

УДК 517.925

© *И. А. Бизяев***САНИ ЧАПЛЫГИНА С ДВИЖУЩЕЙСЯ ТОЧЕЧНОЙ МАССОЙ<sup>1</sup>**

Неголономные механические системы возникают во многих задачах, имеющих практическое значение. Известной моделью в неголономной механике являются сани Чаплыгина. Сани Чаплыгина представляют собой твердое тело, опирающееся на поверхность острым невесомым колесом. Острый край колеса препятствует скольжению в направлении, перпендикулярном его плоскости. В данной работе рассмотрены сани Чаплыгина с изменяющимся со временем распределением масс, которое возникает за счет движения точки в поперечном относительно плоскости лезвия направлении. Получены уравнения движения, среди которых отделяется замкнутая система уравнений с периодическими по времени коэффициентами, описывающая эволюцию поступательной и угловой скорости саней. Показано, что если проекция центра масс всей системы на ось вдоль лезвия равна нулю, тогда поступательная скорость саней возрастает. При этом траектория точки контакта, как правило, является неограниченной.

*Ключевые слова:* неголономная механика, сани Чаплыгина, ускорение, первые интегралы.

DOI: [10.20537/vm170408](https://doi.org/10.20537/vm170408)**Введение**

Сани Чаплыгина [8] представляют собой твердое тело, движущееся по горизонтальной плоскости в присутствии неголономной связи: поступательная скорость в некоторой точке ортогональна фиксированному в теле направлению. Эту связь можно реализовать с помощью закрепленного в теле невесомого лезвия (конька) или колесной пары [2]. Подробный качественный анализ движения саней, используя явные квадратуры, выполнил К. Каратеодори [4]. Оказалось, что в зависимости от расположения центра масс сани движутся по окружности либо асимптотически стремятся к прямолинейному движению.

Различные обобщения задачи о санях Чаплыгина рассмотрены во многих работах. Например, в [5] исследуется движение саней под действием случайных сил, которые моделируют флуктуирующую сплошную среду. В [6] обсуждается управление санями за счет движения только его центра масс. В частности, показано, что, изменяя положение центра масс, можно осуществить переход из движения по окружности к движению по прямой с заданным коэффициентом наклона.

В этой работе рассмотрены сани Чаплыгина с изменяющимся со временем распределением масс, которое возникает за счет движения точки в поперечном относительно плоскости лезвия направлении. Рассматриваемая задача сводится к исследованию редуцированной двумерной системы с периодическими по времени коэффициентами, которая описывает эволюцию поступательной и угловой скоростей саней.

С физической точки зрения важную роль играет вопрос об возможности (постоянного) ускорения саней. Оказалось, что за счет определенного выбора распределения масс можно добиться, чтобы все траектории редуцированной системы были неограниченными и в результате чего наблюдалось ускорение саней. Отметим, что ускорение не характерно для натуральных гамильтоновых систем с полутора степенями свободы: этому препятствуют КАМ-торы, сохраняющиеся при периодическом возмущении исходной гамильтоновой системы. Обсуждение этого вопроса содержится, например, в работе [7].

<sup>1</sup>Исследование выполнено в рамках государственного задания Минобрнауки России (1.2404.2017/4.6).

### § 1. Уравнения движения

Сани Чаплыгина представляют собой твердое тело, опирающееся на плоскость двумя абсолютно гладкими ножками и невесомым колесом (лезвием) с острым краем, который препятствует проскальзыванию точки контакта  $R$  в перпендикулярном плоскости колеса направлении (рис.1).

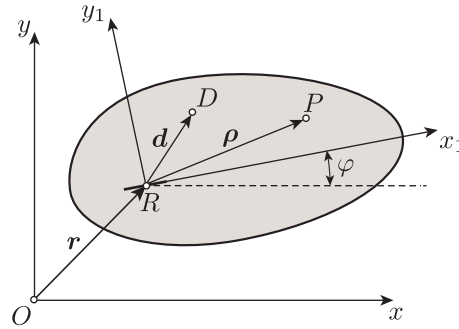


Рис. 1. Сани Чаплыгина с движущейся точечной массой

Определим две системы координат:

- неподвижную систему координат  $Oxy$ ;
- подвижную систему координат  $Rx_1y_1$ , жестко связанную с санями Чаплыгина.

Положение саней будем определять с помощью  $\mathbf{r} = (x, y)$  — радиус-вектора точки контакта в неподвижной системе координат  $Oxy$ , а ориентацию — с помощью угла поворота  $\varphi$ . Таким образом, конфигурационное пространство саней  $\mathcal{Q} = \{\mathbf{q} = (x, y, \varphi)\}$  совпадает с группой движений плоскости  $SE(2)$ .

Пусть  $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$  — скорость точки контакта  $R$  в подвижной системе координат и  $\omega$  — угловая скорость тела. Уравнение связи, выражающее условие равенства нулю проекции скорости точки контакта  $R$  на ось  $Ry_1$ , имеет вид

$$v_2 = 0. \quad (1.1)$$

Кинетическая энергия саней представляется в форме

$$T_s = \frac{1}{2}m_s((v_1 - d_2\omega)^2 + (v_2 + d_1\omega)^2) + \frac{1}{2}(I_s - m_s(d_1^2 + d_2^2))\omega^2,$$

где  $m_s$  и  $I_s$  — масса и момент инерции тела относительно точки контакта  $R$ , а  $\mathbf{d} = (d_1, d_2)$  — радиус-вектор центра масс в подвижной системе координат  $Rx_1y_1$ .

Пусть на твердом теле (санях) движется материальная точка, которая совершает периодические движения в поперечном относительно плоскости лезвия направлении:

$$\boldsymbol{\rho} = (a, b \sin(\Omega t)).$$

Кинетическая энергия точки имеет вид

$$T_p = \frac{1}{2}m_p \left( (v_1 + \dot{\rho}_1 - \rho_2\omega)^2 + (v_2 + \dot{\rho}_2 + \rho_1\omega)^2 \right),$$

где  $m_p$  — масса точки.

Уравнения движения саней представляются в следующей форме:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \omega} \right) = v_2 \frac{\partial T}{\partial v_1} - v_1 \frac{\partial T}{\partial v_2}, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial v_1} \right) = \omega \frac{\partial T}{\partial v_2}, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial v_2} \right) = -\omega \frac{\partial T}{\partial v_1} + \lambda,$$

где  $T = T_s + T_p$  — кинетическая энергия всей системы (сани+точка), а  $\lambda$  — неопределенный множитель, который может быть найден из последнего уравнения с учетом связи (1.1).

Определим импульс  $P$  и момент импульса  $M$ :

$$\begin{aligned} P &= \left. \frac{\partial T}{\partial v_1} \right|_{v_2=0} = (m_s + m_p)v_1 - (m_s d_2 + m_p \rho_2)\omega + m_p \dot{\rho}_1, \\ M &= \left. \frac{\partial T}{\partial \omega} \right|_{v_2=0} = -(m_s d_2 + m_p \rho_2)v_1 + (I_s + m_p(\rho_1^2 + \rho_2^2))\omega + m_p(\rho_1 \dot{\rho}_2 - \rho_2 \dot{\rho}_1). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Окончательно, с учетом

$$\left. \frac{\partial T}{\partial v_2} \right|_{v_2=0} = (m_s d_1 + m_p \rho_1)\omega + m_p \dot{\rho}_2,$$

получим уравнения движения в следующей форме:

$$\begin{aligned} \dot{P} &= \omega((m_s d_1 + m_p \rho_1)\omega + m_p \dot{\rho}_2), \quad \dot{M} = -v_1((m_s d_1 + m_p \rho_1)\omega + m_p \dot{\rho}_2), \\ \dot{\varphi} &= \omega, \quad \dot{x} = v_1 \cos \varphi, \quad \dot{y} = v_1 \sin \varphi, \end{aligned} \quad (1.3)$$

где предполагаются скорости  $v_1$  и  $\omega$  выраженными через моменты  $P$  и  $M$  из соотношения (1.2).

Уравнения (1.3) инвариантны относительно группы движений плоскости  $SE(2)$ , вследствие этого отделяется замкнутая (редуцированная) система уравнений, описывающая эволюцию  $p$  и  $M$ . Как следует из (1.3), по найденным решениям редуцированной системы движение саней в неподвижной системе координат  $Oxy$  определяется с помощью квадратур.

## § 2. Динамика саней Чаплыгина

Пусть центр масс саней расположен на оси  $Rx_1$ , то есть  $d_2 = 0$  (рис. 2).

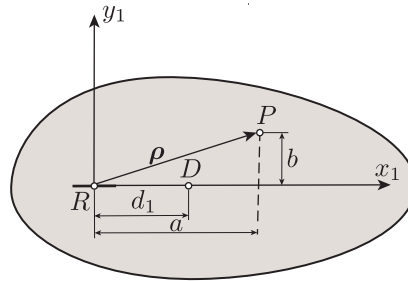


Рис. 2. Сани Чаплыгина

Определим безразмерные переменные  $Z_1, Z_2, \tau, X$  и  $Y$ :

$$Z_1 = \frac{P}{mb\Omega}, \quad Z_2 = \frac{Mm + Pm_p b \sin(\Omega t)}{m^2 b^2 \Omega}, \quad \tau = \Omega t, \quad X = \frac{x}{b}, \quad Y = \frac{y}{b}.$$

Редуцированная система уравнений в этих переменных имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{dZ_1}{d\tau} &= \frac{(Z_2 - \alpha \mu \cos \tau)(\delta Z_2 - \mu \cos \tau(\alpha \delta - J - \mu(1 - \mu) \sin^2 \tau))}{(J + \mu(1 - \mu) \sin^2 \tau)^2}, \\ \frac{dZ_2}{d\tau} &= -\frac{\delta(Z_2 - \alpha \mu \cos \tau)Z_1}{J + \mu(1 - \mu) \sin^2 \tau}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где введены следующие безразмерные параметры:

$$\alpha = \frac{a}{b}, \quad \delta = \frac{c_1}{b}, \quad \mu = \frac{m_p}{m}, \quad J = \frac{I_s + m_p a^2}{mb^2}.$$

Уравнения движения для конфигурационных переменных представляются в форме

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{d\tau} &= \tilde{\omega}, & \frac{dX}{d\tau} &= \tilde{v}_1 \cos \varphi, & \frac{dY}{d\tau} &= \tilde{v}_1 \sin \varphi, \\ \tilde{\omega} &= \frac{Z_2 - \alpha\mu \cos \tau}{J + \mu(1 - \mu) \sin^2 \tau}, & \tilde{v}_1 &= \frac{JZ_1 + \mu \sin \tau ((1 - \mu)Z_1 \sin \tau + Z_2 - \alpha\mu \cos \tau)}{J + \mu(1 - \mu) \sin^2 \tau}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Таким образом, задача сводится к исследованию динамики системы (2.1), (2.2). Далее подробно рассмотрим вопрос о возможности постоянного ускорения саней в зависимости от распределения масс саней и расположения колеблющейся точки. Под постоянным ускорением будем подразумевать неограниченный рост поступательной скорости саней, который возникает для неограниченных траекторий редуцированной системы (2.1).

Рассмотрим подробнее случай  $\delta = 0$ : проекция центра масс всей системы на ось вдоль лезвия равна нулю. При этом система (2.1) сводится к линейной системе с периодическими коэффициентами, которая представляется в гамильтоновой форме

$$\begin{aligned} \dot{Z}_1 &= \frac{\partial H}{\partial Z_2}, & \dot{Z}_2 &= -\frac{\partial H}{\partial Z_1}, \\ H &= \frac{\mu \cos \tau}{J + \mu(1 - \mu) \sin^2 \tau} \left( \frac{Z_1^2}{2} - \alpha\mu \cos \tau \right). \end{aligned}$$

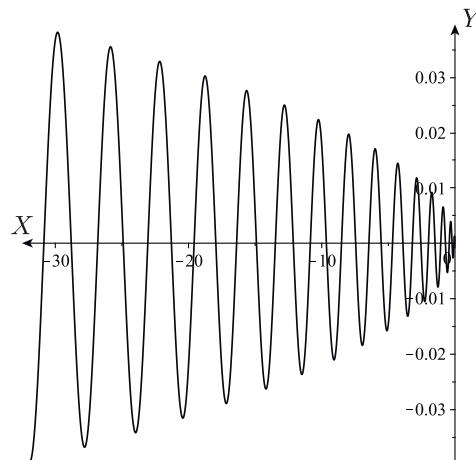
Как видим, в данном случае сохраняется  $Z_2 = \text{const}$ , а для определения  $Z_1$  получим следующую квадратуру:

$$Z_1(\tau) = \int_0^\tau \frac{\mu(Z_2 - \alpha\mu \cos s) \cos s}{J + \mu(1 - \mu) \sin^2 s} ds + Z_1(0).$$

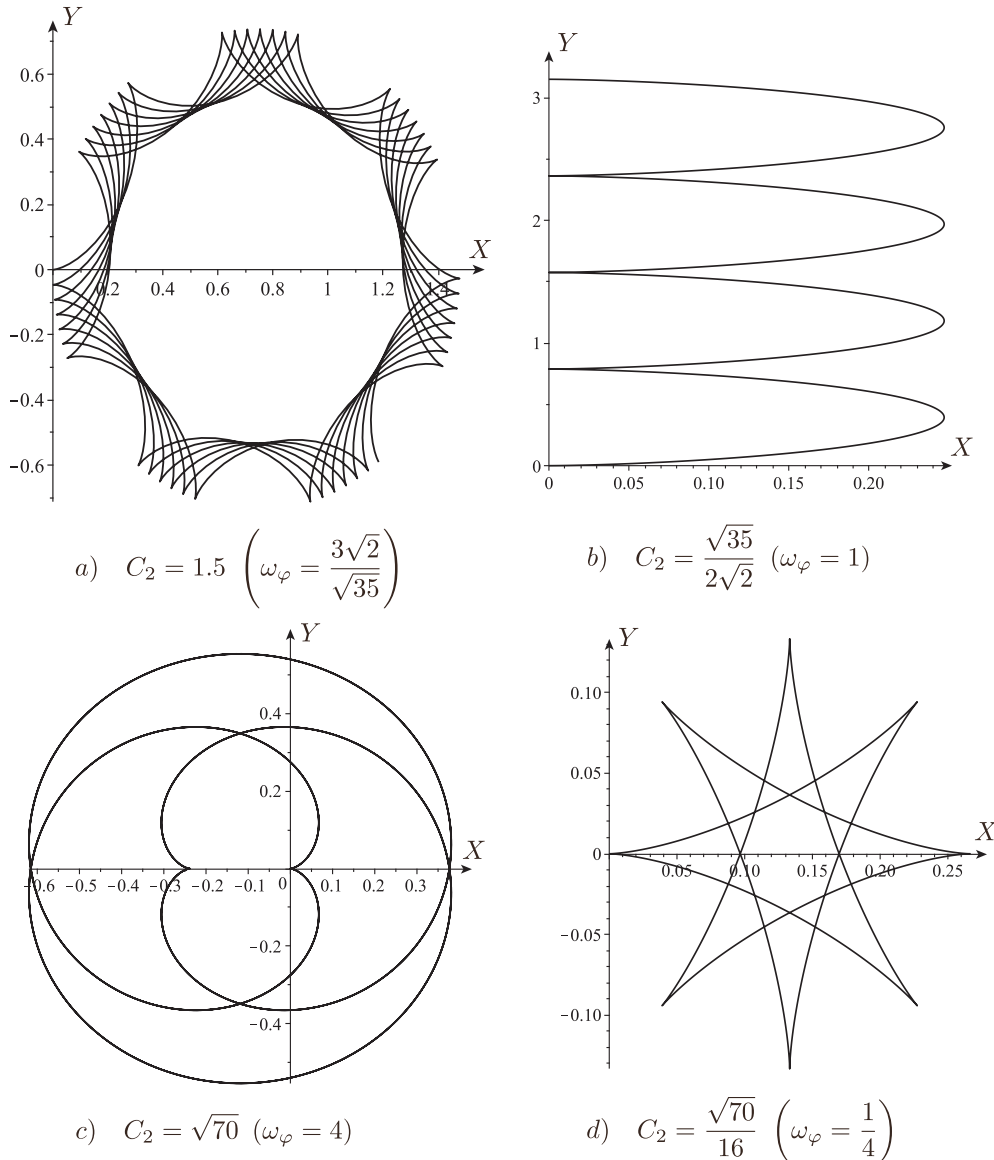
При этом для  $Z_1(\tau)$  (за период движения точки) справедливо

$$Z_1(\tau + 2\pi) = Z_1(\tau) + \frac{2\pi\alpha\mu}{1 - \mu} \left( 1 - \sqrt{1 + \frac{\mu(1 - \mu)}{J}} \right). \quad (2.3)$$

Следовательно, если  $\alpha\mu \neq 0$ , функция  $Z_1(\tau)$  со временем (неограниченно) отдаляется от своего начального значения  $Z_1(0)$ , вследствие чего растет поступательная скорость саней и наблюдается ускорение.



**Рис. 3.** Траектория движения точки контакта саней при фиксированных параметрах  $\alpha = 0.5$ ,  $\delta = 0$ ,  $J = 2$ ,  $\mu = 0.25$  и начальных условиях  $Z_1 = 0$ ,  $Z_2 = 0$ ,  $\tau = 0$ ,  $\varphi = 0$ ,  $X = 0$ ,  $Y = 0$



**Рис. 4.** Различные траектории движения точки контакта саней при фиксированных параметрах  $\alpha = 0$ ,  $\delta = 0$ ,  $J = 2$ ,  $\mu = 0.25$  и начальных условиях  $Z_1 = 0$ ,  $\tau = 0$ ,  $\varphi = 0$ ,  $X = 0$ ,  $Y = 0$

Уравнение для угла, определяющего ориентацию саней, представляется в виде

$$\varphi' = \frac{Z_2 - \alpha\mu \cos \tau}{J + \mu(1 - \mu) \sin^2 \tau}.$$

Правая часть этого уравнения является периодической по времени функцией, следовательно, данное уравнение описывает векторное поле на торе  $\mathbb{T}^2 = \{(t, \varphi) \bmod 2\pi\}$ . Можно показать, что это векторное поле сохраняет стандартную инвариантную меру, и, следовательно, его траектории периодические либо квазипериодические. Траектория точки контакта при этом, как правило, является неограниченной (см. рис. 3).

Если  $\alpha = 0$ , тогда согласно (2.3) ускорение отсутствует, а переменная  $Z_1$  изменяется периодически со временем:

$$Z_1(\tau) = Z_2 \frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{J(1 + \mu)}} \arctan \left( \frac{\sqrt{\mu(1 + \mu)}}{\sqrt{J}} \sin \tau \right) + Z_1(0).$$

Кроме того, в этом случае за время  $\tau = 2\pi$  переменная  $\varphi$  изменяется на величину  $2\pi\omega_\varphi$ , где

$$\omega_\varphi = \frac{Z_2}{\sqrt{J(J + \mu(1 - \mu))}}.$$

Таким образом, если  $\omega_\varphi = \frac{n}{k}$ ,  $n, k \in \mathbb{N}$ , тогда  $\varphi$  изменяется периодически со временем. Более того, можно показать [1,3], что во втором случае траектория точки контакта саней ограничена (см. рис. 4, а). В другом (резонансном) случае встречаются как неограниченные траектории точки контакта (см. рис. 4, б), так и периодические (см. рис. 4, с, д).

Как показывают численные эксперименты в общем случае при  $\delta \neq 0$ , дополнительный интеграл в системе (2.1) отсутствует. Поэтому вопрос о динамике саней в общем случае остается открытым.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Borisov A.V., Kilin A.A., Mamaev I.S. The problem of drift and recurrence for the rolling Chaplygin ball // Regular and Chaotic Dynamics. 2013. Vol. 18. No. 6. P. 832–859. DOI: [10.1134/S1560354713060166](https://doi.org/10.1134/S1560354713060166)
2. Borisov A.V., Kilin A.A., Mamaev I.S. On the Hadamard–Hamel problem and the dynamics of wheeled vehicles // Regular and Chaotic Dynamics. 2015. Vol. 20. No. 6. P. 752–766. DOI: [10.1134/S1560354715060106](https://doi.org/10.1134/S1560354715060106)
3. Borisov A.V., Mamaev I.S. An inhomogeneous Chaplygin sleigh // Regular and Chaotic Dynamics. 2017. Vol. 22. No. 4. P. 435–447. DOI: [10.1134/S1560354717040062](https://doi.org/10.1134/S1560354717040062)
4. Carathéodory C. Der Schlitten // Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. 1933. Vol. 13. No. 2. P. 71–76. DOI: [10.1002/zamm.19330130205](https://doi.org/10.1002/zamm.19330130205)
5. Jung P., Marchegiani G., Marchesoni F. Nonholonomic diffusion of a stochastic sled // Physical Review E. 2016. Vol. 93. No. 1. 012606. DOI: [10.1103/PhysRevE.93.012606](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.93.012606)
6. Osborne J.M., Zenkov D.V. Steering the Chaplygin sleigh by a moving mass // Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control. 2005. P. 1114–1118. DOI: [10.1109/CDC.2005.1582307](https://doi.org/10.1109/CDC.2005.1582307)
7. Пустыльников Л.Д. Устойчивые и осциллирующие движения в неавтономных динамических системах. II // Труды Московского математического общества. 1977. Т. 34. С. 3–103.
8. Чаплыгин С.А. К теории движения неголономных систем. Теорема о приводящем множителе // Математический сборник. 1912. Т. 28. № 2. С. 303–314.

Поступила в редакцию 22.11.2017

Бизяев Иван Алексеевич, к. ф.-м. н., доцент, кафедра теоретической физики, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.

E-mail: [bizaev\\_90@mail.ru](mailto:bizaev_90@mail.ru)

**I. A. Bizyaev**

**A Chaplygin sleigh with a moving point mass**

**Citation:** *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2017, vol. 27, issue 4, pp. 583–589 (in Russian).

**Keywords:** nonholonomic mechanics, Chaplygin sleigh, acceleration, first integrals.

MSC2010: 37J60

DOI: [10.20537/vm170408](https://doi.org/10.20537/vm170408)

Nonholonomic mechanical systems arise in the context of many problems of practical significance. A famous model in nonholonomic mechanics is the Chaplygin sleigh. The Chaplygin sleigh is a rigid body with a sharp weightless wheel in contact with the (supporting) surface. The sharp edge of the wheel prevents the wheel

from sliding in the direction perpendicular to its plane. This paper is concerned with a Chaplygin sleigh with time-varying mass distribution, which arises due to the motion of a point in the direction transverse to the plane of the knife edge. Equations of motion are obtained from which a closed system of equations with time-periodic coefficients decouples. This system governs the evolution of the translational and angular velocities of the sleigh. It is shown that if the projection of the center of mass of the whole system onto the axis along the knife edge is zero, the translational velocity of the sleigh increases. The trajectory of the point of contact is, as a rule, unbounded.

## REFERENCES

1. Borisov A.V., Kilin A.A., Mamaev I.S. The problem of drift and recurrence for the rolling Chaplygin ball, *Regular and Chaotic Dynamics*, 2013, vol. 18, no. 6, pp. 832–859. DOI: [10.1134/S1560354713060166](https://doi.org/10.1134/S1560354713060166)
2. Borisov A.V., Kilin A.A., Mamaev I.S. On the Hadamard–Hamel problem and the dynamics of wheeled vehicles, *Regular and Chaotic Dynamics*, 2015, vol. 20, no. 6, pp. 752–766. DOI: [10.1134/S1560354715060106](https://doi.org/10.1134/S1560354715060106)
3. Borisov A.V., Mamaev I.S. An inhomogeneous Chaplygin sleigh, *Regular and Chaotic Dynamics*, 2017, vol. 22, no. 4, pp. 435–447. DOI: [10.1134/S1560354717040062](https://doi.org/10.1134/S1560354717040062)
4. Carathéodory C. Der Schlitten, *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 1933, vol. 13, no. 2, pp. 71–76. DOI: [10.1002/zamm.19330130205](https://doi.org/10.1002/zamm.19330130205)
5. Jung P., Marchegiani G., Marchesoni F. Nonholonomic diffusion of a stochastic sled, *Physical Review E*, 2016, vol. 93, no. 1, 012606. DOI: [10.1103/PhysRevE.93.012606](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.93.012606)
6. Osborne J.M., Zenkov D.V. Steering the Chaplygin sleigh by a moving mass, *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control*, 2005, pp. 1114–1118. DOI: [10.1109/CDC.2005.1582307](https://doi.org/10.1109/CDC.2005.1582307)
7. Pustyl'nikov L.D. Stable and oscillating motions in nonautonomous dynamical systems. II, *Trudy Moskovskogo Matematicheskogo Obshchestva*, 1977, vol. 34, pp. 3–103 (in Russian).
8. Chaplygin S.A. On the theory of motion of nonholonomic systems. The reducing-multiplier, *Matematicheskii Sbornik*, 1912, vol. 28, no. 2, pp. 303–314 (in Russian).

Received 22.11.2017

Bizyaev Ivan Alekseevich, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Theoretical Physics, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.  
E-mail: [bizaev\\_90@mail.ru](mailto:bizaev_90@mail.ru)