J_1} \frac{\partial^2 (b_{1ij}^{[\ell]}\, \tilde{p}_1^{[\ell]})}{\partial z_{1i} \partial z_{1j}} - \sum_{i=1}^{J_1} \frac{\partial (a_{1i}^{[\ell]}\, \tilde{p}_1^{[\ell]})}{\partial z_{1i}},$$

$$a_{1i}^{[\ell]} = f_{1i}^{[\ell]} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{J_1} \sum_{k=1}^{K_1} \frac{\partial g_{1ik}^{[\ell]}}{\partial z_{1j}}\, g_{1jk}^{[\ell]}, \qquad b_{1ij}^{[\ell]} = \sum_{k=1}^{K_1} g_{1ik}^{[\ell]}\, g_{1jk}^{[\ell]},$$

$$\boldsymbol{f}_1^{[\ell]}(\boldsymbol{z}_1, s) = \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_{1-\bar{q}_{\ell 1}}, s_1\big) \end{bmatrix}, \qquad \mathcal{G}_1^{[\ell]}(\boldsymbol{z}_1, s) = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \mathcal{G}\big(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_{1-\bar{q}_{\ell 1}}, s_1\big) \end{bmatrix},$$

$$J_1 = n\,(N_1 + 1), \qquad K_1 = m\,(N_1 + 1).$$

2°. Проанализируем поведение системы на полуотрезках $\Delta_{-N_1+1}, \dots, \Delta_0, \Delta_1$ и Δ_2. СДУ для вычисления вектора $\boldsymbol{Z}_2(s)$ можно представить так:

$$\dot{\boldsymbol{Z}}_0^{[\ell]}(s) = 0, \qquad \boldsymbol{Z}_0^{[\ell]}(0) = \mathrm{col}\big(\boldsymbol{\Xi}, \boldsymbol{\Xi}, \dots, \boldsymbol{\Xi}\big),$$
$$\dot{\boldsymbol{X}}_1^{[\ell]}(s) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}_1^{[\ell]}(s), \boldsymbol{X}_{1-\bar{q}_{\ell 1}}^{[\ell]}(s), s_1) + \mathcal{G}(\boldsymbol{X}_1^{[\ell]}(s), \boldsymbol{X}_{1-\bar{q}_{\ell 1}}^{[\ell]}(s), s_1)\, \boldsymbol{V}_1(s), \qquad \boldsymbol{X}_1^{[\ell]}(0) = \boldsymbol{\Xi},$$
$$\dot{\boldsymbol{X}}_2^{[\ell]}(s) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}_2^{[\ell]}(s), \boldsymbol{X}_{2-\bar{q}_{\ell 2}}^{[\ell]}(s), s_2) + \mathcal{G}(\boldsymbol{X}_2^{[\ell]}(s), \boldsymbol{X}_{2-\bar{q}_{\ell 2}}^{[\ell]}(s), s_2)\, \boldsymbol{V}_2(s), \qquad \boldsymbol{X}_2^{[\ell]}(0) = \boldsymbol{X}_1^{[\ell]}(\tau_*).$$

Поэтому плотность распределения ВСП $\boldsymbol{Z}_2(t)$ будет удовлетворять ФПК-уравнению вида

$$\frac{\partial \tilde{p}_2^{[\ell]}(\boldsymbol{z}_2, s)}{\partial s} = \boldsymbol{L}_2^{[\ell]} \tilde{p}_2^{[\ell]}(\boldsymbol{z}_2, s), \qquad \tilde{p}_2^{[\ell]}(\boldsymbol{z}_2, 0) = \tilde{p}_1^{[\ell]}(\boldsymbol{x}_{-N_1+2}, \dots, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \tau_*)\, \delta(\boldsymbol{x}_{-N_1+1} - \boldsymbol{x}_1), \quad \text{где}$$

$$\boldsymbol{L}_2^{[\ell]} \tilde{p}_2^{[\ell]} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{J_2} \frac{\partial^2 (b_{2ij}^{[\ell]}\, \tilde{p}_2^{[\ell]})}{\partial z_{2i} \partial z_{2j}} - \sum_{i=1}^{J_2} \frac{\partial (a_{2i}^{[\ell]}\, \tilde{p}_2^{[\ell]})}{\partial z_{2i}},$$

$$a_{2i}^{[\ell]} = f_{2i}^{[\ell]} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{J_2} \sum_{k=1}^{K_2} \frac{\partial g_{2ik}^{[\ell]}}{\partial z_{2j}}\, g_{2jk}^{[\ell]}, \qquad b_{2ij}^{[\ell]} = \sum_{k=1}^{K_2} g_{2ik}^{[\ell]}\, g_{2jk}^{[\ell]},$$

$$\boldsymbol{f}_2^{[\ell]}(\boldsymbol{z}_2, s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{f}_1^{[\ell]}(\boldsymbol{z}_1, s) \\ \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_{2-\bar{q}_{\ell 2}}, s_2\big) \end{bmatrix}, \qquad \mathcal{G}_2^{[\ell]}(\boldsymbol{z}_2, s) = \begin{bmatrix} \mathcal{G}_1^{[\ell]}(\boldsymbol{z}_1, s) & 0 \\ 0 & \mathcal{G}\big(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_{2-\bar{q}_{\ell 2}}, s_2\big) \end{bmatrix},$$

$$J_2 = n\,(N_1 + 2), \qquad K_2 = m\,(N_1 + 2).$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots .$$

$\mathbf{N_2^\circ}$. Рассмотрим временные полуотрезки $\Delta_{-N_1+1}, \dots, \Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_{N_2}$. Построим систему СДУ для вектора $\boldsymbol{Z}_{N_2}(s)$ в виде

$$\dot{\boldsymbol{Z}}_0^{[\ell]}(s) = 0, \qquad \boldsymbol{Z}_0^{[\ell]}(0) = \mathrm{col}\big(\boldsymbol{\Xi}, \boldsymbol{\Xi}, \dots, \boldsymbol{\Xi}\big),$$
$$\dot{\boldsymbol{X}}_1^{[\ell]}(s) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}_1^{[\ell]}(s), \boldsymbol{X}_{1-\bar{q}_{\ell 1}}^{[\ell]}(s), s_1) + \mathcal{G}(\boldsymbol{X}_1^{[\ell]}(s), \boldsymbol{X}_{1-\bar{q}_{\ell 1}}^{[\ell]}(s), s_1)\, \boldsymbol{V}_1(s), \qquad \boldsymbol{X}_1^{[\ell]}(0) = \boldsymbol{\Xi},$$
$$\dot{\boldsymbol{X}}_2^{[\ell]}(s) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}_2^{[\ell]}(s), \boldsymbol{X}_{2-\bar{q}_{\ell 2}}^{[\ell]}(s), s_2) + \mathcal{G}(\boldsymbol{X}_2^{[\ell]}(s), \boldsymbol{X}_{2-\bar{q}_{\ell 2}}^{[\ell]}(s), s_2)\, \boldsymbol{V}_2(s), \qquad \boldsymbol{X}_2^{[\ell]}(0) = \boldsymbol{X}_1^{[\ell]}(\tau_*),$$
$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots,$$
$$\dot{\boldsymbol{X}}_{N_2}^{[\ell]}(s) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}_{N_2}^{[\ell]}(s), \boldsymbol{X}_{N_2-\bar{q}_{\ell N_2}}^{[\ell]}(s), s_{N_2}) + \mathcal{G}(\boldsymbol{X}_{N_2}^{[\ell]}(s), \boldsymbol{X}_{N_2-\bar{q}_{\ell N_2}}^{[\ell]}(s), s_{N_2})\, \boldsymbol{V}_{N_2}(s),$$
$$\boldsymbol{X}_{N_2}^{[\ell]}(0) = \boldsymbol{X}_{N_2-1}^{[\ell]}(\tau_*),$$

Тогда плотность распределения случайного вектора $\boldsymbol{Z}_{N_2}$ будет удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial \tilde{p}^{[\ell]}_{N_2}(\boldsymbol{z}_{N_2}, s)}{\partial s} = \boldsymbol{L}^{[\ell]}_{N_2}\tilde{p}^{[\ell]}_{N_2}(\boldsymbol{z}_{N_2}, s), \quad \tilde{p}^{[\ell]}_{N_2}(\boldsymbol{z}_{N_2}, 0) = \tilde{p}^{[\ell]}_{N_2-1}(\boldsymbol{x}_{-N_1+2}, \ldots, \boldsymbol{x}_{N_2-1}, \boldsymbol{x}_{N_2}, \tau_*)\, \delta(\boldsymbol{x}_{-N_1+1} - \boldsymbol{x}_1).$$

В этом уравнении

$$\boldsymbol{L}^{[\ell]}_{N_2}\tilde{p}^{[\ell]}_{N_2} = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{J_{N_2}} \frac{\partial^2 (b^{[\ell]}_{N_2ij}\, \tilde{p}^{[\ell]}_{N_2})}{\partial z_{N_2i}\partial z_{N_2j}} - \sum_{i=1}^{J_{N_2}} \frac{\partial (a^{[\ell]}_{N_2i}\, \tilde{p}^{[\ell]}_{N_2})}{\partial z_{N_2i}},$$

$$a^{[\ell]}_{N_2i} = f^{[\ell]}_{N_2i} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{J_{N_2}}\sum_{k=1}^{K_{N_2}} \frac{\partial g^{[\ell]}_{N_2ik}}{\partial z_{N_2j}}\, g^{[\ell]}_{N_2jk}, \qquad b^{[\ell]}_{N_2ij} = \sum_{k=1}^{K_{N_2}} g^{[\ell]}_{N_2ik}\, g^{[\ell]}_{N_2jk},$$

$$\boldsymbol{f}^{[\ell]}_{N_2}(\boldsymbol{z}_{N_2}, s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{f}^{[\ell]}_{N_2-1}(\boldsymbol{z}_{N_2-1}, s) \\ \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{x}_{N_2}, \boldsymbol{x}_{N_2-\bar{q}_{\ell N_2}}, s_{N_2}\big) \end{bmatrix}, \ \mathcal{G}^{[\ell]}_{N_2}(\boldsymbol{z}_{N_2}, s) = \begin{bmatrix} \mathcal{G}^{[\ell]}_{N_2-1}(\boldsymbol{z}_{N_2-1}, s) & 0 \\ 0 & \mathcal{G}\big(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_{N_2-\bar{q}_{\ell N_2}}, s_{N_2}\big) \end{bmatrix},$$

$$J_{N_2} = n\,(N_1 + N_2), \qquad K_{N_2} = m\,(N_1 + N_2).$$

Для определения необходимых условных моментных характеристик можно, с одной стороны, воспользоваться решениями построенных ФПК-уравнений, с другой — напрямую получить ОДУ для этих моментных функций.

Обозначим через

$$\tilde{m}^{[\ell]}_{r\alpha_r}(s) = \mathcal{E}[z_r^{\alpha_r}] = \mathcal{E}\Big[\prod_{k=-k_1+1}^{k_2} z_{rk}^{\alpha_{rk}}\Big] = \int_{\mathbb{R}^{k_1+k_2}} z_r^{\alpha_r}\, \tilde{p}^{[\ell]}_r(\boldsymbol{z}_r, s)\, d\boldsymbol{z}_r, \qquad k_1 = n\,N_1, \qquad k_2 = n\,r,$$

смешанную моментную функцию порядка $|\alpha_r| = \alpha_{r,-k_1+1} + \ldots + \alpha_{r,k_2}$ ($\alpha_r = \{\alpha_{r,-k_1+1}, \ldots, \alpha_{r,k_2}\}$, $\alpha_{rk} \geqslant 0$). При этом у выделенных моментов нужно заменить локальное время s на истинное.

В первом случае достаточно последовательно на участках Δ_r, $r = 1, 2, \ldots, N_2$, вычислить только требуемые функции $m^{[\ell]}_{r\overline{\alpha}_r}(s)$, представляющие собой моменты вектора состояния $\boldsymbol{X}^{[\ell]}(t)$ до некоторого порядка ($|\overline{\alpha}_r| \leqslant I$): $\overline{\alpha}_r = \{0, \ldots, 0, \overline{\alpha}_{r1}, \overline{\alpha}_{r2}, \ldots, \overline{\alpha}_{rk_2}\}$. К сожалению, получить решение многомерного ФПК-уравнения в неограниченной области с приемлемой точностью даже на современных компьютерах удается лишь в редких случаях.

Во втором случае необходимо шаг за шагом на участках Δ_r, $r = 1, 2, \ldots, N_2$, строить и решать последовательность систем уравнений увеличивающейся размерности следующего вида:

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{m}}^{[\ell]}_{r\alpha_r}(s) = \Big\{ &\sum_{i=1}^{k_1+k_2} \alpha_{ri}\, \mathcal{E}\Big[a^{[\ell]}_{ri}\, z_r^{\alpha_r - e_i}\Big] + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k_1+k_2} \alpha_{ri}(\alpha_{ri} - 1)\, \mathcal{E}\Big[b^{[\ell]}_{rii}\, z_r^{\alpha_r - 2e_i}\Big] + \\ &+ \sum_{i=1}^{k_1+k_2-1}\ \sum_{j=i+1}^{k_1+k_2} \alpha_{ri}\, \alpha_{rj}\, \mathcal{E}\Big[b^{[\ell]}_{rij}\, z_r^{\alpha_r - e_i - e_j}\Big] \Big\}\Big|_{\boldsymbol{z}_r \to \boldsymbol{Z}_r}, \quad e_i = \{\delta_{ik}\}, \quad k = 1, 2, \ldots, k_1 + k_2\end{aligned}$$

(δ_{ik} — символ Кронекера), а затем, как и выше, отобрать из всех только требуемые моментные функции, исключив вспомогательные.

Если бы вычисления для обоих случаев можно было выполнить с $\tau^{[\ell]}(t)$ и $\boldsymbol{\xi}^{[\ell]}$ как символьными параметрами, то для расчета безусловных плотностей вероятности и моментных функций были пригодны следующие формальные соотношения:

$$\tilde{p}_r(\boldsymbol{z}_r, s) = \langle\, \tilde{p}^{[\ell]}_r(\boldsymbol{z}_r, s)\, \rangle, \qquad \tilde{m}_{r\alpha_r}(s) = \langle\, \tilde{m}^{[\ell]}_{r\alpha_r}(s)\, \rangle,$$

где $\langle \ldots \rangle$ — символ усреднения по распределению.

Как правило, даже для не очень сложных задач указанная процедура невозможна. Поэтому вероятностное усреднение должно быть заменено статистическим. А именно, будем проводить серию из L моделирований, состоящих в компьютерном разыгрывании ВСВ $\boldsymbol{\Xi}$, которая в этих симулированиях будет принимать значения $\widehat{\boldsymbol{\xi}}^{[\ell]}$, и векторного СП $\mathcal{T}(t)$ с получением реализаций $\widehat{\tau}^{[\ell]}(t)$, $\ell = 1, 2, \ldots, L$ (согласно принципам метода Монте-Карло). Если оценки для условных векторов состояния, плотностей вероятности и моментных функций для $\Sigma = \{\mathcal{T}(t) = \widehat{\tau}^{[\ell]}(t), \boldsymbol{\Xi} = \widehat{\boldsymbol{\xi}}^{[\ell]}\}$ обозначить так:

$$\widehat{\boldsymbol{X}}^{[\ell]}(t) = \boldsymbol{X}_\Sigma(t), \qquad \widehat{\tilde{p}}_r^{[\ell]}(\boldsymbol{z}_r, s) = \tilde{p}_r^{[\ell]}(\boldsymbol{z}_r, s)\Big|_\Sigma, \qquad \widehat{\tilde{m}}_{r\alpha_r}^{[\ell]}(s) = \tilde{m}_{r\alpha_r}^{[\ell]}(s)\Big|_\Sigma,$$

то расчетные формулы для оценок безусловных их аналогов примут следующие формы:

$$\widehat{\boldsymbol{X}}(t) = \frac{1}{L}\sum_{\ell=1}^{L} \widehat{\boldsymbol{X}}^{[\ell]}(t), \qquad \widehat{\tilde{p}}_r(\boldsymbol{z}_r, s) = \frac{1}{L}\sum_{\ell=1}^{L} \widehat{\tilde{p}}_r^{[\ell]}(\boldsymbol{z}_r, s), \qquad \widehat{\tilde{m}}_{r\alpha_r}(s) = \frac{1}{L}\sum_{\ell=1}^{L} \widehat{\tilde{m}}_{r\alpha_r}^{[\ell]}(s).$$

§ 2. Линейные стохастические системы

Воспользовавшись предположениями и обозначениями из предыдущего раздела, если не оговорено противное, рассмотрим систему СДРУ вида

$$\dot{\boldsymbol{X}}(t) = \mathcal{Q}(t)\,\boldsymbol{X}(t) + \mathcal{R}(t)\,\boldsymbol{X}(t - \mathcal{T}(t)) + \boldsymbol{c}(t) + \mathcal{H}(t)\,\boldsymbol{V}(t), \qquad t_0 < t \leqslant T < +\infty, \tag{2.1}$$

где $\boldsymbol{c}(t) = \{c_i\} : (t_0, \infty) \longmapsto \mathbb{R}^n$ и $\mathcal{Q} = \{q_{ij}\}, \mathcal{R} = \{r_{ij}\} : (t_0, \infty) \longmapsto \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $\mathcal{H} = \{h_{ij}\} : (t_0, \infty) \longmapsto \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ — детерминистические векторная и матричные функции соответственно.

Учитывая, что для каждых возможного значения $\boldsymbol{\xi}$ ВСВ $\boldsymbol{\Xi}$ и реализации $\tau(t)$ СП $\mathcal{T}(t)$ система (2.1) со случайными запаздыванием $\mathcal{T}(t)$ и начальным условием $\boldsymbol{\Xi}$ превращается в линейную систему СДРУ с постоянным неслучайным переменным запаздыванием $\tau(t)$, а следовательно, при практически любом распределении $\boldsymbol{\Xi}$ с течением времени происходит нормализация процесса $\boldsymbol{X}(t)$, что позволяет в рамках настоящего исследования ограничиться оценками вектора функций математического ожидания $\boldsymbol{m}(t) = \mathcal{E}[\boldsymbol{X}(t)]$ и ковариаций $\mathcal{C}(t) = \mathcal{E}\left[\mathring{\boldsymbol{X}}(t)\,\mathring{\boldsymbol{X}}^\mathsf{T}(t)\right]$ векторного случайного процесса $\boldsymbol{X}(t)$ ($\mathring{\boldsymbol{X}}(t) = \boldsymbol{X}(t) - \boldsymbol{m}(t)$) и применить сочетание метода шагов и схемы расширения вектора состояния.

Как и выше, рассмотрим последовательность полуотрезков Δ_r, $r = -N_1 + 1,\ -N_1 + 2,\ \ldots,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ N_2$.

1°. Стартуем сразу же с $\Delta_{-N_1+1}, \ldots, \Delta_0, \Delta_1$. Определенный на этих полуотрезках случайный вектор $\boldsymbol{Z}_1^{[\ell]}(s)$ удовлетворяет системе СДУ:

$$\begin{gathered}\dot{\boldsymbol{Z}}_0^{[\ell]}(s) = 0, \qquad \boldsymbol{Z}_0^{[\ell]}(0) = \mathrm{col}\big(\boldsymbol{\Xi}, \boldsymbol{\Xi}, \ldots, \boldsymbol{\Xi}\big),\\ \dot{\boldsymbol{X}}_1^{[\ell]}(s) = \mathcal{Q}(s_1)\,\boldsymbol{X}_1^{[\ell]}(s) + \mathcal{R}(s_1)\,\boldsymbol{X}_{1-\bar{q}_{\ell 1}}^{[\ell]}(s) + \boldsymbol{c}(s_1) + \mathcal{H}(s_1)\,\boldsymbol{V}_1(s), \qquad \boldsymbol{X}_1^{[\ell]}(0) = \boldsymbol{\Xi}\end{gathered}$$

(опять здесь и далее в пределах раздела точкой обозначена производная по переменной s).

2°. Рассмотрим поведение системы на полуотрезках $\Delta_{-N_1+1}, \ldots, \Delta_0, \Delta_1$ и Δ_2. СДУ для вычисления вектора $\boldsymbol{Z}_2(s)$ можно представить так:

$$\begin{gathered}\dot{\boldsymbol{Z}}_0^{[\ell]}(s) = 0, \qquad \boldsymbol{Z}_0^{[\ell]}(0) = \mathrm{col}\big(\boldsymbol{\Xi}, \boldsymbol{\Xi}, \ldots, \boldsymbol{\Xi}\big),\\ \dot{\boldsymbol{X}}_1^{[\ell]}(s) = \mathcal{Q}(s_1)\,\boldsymbol{X}_1^{[\ell]}(s) + \mathcal{R}(s_1)\,\boldsymbol{X}_{1-\bar{q}_{\ell 1}}^{[\ell]}(s) + \boldsymbol{c}(s_1) + \mathcal{H}(s_1)\,\boldsymbol{V}_1(s), \qquad \boldsymbol{X}_1^{[\ell]}(0) = \boldsymbol{\Xi},\\ \dot{\boldsymbol{X}}_2^{[\ell]}(s) = \mathcal{Q}(s_2)\,\boldsymbol{X}_2^{[\ell]}(s) + \mathcal{R}(s_2)\,\boldsymbol{X}_{2-\bar{q}_{\ell 2}}^{[\ell]}(s) + \boldsymbol{c}(s_2) + \mathcal{H}(s_2)\,\boldsymbol{V}_2(s), \qquad \boldsymbol{X}_2^{[\ell]}(0) = \boldsymbol{X}_1^{[\ell]}(\tau_*).\end{gathered}$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots\,.$$

N$_2^\circ$. Проанализируем поведение системы на полуотрезках Δ_{-N_1+1}, …, Δ_0, Δ_1, …, Δ_{N_2}. Построим систему СДУ для вектора $\boldsymbol{Z}_{N_2}(s)$ в виде

$$\dot{\boldsymbol{Z}}_0^{[\ell]}(s)=0,\qquad \boldsymbol{Z}_0^{[\ell]}(0)=\operatorname{col}\big(\boldsymbol{\Xi},\boldsymbol{\Xi},\ldots,\boldsymbol{\Xi}\big),$$
$$\dot{\boldsymbol{X}}_1^{[\ell]}(s)=\mathcal{Q}(s_1)\,\boldsymbol{X}_1^{[\ell]}(s)+\mathcal{R}(s_1)\,\boldsymbol{X}_{1-\bar q_{\ell 1}}^{[\ell]}(s)+\boldsymbol{c}(s_1)+\mathcal{H}(s_1)\,\boldsymbol{V}_1(s),\qquad \boldsymbol{X}_1^{[\ell]}(0)=\boldsymbol{\Xi},$$
$$\dot{\boldsymbol{X}}_2^{[\ell]}(s)=\mathcal{Q}(s_2)\,\boldsymbol{X}_2^{[\ell]}(s)+\mathcal{R}(s_2)\,\boldsymbol{X}_{2-\bar q_{\ell 2}}^{[\ell]}(s)+\boldsymbol{c}(s_2)+\mathcal{H}(s_2)\,\boldsymbol{V}_2(s),\qquad \boldsymbol{X}_2^{[\ell]}(0)=\boldsymbol{X}_1^{[\ell]}(\tau_*),$$
$$\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots,$$
$$\dot{\boldsymbol{X}}_{N_2}^{[\ell]}(s)=\mathcal{Q}(s_{N_2})\,\boldsymbol{X}_{N_2}^{[\ell]}(s)+\mathcal{R}(s_{N_2})\,\boldsymbol{X}_{N_2-\bar q_{\ell N_2}}^{[\ell]}(s)+\boldsymbol{c}(s_{N_2})+\mathcal{H}(s_{N_2})\,\boldsymbol{V}_{N_2}(s),$$
$$\boldsymbol{X}_{N_2}^{[\ell]}(0)=\boldsymbol{X}_{N_2-1}^{[\ell]}(\tau_*).$$

Получим необходимые условные моментные функции из ОДУ для этих моментных функций, для чего построим требуемые уравнения на основе цепочки уравнений для векторных случайных процессов $\boldsymbol{Z}_q^{[\ell]}(t)$.

Для функций условного математического ожидания

$$\widetilde{\boldsymbol{m}}_r^{[\ell]}(s)=\operatorname{col}\big(\boldsymbol{m}_{-N_1+1}^{[\ell]}(s),\ldots,\boldsymbol{m}_0^{[\ell]}(s),\boldsymbol{m}_1^{[\ell]}(s),\ldots,\boldsymbol{m}_r^{[\ell]}(s)\big)$$

на участках Δ_{-N_1+1}, …, Δ_0, Δ_1, …, Δ_r, $r=1,\,2,\,\ldots,\,N_2$, система управляющих уравнений будет выглядеть так:

$$\dot{\widetilde{\boldsymbol{m}}}_r^{[\ell]}(s)=\widetilde{\mathcal{Q}}_r(s)\,\widetilde{\boldsymbol{m}}_r^{[\ell]}(s)+\widetilde{\boldsymbol{c}}_r(s),\tag{2.2}$$

а для условных ковариаций

$$\widetilde{\mathcal{C}}_r^{[\ell]}(s)=\begin{bmatrix}
\mathcal{C}_{-N_1+1,-N_1+1}^{[\ell]}(s) & \ldots & \mathcal{C}_{-N_1+1,0}^{[\ell]}(s) & \mathcal{C}_{-N_1+1,1}^{[\ell]}(s) & \ldots & \mathcal{C}_{-N_1+1,r}^{[\ell]}(s)\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
\mathcal{C}_{0,-N_1+1}^{[\ell]}(s) & \ldots & \mathcal{C}_{00}^{[\ell]}(s) & \mathcal{C}_{01}^{[\ell]}(s) & \ldots & \mathcal{C}_{0r}^{[\ell]}(s)\\
\mathcal{C}_{1,-N_1+1}^{[\ell]}(s) & \ldots & \mathcal{C}_{10}^{[\ell]}(s) & \mathcal{C}_{11}^{[\ell]}(s) & \ldots & \mathcal{C}_{1r}^{[\ell]}(s)\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
\mathcal{C}_{r,-N_1+1}^{[\ell]}(s) & \ldots & \mathcal{C}_{r0}^{[\ell]}(s) & \mathcal{C}_{r1}^{[\ell]}(s) & \ldots & \mathcal{C}_{rr}^{[\ell]}(s)
\end{bmatrix}$$

на тех же участках —

$$\dot{\widetilde{\mathcal{C}}}_r^{[\ell]}(s)=\widetilde{\mathcal{Q}}_r(s)\,\widetilde{\mathcal{C}}_r^{[\ell]}(s)+\big[\widetilde{\mathcal{Q}}_r(s)\,\widetilde{\mathcal{C}}_r^{[\ell]}(s)\big]^{\intercal}+\widetilde{\mathcal{H}}_r(s)\,\widetilde{\mathcal{H}}_r^{\intercal}(s),\tag{2.3}$$

где

$$\widetilde{\mathcal{Q}}_r^{[\ell]}(s)=\sum_{k=0}^{r}\widetilde{\mathcal{Q}}_{rk}^{[\ell]}(s),\qquad \widetilde{\mathcal{Q}}_{r0}^{[\ell]}(s)=\begin{bmatrix}
0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0\\
0 & \ldots & 0 & \mathcal{Q}(s_1) & \ldots & 0\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & \mathcal{Q}(s_r)
\end{bmatrix},$$

$\widetilde{\mathcal{Q}}_{rk}^{[\ell]}(s)$ — блочная матрица, единственным ненулевым блоком которой является матрица $\mathcal{R}(s_k)$, находящаяся в строке N_1+r и столбце $N_1+r-\bar q_{\ell r}$,

$$\widetilde{\mathcal{H}}_r^{[\ell]}(s)=\begin{bmatrix}
0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0\\
0 & \ldots & 0 & \mathcal{H}(s_1) & \ldots & 0\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & \mathcal{H}(s_r)
\end{bmatrix},\qquad \widetilde{\boldsymbol{c}}_r(s)=\begin{bmatrix}
0\\ \ldots\\ 0\\ \boldsymbol{c}(s_1)\\ \ldots\\ \boldsymbol{c}(s_r)
\end{bmatrix}.$$

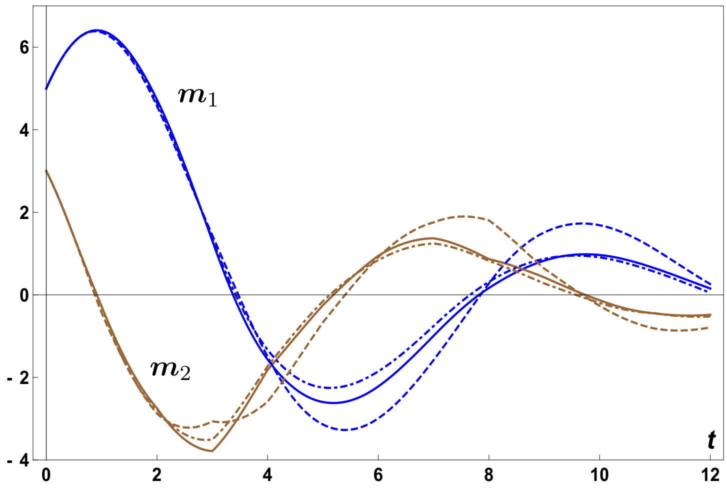

Рис. 1. Поведение реализаций функций условных математических ожиданий $X_1(t)$ и $X_2(t)$

Начальные условия для неизвестных функций в уравнениях (2.2), (2.3) будут выглядеть так:

$$\widetilde{\boldsymbol{m}}_1^{[\ell]}(0) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{m}^0 \\ \ldots \\ \boldsymbol{m}^0 \\ \boldsymbol{m}^0 \end{bmatrix}, \quad \widetilde{\mathcal{C}}_1^{[\ell]}(0) = \begin{bmatrix} \mathcal{C}^0 & \ldots & \mathcal{C}^0 & \mathcal{C}^0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathcal{C}^0 & \ldots & \mathcal{C}^0 & \mathcal{C}^0 \\ \mathcal{C}^0 & \ldots & \mathcal{C}^0 & \mathcal{C}^0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{m}^0 = \mathcal{E}[\boldsymbol{\Xi}], \quad \mathcal{C}^0 = \mathcal{E}\big[\mathring{\boldsymbol{\Xi}}\mathring{\boldsymbol{\Xi}}^{\intercal}\big],$$

$$\widetilde{\boldsymbol{m}}_r^{[\ell]}(0) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{m}^0 \\ \widetilde{\boldsymbol{m}}_{r-1}^{[\ell]}(\tau_*) \end{bmatrix}, \quad \widetilde{\mathcal{C}}_r^{[\ell]}(0) = \begin{bmatrix} \mathcal{C}^0 & \bar{\mathcal{C}}_{r-1}^0 \\ \bar{\mathcal{C}}_{r-1}^{0\intercal} & \widetilde{\mathcal{C}}_r^{[\ell]}(\tau_*) \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathcal{C}}_{r-1}^0 = \big[\mathcal{C}^0 \ldots \mathcal{C}^0\big], \quad r > 1.$$

После решения этих систем, как и выше, необходимо отобрать из всех только требуемые моментные функции, исключив вспомогательные.

Если бы эти вычисления можно было выполнить с $\tau^{[\ell]}(t)$ и $\boldsymbol{\xi}^{[\ell]}$ как символьными параметрами, то для расчета безусловных математического ожидания и ковариаций были пригодны следующие формальные соотношения:

$$\widetilde{\boldsymbol{m}}_r(s) = \langle\, \widetilde{\boldsymbol{m}}_r^{[\ell]}(s)\,\rangle, \qquad \widetilde{\mathcal{C}}_r(s) = \langle\, \widetilde{\mathcal{C}}_r^{[\ell]}(s)\,\rangle.$$

Как отмечалось, даже для не очень сложных задач такая процедура невозможна. Поэтому и здесь вероятностное усреднение должно быть заменено статистическим. А именно, будем проводить серию из L моделирований, состоящих в компьютерном разыгрывании ВСВ $\boldsymbol{\Xi}$, которая в этих симулированиях будет принимать значения $\widehat{\boldsymbol{\xi}}^{[\ell]}$, и векторного СП $\mathcal{T}(t)$ с получением реализаций $\widehat{\tau}^{[\ell]}(t)$, $\ell = 1, 2, \ldots, L$. Если оценки для условных математических ожиданий и ковариаций для $\Sigma = \{\mathcal{T}(t) = \widehat{\tau}^{[\ell]}(t), \boldsymbol{\Xi} = \widehat{\boldsymbol{\xi}}^{[\ell]}\}$ обозначить так:

$$\widehat{\widetilde{\boldsymbol{m}}}_r^{[\ell]}(s) = \widetilde{\boldsymbol{m}}_r^{[\ell]}(s)\Big|_{\Sigma}, \qquad \widehat{\widetilde{\mathcal{C}}}_r^{[\ell]}(s) = \widetilde{\mathcal{C}}_r^{[\ell]}(s)\Big|_{\Sigma},$$

то расчетные формулы для оценок безусловных их прототипов примут следующие формы:

$$\widehat{\widetilde{\boldsymbol{m}}}_r(s) = \frac{1}{L}\sum_{\ell=1}^{L} \widehat{\widetilde{\boldsymbol{m}}}_r^{[\ell]}(s), \qquad \widehat{\widetilde{\mathcal{C}}}_r(s) = \frac{1}{L}\sum_{\ell=1}^{L} \widehat{\widetilde{\mathcal{C}}}_r^{[\ell]}(s).$$

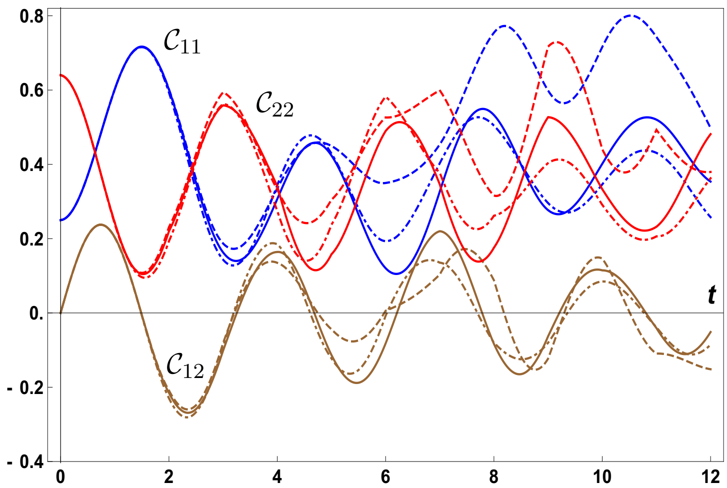

Рис. 2. Поведение реализаций функций ковариаций $X_1(t)$ и $X_2(t)$

§ 3. Пример

Рассмотрим линейную СДРУ со следующими характеристиками:

$$n = 2, \quad m = 2, \quad M = 5, \quad h = 1.0, \quad \tau_* = 0.2,$$

$$\mathcal{Q}(t) = \begin{bmatrix} -2.0 & 0.4 \\ -0.2 & -1.0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{R}(t) = \begin{bmatrix} 0.0 & 0.3 \\ 0.1 & 0.0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{c}(t) = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{H}(t) = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.0 \\ 0.0 & 0.2 \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} 0.0 & 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.4 \\ 0.2 & 0.0 & 0.1 & 0.3 & 0.4 \\ 0.4 & 0.2 & 0.0 & 0.1 & 0.3 \\ 0.4 & 0.3 & 0.2 & 0.0 & 0.1 \\ 0.4 & 0.3 & 0.2 & 0.1 & 0.0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{p}_{\mathbb{S}0} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \\ 0.3 \\ 0.2 \\ 0.1 \end{bmatrix}, \quad \bar{p}^0(y_1, y_2) = \mathcal{N}(y_1; 5, 0.25)\,\mathcal{N}(y_2; 3, 0.64),$$

$$t_0 = 0.0, \quad T = 12.0, \quad N_1 = 5, \quad N_2 = 60, \quad \bar{N} = 5,$$

где $\mathcal{N}(\cdot; a, \sigma^2)$ — нормальное распределение с математическим ожиданием a и дисперсией σ^2.

Численные расчеты проводились с помощью программы, написанной на входном языке пакета Mathematica [50]. На рисунках 1 и 2 представлены результаты этих расчетов реализаций условных математических ожиданий и ковариаций компонет вектора состояния только для первого из трех наборов множителей для запаздываний (в связи с ограниченностью общего объема статьи):

$$\{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\} \in \big\{ \{1,2,3,4,5\}, \{3,4,5,1,2\}, \{5,1,2,3,4\} \big\}.$$

На этих рисунках графики, соответствующие отдельным реализациям каждой из характеристик, изображены непрерывными, пунктирными и штрихпунктирными линиями. Конкретные обозначения указаны в подписях к рисункам. Рисунок 3 демонстрирует практическое совпадение оценок функций безусловной ковариации $\mathcal{C}_{22}(t)$, вычисленных методом Монте-Карло при $L = 2000$ и $\tau_* = 0.3$ для всех трех наборов множителей q_k (непрерывная линия синего цвета — для первого набора, коричневая штрихпунктирная — для второго и красная пунктирная — для третьего). Подобная же картина наблюдается и для остальных функций ковариации и всех математических ожиданий.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений. Методы и приложения. М.: Институт компьютерных исследований, 2002. 384 с.

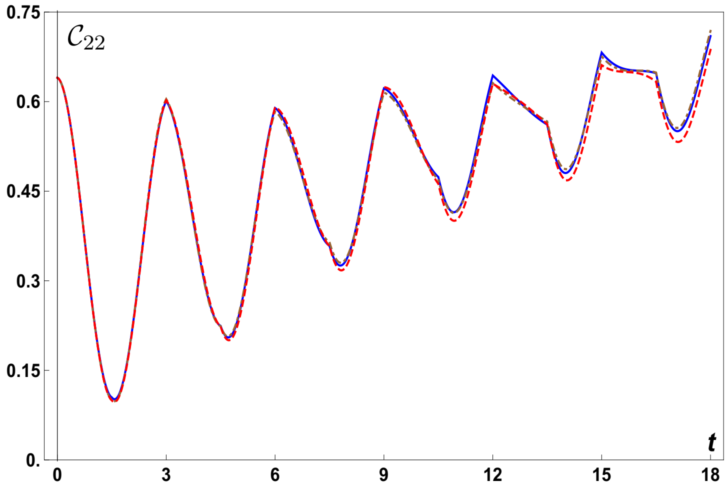

Рис. 3. Поведение реализаций оценок функций безусловных ковариаций $\mathcal{C}_{22}(t)$

2. Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1971. 296 с.
3. Hale J.K., Lunel S.M.V. Introduction to functional differential equations. New York: Springer, 1993. X+450 p.
4. Smith H. An introduction to delay differential equations with sciences applications to the life. New York: Springer, 2011. XI+172 p.
5. Царьков Е.Ф. Случайные возмущения дифференциально-функциональных уравнений. Рига: Зинатне, 1989. 421 с.
6. Kushner H.J. Numerical methods for controlled stochastic delay systems. Boston: Birkhäuser, 2008. XX+282 p.
7. Mohammed S.E.A. Stochastic functional differential equations. Boston–London: Pitman Publishing, 1984. IX+245 p.
8. Гардинер К.В. Стохастические методы в естественных науках. М.: Мир, 1986. 528 с.
9. Пугачев В.С., Синицын И.Н. Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация. М.: Наука, 1990. 630 с.
10. Маланин В.В., Полосков И.Е. Случайные процессы в нелинейных динамических системах. Аналитические и численные методы исследования. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. 160 с.
11. Кляцкин В.И. Динамика стохастических систем: Курс лекций. М.: Физматлит, 2003. 240 с.
12. Mao X. Stochastic differential equations and applications. Oxford: Woodhead Publishing, 2010. XVIII+422 p.
13. Bellen A., Zennaro M. Numerical methods for delay differential equations. Oxford: Oxford University Press, 2003. XIV+395 p.
14. Шампайн Л.Ф., Гладвел И., Томпсон С. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений с использованием MATLAB: Учебное пособие. СПб.: Лань, 2009. 304 с.
15. Kloeden P.E., Platen E. Numerical solution of stochastic differential equations. Berlin: Springer-Verlag, 1995. XXXV+632 p.
16. Milstein G.N., Tretyakov M.V. Stochastic numerics for mathematical physics. Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 2004. XIX+594 p.
17. Солодов А.В., Солодова Е.А. Системы с переменным запаздыванием. М.: Наука, 1980. 384 с.
18. Сканави Г.И. Физика диэлектриков (область сильных полей). М.: ГИФМЛ, 1958. 907 с.
19. Сысоев Ю.А., Планковский С.И., Лоян А.В., Кошелев Н.Н. Возбуждения дугового разряда в сильноточном генераторе плазмы // Авиационно-космическая техника и технология. 2006. № 10. С. 61–66. http://nbuv.gov.ua/j-pdf/aktit_2006_10_16.pdf
20. Prochazka I., Kral L., Blazej J. Picosecond laser pulse distortion by propagation through a turbulent atmosphere // Coherence and Ultrashort Pulse Laser Emission / F.J. Duarte (ed.). Rijeka, Croatia: InTech, 2010. P. 445–448.

21. Forde J.E. Delay differential equation models in mathematical biology: PhD thesis. University of Michigan, 2005. 94 p.
22. Crauel H., Son D.T., Siegmund S. Difference equations with random delay // Journal of Difference Equations and Applications. 2009. Vol. 15. № 7. P. 627–647.
23. Lara-Sagahon A.V., Kharchenko V., José M.V. Stability analysis of a delay-difference SIS epidemiological model // Applied Mathematical Sciences. 2007. Vol. 1. № 26. P. 1277–1298.
24. Cooke K.L., Kuang Y., Li B. Analysis of an antiviral immune response model with time delays // Canadian Appl. Math. Quart. 1998. Vol. 6. P. 321–354.
25. Поддубный В.В., Романович О.В. Динамическая модель рынка вальрасовского типа со случайными запаздываниями в поставках товара // Современные направления теоретических и прикладных исследований-2007: Сб. науч. тр. по материалам международной научно-практической конференции. Одесса: Черноморье, 2007. Т. 21. Физика и математика. География. Геология. С. 20–26.
26. Chang H.-J., Dye C.-Y. An inventory model with stock-dependent demand under conditions of permissible delay in payments // Journal of Statistics and Management Systems. 1999. Vol. 2. № 2/3. P. 117–126.
27. Shepp L. A model for stock price fluctuations based on information // IEEE Trans. on Information Theory. 2002. Vol. 48. № 6. P. 1372–1378.
28. Huang D., Nguang S.K. Robust control for uncertain networked control systems with random delays. London: Springer, 2009. XII+168 p.
29. Ge Y., Chen Q., Jiang M., Huang Y. Modeling of random delays in networked control systems // Journal of Control Science and Engineering. 2013. Vol. 2013. Article ID 383415. 9 p. http://downloads.hindawi.com/journals/jcse/2013/383415.pdf
30. Лидский Э.А. Об устойчивости движений системы со случайными запаздываниями // Дифференциальные уравнения. 1965. Т. 1. № 1. С. 96–101.
31. Кац И.Я. Об устойчивости по первому приближению систем со случайным запаздыванием // Прикладная математика и механика. 1967. Т. 31. Вып. 3. С. 447–452.
32. Коломиец В.Г., Кореневский Д.Г. О возбуждении колебаний в нелинейных системах со случайным запаздыванием // Украинский математический журнал. 1966. Т. 18. № 3. С. 51–57.
33. Кореневский Д.Г., Коломиец В.Г. Некоторые вопросы теории нелинейных колебаний квазилинейных систем со случайным запаздыванием // Математическая физика. Киев, 1967. Вып. 3. С. 91–113.
34. Новаковская Л.И. Построение асимптотических решений для дифференциальных уравнений первого порядка со случайным запаздыванием // Украинский математический журнал. 1989. Т. 41. № 11. С. 1569–1563.
35. Krapivsky P.L., Luck J.M., Mallick K. On stochastic differential equations with random delay // arXiv: 1108.1298 [cond-mat.stat-mech]. 2011. http://arxiv.org/pdf/1108.1298v2.pdf
36. Caraballo T., Kloeden P.E., Real J. Discretization of asymptotically stable stationary solutions of delay differential equations with a random stationary delay // Journal of Dynamics and Differential Equations. 2006. Vol. 18. № 4. P. 863–880.
37. Zhang H., Feng G., Han C. Linear estimation for random delay systems // Systems & Control Letters. 2011. Vol. 60. № 7. P. 450–459.
38. Gao Sh.-L. Generalized stochastic resonance in a linear fractional system with a random delay // Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment. 2012. Vol. 2012. № 12. P12011.
39. Mier-y-Teran-Romero L., Lindley B., Schwartz I.B. Statistical multi-moment bifurcations in random-delay coupled swarms // Phys. Rev. E. 2012. Vol. 86. № 5. 056202 (4 p).
40. Masoller C., Marti A.C. Random delays and the synchronization of chaotic maps // Phys. Rev. Letters. 2005. Vol. 94. № 13. 134102 (4 p).
41. Wu F., Yin G., Wang L.Y. Moment exponential stability of random delay systems with two-time-scale Markovian switching // Nonlinear Analysis: Real World Applications. 2012. Vol. 13. № 6. P. 2476–2490.
42. Тихонов В.И., Миронов М.А. Марковские процессы. М.: Советское радио, 1977. 488 с.
43. Кельтон В., Лоу А. Имитационное моделирование: Классика CS. 3-е изд. СПб.: Питер; Киев: Издательская группа BHV, 2004. 847 с.
44. Митропольский Ю.А. Метод усреднения в нелинейной механике. Киев: Наукова думка, 1970. 440 с.
45. Kazmerchuk Y.I., Wu J.H. Stochastic state-dependent delay differential equations with applications in finance // Functional Differential Equations. 2004. Vol. 11. № 1/2. P. 77–86.
46. Зайцев В.В., Карлов-мл. А.В., Телегин С.С. ДВ-модель системы «хищник–жертва» // Вестник СамГУ. Естественнонаучн. сер. 2009. № 6 (72). С. 139–148.
47. Полосков И.Е. Расширение фазового пространства в задачах анализа дифференциально-разностных систем со случайным входом // Автоматика и телемеханика. 2002. № 9. С. 58–73.

48. Poloskov I.E. Symbolic-numeric algorithms for analysis of stochastic systems with different forms of aftereffect // Proc. in Applied Math. and Mechanics (PAMM). 2007. Vol. 7. № 1. P. 2080011–2080012.
49. Полосков И.Е. Численно-аналитические схемы анализа динамических систем с последействием // Вестник Пермского ун-та. Математика. Механика. Информатика. 2011. Вып. 2 (6). С. 51–58.
50. Mangano S. Mathematica cookbook. Cambridge: O'Reilly Media, Inc., 2010. XXIV+800 p.

Поступила в редакцию 20.08.2015

Полосков Игорь Егорович, д. ф.-м. н., доцент, зав. кафедрой высшей математики, Пермский государственный национальный исследовательский университет, 614990, Россия, г. Пермь, ул. Букирева, 15.
E-mail: polosk@psu.ru

I. E. Poloskov
Stochastic differential equations with random delays in the form of discrete Markov chains

Keywords: stochastic dynamic system, random delay, modeling, state vector, transition process.

MSC: 65C30, 60H35, 68U20

The paper provides an overview of the problems that lead to a necessity for analyzing models of linear and nonlinear dynamic systems in the form of stochastic differential equations with random delays of various types as well as some well-known methods for solving these problems. In addition, the author proposes some new approaches to the approximate analysis of linear and nonlinear stochastic dynamic systems. Changes of delays in these systems are governed by discrete Markov chains with continuous time. The proposed techniques for the analysis of systems are based on a combination of the classical steps method, an extension of the state space of a stochastic system under examination, and the method of statistical modeling (Monte Carlo). In this case the techniques allow to simplify the task and to transfer the source equations to systems of stochastic differential equations without delay. Moreover, for the case of linear systems the author has obtained a closed sequence of systems with increasing dimensions of ordinary differential equations satisfied by the functions of conditional expectations and covariances for the state vector. The above scheme is demonstrated by the example of a second-order stochastic system. Changes of the delay in this system are controlled by the Markov chain with five states. All calculations and graphics were performed in the environment of the mathematical package Mathematica by means of a program written in the source language of the package.

REFERENCES

1. Azbelev N.V., Maksimov V.P., Rakhmatullina L.F. *Introduction to the theory of functional differential equations: Methods and applications*, New York: Hindawi Publishing Corporation, 2007, 318 p. Original Russian text published in Azbelev N.V., Maksimov V.P., Rakhmatullina L.F. *Elementy sovremennoi teorii funktsional'no-differentsial'nykh uravnenii. Metody i prilozheniya*, Moscow: Institute of Computer Science, 2003, 384 p.
2. El'sgol'ts L.E., Norkin S.B. *Introduction to the theory and application of differential equations with deviating arguments*, New York: Academic Press, 1973, XVI+357 p. Original Russian text published in El'sgol'ts L.E., Norkin S.B. *Vvedenie v teoriyu differentsial'nykh uravnenii s otklonyayushchimsya argumentom*, Moscow: Nauka, 1971, 296 p.
3. Hale J.K., Lunel S.M.V. *Introduction to functional differential equations*, New York: Springer, 1993, X+450 p.
4. Smith H. *An introduction to delay differential equations with sciences applications to the life*, New York: Springer, 2011, XI+172 p.
5. Tsar'kov E.F. *Sluchainye vozmushcheniya differentsial'no-funktsional'nykh uravnenii* (Random perturbations of differential-functional equations), Riga: Zinatne, 1989, 421 p.
6. Kushner H.J. *Numerical methods for controlled stochastic delay systems*, Boston: Birkhäuser, 2008, XX+282 p.
7. Mohammed S.E.A. *Stochastic functional differential equations*, Boston–London: Pitman Publishing, 1984, IX+245 p.

8. Gardiner C.W. *Handbook of stochastic methods for physics, chemistry and the natural sciences*, Berlin: Springer-Verlag, 1985, 442 p. Translated under the title *Stokhasticheskie metody v estestvennykh naukakh*, Moscow: Mir, 1986, 528 p.
9. Pugachev V.S., Sinitsyn I.N. *Stokhasticheskie differentsial'nye sistemy. Analiz i fil'tratsiya* (Stochastic differential systems: analysis and filtration), Moscow: Nauka, 1990, 630 p.
10. Malanin V.V., Poloskov I.E. *Sluchainye protsessy v nelineinykh dinamicheskikh sistemakh. Analiticheskie i chislennye metody issledovaniya* (Random processes in nonlinear dynamic systems. Analytical and numerical methods of analysis), Izhevsk: Regular and Chaotic Dynamics, 2001, 160 p.
11. Klyatskin V.I. *Dinamika stokhasticheskikh sistem: Kurs lektsii* (Dynamics of stochastic systems: lecture course), Moscow: Fizmatgiz, 2003, 240 p.
12. Mao X. *Stochastic differential equations and applications*, Oxford: Woodhead Publishing, 2010, XVIII+422 p.
13. Bellen A., Zennaro M. *Numerical methods for delay differential equations*, Oxford: Oxford University Press, 2003, XIV+395 p.
14. Shampine L.F., Gladwell I., Thompson S. *Solving ODEs with Matlab*, Cambridge: Cambridge University Press, 2003, 272 p. Translated under the title *Reshenie obyknovennykh differentsial'nykh uravnenii s ispol'zovaniem MATLAB*, St. Petersburg: Lan', 2009, 304 p.
15. Kloeden P.E., Platen E. *Numerical solution of stochastic differential equations*, Berlin: Springer-Verlag, 1995, XXXV+632 p.
16. Milstein G.N., Tretyakov M.V. *Stochastic numerics for mathematical physics*, Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 2004, XIX+594 p.
17. Solodov A.V., Solodova E.A. *Sistemy s peremennym zapazdyvaniem* (Systems with variable delay), Moscow: Nauka, 1980, 384 p.
18. Skanavi G.I. *Fizika dielectrikov (oblast' sil'nykh polei)* (Physics of dielectrics (stronger fields)), Moscow: GIFML, 1958, 907 p.
19. Sysoev Yu.A., Plankovskii S.I., Loyan A.V., Koshelev N.N. Excitation in a high arc plasma generator, *Aviatsionno-Kosmicheskaya Tekhnika i Tekhnologiya*, 2006, no. 10, pp. 61–66 (in Russian). http://nbuv.gov.ua/j-pdf/aktit_2006_10_16.pdf
20. Prochazka I., Kral L., Blazej J. Picosecond laser pulse distortion by propagation through a turbulent atmosphere, *Coherence and Ultrashort Pulse Laser Emission*, F.J. Duarte (ed.), Rijeka, Croatia: InTech, 2010, pp. 445–448.
21. Forde J.E. Delay differential equation models in mathematical biology, *PhD thesis*, University of Michigan, 2005, 94 p.
22. Crauel H., Son D.T., Siegmund S. Difference equations with random delay, *Journal of Difference Equations and Applications*, 2009, vol. 15, no. 7, pp. 627–647.
23. Lara-Sagahon A.V., Kharchenko V., José M.V. Stability analysis of a delay-difference SIS epidemiological model, *Applied Mathematical Sciences*, 2007, vol. 1, no. 26, pp. 1277–1298.
24. Cooke K.L., Kuang Y., Li B. Analysis of an antiviral immune response model with time delays, *Canadian Appl. Math. Quart.*, 1998, vol. 6, pp. 321–354.
25. Poddubnyi V.V., Romanovich O.V. Dynamic market model of Walras type with random delays in the supply of goods, *Sovremennye napravleniya teoreticheskikh i prikladnykh nauk'2007: Sbornik nauchnykh trudov po materialam nauchno-prakticheskoi konferentsii* (Modern branches of theoretical and applied sciences: Transactions on materials of the international scientific-practical conference), Odessa: Chernomor'e, 2007, vol. 21, Physics and Mathematics, Geography, Geology, pp. 20–26 (in Russian).
26. Chang H.-J., Dye C.-Y. An inventory model with stock-dependent demand under conditions of permissible delay in payments, *Journal of Statistics and Management Systems*, 1999, vol. 2, no. 2/3, pp. 117–126.
27. Shepp L. A model for stock price fluctuations based on information, *IEEE Trans. on Information Theory*, 2002, vol. 48, no. 6, pp. 1372–1378.
28. Huang D., Nguang S.K. *Robust control for uncertain networked control systems with random delays*, London: Springer, 2009, XII+168 p.
29. Ge Y., Chen Q., Jiang M., Huang Y. Modeling of random delays in networked control systems, *Journal of Control Science and Engineering*, 2013, vol. 2013, Article ID 383415, 9 p. http://downloads.hindawi.com/ journals/jcse/2013/383415.pdf
30. Lidskii E.A. On the stability of system motions with random delays, *Differ. Uravn.*, 1965, vol. 1, no. 1, pp. 96–101 (in Russian).
31. Kats I.Ya. The stability on the first approximation of systems with random delay, *Prikl. Mat. Mekh.*, 1967, vol. 31, no. 3, pp. 447–452 (in Russian).
32. Kolomiets V.G., Korenevskii D.G. Excitation of oscillations in nonlinear systems with random delay, *Ukr. Mat. Zh.*, 1966, vol. 18, no. 3, pp. 51–57 (in Russian).

33. Korenevskii D.G., Kolomiets V.G. Some questions in the theory of nonlinear oscillations of quasi-linear systems with random delay, *Matematicheskaya Fizika*, Kiev, 1967, no. 3, pp. 91–113 (in Russian).
34. Novakovskaya L.I. Construction of asymptotic solutions for the first order differential equations with random delay, *Ukr. Mat. Zh.*, 1989, vol. 41, no. 11, pp. 1569–1563 (in Russian).
35. Krapivsky P.L., Luck J.M., Mallick K. On stochastic differential equations with random delay, 2011, arXiv:1108.1298 [cond-mat.stat-mech]. http://arxiv.org/pdf/1108.1298v2.pdf
36. Caraballo T., Kloeden P.E., Real J. Discretization of asymptotically stable stationary solutions of delay differential equations with a random stationary delay, *Journal of Dynamics and Differential Equations*, 2006, vol. 18, no. 4, pp. 863–880.
37. Zhang H., Feng G., Han C. Linear estimation for random delay systems, *Systems & Control Letters*, 2011, vol. 60, no. 7, pp. 450–459.
38. Gao Sh.-L. Generalized stochastic resonance in a linear fractional system with a random delay, *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, 2012, vol. 2012, no. 12, P12011.
39. Mier-y-Teran-Romero L., Lindley B., Schwartz I.B. Statistical multi-moment bifurcations in random-delay coupled swarms, *Phys. Rev. E.*, 2012, vol. 86, no. 5, 056202 (4 p).
40. Masoller C., Marti A.C. Random delays and the synchronization of chaotic maps, *Phys. Rev. Letters*, 2005, vol. 94, no. 13, 134102 (4 p).
41. Wu F., Yin G., Wang L.Y. Moment exponential stability of random delay systems with two-time-scale Markovian switching, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2012, vol. 13, no. 6, pp. 2476–2490.
42. Tikhonov V.I., Mironov M.A. *Markovskie protsessy* (Markov processes), Moscow: Sov. Radio, 1977, 488 p.
43. Law A.M., Kelton W.D. *Simulation modeling and analysis*, 3d ed., New York: McGraw-Hill, 2000, 784 p. Translated under the title *Imitatsionnoe modelirovanie: Klassika CS*, 3-e izd., Saint Petersburg: Piter, 2004, 847 p.
44. Mitropolskii Yu.A. *Metod usredneniya v nelineinoi mekhanike* (The method of averaging in nonlinear mechanics), Kiev: Naukova dumka, 1970, 440 p.
45. Kazmerchuk Y.I., Wu J.H. Stochastic state-dependent delay differential equations with applications in finance, *Funct. Diff. Equations*, 2004, vol. 11, no. 1/2, pp. 77–86.
46. Zaitsev V.V., Karlov-junior A.V., Telegin S.S. The discrete time "predator-prey" model, *Vestn. Samar. Gos. Univ., Estestvennonauchn. Ser.*, 2009, no. 6 (72), pp. 139–148 (in Russian).
47. Poloskov I.E. Phase space extension in the analysis of differential-difference systems with random input, *Automation and Remote Control*, 2002, vol. 63, no. 9, pp. 1426–1438.
48. Poloskov I.E. Symbolic-numeric algorithms for analysis of stochastic systems with different forms of aftereffect, *Proc. in Applied Math. and Mechanics* (*PAMM*), 2007, vol. 7, no. 1, pp. 2080011–2080012.
49. Poloskov I.E. Symbolic and numeric schemes of analysis of dynamic systems with aftereffect, *Vestn. Perm. Univ. Mat. Mekh. Informatika*, 2011, no. 2 (6), pp. 51–58 (in Russian).
50. Mangano S. *Mathematica cookbook*, Cambridge: O'Reilly Media, Inc., 2010, XXIV+800 p.

Received 20.08.2015

Poloskov Igor' Egorovich, Doctor of Physics and Mathematics, Associate Professor, Head of Higher Mathematics Department, Perm State University, ul. Bukireva, 15, Perm, 614990, Russia.
E-mail: polosk@psu.ru