

УДК 517.518, 517.977.56

© А. В. Чернов

**О ПРИМЕНЕНИИ КВАДРАТИЧНЫХ ЭКСПОНЕНТ ДЛЯ ДИСКРЕТИЗАЦИИ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ<sup>1</sup>**

На примере известной задачи о прокладке трассы изучаются возможности численного решения сосредоточенных задач оптимального управления методом параметризации управления с помощью линейной комбинации  $\mu$  функций Гаусса. Напомним, что функция Гаусса (называемая также квадратичной экспонентой) — это функция вида  $\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right]$ . Основу метода составляет сведение исходной бесконечномерной задачи оптимизации к конечномерной задаче минимизации целевого функционала по параметрам аппроксимации управления с последующим применением численных методов конечномерной оптимизации. Данная статья опирается на исследование, проведенное автором ранее и касавшееся возможностей аппроксимации функций одного переменного на конечном отрезке линейной комбинацией функций Гаусса, и является его непосредственным продолжением. Прежде всего, мы доказываем утверждение об аппроксимации на любом конечном отрезке материнского вейвлета «мексиканская шляпа» линейной комбинацией двух квадратичных экспонент. Отсюда получаем теоретическое обоснование возможности эффективной аппроксимации функций одного переменного на любом конечном отрезке линейными комбинациями функций Гаусса. После этого мы проводим сравнение качества аппроксимации указанного вида с аппроксимацией по Котельникову на базе численных экспериментов. Затем приводится постановка задачи о прокладке трассы, а также результаты ее численного решения при различных способах параметризации управления, наглядно демонстрирующие преимущества предлагаемого способа, в частности устойчивость численного решения к погрешности вычисления параметров аппроксимации оптимального управления даже при использовании малого количества этих параметров.

*Ключевые слова:* техника параметризации управления, сосредоточенная задача оптимального управления, аппроксимация квадратичными экспонентами, функция Гаусса.

DOI: [10.20537/vm170406](https://doi.org/10.20537/vm170406)**Введение**

В работе [1] исследовались возможности использования линейной комбинации квадратичных экспонент (функций Гаусса) с варьируемыми параметрами для аппроксимации функций одного переменного на конечном отрезке. Там же см. библиографию по вопросу использования квадратичных экспонент для аппроксимации функций одного переменного на числовой оси; см. также [2]. В [1] было доказано несколько утверждений о дискретно точном характере изучаемых аппроксимаций и приведены результаты численных экспериментов, подтверждающих справедливость этих утверждений и демонстрирующих высокое качество такого способа аппроксимации для гладких функций и достаточно хорошее — для непрерывных и кусочно-непрерывных функций. В качестве приложения предлагалось использование квадратичных экспонент для численного решения сосредоточенных задач оптимального управления в рамках метода параметризации управления. Тем не менее, ничего конкретного в этом плане сказано не было, поскольку предполагалось продолжить исследование по этой тематике в последующих работах. Данная статья как раз и продолжает исследования в этом направлении.

<sup>1</sup>Работа поддержана финансово МОН РФ в рамках проектной части государственного задания в сфере научной деятельности в 2014–2016 гг. (проект № 1727) и грантом (соглашение от 27.08.13 № 02.В.49.21.0003 между МОН РФ и ННГУ).

Как было отмечено в [1] (там же см. соответствующую библиографию), при дискретизации задач оптимального управления традиционно используется кусочно-постоянная или кусочно-линейная аппроксимация управляющей функции, что даже в случае подвижной (управляемой) сетки приводит к большой размерности аппроксимирующей задачи математического программирования. В частности, в рамках техники параметризации управления (см. [3–8], а также указанную там библиографию) за счет предположения об однозначной разрешимости управляемой системы для каждого допустимого управления функционалы задачи сводятся к функциям конечного числа переменных — параметров интерполяции управляющей функции, а исходная бесконечномерная задача оптимизации — к конечномерной, которая в этом случае и понимается как аппроксимирующая задача. При этом способы интерполяции управления могут быть, вообще говоря, различными. В связи с этим в работе [1] была заявлена проблема выбора такого класса  $\mathcal{E}$  функций, аппроксимирующих (интерполирующих) неизвестное управление, который, с одной стороны, обеспечивал бы высококачественную аппроксимацию для управляющих функций из достаточно обширного множества при использовании не слишком большого количества параметров аппроксимации, а с другой — позволял бы программировать те или иные полезные свойства управляющих функций (например, отсутствие быстрых осцилляций, разрушающих соответствующее техническое устройство, устойчивость приближенного решения оптимизационной задачи к искажению входных параметров — помехоустойчивость и т.п.). Целью работы [1] было показать, что перечисленным требованиям достаточно хорошо удовлетворяет класс линейных комбинаций так называемых квадратичных экспонент (известных из теории вероятностей как функции Гаусса). Иначе говоря, это класс

$$\mathcal{E} = \left\{ \Phi = \Phi_\nu[\alpha, \beta, \gamma] \in C^\infty[a; b] \mid (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^{3\nu}, \nu \in \mathbb{N} \right\},$$

где

$$\Phi_\nu[\alpha, \beta, \gamma](x) = \sum_{j=1}^{\nu} \alpha_j \varphi_j[\beta_j, \gamma_j](x), \quad \varphi_j[\beta_j, \gamma_j](x) = \exp \left[ -\frac{(x - \beta_j)^2}{\varepsilon + \gamma_j^2} \right], \quad (0.1)$$

$\varepsilon > 0$  — некоторое достаточно малое число (нужное только для того, чтобы избежать нуля в знаменателе).

При аппроксимации функции  $f(\cdot)$  по ее значениям в контрольных точках параметры аппроксимации можно находить как решение задачи оптимизации

$$W[\alpha, \beta, \gamma] = \sum_{i=1}^m \left\{ \Phi_\nu[\alpha, \beta, \gamma](z_i) - f(z_i) \right\}^2 \rightarrow \min_{(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^{3\nu}}. \quad (0.2)$$

Отметим, что (0.2) — частный случай так называемой *нелинейной задачи наименьших квадратов*. Наиболее эффективным подходом к ее численному решению является использование методов Левенберга–Марквардта и Гаусса–Ньютона. В ходе численных экспериментов, представленных в [1], использовались именно эти два метода.

При использовании аппроксимации управления функциями из класса  $\mathcal{E}$  значения искомого оптимального управления в контрольных точках нам, разумеется, не известны (и в этом состоит принципиальное отличие от обычной задачи аппроксимации). В этом случае неизвестные параметры аппроксимации определяются путем минимизации значения целевого функционала, вычисляемого на функциях из класса  $\mathcal{E}$ , если они являются допустимыми по смыслу задачи, либо на допустимых суперпозициях, содержащих функции класса  $\mathcal{E}$  (например, в рамках метода синус-параметризации, используемого для учета ограничений на значения управления в виде условия принадлежности заданному отрезку). Указанное выше принципиальное отличие следует учитывать при сравнении различных подходов к аппроксимации. Действительно, в рамках обычной задачи аппроксимации (при заданном количестве параметров) на первый план выходят вопросы, связанные с минимизацией расхода времени (и прочих ресурсов) при отыскании неизвестных параметров аппроксимации. В рамках же численного решения задач оптимального управления главное — это повышение точности аппроксимации в отношении

произвольной функции (неизвестного управления) при заданном количестве ее параметров, уменьшение количества параметров аппроксимации при сохранении приемлемой точности (по управлению или хотя бы по функционалу) и т. п. При этом точность аппроксимации понимается в абсолютном смысле (на всем отрезке или по неограниченно большому количеству точек), а не в смысле (лишь) заданного количества узлов, соответствующего количеству параметров. Например, в задаче (0.2) количество узлов  $\nu$  задано, а число контрольных точек  $m$  может быть сколь угодно велико.

В [1] были приведены результаты численных экспериментов по аппроксимации линейными комбинациями квадратичных экспонент многочленов, а также некоторых элементарных и ступенчатых функций. А именно, использовались следующие функции.

**Тест № 1.** Многочлен пятой степени

$$f(x) = 3(x - 0.2)(x - 0.25)(x - 1)(x - 2)(x - 2.5).$$

**Тест № 2.** Ступенчатая функция

$$f(x) = \begin{cases} 0.3, & \text{если } x \in [0; \pi/4), \\ 0.5, & \text{если } x \in [\pi/4; \pi/2), \\ 0.7, & \text{если } x \in [\pi/2; 3\pi/4), \\ 0.9, & \text{если } x \in [3\pi/4; \pi]. \end{cases}$$

**Тест № 3.** Элементарная функция

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x + 1} + \operatorname{arctg}(\cos x) + 0.1 \sin(x^3 + x^2 - 7x - 5).$$

**Тест № 4.** Ломаная с массивами первых и вторых координат вершин:

$$(0, \pi/6, \pi/2, 0.85\pi, \pi), \quad (0, 2, 0.5, 1.5, 1).$$

При этом рассматривались следующие два подхода к аппроксимации.

#### Подход I

Для случая  $m = 1000$ ,  $\nu = 11$  и равномерной сетки контрольных точек  $x_i \in [a; b] = [0; \pi]$ ,  $i = \overline{1, m}$ , выбор параметров интерполяции (0.1), то есть чисел  $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j$ ,  $j = \overline{1, \nu}$ , производился путем решения оптимизационной задачи (0.2) методом Левенберга–Марквардта или Гаусса–Ньютона с помощью программ, написанных автором на языке MATLAB.

#### Подход II

Параметры  $\beta_j, \gamma_j = \gamma_0$ ,  $j = \overline{1, \nu}$ , брались фиксированными. Учитывая, что в рамках подхода I на каждое значение индекса  $j = \overline{1, \nu}$  приходится по 3 параметра интерполяции, а здесь только 1 параметр, для корректности сравнения данных двух подходов было взято  $\nu = 33$ . Сетка на  $[a; b]$  была взята равномерной, с тем же количеством контрольных точек, и в качестве параметров  $\beta_j$  были назначены контрольные точки  $x_j$ ,  $j = \overline{1, \nu}$ . По значениям  $f_j = f(x_j)$ ,  $j = \overline{1, \nu}$ , определялись значения параметров  $\alpha_j$ ,  $j = \overline{1, \nu}$ , как решение системы линейных уравнений

$$\Phi\alpha = f,$$

где  $\Phi = \{\varphi_j[\beta_j, \gamma_j](x_i)\}_{i,j=\overline{1,\nu}}$ . Согласно результатам [1] данная система уравнений имеет единственное решение, которое и дает нам искомую аппроксимацию вида (0.1). В численных экспериментах мы брали  $\gamma_0 = 0.1$ .

Наиболее качественная аппроксимация обнаружилась при использовании подхода I. В частности, для тестов №№ 1, 3 наблюдалось полное совпадение графиков аппроксимации и аппроксимируемой функции; для теста № 4 незначительное отклонение наблюдалось лишь в малой окрестности наивысшей точки графика; для теста № 2 наблюдались небольшие волнообразные отклонения вдоль всего графика.

Данная статья опирается на работу [1] и является ее непосредственным продолжением. Прежде всего, мы доказываем утверждение об аппроксимации на любом конечном отрезке материнского вейвлета «мексиканская шляпа» линейной комбинацией двух квадратичных экспонент. Собственно, это утверждение как раз и является строгим теоретическим обоснованием возможности эффективной аппроксимации функций одного переменного на любом конечном отрезке линейными комбинациями функций Гаусса. После этого мы проводим сравнение качества аппроксимации функциями из класса  $\mathcal{E}$  с аппроксимацией по Котельникову на базе численных экспериментов. Затем приводится постановка задачи о прокладке трассы, а также результаты ее численного решения при различных способах параметризации управления, наглядно демонстрирующие преимущества предлагаемого способа, в частности устойчивость численного решения к погрешности вычисления параметров аппроксимации оптимального управления даже при использовании малого количества этих параметров.

Сделаем краткий обзор о применении квадратичных экспонент для аппроксимации функций (в частности, непрерывных, гладких, многочленов и т.д.). Интерполяция функциями Гаусса (иногда их еще называют ядрами Гаусса — Gaussian kernels) непрерывных функций рассматривалась, главным образом, на дискретной сетке, как правило, с равномерным шагом на всей числовой оси [9–11], либо на конечном множестве отрезка числовой оси. Соответствующие алгоритмы аппроксимации иногда называют *сеточными (grid)*. См., например, [12–14]. Исследовались также и многомерные аналоги, см., например, [15]. В основном, внимание исследователей концентрировалось на оценке погрешности аппроксимаций [16–19]. Эффективность сеточных алгоритмов аппроксимации функциями Гаусса обосновывалась, например, в [20]. Помимо простой, равномерной сетки, используются также и более сложные конструкции типа многоуровневых сеток, см., например, [21]. Параметрами аппроксимации выступают обычно весовые коэффициенты функций Гаусса в соответствующих линейных комбинациях. Укажем также работу [15], где исследовался вопрос о наилучшем выборе параметров формы. Отметим, наконец, что функции Гаусса являются частным случаем радиальных базисных функций (radial basis functions), см., например, [22]. В монографии [22] обсуждается, помимо прочего, применение таких функций для численного решения уравнений с частными производными.

## § 1. Об аппроксимации материнского вейвлета «мексиканская шляпа»

**Теорема 1.** Материнский вейвлет «мексиканская шляпа», то есть функция

$$\psi(t) = (1 - t^2) \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right),$$

на любом конечном отрезке  $[a; b]$  может быть сколь угодно точно в метрике пространства  $C[a; b]$  аппроксимирован функцией вида  $\Phi_\nu[\alpha, \beta, \gamma] \in \mathcal{E}$  при  $\nu = 2$ .

**Доказательство.** Пусть  $\gamma > 0$  — пока произвольное число. Воспользуемся известным разложением в ряд Маклорена:

$$e^\tau = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tau^n}{n!}, \quad \tau \in \mathbb{R},$$

откуда, в частности, получаем

$$1 - \exp\left(-\frac{t^2}{\gamma^2}\right) = \frac{t^2}{\gamma^2} + r(t), \quad r(t) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n!} \left(\frac{t}{\gamma}\right)^{2n}, \quad t \in [a; b].$$

Рассмотрим ряд

$$\tilde{r}(t) = \gamma^2 r(t) = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n, \quad a_n = \frac{\gamma^2}{n!} \left(\frac{t}{\gamma}\right)^{2n}.$$

Заметим, что

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{n+1} \frac{t^2}{\gamma^2} < 1 \quad \forall n \geq 2,$$

если  $\frac{t^2}{\gamma^2} < 3$ . Таким образом, при выполнении условия

$$\frac{\max\{|a|, |b|\}}{\gamma} < \sqrt{3} \quad (1.1)$$

ряд  $\tilde{r}(t)$  при каждом  $t \in [a; b]$  будет знакопередающимся с модулем общего члена, строго убывающим до нуля, то есть рядом типа Лейбница. Как известно, модуль суммы такого ряда (так же как и любого его остатка) оценивается сверху модулем своего первого члена. Следовательно, при выполнении условия (1.1) имеем

$$|\tilde{r}(t)| \leq \frac{\gamma^2}{2!} \left(\frac{t}{\gamma}\right)^4 = \frac{t^4}{2\gamma^2} \leq \frac{(\max\{|a|, |b|\})^4}{2\gamma^2}.$$

Потребуем, чтобы, кроме (1.1), число  $\gamma$  удовлетворяло также условию

$$\frac{(\max\{|a|, |b|\})^4}{2\gamma^2} < \varepsilon.$$

Тогда получаем оценку

$$|\tilde{r}(t)| < \varepsilon \quad \forall t \in [a; b]. \quad (1.2)$$

При этом, по доказанному,

$$1 - \frac{t^2}{\gamma^2} = \exp\left(-\frac{t^2}{\gamma^2}\right) + r(t), \quad t \in [a; b].$$

Стало быть,

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \gamma^2 \left( \frac{1}{\gamma^2} - 1 + 1 - \frac{t^2}{\gamma^2} \right) \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) = (1 - \gamma^2) \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) + \\ &+ \gamma^2 \left( \exp\left[-\frac{t^2}{\gamma^2}\right] + r(t) \right) \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) = (1 - \gamma^2) \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) + \gamma^2 \exp\left(-t^2 \left[\frac{1}{\gamma^2} + \frac{1}{2}\right]\right) + R(t) \end{aligned}$$

для всех  $t \in [a; b]$ , где

$$R(t) = \gamma^2 r(t) \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) = \tilde{r}(t) \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right).$$

Следовательно,

$$|R(t)| \leq |\tilde{r}(t)| < \varepsilon \quad \forall t \in [a; b]$$

в силу (1.2). □

## § 2. Об использовании вейвлета «мексиканская шляпа» для аппроксимации функций в $L_2$

Возможность указанной в заглавии параграфа аппроксимации основана на понятии фрейма и общих свойствах фреймов. Следуя [23, глава 3], мы далее очень конспективно приведем лишь те факты, которые имеют непосредственное отношение к нашей теме.

### 1. Фреймы и их свойства

**Определение 1.** Семейство функций  $(\varphi_j)_{j \in J}$  из гильбертова пространства  $\mathcal{H}$  называется фреймом, если существуют числа  $A > 0$ ,  $B < \infty$  такие, что

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{j \in J} |\langle f, \varphi_j \rangle|^2 \leq B\|f\|^2 \quad \forall f \in \mathcal{H}.$$

Числа  $A$ ,  $B$  называются границами фрейма. Фрейм называется жестким, если  $A = B$ . Если же  $\frac{B}{A} - 1 \ll 1$ , то фрейм называется почти жестким.

Для множества индексов  $J$  обозначим

$$\ell_2(J) = \left\{ c = (c_j)_{j \in J} : \|c\|^2 = \sum_{j \in J} |c_j|^2 < \infty \right\}.$$

**Определение 2.** Если  $(\varphi_j)_{j \in J}$  — фрейм в гильбертовом пространстве  $\mathcal{H}$ , то линейный оператор  $F: \mathcal{H} \rightarrow \ell_2(J)$ , определяемый формулой  $(Ff)_j = \langle f, \varphi_j \rangle$ , называется фреймовым оператором.

Для фрейма  $(\varphi_j)_{j \in J}$  элементы  $\tilde{\varphi}_j = (F^*F)^{-1}\varphi_j$ ,  $j \in J$ , всегда существуют и образуют фрейм в том же пространстве  $\mathcal{H}$ . Этот фрейм называется *двойственным*. Устанавливается [23, формула (3.2.8)], что для любого фрейма  $(\varphi_j)_{j \in J}$  всякий элемент  $f \in \mathcal{H}$  может быть представлен в виде

$$f = \sum_{j \in J} \langle f, \varphi_j \rangle \tilde{\varphi}_j = \sum_{j \in J} \langle f, \tilde{\varphi}_j \rangle \varphi_j. \quad (2.1)$$

Определение коэффициентов разложения в формуле (2.1) для заданного элемента  $f \in \mathcal{H}$  неудобно, поскольку требует вычисления двойственного фрейма. Поэтому в теории фреймов выводят различные приближенные *формулы восстановления*, которые не содержат элементов двойственного фрейма (иначе — как в малом остатке). Простейшая формула восстановления выводится для случая почти жесткого фрейма и имеет вид

$$f = \frac{2}{A+B} \sum_{j \in J} \langle f, \varphi_j \rangle \varphi_j + Rf, \quad \|R\| \leq \frac{r}{2+r}, \quad r = \frac{B}{A} - 1 \ll 1. \quad (2.2)$$

### 2. Фреймы вейвлетов

Далее будем считать, что  $\psi$  — функция, заданная на  $\mathbb{R}$  (*материнский вейвлет*). Рассмотрим семейство сдвигов и сжатий функции  $\psi: \psi^{a,b}(t) = |a|^{-1/2} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$ ,  $b \in \mathbb{R}$ ,  $a > 0$ . Дискретизируем это семейство:

$$a = a_0^m, \quad m \in \mathbb{Z}, \quad a_0 > 1, \quad b = nb_0 a_0^m, \quad b_0 > 0, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$\psi_{m,n}(t) = a_0^{-m/2} \psi\left(\frac{t - nb_0 a_0^m}{a_0^m}\right) = a_0^{-m/2} \psi(a_0^{-m}t - nb_0).$$

Как указано в [23, п. 3.3.4, с. 117], функция «мексиканская шляпа»  $\psi(t) = (1 - t^2) \exp(-t^2/2)$  порождает почти жесткий фрейм в пространстве  $L_2(\mathbb{R})$  при  $a_0 \leq 2^{1/4}$ . Это дает возможность разложить всякую функцию  $f \in L_2(\mathbb{R})$  как по точной формуле (2.1), так и по приближенной формуле (2.2). С точки зрения проблематики, исследуемой в данной статье, функция  $f$  все равно неизвестна. Нам важна лишь принципиальная возможность разложить функцию  $f$  по системе фрейма. Поэтому обе формулы нам подходят.

Вместе с тем в теории вейвлетов стремятся получить формулы восстановления для случая  $a_0 = 2$ , поскольку в этом случае «переход от одного масштаба к другому означает удвоение или деление пополам шага сдвига». В связи с этим применяют так называемые  $N$ -голосые

мультивейвлеты  $\psi^1, \dots, \psi^N$  и соответствующий фрейм  $\{\psi_{m,n}^\nu : m, n \in \mathbb{Z}, \nu = \overline{1, N}\}$ . Обычно берут  $\psi^\nu(t) = 2^{-(\nu-1)/N} \psi(2^{-(\nu-1)/N} t)$ . Почти жесткий фрейм получают при выборе числа  $N$  достаточно большим. Как указано в [23, п. 3.3.5, Б], при  $N \geq 2$ ,  $a_0 = 2$ ,  $b_0 \leq 0.75$  нормированная функция «мексиканская шляпа»  $\bar{\psi}(t) = \frac{2}{\sqrt{3}} \pi^{-1/4} \psi(t)$  порождает почти жесткий фрейм.

Заметим, что функции, образующие фрейм с границами  $A, B$  в пространстве  $L_2(\mathbb{R})$ , очевидно, образуют фрейм с теми же границами и в пространстве  $L_2[a; b]$  для любого конечного отрезка  $[a; b]$  (поскольку всякую функцию  $f \in L_2[a; b]$  можно продолжить нулем на всю числовую ось). Рассмотрим, например, применение формулы (2.1) в случае  $a_0 \leq 2^{1/4}$  для вейвлета «мексиканская шляпа». Из вышесказанного следует, что справедлива

**Лемма 1.** Пусть  $a_0 \in (1; 2^{1/4}]$ ,  $b_0 > 0$ ,  $\psi_{m,n}(t) = a_0^{-m/2} \psi(a_0^{-m} t - nb_0)$ ,  $m, n \in \mathbb{Z}$ . Тогда для любой функции  $f \in L_2[a; b]$  существуют  $c_{m,n} \in \mathbb{R}$  такие, что

$$f(t) = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} c_{m,n} \psi_{m,n}(t), \quad t \in [a; b]; \quad |c_{m,n}| \leq \|f\| \|(F^* F)^{-1}\| \|\psi_{m,n}\|. \quad (2.3)$$

### 3. Об эффективности аппроксимации

Как указано в [23, § 3.7, с. 151], на практике при аппроксимации функций с помощью фреймов вейвлетов очень низкие и очень высокие частоты обрезаются, а это соответствует тому, что в разложении (2.3) используются лишь  $m \in \mathbb{Z}$ , удовлетворяющие неравенству вида  $m_0 \leq m \leq m_1$ . Более того, если функция  $f(t)$  хорошо локализована по частоте, то границы изменения  $m$ , соответствующие значимым коэффициентам разложения, будут достаточно узки. Числа  $n \in \mathbb{Z}$  характеризуют локализацию по времени. Таким образом, если функция  $f(t)$  локализована на отрезке  $[a; b]$ , то числа  $n$ , соответствующие центрам локализации  $nb_0 a_0^m$ , в некотором смысле удаленным от  $[a; b]$  при  $m \in [m_0; m_1]$ , тоже не учитываются. В результате в формуле разложения остается лишь некоторое, вообще говоря, небольшое число слагаемых. Описанный эффект называется частотно-временной локализацией и является основной причиной широкого применения фреймов вейвлетов (дискретного вейвлет-преобразования) при обработке сигналов, в частности для сжатия информации. Что касается строгой формулировки, см. [23, теорема 3.5.1, с. 137], то мы ее не приводим, поскольку, как указано в замечании к этой теореме, соответствующие оценки являются достаточно грубыми (поскольку получены для вейвлетов вообще, а не для какого-то конкретного вейвлета). Тем не менее мы приведем некоторые оценки для вейвлета «мексиканская шляпа», которые позволяют в какой-то мере уяснить проявление эффекта частотно-временной локализации. При этом, не ограничивая общности рассуждений, будем считать, что  $a > 0$ . Если это не так, то всегда можно сделать замену вида  $t = x - a + 1$ ,  $x \in [a; b]$ , и вместо функции  $f(x)$  рассмотреть функцию  $\varphi(t) = f(t + a - 1)$ ,  $t \in [1; b - a + 1]$ . Прежде всего, как видно из (2.3),

$$\|c_{m,n} \psi_{m,n}\| \leq \|f\| \|(F^* F)^{-1}\| \|\psi_{m,n}\|^2.$$

При этом в случае  $m > 0$  получаем

$$\|\psi_{m,n}\|_{L_2[a;b]}^2 = \int_a^b a_0^{-m} \psi^2(a_0^{-m} t - nb_0) dt \leq \frac{b-a}{a_0^m}, \quad \text{откуда} \quad \sum_{m=k>0}^{\infty} \|\psi_{m,n}\|_{L_2[a;b]}^2 \leq \frac{(b-a)a_0}{a_0^k(a_0-1)}.$$

И кроме того, для любого  $m \in \mathbb{Z}$ , делая замену  $\xi = a_0^{-m} t - nb_0$  в интеграле, получаем

$$\|\psi_{m,n}\|_{L_2[a;b]}^2 = \int_{\xi_1}^{\xi_2} \psi^2(\xi) d\xi, \quad \xi_1 = a_0^{-m} a - nb_0, \quad \xi_2 = a_0^{-m} b - nb_0.$$

Заметим, что  $|\psi(\xi)|$  принимает достаточно малые значения уже при  $|\xi| \geq 4.5$  — порядка  $10^{-3}$ , при  $|\xi| \geq 10$  — порядка  $10^{-20}$  и т. д. Таким образом, при  $a_0^{-m} a - nb_0 \geq 10$ , а также при

$a_0^{-m}b - nb_0 \leq -10$  значения указанной нормы практически не отличаются от нуля, поэтому соответствующие слагаемые могут быть отброшены.

С учетом сказанного эффективность аппроксимации с помощью квадратичных экспонент может быть обоснована следующим утверждением.

**Теорема 2.** Пусть для функции  $f \in L_2[a; b]$  имеет место представление

$$f(t) = \sum_{n=1}^{n_0} c_n \psi_n(t) + r(t), \quad t \in [a; b]; \quad \|r\|_{L_2[a; b]} < \varepsilon; \quad \psi_n(t) = \psi\left(\frac{t - b_n}{a_n}\right).$$

Тогда  $f(t) = \Phi_\nu[\alpha, \beta, \gamma] + \tilde{r}(t)$ ,  $t \in [a; b]$ , где  $\|\tilde{r}\|_{L_2[a; b]} < 2\varepsilon$ , при  $\nu = 2n_0$ . Если же  $\|r\|_{C[a; b]} < \varepsilon$ , то можно считать, что  $\|\tilde{r}\|_{C[a; b]} < 2\varepsilon$ .

Доказательство следует непосредственно из теоремы 1, достаточно лишь заметить, что функции, получаемые с помощью сдвигов и сжатий/растяжений из квадратичных экспонент, тоже являются квадратичными экспонентами.  $\square$

### § 3. Сравнение с интерполяцией по Котельникову

В теории обработки сигналов классический способ аппроксимации непрерывной, интегрируемой с квадратом функции  $f(x)$  на всей числовой оси состоит в использовании интерполяции по В. А. Котельникову:

$$f(x) \approx \mathcal{K}[h](x) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} f(ih) \frac{\sin(\pi(x - ih)/h)}{\pi(x - ih)/h},$$

где  $h > 0$  — шаг равномерной сетки. Возможность такой интерполяции основана на теореме В. А. Котельникова (см., например, [24, глава 2, § 2.7, с. 66]). Для аппроксимации функции  $f(x)$  на отрезке  $[a; b]$  вне отрезка принимают эту функцию равной нулю, в результате чего бесконечный ряд преобразуется в конечную сумму. Такое представление будет точным, если продолжение непрерывной функции  $f(x)$  нулем на всю числовую ось удовлетворяет условиям теоремы В. А. Котельникова, то есть обладает финитным спектром с верхней частотой  $\gamma \leq \frac{1}{2h}$ . В противном случае вне контрольных точек возникнут отклонения. Тем не менее интересно сравнить качество аппроксимации квадратичными экспонентами с аппроксимацией по Котельникову. Далее для тех же тестовых функций, что были рассмотрены выше, приведем результаты их аппроксимации по Котельникову (с тем же количеством контрольных точек  $\nu = 33$ ).

**Тест № 1.** Графики функции  $f(x)$  (сплошная линия) и ее аппроксимации (пунктирная линия) см. на рис. 1. Максимальное отклонение на равномерной сетке с шагом 0.005 составило  $\Delta = 6.9853$ .

**Тест № 2.** Графики функции  $f(x)$  (сплошная линия) и ее аппроксимации (пунктирная линия) см. на рис. 2. Максимальное отклонение на равномерной сетке с шагом 0.005 составило  $\Delta = 0.1525$ .

**Тест № 3.** Графики функции  $f(x)$  (сплошная линия) и ее аппроксимации (пунктирная линия) см. на рис. 3. Максимальное отклонение на равномерной сетке с шагом 0.005 составило  $\Delta = 0.2863$ .

**Тест № 4.** Графики функции  $f(x)$  (сплошная линия) и ее аппроксимации (пунктирная линия) см. на рис. 4. Максимальное отклонение на равномерной сетке с шагом 0.005 составило  $\Delta = 0.1333$ .

**Замечание 1.** Сравнивая с результатами численных экспериментов, представленными в [1], видим, что качество аппроксимации при одном и том же количестве параметров интерполяции оказывается наилучшим для функций Гаусса в рамках подхода I.



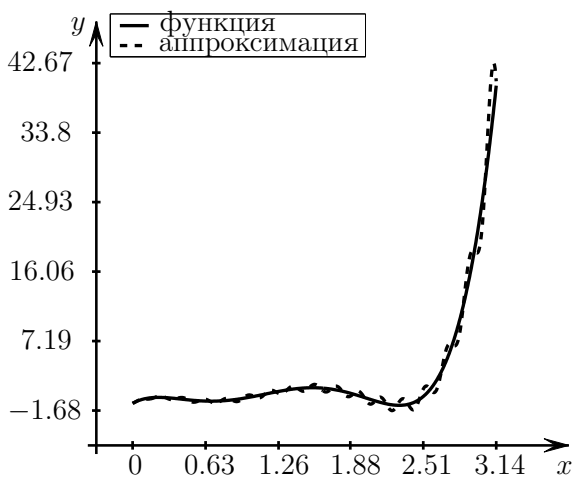


Рис. 1. Тест № 1 (по Котельникову)

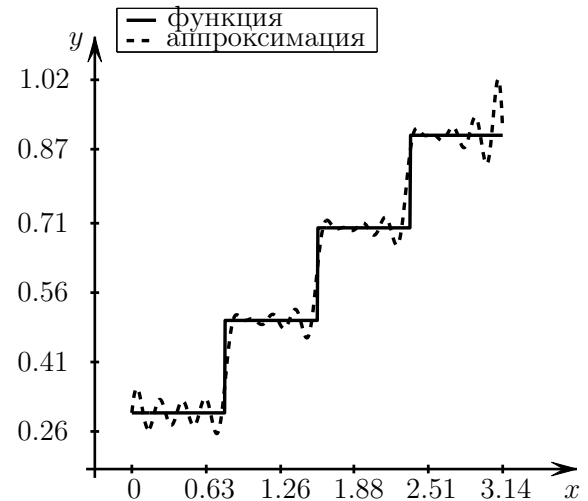


Рис. 2. Тест № 2 (по Котельникову)

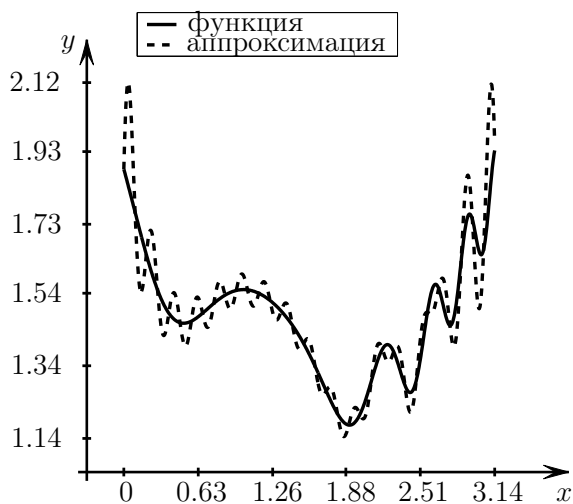


Рис. 3. Тест № 3 (по Котельникову)

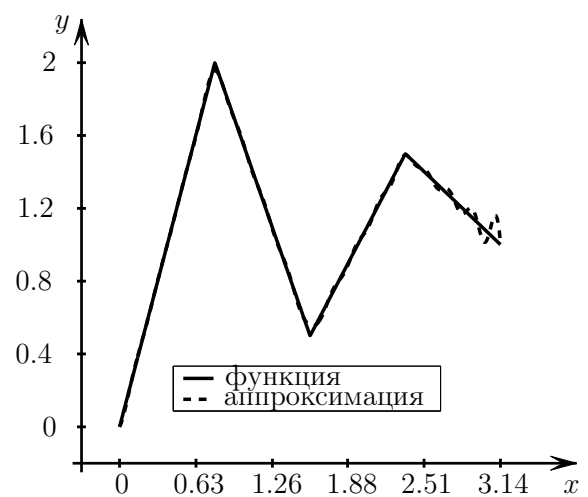


Рис. 4. Тест № 4 (по Котельникову)

#### § 4. Постановка задачи о прокладке трассы

Напомним постановку известной задачи о прокладке трассы. Пусть требуется проложить трассу (автомобильную, железнодорожную и т. п.), соединяющую два пункта,  $M$  и  $N$ , по прямой линии на карте, израсходовав как можно меньше средств на земляные работы. Под земляными работами здесь понимаются необходимые мероприятия по выемке грунта и по заполнению гравием впадин, ложбин, оврагов и т. п.

В вертикальной плоскости, проходящей через точки  $M$  и  $N$ , выберем декартову прямоугольную систему координат  $Otx$  с началом в точке  $M$  и осью  $Ot$ , направленной горизонтально в сторону точки  $N$ . Таким образом, начальная и конечная точки имеют координаты  $M(0; 0)$ ,  $N(T; \beta)$ , где  $T > 0$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$ . Будем считать, что рельеф местности в сечении данной вертикальной плоскостью описывается некоторой функцией  $y = y(t)$  при  $t \in [0; T]$  такой, что  $y(0) = 0$ ,  $y(T) = \beta$ . Кроме того, для простоты будем предполагать эту функцию гладкой. Обозначим  $x(t)$  — функцию, описывающую линию прокладки трассы. Очевидно, эта функция должна быть кусочно гладкой и удовлетворять условиям  $x(0) = 0$ ,  $x(T) = \beta$ . Понятно, что угол наклона касательной к графику функции  $x = x(t)$  не может быть произвольным, поскольку дорога не должна слишком резко уходить вниз и слишком круто подниматься вверх. Будем считать минимально допустимым значением  $-45^\circ$ , а максимально допустимым  $+45^\circ$ . Иными

словами, должно выполняться условие  $x'(t) = u(t) \in [-1; 1]$  для п. в.  $t \in [0; T]$ . Ясно, что объем земляных работ будет минимизирован, если функция  $x(t)$  будет как можно меньше отличаться от функции  $y(t)$  на всем протяжении отрезка  $[0; T]$ . Таким образом, приходим к следующей задаче минимизации:

$$J_0[u] = \int_0^T (x[u](t) - y(t))^2 dt \rightarrow \min, \quad J_1[u] \equiv x[u](T) = \beta, \quad u(t) \in [-1; 1] \quad \forall t \in [0; T], \quad (4.1)$$

$$x'(t) = u(t), \quad t \in (0; T]; \quad x(0) = 0. \quad (4.2)$$

Далее мы будем считать, что  $T = T_* \equiv 2$ ,  $\beta = 1$ ,  $y(t) = \frac{5}{12} t(t - 0.8)(t - 1)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Из анализа принципа максимума для этой задачи следует, что оптимальное управление на некоторых участках отрезка  $[0; T]$  будет совпадать с функцией  $y(t)$ .

В работе [4] была описана методика применения метода подвижных узлов в сочетании с методом кусочно-линейной аппроксимации управления для численного решения сосредоточенных задач оптимального управления как с фиксированным, так и со свободным временем. Кроме того, описывалось применение этой методики к решению задачи (4.1)–(4.2), а также были представлены результаты соответствующего численного решения. В соответствии с известной структурой оптимального управления, число элементов разбиения пришлось брать достаточным для того, чтобы с хорошей точностью можно было аппроксимировать функцию  $y(t)$  квадратичным сплайном на отрезке  $[0; T]$ . Это число было взято равным  $\nu = 10$ . На каждом из элементов разбиения управление описывалось двумя параметрами. Поскольку точки разбиения также выступали в качестве управляемых параметров, общее число параметров аппроксимации управления было равно 30. В результате замены управляющей функции на ее кусочно-линейную аппроксимацию на подвижной сетке исходная бесконечномерная задача оптимального управления сводилась к конечномерной задаче математического программирования (то, что финальное время  $T$  должно быть фиксированным, в этой задаче имело вид отдельного ограничения типа равенства относительно параметров). Такую конечномерную задачу мы называем аппроксимирующей. Для решения аппроксимирующей задачи использовались различные методы первого порядка (с использованием представленных в [4] формул для частных производных функций аппроксимирующей задачи по параметрам), в частности SQP-метод. При этом искомое оптимальное управление (точнее, его аппроксимация) было получено за 92 итерации и 651 вычисление целевой функции; минимальное значение функционала было определено как 0.042397. Соответствующая траектория прокладки трассы имела следующую структуру: 1) на отрезке  $[0; 1]$  практически совпадала с профилем рельефа местности, то есть функция  $x(t)$  почти не отличалась от функции  $y(t)$ ; 2) на отрезке  $[1; 2]$  имела угол наклона  $45^\circ$ , то есть производная  $x'(t) \equiv 1$ . Именно такой тип структуры и дает аналитическое решение по принципу максимума Л. С. Понтрягина. Кроме того, важно отметить, что в ходе численного решения задачи оптимального управления использовалось точное аналитическое решение управляемой задачи Коши, которое для кусочно-линейного управления не трудно вывести аналитически.

Далее мы приведем для сравнения результаты численного решения задачи (4.1)–(4.2) методом параметризации управления с помощью функций Гаусса при использовании метода нулевого порядка (метода Хука–Дживса) для решения аппроксимирующей задачи и численном решении методом Эйлера управляемой задачи Коши для текущего управления.

## § 5. Численное решение задачи о прокладке трассы

Произведем параметризацию управления с помощью функций Гаусса. Для того чтобы удовлетворить ограничению на значения управления, понадобится также внешняя параметризация. А именно, будем представлять управляющую функцию в виде

$$u(t) = \Psi\{\Phi(t)\}, \quad \Phi = \Phi_\nu[\alpha, \beta, \gamma], \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^\nu,$$

а  $\Psi: \mathbb{R} \rightarrow [u_1; u_2] = [-1; 1]$ , вообще говоря, произвольная непрерывная функция (внешней параметризации). В частности, мы рассматривали следующие случаи:

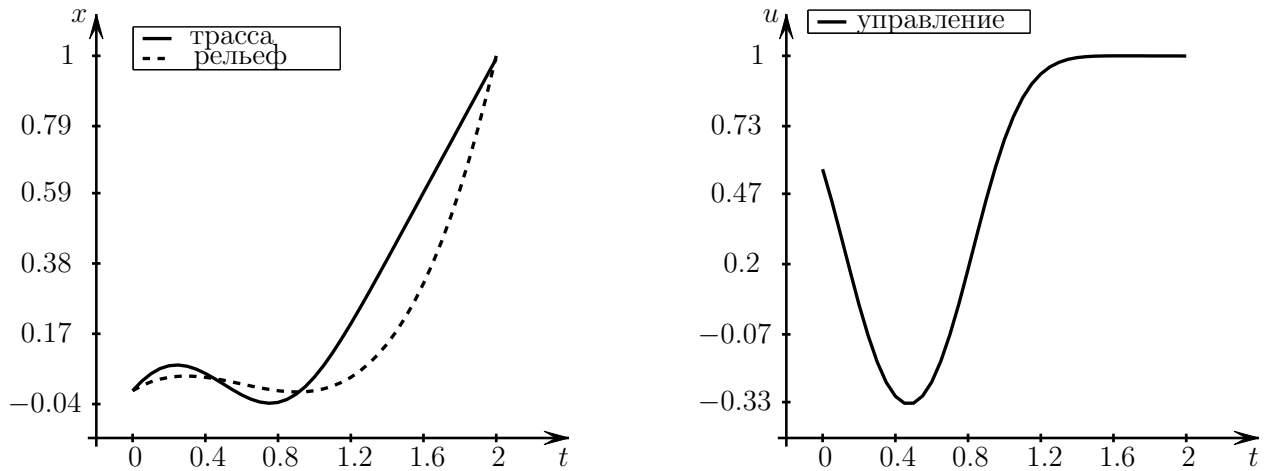


Рис. 5. Случай 1:  $\nu = 2$ , слева — траектория, справа — управление

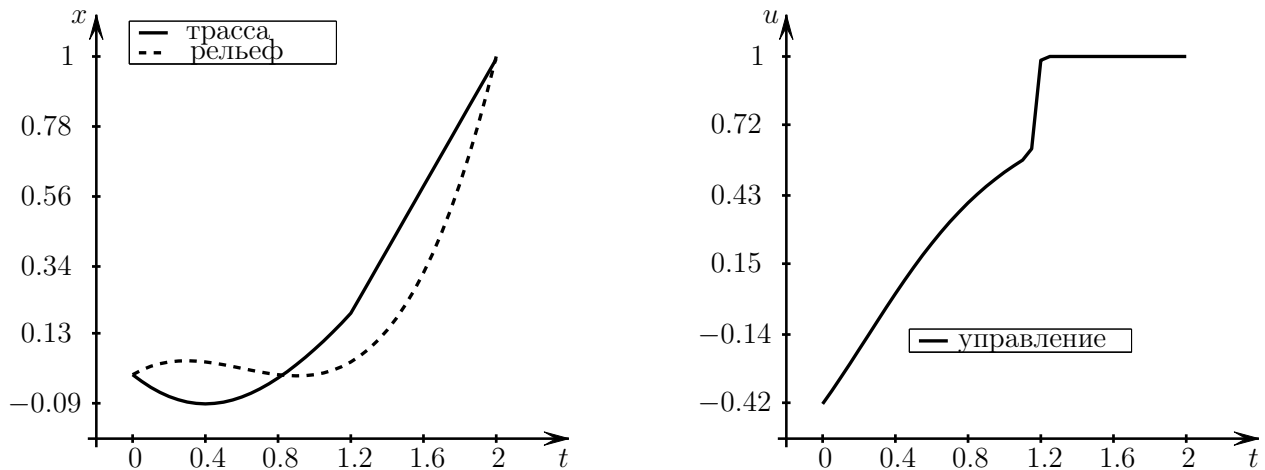


Рис. 6. Случай 2:  $\nu = 2$ , слева — траектория, справа — управление

- 1)  $\Psi(\tau) = u_1 + (u_2 - u_1) \frac{1}{2}(1 + \sin \tau)$ ; 2)  $\Psi(\tau) = u_1 + (u_2 - u_1) \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg}(\tau^2)$ ;  
 3)  $\Psi(\tau) = \left\{ \tau, \tau \in [u_1; u_2]; u_1, \tau < u_1; u_2, \tau > u_2 \right\}$ ; 4)  $\Psi(\tau) = u_1 + (u_2 - u_1) \exp(-10\tau^2)$ .

Таким образом, в качестве базового набора параметров выступает  $\xi = (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^{3\nu}$ . В результате функционал  $J_0[u]$  преобразуется в функцию  $J_0\{\xi\}$ . Условие закрепления на правом конце будем учитывать с помощью штрафа:

$$J\{\xi\} = J_0\{\xi\} + \sigma J_1\{\xi\} \rightarrow \min, \quad J_1\{\xi\} = (x\{\xi\}(T) - y(T))^2, \quad \xi \in \mathbb{R}^{3\nu}, \quad (5.1)$$

где  $\sigma > 0$  — штрафной параметр. Задача (5.1) — это аппроксимирующая задача безусловной минимизации. Мы решали ее методом Хука–Дживса. При этом оказалось, что для успешного решения параметр  $\sigma$  не должен быть слишком большим. Это связано с тем, что минимум функционала  $J_0$  выражается числом, близким к нулю, поэтому большое значение штрафного параметра уводит численное решение в сторону от точки глобального минимума (в один из локальных минимумов). Мы брали  $\sigma = 21$ . Точность решения по аргументу была задана как  $\varepsilon = 1.5 \cdot 10^{-3}$ ; ограничение на количество итераций — 300.

Выбор начального набора параметров осуществлялся следующим образом:

$$\alpha = \vec{0} = (0, \dots, 0), \quad \beta = 0.85 \operatorname{th} \vec{1}, \quad \gamma = \vec{1} = (1, \dots, 1).$$

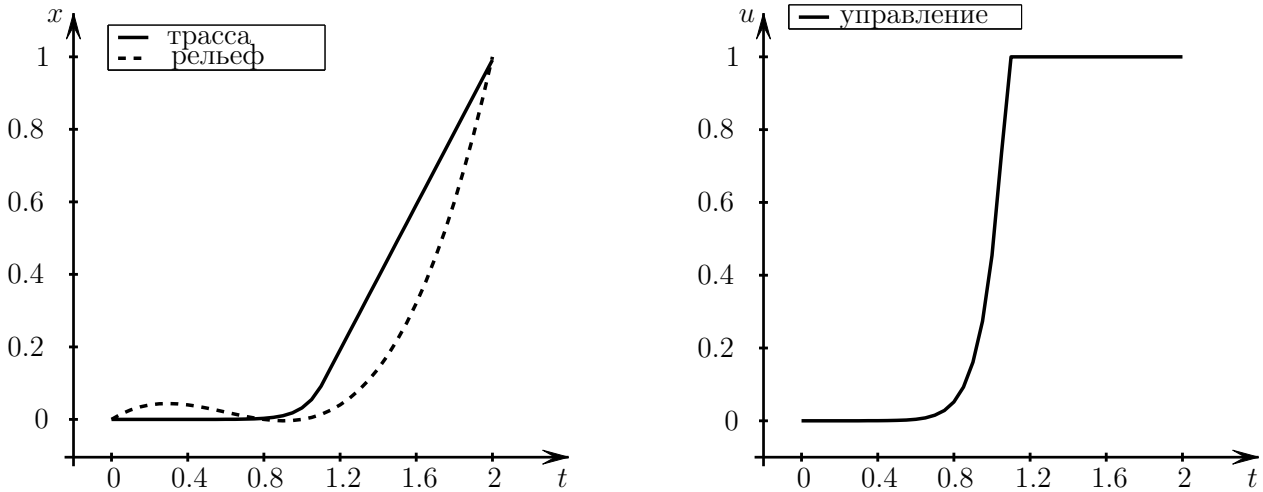


Рис. 7. Случай 3:  $\nu = 2$ , слева — траектория, справа — управление

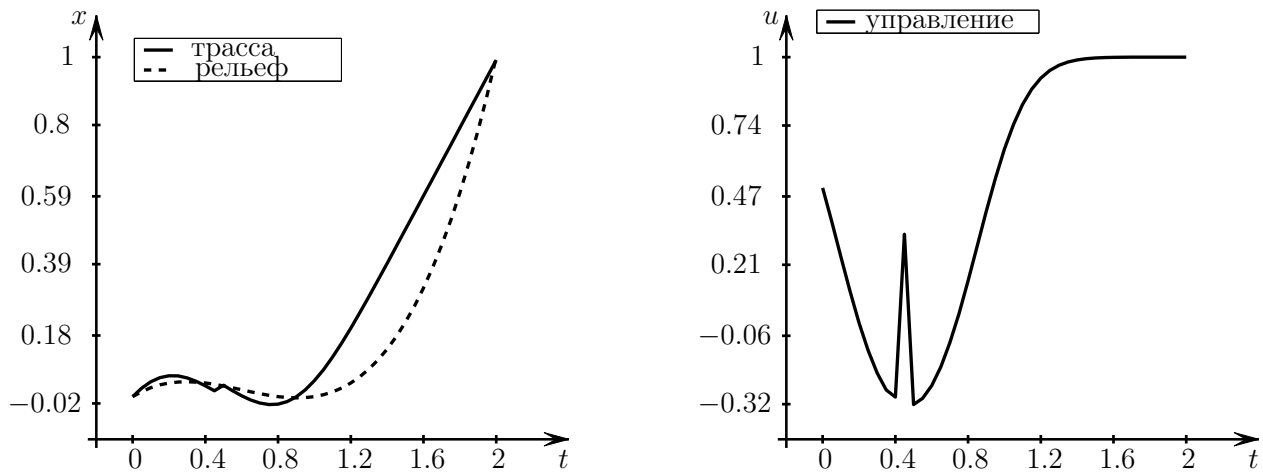


Рис. 8. Случай 4:  $\nu = 2$ , слева — траектория, справа — управление

Далее приведем решения, которые были получены для случаев 1–4,  $\nu = 2, 3$ . При увеличении числа  $\nu$  точность численного решения повышается (как видно уже из сравнения результатов при  $\nu = 2$  и  $\nu = 3$ ).

I. Случай  $\nu = 2$ .

- 1)  $\xi = (1.9385, 1.5582, 0.4751, -1.8600, -0.5798, 27.9550)$ ,  $J = 0.0445$ , см. рис. 5;
- 2)  $\xi = (2.5306, 2080272503.9902, 2.4798, 1.6299, 2.1835, 0.0974)$ ,  $J = 0.0520$ , см. рис. 6;
- 3)  $\xi = (5.9285, 81.1456, 6.5759, 2.0468, -0.3861, 0.4597)$ ,  $J = 0.0437$ , см. рис. 7;
- 4)  $\xi = (0.3303, -0.1342, 0.4675, 0.4447, 0.5715, 0.0231)$ ,  $J = 0.0443$ , 126 итераций, см. рис. 8.

Погрешность выполнения ограничения — порядка 0.008. Количество итераций (там, где не указано) — 300 (хотя точка, близкая к оптимуму, получается уже примерно на 40-й итерации).

II. Случай  $\nu = 3$ .

- 1)  $\xi = (1.7439, 1.6416, -0.6445, 0.5257, -0.0633, 1.2513, -0.7447, 6.3273, 0.2834)$ ,  $J = 0.0434$ , см. рис. 9;

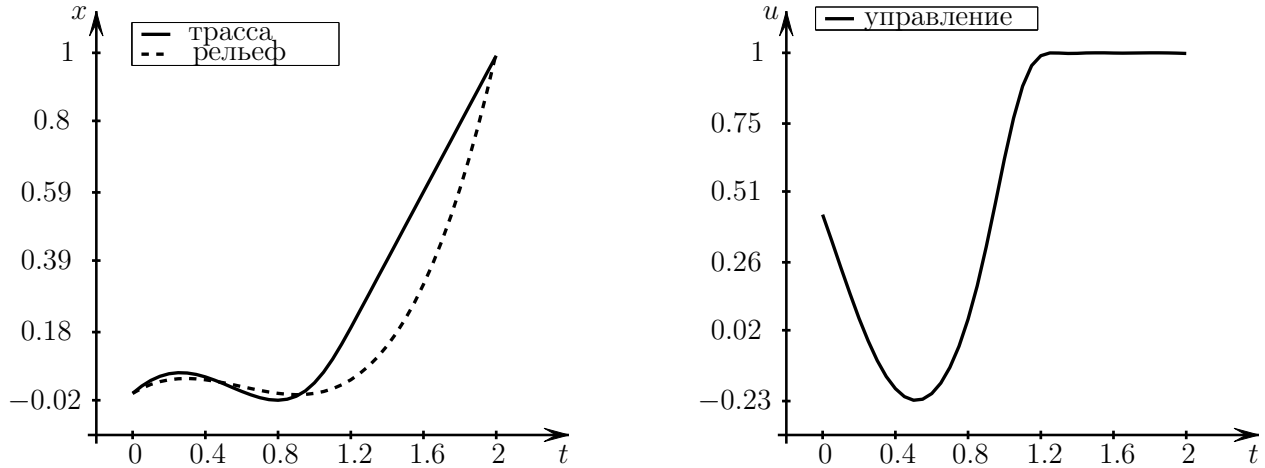


Рис. 9. Случай 1:  $\nu = 3$ , слева — траектория, справа — управление

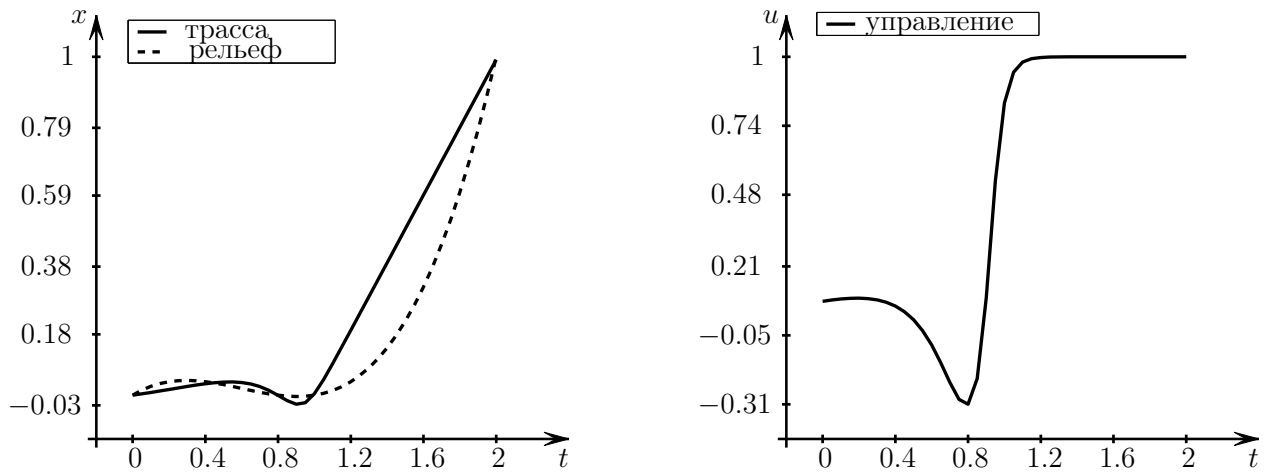


Рис. 10. Случай 2:  $\nu = 3$ , слева — траектория, справа — управление

- 2)  $\xi = (1.2138, -27.4319, 424.0702, 2.2764, 2.3594, 1.8419, 6.3609, 0.7961, 0.3785)$ ,  $J = 0.0431$ , см. рис. 10;
- 3)  $\xi = (5.9285, 1.4164, -0.8559, 6.5759, 1.6201, 0.7076, -0.3861, 0.9727, 0.2774)$ ,  $J = 0.0431$ , 127 итераций, см. рис. 11;
- 4)  $\xi = (0.3190, -0.0506, -0.0527, 0.4985, 1.1391, 1.3219, 0.6102, -0.1179, 0.1878)$ ,  $J = 0.0434$ , 144 итерации, см. рис. 12.

Погрешность выполнения ограничения — порядка 0.007–0.008. Количество итераций (там, где не указано) — 300 (хотя точка, близкая к оптимуму, получается уже примерно на 60-й итерации).

Отметим, наконец, что аналогичное исследование проводилось и для других способов выбора начального набора параметров. В частности, для следующих:

$$\alpha = \cos(\pi \vec{1}), \quad \beta = \sqrt{\gamma} \cdot \alpha, \quad \gamma = 5 \vec{1}; \quad \alpha = 20 \vec{1}, \quad \beta = \frac{1}{10\nu}(1, 2, \dots, \nu), \quad \gamma = 0.1 \vec{1};$$

$$\alpha = 0.01 \vec{1}, \quad \beta = \frac{1}{10\nu}(1, 2, \dots, \nu), \quad \gamma = 0.1 \vec{1}; \quad \alpha = 5 \vec{1}, \quad \beta = \frac{1}{10\nu}(1, 2, \dots, \nu), \quad \gamma = 0.1 \vec{1}.$$

Результаты оказались примерно такими же, просто какие-то способы внешней параметризации работали чуть хуже, какие-то — чуть лучше; способ 4 хорошо работал во всех случаях.

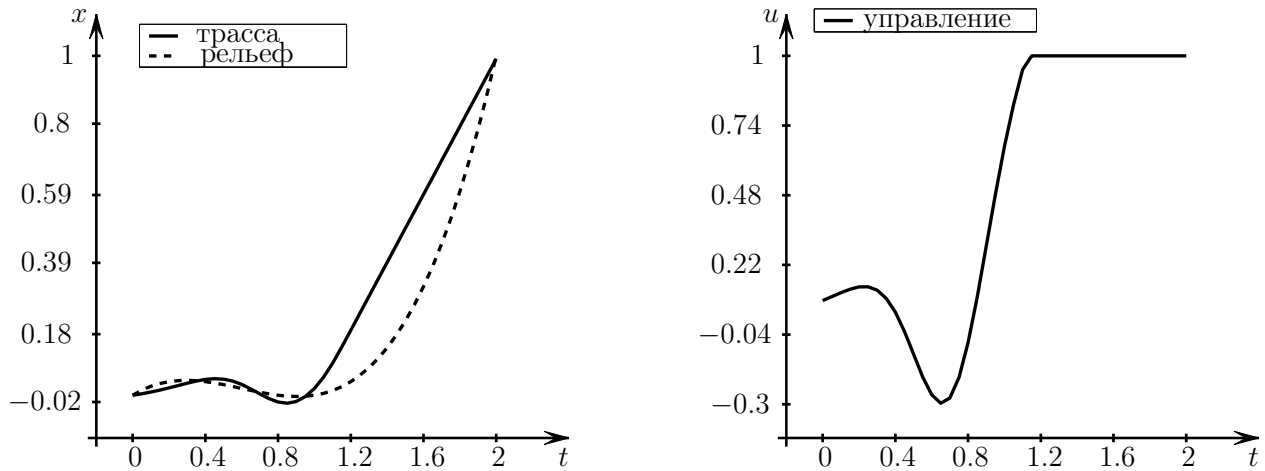


Рис. 11. Случай 3:  $\nu = 3$ , слева — траектория, справа — управление

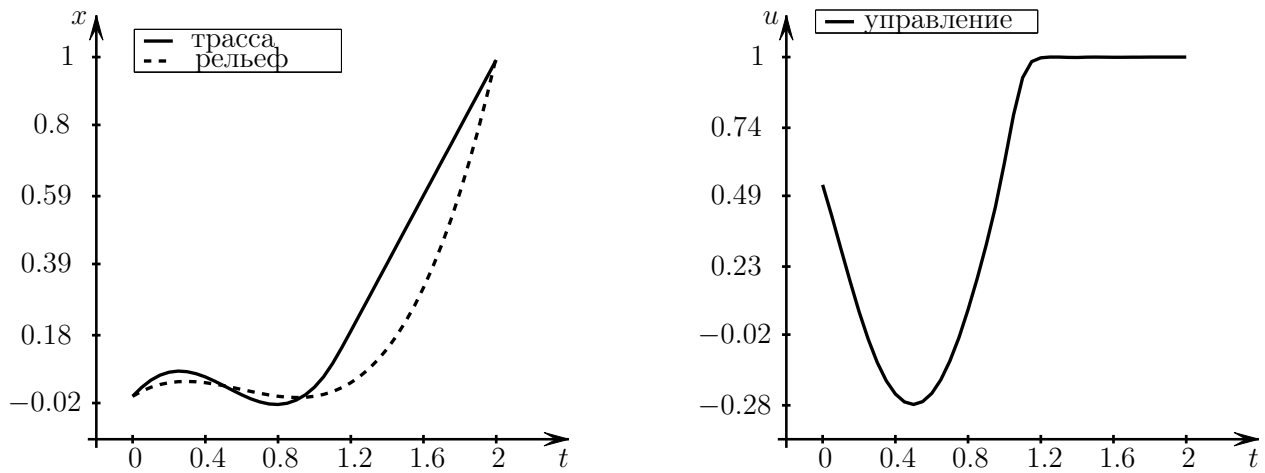


Рис. 12. Случай 4:  $\nu = 3$ , слева — траектория, справа — управление

### Исследование чувствительности

Отметим, что выше, представляя полученное решение, мы приводили значения, округленные до четырех знаков после запятой. Истинные значения, например для случая 4,  $\nu = 3$ , следующие:

$$\xi = (0.3189504928645302, -0.0506285749777399, -0.0527436942692637, 0.4984717320621839, \\ 1.1391482278725054, 1.3218919910639224, 0.6101510149511323, -0.1178740679442345, \\ 0.1878110489159914).$$

В связи с этим возникает вопрос: как поведет себя функционал  $J\{\xi\}$  в случаях, когда мы будем оставлять у вектора  $\xi$  лишь 4, 8, 12 знаков после запятой в каждой компоненте? Такое исследование тоже было проведено. Оказалось, что значение функционала, будучи округленным до четырех знаков после запятой, остается одним и тем же. Таким образом (в указанном смысле), обнаруживается абсолютная устойчивость численного решения. Аналогичная ситуация наблюдается и для случаев 1–3.

### § 6. Заключение

Численные эксперименты (см. § 5) позволяют сделать следующие выводы.

1. Подобно обычному методу параметризации управления, предлагаемый в статье подход достаточно прост и позволяет разделить исходную задачу на подзадачи (в частности, конечномерной оптимизации и решения управляемой задачи Коши), для каждой из которых можно использовать как собственные разработки, так и готовые программы, выбирая те, что наиболее эффективны или наиболее просты и доступны. При этом, по сравнению с обычным методом параметризации, предлагаемый в статье подход позволяет без существенных потерь в смысле близости к оптимуму, сокращать количество управляемых параметров в разы (в частности, для задачи о прокладке трассы — более чем в три раза ( $\nu = 3$ ) или даже в пять раз ( $\nu = 2$ )).
2. Использование внешней параметризации (в частности, с помощью арктангенса, синуса, функции срезки и функции Гаусса) позволяет учитывать ограничения на значения управления, не требуя включения их в число ограничений аппроксимирующей задачи, и в сочетании с предлагаемым в статье подходом оказывается вполне работоспособным и эффективным.
3. Предлагаемый подход позволяет получать хорошее приближение (по крайней мере, по значению функционала) к решению оптимизационной задачи даже при достаточно малом количестве параметров аппроксимации. При этом наблюдается достаточно большая вариативность аппроксимации искомого оптимального управления.
4. Предлагаемый подход хорошо работает и в том случае, когда начальное управление находится достаточно далеко от оптимального и вообще при различных (но, разумеется, разумных) способах выбора начального приближения.
5. Предлагаемый подход хорошо работает и в том случае, когда для решения аппроксимирующей задачи используется метод Хука–Дживса (нулевого порядка) в сочетании с методом штрафа в весьма простой и грубой форме, а для решения управляемой системы при текущем управлении — простейший метод Эйлера.
6. Значение целевого функционала, а также ограничение задачи оптимизации оказываются достаточно устойчивыми при малых изменениях полученного в результате численного решения оптимального набора параметров аппроксимации.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чернов А.В. Об использовании квадратичных экспонент с варьируемыми параметрами для аппроксимации функций одного переменного на конечном отрезке // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2017. Т. 27. Вып. 2. С. 267–282. DOI: [10.20537/vm170210](https://doi.org/10.20537/vm170210)
2. Журавлев М.В., Киселев Е.А., Минин Л.А., Ситник С.М. Тета-функции Якоби и система целочисленных сдвигов функций Гаусса // Современная математика и ее приложения. 2010. Т. 67. С. 107–116.
3. Teo K.L., Goh C.J., Wong K.H. A unified computational approach to optimal control problems. Harlow, New York: Longman Scientific & Technical, John Wiley & Sons, Inc., 1991. ix+329 p.
4. Чернов А.В. О приближенном решении задач оптимального управления со свободным временем // Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского. 2012. № 6 (1). С. 107–114.
5. Чернов А.В. О гладких конечномерных аппроксимациях распределенных оптимизационных задач с помощью дискретизации управления // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2013. Т. 53. № 12. С. 2029–2043. DOI: [10.7868/S0044466913120053](https://doi.org/10.7868/S0044466913120053)
6. Чернов А.В. О применимости техники параметризации управления к решению распределенных задач оптимизации // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2014. Вып. 1. С. 102–117. DOI: [10.20537/vm140109](https://doi.org/10.20537/vm140109)
7. Чернов А.В. О гладкости аппроксимированной задачи оптимизации системы Гурса–Дарбу на варьируемой области // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20. № 1. С. 305–321.

8. Чернов А.В. О кусочно постоянной аппроксимации в распределенных задачах оптимизации // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21. № 1. С. 264–279.
9. Maz'ya V., Schmidt G. On approximate approximations using Gaussian kernels // IMA Journal of Numerical Analysis. 1996. Vol. 16. Issue 1. P. 13–29. DOI: [10.1093/imanum/16.1.13](https://doi.org/10.1093/imanum/16.1.13)
10. Lanzara F., Maz'ya V., Schmidt G. Approximate approximations from scattered data // Journal of Approximation Theory. 2007. Vol. 145. Issue 2. P. 141–170. DOI: [10.1016/j.jat.2006.08.003](https://doi.org/10.1016/j.jat.2006.08.003)
11. Maz'ya V., Schmidt G. Approximate approximations. Providence, RI: American Mathematical Society, 2007. xiv+349 p. DOI: [10.1090/surv/141](https://doi.org/10.1090/surv/141)
12. Baxter B.J.C., Sivakumar N. On shifted cardinal interpolation by Gaussians and multiquadratics // Journal of Approximation Theory. 1996. Vol. 87. Issue 1. P. 36–59.
13. Riemenschneider S.D., Sivakumar N. On cardinal interpolation by Gaussian radial-basis functions: properties of fundamental functions and estimates for Lebesgue constants // Journal d'Analyse Mathématique. 1999. Vol. 79. Issue 1. P. 33–61. DOI: [10.1007/BF02788236](https://doi.org/10.1007/BF02788236)
14. Riemenschneider S.D., Sivakumar N. Cardinal interpolation by Gaussian functions: a survey // The Journal of Analysis. 2000. Vol. 8. P. 157–178.
15. Luh L.-T. The shape parameter in the Gaussian function // Computers and Mathematics with Applications. 2012. Vol. 63. Issue 3. P. 687–694. DOI: [10.1016/j.camwa.2011.11.032](https://doi.org/10.1016/j.camwa.2011.11.032)
16. Hamm K. Approximation rates for interpolation of Sobolev functions via Gaussians and allied functions // Journal of Approximation Theory. 2015. Vol. 189. P. 101–122. DOI: [10.1016/j.jat.2014.10.011](https://doi.org/10.1016/j.jat.2014.10.011)
17. Hangelbroek T., Madych W., Narcowich F., Ward J.D. Cardinal interpolation with Gaussian kernels // Journal of Fourier Analysis and Applications. 2012. Vol. 18. Issue 1. P. 67–86. DOI: [10.1007/s00041-011-9185-2](https://doi.org/10.1007/s00041-011-9185-2)
18. Fornberg B., Larsson E., Flyer N. Stable computations with Gaussian radial basis functions // SIAM J. Sci. Comput. 2011. Vol. 33. No. 2. P. 869–892. DOI: [10.1137/09076756X](https://doi.org/10.1137/09076756X)
19. Madych W.R., Nelson S.A. Bounds on multivariate polynomials and exponential error estimates for multiquadratic interpolation // Journal of Approximation Theory. 1992. Vol. 70. Issue 1. P. 94–114. DOI: [10.1016/0021-9045\(92\)90058-V](https://doi.org/10.1016/0021-9045(92)90058-V)
20. Griebel M., Schneider M., Zenger C. A combination technique for the solution of sparse grid problems // Iterative methods in linear algebra: proceedings of the ImACS International Symposium on Iterative Methods in Linear Algebra, Brussels, Belgium, 2–4 April, 1991 / R. Beauwens, P. de Groen. Amsterdam: North-Holland, 1992. P. 263–281.
21. Georgoulis E.H., Levesley J., Subhan F. Multilevel sparse kernel-based interpolation // SIAM Journal on Scientific Computing. 2013. Vol. 35. № 2. P. A815–A831. DOI: [10.1137/110859610](https://doi.org/10.1137/110859610)
22. Buhmann M.D. Radial basis functions: theory and implementations. Cambridge: Cambridge University Press, 2003. x+259 p. DOI: [10.1017/CBO9780511543241](https://doi.org/10.1017/CBO9780511543241)
23. Добеши И. Десять лекций по вейвлетам. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. 464 с.
24. Зюко А.Г., Кловский Д.Д., Назаров М.В., Финк Л.М. Теория передачи сигналов. М.: Связь, 1980. 288 с.

Поступила в редакцию 29.08.2017

Чернов Андрей Владимирович, к.ф.-м.н., доцент, Нижегородский государственный университет, 603950, Россия, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23;  
Нижегородский государственный технический университет, 603950, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Минина, 24.  
E-mail: [chavnn@mail.ru](mailto:chavnn@mail.ru)

**A. V. Chernov**

**On the application of Gaussian functions for discretization of optimal control problems**

**Citation:** *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2017, vol. 27, issue 4, pp. 558–575 (in Russian).

**Keywords:** control parametrization technique, lumped problem of optimal control, approximation by quadratic exponents, Gaussian function.



MSC2010: 41A30, 49M25, 49N90

DOI: [10.20537/vm170406](https://doi.org/10.20537/vm170406)

On the example of well known problem of a road construction we study the opportunities of numerical solution for lumped optimal control problems by the method of control parametrization with the help of a linear combination of  $\mu$  Gaussian functions. Recall that a Gaussian function (named also as quadratic exponent) is one defined as follows  $\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right]$ . The method is based on reduction of an original infinite dimensional optimization problem to finite dimensional minimization problem of a cost functional with respect to control approximation parameters. This paper is guided by the former author's research concerned the opportunities of approximation of one variable functions on a finite segment by a linear combination of  $\mu$  Gaussian functions, and is to be regarded as its direct continuation. First of all, we prove an assertion concerning approximation on any finite segment for mother wavelet Mexican hat by a linear combination of two Gaussian functions. Hence, we obtain theoretical justification of the opportunity of an effective approximation for one variable functions on any finite segment with the help of linear combinations of Gaussian functions. After that, we give a comparison by quality of the approximation under study with the approximation in the style of Kotelnikov by means of numerical experiments. Then we give the road construction problem formulation and also the results of numerical solution for this problem which demonstrate obviously the advantages of our approach, in particular, a stability of numerical solution with respect to evaluation error of the approximation parameters for an optimal control, even with usage of small count of such parameters.

## REFERENCES

1. Chernov A.V. On using Gaussian functions with varied parameters for approximation of functions of one variable on a finite segment, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2017, vol. 27, issue 2, pp. 267–282 (in Russian). DOI: [10.20537/vm170210](https://doi.org/10.20537/vm170210)
2. Zhuravlev M.V., Kiselev E.A., Minin L.A., Sitnik S.M. Jacobi theta-functions and systems of integral shifts of Gaussian functions, *Journal of Mathematical Sciences*, 2011, vol. 173, no. 2, pp. 231–241. DOI: [10.1007/s10958-011-0246-5](https://doi.org/10.1007/s10958-011-0246-5)
3. Teo K.L., Goh C.J., Wong K.H. *A unified computational approach to optimal control problems*, Harlow, New York: Longman Scientific & Technical, John Wiley & Sons, Inc., 1991, ix+329 p.
4. Chernov A.V. On approximate solution of free time optimal control problems, *Vestnik Nizhegorodskogo Universiteta imeni N.I. Lobachevskogo*, 2012, no. 6 (1), pp. 107–114 (in Russian).
5. Chernov A.V. Smooth finite-dimensional approximations of distributed optimization problems via control discretization, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2013, vol. 53, no. 12, pp. 1839–1852. DOI: [10.1134/S096554251312004X](https://doi.org/10.1134/S096554251312004X)
6. Chernov A.V. On applicability of control parametrization technique to solving distributed optimization problems, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2014, issue 1, pp. 102–117 (in Russian). DOI: [10.20537/vm140109](https://doi.org/10.20537/vm140109)
7. Chernov A.V. On the smoothness of an approximated optimization problem for a Goursat–Darboux system on a varied domain, *Tr. Inst. Mat. Mekh. Ural. Otd. Ross. Akad. Nauk*, 2014, vol. 20, no. 1, pp. 305–321 (in Russian).
8. Chernov A.V. On piecewise constant approximation in distributed optimization problems, *Tr. Inst. Mat. Mekh. Ural. Otd. Ross. Akad. Nauk*, 2015, vol. 21, no. 1, pp. 264–279 (in Russian).
9. Maz'ya V., Schmidt G. On approximate approximations using Gaussian kernels, *IMA Journal of Numerical Analysis*, 1996, vol. 16, issue 1, pp. 13–29. DOI: [10.1093/imanum/16.1.13](https://doi.org/10.1093/imanum/16.1.13)
10. Lanzara F., Maz'ya V., Schmidt G. Approximate approximations from scattered data, *Journal of Approximation Theory*, 2007, vol. 145, issue 2, pp. 141–170. DOI: [10.1016/j.jat.2006.08.003](https://doi.org/10.1016/j.jat.2006.08.003)
11. Maz'ya V., Schmidt G. *Approximate approximations*, Providence, RI: American Mathematical Society, 2007, xiv+349 p. DOI: [10.1090/surv/141](https://doi.org/10.1090/surv/141)
12. Baxter B.J.C., Sivakumar N. On shifted cardinal interpolation by Gaussians and multiquadratics, *Journal of Approximation Theory*, 1996, vol. 87, issue 1, pp. 36–59.
13. Riemenschneider S.D., Sivakumar N. On cardinal interpolation by Gaussian radial-basis functions: properties of fundamental functions and estimates for Lebesgue constants, *Journal d'Analyse Mathématique*, 1999, vol. 79, issue 1, pp. 33–61. DOI: [10.1007/BF02788236](https://doi.org/10.1007/BF02788236)
14. Riemenschneider S.D., Sivakumar N. Cardinal interpolation by Gaussian functions: a survey, *The Journal of Analysis*, 2000, vol. 8, pp. 157–178.

15. Luh L.-T. The shape parameter in the Gaussian function, *Computers and Mathematics with Applications*, 2012, vol. 63, issue 3, pp. 687–694. DOI: [10.1016/j.camwa.2011.11.032](https://doi.org/10.1016/j.camwa.2011.11.032)
16. Hamm K. Approximation rates for interpolation of Sobolev functions via Gaussians and allied functions, *Journal of Approximation Theory*, 2015, vol. 189, pp. 101–122. DOI: [10.1016/j.jat.2014.10.011](https://doi.org/10.1016/j.jat.2014.10.011)
17. Hangelbroek T., Madych W., Narcowich F., Ward J.D. Cardinal interpolation with Gaussian kernels, *Journal of Fourier Analysis and Applications*, 2012, vol. 18, issue 1, pp. 67–86. DOI: [10.1007/s00041-011-9185-2](https://doi.org/10.1007/s00041-011-9185-2)
18. Fornberg B., Larsson E., Flyer N. Stable computations with Gaussian radial basis functions, *SIAM J. Sci. Comput.*, 2011, vol. 33, no. 2, pp. 869–892. DOI: [10.1137/09076756X](https://doi.org/10.1137/09076756X)
19. Madych W.R., Nelson S.A. Bounds on multivariate polynomials and exponential error estimates for multiquadratic interpolation, *Journal of Approximation Theory*, 1992, vol. 70, issue 1, pp. 94–114. DOI: [10.1016/0021-9045\(92\)90058-V](https://doi.org/10.1016/0021-9045(92)90058-V)
20. Griebel M., Schneider M., Zenger C. A combination technique for the solution of sparse grid problems, *Iterative methods in linear algebra: proceedings of the ImACS International Symposium on Iterative Methods in Linear Algebra, Brussels, Belgium, 2-4 April, 1991*, Eds.: R. Beauwens, P. de Groen. Amsterdam: North-Holland, 1992, pp. 263–281.
21. Georgoulis E.H., Levesley J., Subhan F. Multilevel sparse kernel-based interpolation, *SIAM Journal on Scientific Computing*, 2013, vol. 35, no. 2, pp. A815–A831. DOI: [10.1137/110859610](https://doi.org/10.1137/110859610)
22. Buhmann M.D. *Radial basis functions: theory and implementations*, Cambridge: Cambridge University Press, 2003, x+259 p. DOI: [10.1017/CBO9780511543241](https://doi.org/10.1017/CBO9780511543241)
23. Daubechies I. *Ten lectures on wavelets*, Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1992, xix+357 p. DOI: [10.1137/1.9781611970104](https://doi.org/10.1137/1.9781611970104)
24. Zyuko A.G., Klovsikii D.D., Nazarov M.V., Fink L.M. *Teoriya peredachi signalov* (Signals transmission theory), Moscow: Svyaz', 1980, 288 p.

Received 29.08.2017

Chernov Andrei Vladimirovich, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Nizhni Novgorod State University, pr. Gagarina, 23, Nizhni Novgorod, 603950, Russia;  
Nizhni Novgorod State Technical University, ul. Minina, 24, Nizhni Novgorod, 603950, Russia.  
E-mail: [chavnn@mail.ru](mailto:chavnn@mail.ru)