

УДК 531.36, 531.38

© *Е. А. Вишенкова, О. В. Холостова*

ИССЛЕДОВАНИЕ ПЕРМАНЕНТНЫХ ВРАЩЕНИЙ ТЯЖЕЛОГО ДИНАМИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА С ВИБРИРУЮЩЕЙ ТОЧКОЙ ПОДВЕСА¹

Рассмотрено движение динамически симметричного твердого тела в однородном поле тяжести в случае высокочастотных вертикальных гармонических колебаний малой амплитуды одной из его точек (точки подвеса). Исследование проводится в рамках приближенной автономной системы дифференциальных уравнений, записанной в форме канонических уравнений Гамильтона. Дано подробное описание допустимых дуг перманентных вращений тела, происходящих вокруг вертикально расположенных осей. Выявлены случаи перманентных вращений, обусловленные вибрациями и не существующие для тела с неподвижной точкой. Для одного из таких случаев, когда ось вращения лежит в главной плоскости инерции, не содержащей центр масс тела и не совпадающей с экваториальной плоскостью инерции, проведен полный нелинейный анализ устойчивости соответствующего положения равновесия приведенной системы с двумя степенями свободы. В трехмерном пространстве параметров задачи найдены области устойчивости в линейном приближении. Рассмотрены случаи резонансов третьего и четвертого порядков, а также случаи вырождения.

Ключевые слова: перманентные вращения Штауде, высокочастотные вибрации, твердое тело, динамическая симметрия, устойчивость, резонанс.

DOI: [10.20537/vm170409](https://doi.org/10.20537/vm170409)

Введение

Перманентные вращения тяжелого твердого тела с неподвижной точкой были открыты в конце XIX века [1, 2] и носят имя Штауде. Проблеме устойчивости этих движений тела посвящено значительное число работ, достаточно полный их обзор содержится в монографии [3]. Выделим монографию [4], где проведен качественный анализ необходимых условий устойчивости перманентных вращений в общем случае распределения масс в теле и подробно исследован случай расположения его центра масс на главной оси инерции. При помощи метода Четаева получены [5] достаточные условия устойчивости для части допустимых осей перманентных вращений при произвольном распределении масс, а также проанализированы наиболее важные частные случаи геометрии масс тела. Линейный и нелинейный анализ устойчивости перманентных вращений тела вокруг вертикальной оси, содержащей его центр масс, изучался в работах [2–10]. Случай динамически симметричного тела рассматривался в монографии [7]. Подробный линейный и нелинейный анализ устойчивости перманентных вращений для частных и общего случаев геометрии масс твердого тела, охватывающий весь диапазон допустимых значений параметров, проведен в монографии [3]. Представляет интерес обобщить данную задачу на случай, когда точка подвеса тела совершает заданные высокочастотные колебания.

Исследование воздействия высокочастотной вибрации на устойчивость стационарных режимов механических систем является активно развивающейся областью механики, важной как с теоретической, так и практической точки зрения. Библиография по этой тематике содержится в работах [11–14]. В статьях [15, 16] получена система приближенных автономных дифференциальных уравнений типа уравнений Эйлера–Пуассона для твердого тела с произвольной геометрией масс при высокочастотных периодических или условно-периодических вибрациях одной из его точек. В рамках этой системы изучены частные движения динамически симметричного

¹Работа выполнена в рамках государственного задания (проект № 3.3858.2017/4.6).

тела для законов движения точки подвеса, допускающих две циклические координаты [17]; исследована устойчивость относительных равновесий тела [16, 18] в случае высокочастотных вертикальных вибраций точки подвеса. Рассмотрены [19] стационарные вращения (вокруг вертикальных и наклонных осей) волчка Лагранжа при различных вариантах высокочастотных периодических движений точки его подвеса в трехмерном пространстве.

В цикле работ [20–22] в рамках приближенной системы дифференциальных уравнений, записанной в форме канонических уравнений Гамильтона, исследуется устойчивость перманентных вращений Штауде твердого тела при наличии вертикальных высокочастотных гармонических вибраций точки подвеса. Как и для тела с неподвижной точкой, перманентные вращения в этом случае могут происходить только вокруг вертикально расположенных осей. Проведен линейный и (для частных случаев геометрии масс) нелинейный анализ устойчивости перманентных вращений тела вокруг главной оси инерции, содержащей его центр масс [20], и вокруг осей из главных плоскостей инерции [21]. В работе [22] найдены и исследованы два новых типа стационарных вращений тела, обусловленных быстрыми вертикальными вибрациями точки подвеса и невозможными для тела с неподвижной точкой; первое представляет коническое движение вокруг вертикали несимметричного тела с центром масс на главной оси инерции, а второе — перманентное вращение вокруг главной оси инерции в случае, когда центр масс тела не лежит на этой оси.

В данной работе в рамках приближенной автономной системы дифференциальных уравнений рассматриваются перманентные вращения динамически симметричного тела при наличии быстрых вертикальных гармонических колебаний точки подвеса. Описаны допустимые дуги перманентных вращений тела, проведено их сравнение со случаем отсутствия вибрации. Найден новый тип перманентных вращений, возможных только при наличии вибраций и заданном соотношении между угловой скоростью перманентного вращения и частотой вибрации точки подвеса. Для этих движений ось вращения лежит в главной плоскости инерции, не содержащей центр масс тела и не совпадающей с экваториальной плоскостью инерции. Проведен полный (линейный и нелинейный) анализ устойчивости соответствующего положения равновесия приведенной (по Раусу) системы с двумя степенями свободы.

§ 1. Постановка задачи

Рассмотрим движение твердого тела массы m в однородном поле тяжести, считая, что одна из его точек O , называемая далее точкой подвеса, совершает вертикальные гармонические колебания по закону $O^*O = a \cos \Omega t$ относительно некоторой неподвижной точки O^* .

Введем поступательно движущуюся систему координат $OXYZ$ (ось OZ направлена вертикально вверх) и жестко связанную с телом систему $Oxyz$, оси которой направлены вдоль главных осей инерции тела для точки O . Ориентацию системы координат $Oxyz$ относительно системы $OXYZ$ зададим при помощи углов Эйлера ψ, θ, φ .

Пусть эллипсоид инерции тела для точки O является эллипсоидом вращения, при этом центр масс G занимает произвольное положение. Экваториальный и осевой моменты инерции тела обозначим через A и C . Оси Ox и Oy связанной системы координат выберем так, чтобы центр масс находился в плоскости Oxz ; без ограничения общности считаем, что $x_G > 0$.

Будем предполагать, что амплитуда a колебаний точки подвеса мала по сравнению с приведенной длиной $\ell = A/(mx_G)$, а частота Ω колебаний велика по сравнению с характерной частотой $\Omega_1 = \sqrt{g/\ell}$, при этом считаем, что $a\Omega \sim 1$. Введем малый параметр ε и безразмерную частоту ω_0 по формулам

$$\varepsilon^2 = \frac{a}{\ell} \quad (0 < \varepsilon \ll 1), \quad \frac{\Omega_1}{\Omega} = \varepsilon^2 \omega_0,$$

Движение тела будем описывать каноническими уравнениями Гамильтона. Пусть $p_\psi, p_\theta, p_\varphi$ — обобщенные импульсы, сопряженные с углами Эйлера. Ранее показано [20], что координата ψ циклическая (как и в случае тела с неподвижной точкой), поэтому $p_\psi = \text{const}$. Обезразмерим импульсы при помощи множителя $A\Omega_1$.

Введем безразмерные параметры β и σ и новую независимую переменную (безразмерное время) τ по формулам

$$\beta = A/C \quad (\beta \geq 1/2), \quad \sigma = z_G/x_G, \quad \tau = \Omega_1 t.$$

Ограничение на параметр β следует из неравенств треугольника для осевых моментов инерции. Далее исключаем из рассмотрения случай $\beta = 1$, отвечающий сферической симметрии тела.

Методами теории возмущений гамильтониан системы можно привести к виду, главная часть которого, в членах до четвертого порядка включительно относительно ε , не содержит времени τ ; эта процедура в случае произвольной геометрии масс тела для точки подвеса, совершающей высокочастотные вертикальные гармонические колебания, подробно описана в [14]. Отбрасывая слагаемые выше четвертого порядка по ε , получаем приближенный гамильтониан. Для рассматриваемого здесь случая динамической симметрии он имеет вид (за переменными оставлены прежние обозначения):

$$H = \frac{(p_\psi - p_\varphi \cos \theta)^2}{2 \sin^2 \theta} + \frac{1}{2} p_\theta^2 + \frac{1}{2} \beta p_\varphi^2 + \sin \theta \sin \varphi + \sigma \cos \theta + \Pi_v. \quad (1.1)$$

Последнее слагаемое в гамильтониане представляет собой вибрационный потенциал [15, 16], вычисляемый по формуле

$$\Pi_v = \frac{\xi}{2} \left[\sigma^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + (\cos \theta - \sigma \sin \theta \sin \varphi)^2 + \sin^2 \theta \cos^2 \varphi \beta \right], \quad \xi = \frac{m x_G a^2 \Omega^2}{2 A g}.$$

Параметр ξ ($\xi > 0$) характеризует частоту вибрации точки подвеса.

Следуя работам [15, 16] и используя преобразования, описанные в статье [21], найдем, что решения полной неавтономной системы на интервале времени t порядка $\varepsilon^{-1/2}$ связаны с решениями преобразованной приближенной автономной системы при помощи соотношений вида (исходные переменные отмечены знаками $\hat{}$)

$$\begin{aligned} \hat{\theta} &= \theta + O(\varepsilon^{3/2}), & \hat{\varphi} &= \varphi + O(\varepsilon^{3/2}), \\ \hat{p}_\theta &= p_\theta - m \dot{\zeta}(t) x_G \sin \varphi \cos \theta + O(\varepsilon^{1/2}), & \hat{p}_\varphi &= p_\varphi - m \dot{\zeta}(t) x_G \cos \varphi \sin \theta + O(\varepsilon^{1/2}). \end{aligned}$$

Движения тела с вибрирующей точкой подвеса можно описать также при помощи приближенной автономной системы уравнений, записанной в форме модифицированных уравнений Эйлера–Пуассона [15]:

$$\begin{aligned} A \frac{dp}{dt} + (C - A)qr &= mgz_G \gamma_2 + M_x^{(\nu)}, \\ A \frac{dq}{dt} + (A - C)pr &= mg(x_G \gamma_3 - z_G \gamma_1) + M_y^{(\nu)}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} C \frac{dr}{dt} &= -mgx_G \gamma_2 + M_z^{(\nu)}, \\ \frac{d\gamma_1}{dt} &= r\gamma_2 - q\gamma_3, \quad \frac{d\gamma_2}{dt} = p\gamma_3 - r\gamma_1, \quad \frac{d\gamma_3}{dt} = q\gamma_1 - p\gamma_2. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь p, q, r — проекции абсолютной угловой скорости тела $\boldsymbol{\omega}$ на оси связанной системы координат, вычисляемые при помощи кинематических уравнений Эйлера; $\gamma_1 = \sin \theta \sin \varphi$, $\gamma_2 = \sin \theta \cos \varphi$, $\gamma_3 = \cos \theta$ — проекции орта оси OZ на те же оси. В правые части уравнений добавлены компоненты вектора вибрационного момента $\mathbf{M}^{(\nu)}$, связанные с вибрационным потенциалом соотношениями

$$M_x^{(\nu)} = \frac{\partial \Pi^{(\nu)}}{\partial \gamma_3} \gamma_2 - \frac{\partial \Pi^{(\nu)}}{\partial \gamma_2} \gamma_3, \quad M_y^{(\nu)} = \frac{\partial \Pi^{(\nu)}}{\partial \gamma_1} \gamma_3 - \frac{\partial \Pi^{(\nu)}}{\partial \gamma_3} \gamma_1, \quad M_z^{(\nu)} = \frac{\partial \Pi^{(\nu)}}{\partial \gamma_2} \gamma_1 - \frac{\partial \Pi^{(\nu)}}{\partial \gamma_1} \gamma_2.$$

Дальнейшие исследования будем проводить, оставаясь в рамках приближенной системы, записанной в форме уравнений Гамильтона с гамильтонианом (1.1) или в виде (1.2), (1.3).

Рассмотрим частные решения приближенной системы, соответствующие перманентным вращениям тела — равномерным вращениям вокруг осей, фиксированных в теле и в системе координат $OXYZ$. Для рассматриваемого здесь случая вертикальных вибраций точки подвеса, как и для тела с неподвижной точкой, такие вращения могут происходить только вокруг вертикально расположенных осей [14].

Последнее условие дает

$$\frac{p}{\gamma_1} = \frac{q}{\gamma_2} = \frac{r}{\gamma_3} = \omega = \text{const},$$

а уравнения (1.2) сводятся к системе алгебраических уравнений для постоянных значений величин p, q, r , имеющей в безразмерных переменных вид

$$\begin{aligned} \frac{1-\beta}{\beta} \gamma_2 \gamma_3 \eta^2 &= \sigma \gamma_2 + \xi \gamma_2 [\gamma_3 - \sigma \gamma_1 - \sigma^2 \gamma_3 - \beta \gamma_3], \\ \frac{\beta-1}{\beta} \eta^2 \gamma_1 \gamma_3 &= [\sigma \gamma_1 - \gamma_3] [\xi (\sigma \gamma_3 + \gamma_1) - 1], \\ 0 &= \gamma_2 [\xi (\beta \gamma_1 + \sigma \gamma_3) - 1]. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Здесь $\eta = \omega/\Omega_1$ — безразмерная угловая скорость перманентного вращения.

Цель работы — описание допустимых осей перманентных вращений рассматриваемого здесь динамически симметричного тела при быстрых вертикальных вибрациях точки подвеса и сравнение результатов с соответствующими результатами для тела с неподвижной точкой. Будут выявлены случаи перманентных вращений, возможные только в случае вибраций и не существующие для тела с неподвижной точкой. Для одного из таких случаев будет проведен полный (линейный и нелинейный) анализ устойчивости.

§ 2. Допустимые дуги перманентных вращений

Опишем множество допустимых осей перманентных вращений тела. Направляющие косинусы $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ этих осей в соотношениях (1.4), при заданной геометрии масс тела, должны быть выбраны так, чтобы обеспечить неотрицательность величины η^2 . При этом величины $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ связаны геометрическим соотношением

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1.$$

Умножая третье уравнение в (1.4) на σ и складывая с первым, получим (после сокращения на постоянный множитель) уравнение-следствие вида

$$\gamma_2 [\eta^2 \gamma_3 - \beta \xi (\gamma_3 - \sigma \gamma_1)] = 0.$$

В пространстве величин $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ данное уравнение описывает совокупность двух плоскостей, в которых могут располагаться допустимые оси перманентных вращений тела. Рассмотрим эти два случая подробнее.

1. Если $\gamma_2 = 0$, то оси перманентных вращений лежат в главной плоскости инерции Oxz , содержащей центр масс тела. Первое и третье уравнения в (1.4) удовлетворяются тождественно. Рассмотрим второе уравнение.

На рис. 1 в плоскости величин γ_1, γ_3 показаны прямые $\sigma \gamma_1 = \gamma_3$ и $(\sigma \gamma_3 + \gamma_1) = 1/\xi$, являющиеся вместе с осями координат границами областей, при переходе через которые величина η^2 меняет знак. Точки пересечения прямых имеют координаты

$$K(\kappa, \sigma \kappa), \quad L\left(\frac{1}{\xi}, 0\right), \quad M\left(0, \frac{1}{\xi \sigma}\right); \quad \zeta = \frac{1}{\sigma^2 + 1}, \quad \kappa = \frac{\zeta}{\xi}.$$

На рис. 1 представлен случай $1/2 \leq \beta < 1$. Области, где величина η^2 принимает отрицательные значения, закрашены; области, где $\eta^2 > 0$, оставлены незакрашенными. В случае $\beta > 1$ закрашенные и незакрашенные области меняются местами.

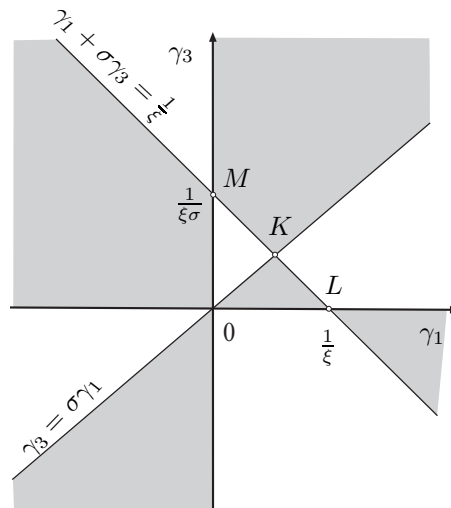


Рис. 1. Области возможного существования допустимых дуг при $\gamma_2 = 0$ и $1/2 \leq \beta < 1$

Величины γ_1 и γ_3 должны удовлетворять уравнению окружности $\gamma_1^2 + \gamma_3^2 = 1$. В зависимости от значений параметров ξ и σ возможны пять вариантов расположения точек K , M и L на рис. 1 относительно этой окружности: ни одна точка не попадает внутрь нее, попадает точка K , или точки K , L , или точки K , M , или все три точки.

Дуги окружности, попадающие в незакрашенные области, состоят из точек пересечения с этой окружностью допустимых осей перманентных вращений. Эти дуги будем также называть допустимыми, как это принято в данной задаче.

Таблица 1. Допустимые дуги

$\xi < \max(\kappa, \sigma\kappa)$	$I : 0 < \gamma_1 < \gamma_3/\sigma, \gamma_3 > 0$ $II : \gamma_1 < 0, \gamma_3 > 0$ $III : \gamma_3/\sigma < \gamma_1 < 0, \gamma_3 < 0$	рис. 2, a
$\max(\kappa, \sigma\kappa) < \xi < \min\left(\frac{1}{\sigma}, 1\right)$	$I : 0 < \gamma_1 < \gamma_*, \gamma_3 > 0$ $II : \gamma_{**} < \gamma_1 < \gamma_3/\sigma, \gamma_3 > 0$ $III : \gamma_1 < 0, \gamma_3 > 0$ $IV : \gamma_3/\sigma < \gamma_1 < 0, \gamma_3 < 0$	рис. 2, b
$1 < \xi < \frac{1}{\sigma} \quad (\sigma < 1)$	$I : \gamma_{**} < \gamma_1 < \gamma_3/\sigma, \gamma_3 > 0$ $II : \gamma_1 < 0, \gamma_3 > 0$ $III : \gamma_3/\sigma < \gamma_1 < 0, \gamma_3 < 0$ $IV : \gamma_* < \gamma_1 < 1, \gamma_3 < 0$	рис. 2, c
$\frac{1}{\sigma} < \xi < 1 \quad (\sigma > 1)$	$I : 0 < \gamma_1 < \gamma_*, \gamma_3 > 0$ $II : 0 < \gamma_1 < \gamma_3/\sigma, \gamma_3 > 0$ $III : -1 < \gamma_1 < \gamma_{**}, \gamma_3 > 0$ $IV : \gamma_3/\sigma < \gamma_1 < 0, \gamma_3 < 0$	рис. 2, d
$\xi > \max\left(\frac{1}{\sigma}, 1\right)$	$I : 0 < \gamma_1 < \gamma_3/\sigma, \gamma_3 > 0$ $II : -1 < \gamma_1 < \gamma_{**}, \gamma_3 > 0$ $III : \gamma_3/\sigma < \gamma_1 < 0, \gamma_3 < 0$ $IV : \gamma_* < \gamma_1 < 1, \gamma_3 < 0$	рис. 2, e

Допустимые дуги для случая $1/2 \leq \beta < 1$ и пяти перечисленных вариантов описаны в таблице 1. В первом столбце таблицы приведены интервалы изменения безразмерной частоты вибрации ξ , а во втором — диапазоны величин γ_1 и γ_3 на допустимых дугах (в зависимости от

параметра σ) в третьем — ссылки на рисунок, где соответствующие дуги изображены в плоскости Oxy .

Здесь введены следующие обозначения:

$$\gamma_{*,**} = \pm \kappa \sigma \sqrt{(\sigma^2 + 1)\xi^2 - 1} + 1,$$

причем знаки $+$ и $-$ соответствуют γ_* и γ_{**} .

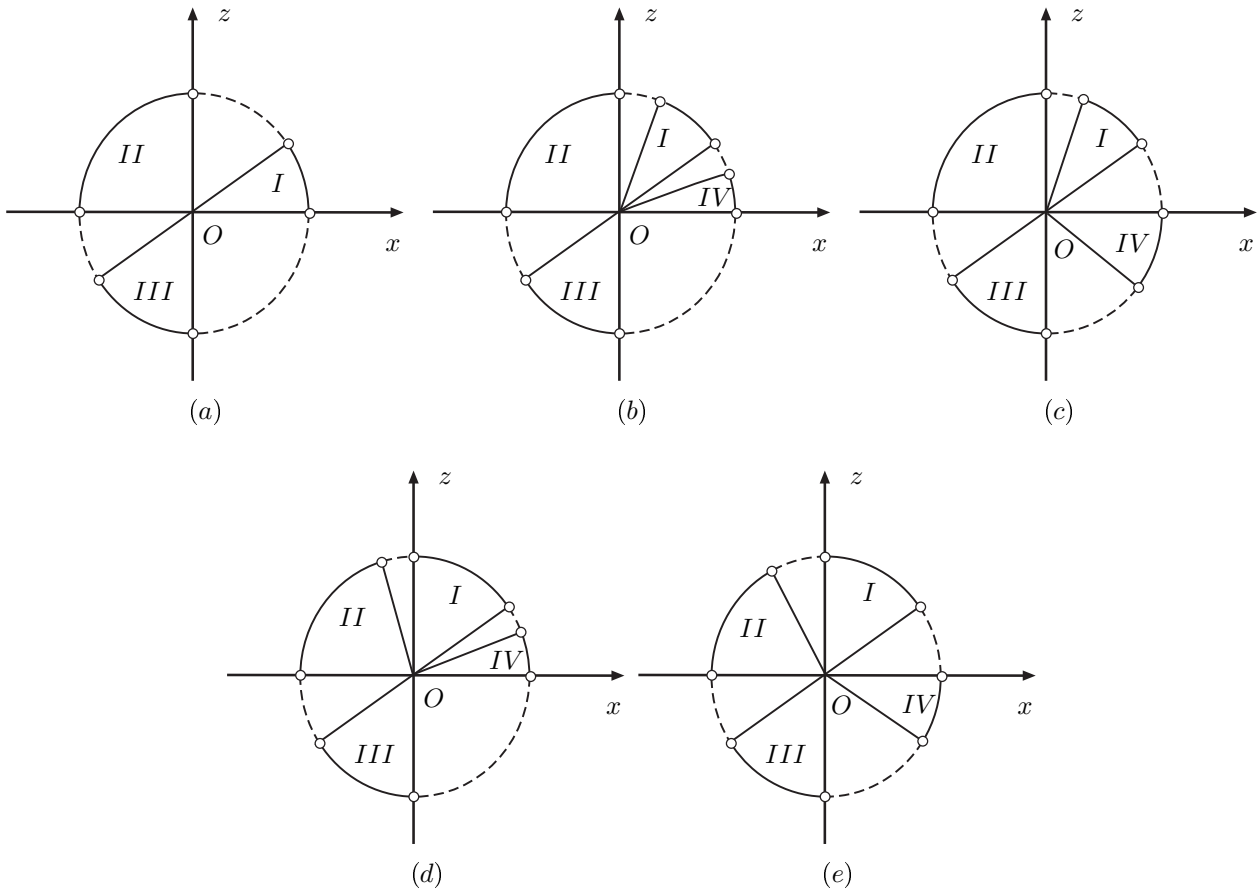


Рис. 2. Допустимые дуги при $\gamma_2 = 0$ и $1/2 \leq \beta < 1$

Для рассматриваемого на рис. 2 случая $1/2 \leq \beta < 1$ допустимые дуги показаны сплошными линиями, остальные части окружности — пунктирными линиями. В случае $\beta > 1$ допустимые дуги — это пунктирные дуги на единичной окружности на рис. 2.

Анализируя результат, заключаем, что для достаточно небольших значений частоты вибрации ($\xi < \max(\kappa, \sigma\kappa)$) допустимые дуги, обозначенные на рис. 2, а цифрами I, II, III, совпадают с дугами в случае неподвижной ($\xi = 0$) точки подвеса тела. При увеличении ξ от одного из концов дуги I отделяется дуга IV, которая либо остается в первом квадранте, либо переходит в четвертый квадрант координатной плоскости. Допустимая дуга II во втором квадранте может составлять четверть окружности (рис. 2, a-c), с ростом ξ уменьшается (рис. 2, d,e). Допустимые дуги III в третьем квадранте плоскости Oxz не зависят от частоты вибрации точки подвеса.

В случае $\beta > 1$ анализ допустимых дуг проводится аналогично.

2. Пусть теперь выполняется условие

$$\eta^2 \gamma_3 - \beta \xi (\gamma_3 - \sigma \gamma_1) = 0. \tag{2.1}$$

Разрешив третье уравнение (1.4) относительно γ_1 , получим

$$\gamma_1 = \frac{1 - \xi\sigma\gamma_3}{\xi\beta}.$$

Подстановка этого выражения в первое и второе уравнения (1.4) приводит к системе вида

$$\eta^2\gamma_3 = \xi(\beta + \sigma^2)\gamma_3 - \sigma, \quad \gamma_3\eta^2[\xi\sigma\gamma_3 - 1] = 0. \quad (2.2)$$

Если $\gamma_3 = 0$, то первое уравнение (2.2) может быть удовлетворено только при условии бесконечно большой угловой скорости перманентного вращения или при бесконечно большой частоте вибрации точки подвеса. Таким образом, оси перманентных вращений тела не могут находиться в экваториальной плоскости инерции. Этот же результат справедлив и для случая тела с неподвижной точкой.

При $\gamma_3 \neq 0$ система уравнений (2.2), с учетом геометрического соотношения, имеет два решения вида

$$\gamma_1 = 0, \quad \gamma_2 = \pm \sqrt{1 - \frac{1}{\xi^2\sigma^2}}, \quad \gamma_3 = \frac{1}{\xi\sigma} \quad (\xi\sigma > 1). \quad (2.3)$$

Соответствующие им оси перманентных вращений лежат в главной плоскости Oyz (см. рис. 3). Перманентные вращения вокруг этих осей отвечают физически одному и тому же движению тела. Отметим, что для тела с неподвижной точкой решения (2.3) не существуют, они обусловлены вибрациями точки подвеса тела.

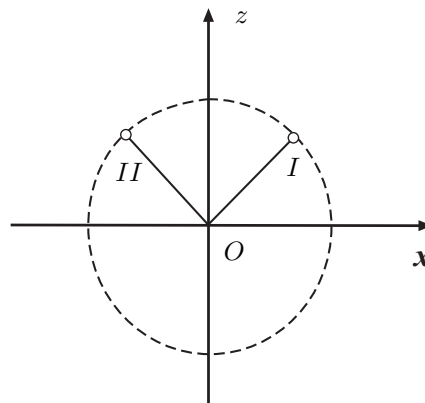


Рис. 3. Допустимые оси

Подстановка решения (2.3) в условие (2.1) дает соотношение, связывающее параметры задачи:

$$\xi = \eta^2/\beta.$$

В следующем параграфе будет проведен анализ устойчивости перманентных вращений, оси которых определяются соотношениями (2.3). Для определенности будет рассмотрен случай, для которого $\gamma_2 > 0$.

§ 3. Анализ устойчивости частного случая перманентных вращений, обусловленного вибрациями

3.1. Линейный анализ устойчивости

Рассматриваемому вращению отвечает положение равновесия приведенной системы с двумя степенями свободы с гамильтонианом (1.1), имеющее вид

$$\theta_0 = \arccos \frac{\beta}{\sigma\eta^2} \quad (\eta^2 > \beta/\sigma), \quad \varphi_0 = 0, \quad p_{\theta_0} = 0, \quad p_{\varphi_0} = \frac{1}{\sigma\eta}. \quad (3.1)$$

При этом постоянный импульс p_ψ связан с безразмерной угловой скоростью η равенством

$$p_\psi = \frac{\eta^4 \sigma^2 - \beta(\beta - 1)}{\eta^3 \sigma^2}.$$

Исследование будем проводить при фиксированном значении параметра η . За независимые параметры принимаем величины η, σ, β .

Введем в гамильтониане (1.1) возмущения по формулам

$$\theta = \theta_0 + x_1, \quad \varphi = x_2, \quad p_\theta = y_1, \quad p_\varphi = p_{\varphi_0} + y_2$$

и представим его в виде

$$H = H_2 + H_3 + H_4 + \dots \tag{3.2}$$

Здесь H_k ($k = 2, 3, 4$) — формы степени k относительно возмущений, а многоточие означает совокупность слагаемых не менее пятой степени относительно возмущений. Квадратичная форма гамильтониана имеет следующую структуру:

$$H_2 = \frac{1}{2}a_1x_1^2 + \frac{1}{2}a_2x_2^2 + \frac{1}{2}y_1^2 + \frac{1}{2}a_4y_2^2 + a_5x_1y_2 + a_6x_1x_2. \tag{3.3}$$

Здесь

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\sigma^2(1 - \sigma^2)\eta^4 + \beta(\beta\sigma^2 + (4\beta - 1)(\beta - 1))}{\eta^2\sigma^2\beta}, & a_2 &= \frac{\beta^2}{\eta^2\sigma^2} - \eta^2, \\ a_4 &= \frac{(\beta^2 - \beta - \eta^4\sigma^2)\beta}{\beta^2 - \eta^4\sigma^2}, & a_5 &= \frac{\beta^2 - \beta + \eta^4\sigma^2}{\sqrt{\eta^4\sigma^2 - \beta^2}\eta\sigma}, & a_6 &= -\frac{\beta^2 - \eta^4\sigma^2}{\eta^2\sigma\beta}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Формы третьей и четвертой степени гамильтониана записываются в виде

$$\begin{aligned} H_3 &= -\frac{x_1\eta^4y_2^2\sigma^2\beta}{(\eta^4\sigma^2 - \beta^2)^{3/2}} + \frac{x_1^2y_2(\beta^2(\beta - 1) + \eta^4\sigma^2(5\beta - 2))}{2\sigma\eta(\beta^2 - \eta^4\sigma^2)} - \frac{x_1x_2^2\beta\sqrt{\eta^4\sigma^2 - \beta^2}}{\eta^2\sigma^2} + \\ &+ \frac{3x_1^2x_2\sqrt{\eta^4\sigma^2 - \beta^2}}{2\sigma\eta^2} + \frac{x_1^3(\beta(\beta\sigma^2 + \beta - 1) - \eta^4\sigma^2(4\beta - 3 + \sigma^2))}{2\sqrt{\eta^4\sigma^2 - \beta^2}\sigma^2\eta^2}, \tag{3.5} \\ H_4 &= \frac{x_1^2y_2^2\eta^4\sigma^2(\eta^4\sigma^2 + 2\beta^2)}{2(\beta^2 - \eta^4\sigma^2)^2} + \frac{x_1^3y_2(\beta^3(\beta - 1) + \eta^4\sigma^2(5\eta^4\sigma^2 + 18\beta^2 - 11\beta))}{6\eta\sigma(\eta^4\sigma^2 - \beta^2)^{3/2}} - \frac{x_2^4(\beta^2 - \eta^4\sigma^2)}{6\eta^2\sigma^2} + \\ &+ \frac{x_1x_2^3(\beta^2 - \eta^4\sigma^2)}{6\sigma\eta^2\beta} - \frac{x_1^2x_2^2(2\beta^2 - \eta^4\sigma^2)}{2\eta^2\sigma^2} + \frac{x_2x_1^3(7\beta^2 - 4\eta^4\sigma^2)}{6\sigma\eta^2\beta} - \\ &- \frac{x_1^4[4\sigma^4(3\beta + \sigma^2 - 1)\eta^8 + \sigma^2\beta(32\beta^2 - 11\sigma^2\beta - 33\beta + 8)\eta^4 + \beta^3(16\beta^2 + 7\sigma^2\beta - 23\beta + 7)]}{24\eta^4\sigma^2\eta^2\beta}. \end{aligned}$$

Достаточные условия устойчивости исследуемого решения найдем как условия положительной определенности квадратичной формы H_2 из (3.3):

$$a_1 > 0, \quad a_1a_2 - a_6^2 > 0, \quad a_1a_2a_4 - a_6^2a_4 - a_5^2a_2 > 0. \tag{3.6}$$

Эти условия, с учетом области существования решения, сводятся к системе неравенств

$$\begin{aligned} \eta^4\sigma^2(1 - \sigma^2) + \beta(4\beta^2 + \beta[\sigma^2 - 5] + 1) &> 0, \\ \eta^4\sigma^2(\beta + \sigma^2 - \beta\sigma^2) + \beta^2(\beta - 1)(\sigma^2 + 4\beta - 1) &< 0, \\ (\beta - 1)[\beta(\beta - 1)(4\beta + \sigma^2) - \eta^4\sigma^4] &< 0. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Если форма H_2 знакопеременна, составим характеристическое уравнение линейной системы, соответствующей квадратичной формы H_2 :

$$\lambda^4 + a\lambda^2 + b = 0,$$

$$a = a_1 + a_2a_4, \quad b = a_1a_2a_4 - a_6^2a_4 - a_5^2a_2.$$

При выполнении условий

$$a > 0, \quad b > 0, \quad d = a^2 - 4b > 0 \quad (3.8)$$

корни $\pm i\lambda_j$ ($j = 1, 2$) уравнения чисто мнимые, и исследуемые решения устойчивы в линейном приближении. Если хотя бы одно из неравенств выполняется с противоположным знаком, то имеет место неустойчивость, так как в этом случае у характеристического уравнения будут корни с положительной вещественной частью.

Заметим, что второе неравенство из (3.8) совпадает с третьим неравенством из (3.6). Два других сводятся к системе вида

$$\beta(\beta^3 + 3\beta^2 + \beta[\sigma^2 - 5] + 1) - \eta^4\sigma^2(\sigma^2 + \beta^2 - 1) > 0, \quad \eta^8\sigma^4\Gamma - 2\beta\sigma^2\eta^4\Lambda + \beta^2\Upsilon > 0,$$

$$\Gamma = \sigma^4 - 2(\beta - 1)^2\sigma^2 + (\beta^2 - 1)^2,$$

$$\Lambda = \sigma^4\beta - (\beta - 1)(2\beta^2 - 7\beta + 1)\sigma^2 + (\beta - 1)^5,$$

$$\Upsilon = \sigma^4\beta^2 - 2\beta(\beta^2 - 6\beta + 1)(\beta - 1)\sigma^2 + (\beta^2 - 6\beta + 1)(\beta - 1)^4.$$

Исследовать достаточные и необходимые условия будем в области, определяемой общим для выписанных условий третьим неравенством в (3.7). Области выполнения этого неравенства иллюстрирует рис. 4, на котором представлена допустимая часть плоскости параметров σ , β . При $1/2 \leq \beta < 1$ неравенство не выполняется, и имеет место неустойчивость.

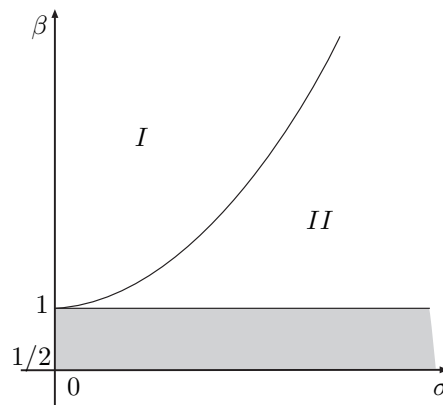


Рис. 4. Область исследования

В области $\beta > 1$ выделим подобласти I и II , разделенные кривой

$$2\beta = 1 + \sqrt{1 + \sigma^2}.$$

В этих подобластях имеем следующие ограничения на параметр η (угловую скорость перманентного вращения):

$$\eta^4 > \eta_A^4 = \frac{\beta(\beta - 1)(4\beta + \sigma^2)}{\sigma^4} \quad (I), \quad \eta^2 > \beta/\sigma \quad (II).$$

Далее заметим, что в области $\beta > 1$ второе неравенство в (3.7) может быть удовлетворено, когда коэффициент при η^4 отрицателен, что дает условие

$$\sigma^2 > \frac{\beta}{\beta - 1} > 1.$$

При этом условии первое неравенство в (3.7) сводится к соотношению

$$\eta^4 < \eta_B^4 = \frac{\beta(4\beta^2 + \beta(\sigma^2 - 5) + 1)}{\sigma(\sigma^2 - 1)},$$

а второе — к соотношению

$$\eta^4 > \eta_C^4 = \frac{\beta^2(1 - \beta)(4\beta + \sigma^2 - 1)}{\sigma^2(\beta + \sigma^2 - \beta\sigma^2)}.$$

Однако в области $\beta > 1$ при любых значениях угловой скорости η справедливо неравенство

$$\eta_B^4 < \eta_C^4.$$

Таким образом, для любых значений параметров η , β , σ достаточные условия устойчивости (3.7) не выполняются.

Проверим выполнение только необходимых условий устойчивости (3.8) в областях I , II на рис. 4. Первое из неравенств для любых значений β , σ из этих областей удовлетворяется при условии

$$\eta^4 < \eta_D^4 = \frac{\beta(\beta\sigma^2 + (\beta - 1)(\beta^2 + 4\beta - 1))}{\sigma^2(\sigma^2 + \beta^2 - 1)},$$

причем имеем

$$\eta_A^4 < \eta_D^4 \quad \text{при} \quad \sigma^4 > 4\beta(\beta + 1)(\beta - 1)^2. \quad (3.9)$$

Таким образом, в области I рис. 4 появляется область неустойчивости (при $\eta_A^4 > \eta_D^4$). В оставшейся части области I , обозначенной на рис. 5 через I' , а также в области II имеем ограничение на максимальное значение скорости перманентного вращения: $\eta^4 < \eta_D^4$.

Рассмотрим третье условие в (3.8). Левая часть этого неравенства представляет собой квадратный трехчлен относительно η^4 с коэффициентами — квадратными трехчленами относительно σ . Дискриминант квадратного трехчлена Γ отрицателен, поэтому старший коэффициент исследуемого неравенства всегда положителен.

Дискриминант квадратного неравенства (3.1) имеет вид

$$D = 16\beta^3\sigma^4(\beta - 1)^2[(4\beta - 1)\sigma^4 - 8\beta^2(\beta - 1)\sigma^2 + 4\beta(\beta - 1)^4].$$

Выражения для D содержит квадратный трехчлен относительно σ^4 с положительным дискриминантом. Учитывая знаки коэффициентов квадратного трехчлена (в области $\beta > 1$), заключаем, что он имеет два положительных вещественных корня. При этом левая граница рассматриваемой области параметра σ , задаваемая в (3.9), лежит правее обоих корней, и, таким образом, в этой области дискриминант D всегда положителен.

Аналогичный анализ коэффициентов Λ и $\Upsilon = 0$ из (3.1) показывает, что в исследуемой области параметров β , σ они принимают только положительные значения. Таким образом, квадратный трехчлен в левой части неравенства (3.1) имеет два вещественных положительных корня.

Найдем взаимное расположение этих корней относительно найденных выше граничных значений η_A^4 , β/σ и η_D^4 . Подстановка этих значений в левую часть неравенства (3.1) дает соответственно выражения

$$d|_{\eta=\eta_A} = \frac{\beta^2[4\beta(\beta + 1)(\beta - 1)^2 - \sigma^4]^2}{\sigma^4} > 0,$$

$$d|_{\eta=\sqrt{\beta/\sigma}} = \beta^2(3\beta - 1)^2(\beta - 1)^2 > 0,$$

$$d|_{\eta=\eta_D} = \frac{4\beta^3(3\beta-1)(\beta-1)^2[4\beta(\beta+1)(\beta-1)^2 - \sigma^4]}{(1-\sigma^2-\beta^2)^2} < 0.$$

Объединяя результаты, получаем следующие ограничения на величину η угловой скорости перманентного вращения, представляющие только необходимые (не являющиеся достаточными) условия устойчивости (см. рис. 5):

$$\eta_A^4 < \eta^4 < \eta_E^4 \quad (I'), \quad \beta^2/\sigma^2 < \eta^4 < \eta_E^4 \quad (II). \quad (3.10)$$

Здесь η_E^4 — меньший из корней квадратного трехчлена в (3.1).

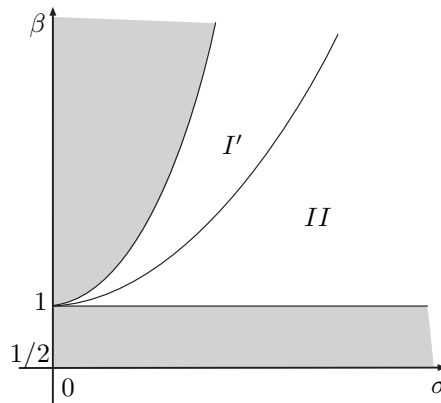


Рис. 5. Область только необходимых условий устойчивости

Заметим, что на границе (3.9) (верхней границе области I') $\eta_E^4 = \eta_A^4$.

3.2. Нелинейный анализ устойчивости

В областях изменения параметров задачи, где выполняются только необходимые условия устойчивости, проведем нелинейный анализ устойчивости решений (3.1). Будем использовать известные методы исследования устойчивости автономных гамильтоновых систем с двумя степенями свободы [23].

Осуществим нормализацию гамильтониана возмущенного движения (3.2)–(3.5) в членах до четвертого порядка включительно относительно возмущений. Сначала приведем квадратичную часть (3.3) гамильтониана к нормальной форме вида

$$\tilde{H}_2 = \frac{1}{2}\kappa_1(q_1^2 + p_1^2) - \frac{1}{2}\kappa_2(q_2^2 + p_2^2), \quad (3.11)$$

$$\kappa_{1,2} = \frac{\sqrt{2\beta[\beta(\beta^3 + 3\beta^2 + \beta(\sigma^2 - 5) + 1) - \sigma^2(\beta^2 + \sigma^2 - 1)\eta^4 \pm \sqrt{d}]} + 1}{2\beta\sigma\eta} \quad (\kappa_1 > \kappa_2),$$

$$d = \sigma^4 \left[\sigma^4 - 2(\beta - 1)^2\sigma^2 + (\beta^2 - 1)^2 \right] \eta^8 - 2\beta\sigma^2 \left[\sigma^4\beta - (\beta - 1)(2\beta^2 - 7\beta + 1)\sigma^2 + (\beta - 1)^5 \right] \eta^4 + \beta^2 \left[\beta^2\sigma^4 - 2\beta(\beta - 1)(\beta^2 - 6\beta + 1)\sigma^2 + (\beta^2 - 6\beta + 1)(\beta - 1)^4 \right].$$

Здесь d — дискриминант характеристического уравнения, введенный в (3.8), а κ_1 и κ_2 — частоты малых линейных колебаний системы в окрестности исследуемого положения равновесия. Квадратичная форма (3.11) получается в результате линейного унивалентного канонического

преобразования $x_i, y_i \rightarrow q_i, p_i$ ($i = 1, 2$) вида

$$\begin{aligned}
 x_1 &= n_{13}p_1 + n_{14}p_2, & x_2 &= n_{21}q_1 + n_{22}q_2 + n_{23}p_1 + n_{24}p_2, \\
 y_1 &= n_{31}q_1 + n_{32}q_2, & y_2 &= n_{41}q_1 + n_{42}q_2 + n_{43}p_1 + n_{44}p_2, \\
 n_{13,14} &= (-1)^{j+1}\varkappa_j; & n_{21,22} &= -\frac{\varkappa_j o_j (\beta^2 - \beta + \eta^4 \sigma^2) \kappa_j \sigma \eta}{2z \sqrt{\eta^4 \sigma^2 - \beta^2}}; \\
 n_{23,24} &= (-1)^{j+1} \frac{\varkappa_j o_j \sigma (\beta^2 - \beta - \eta^4 \sigma^2)}{2z}; & n_{31,32} &= -\varkappa_j \kappa_j; \\
 n_{41,42} &= \frac{\varkappa_j \sigma \kappa_j o_j (\eta^4 \sigma^2 - \beta^2)}{2\beta z}; & n_{43,44} &= (-1)^{j+1} \frac{\varkappa_j (\beta^2 - \beta + \eta^4 \sigma^2) o_j \sqrt{\eta^4 \sigma^2 - \beta^2}}{2\sigma z \eta}; \\
 o_{1,2} &= \eta^4 \sigma^4 - ((\eta^4 + 1)\beta^2 + \eta^4)\sigma^2 + \beta(\beta - 1)(\beta^2 - 4\beta + 1) \pm \sqrt{d}; \\
 z &= \beta^5 - (\sigma^2 + 2)\beta^4 + (1 + (2\eta^4 + 1)\sigma^2)\beta^3 + \eta^4 \sigma^2 (2\beta^2(\sigma^2 - 1) + \sigma^2((\beta - \sigma^2)\eta^4 - \beta)); \\
 \varkappa_1 &= \frac{\sqrt{2\beta z}}{\sqrt{\kappa_1((\sigma^2(\beta^2 - \sigma^2 + 1)\eta^4 - \beta(\beta^3 - 5\beta^2 + 5\beta - \beta\sigma^2 - 1))\sqrt{d} - d)}}; \\
 \varkappa_2 &= \frac{2\sqrt{\beta z}}{\sqrt{\kappa_2((\beta^4 - 5\beta^3 + (5 - (\eta^4 + 1)\sigma^2)\beta^2 - \beta + \eta^4 \sigma^4 - \eta^4 \sigma^2 - \sqrt{d})^2 - 4\beta z)}}.
 \end{aligned}
 \tag{3.12}$$

Величина j для коэффициентов n_{kl} с нечетными и четными индексами равна 1 и 2 соответственно. Параметры a_1 – a_6 введены выше в соотношениях (3.4).

После проведения линейной подстановки (3.12) формы третьей и четвертой степеней из (3.5) принимают следующий вид:

$$\begin{aligned}
 H_3 &= (l_1 q_1^2 + l_2 q_2^2 + l_3 q_1 q_2) p_1 + (l_4 q_2 + l_5 q_1) p_1^2 + l_6 p_1^3 + (l_7 p_1^2 + (l_8 q_2 + l_9 q_1) p_1 + \\
 &\quad + l_{10} q_2^2 + l_{11} q_1^2 + l_{12} q_1 q_2) p_2 + (l_{13} p_1 + l_{14} q_2 + l_{15} q_1) p_2^2 + l_{16} p_2^3, \\
 H_4 &= m_1 q_1^2 q_2^2 + m_2 q_1^4 + m_3 q_2^4 + m_4 q_1 q_2^3 + m_5 q_1^3 q_2 + m_6 p_2^4 + (m_7 q_1 + m_8 p_1 + m_9 q_2) p_2^3 + \\
 &\quad + (m_{10} q_1 q_2 + (m_{11} q_1 + m_{12} q_2) p_1 + m_{13} p_1^2 + m_{14} q_2^2 + m_{15} q_1^2) p_2^2 + (m_{16} q_2^3 + m_{17} p_1^3 + (m_{18} q_1^2 + \\
 &\quad + m_{19} q_1 q_2 + m_{20} q_2^2) p_1 + m_{21} q_1^3 + m_{22} q_1 q_2^2 + m_{23} q_1^2 q_2 + (m_{24} q_2 + m_{25} q_1) p_1^2) p_2 + m_{26} p_1^4 + \\
 &\quad + (m_{27} q_1 + m_{28} q_2) p_1^3 + (m_{29} q_1 q_2^2 + m_{30} q_2^3 + m_{31} q_1^3 + m_{32} q_1^2 q_2) p_1 + (m_{33} q_1 q_2 + m_{34} q_2^2 + m_{35} q_1^2) p_1^2.
 \end{aligned}$$

Явный вид коэффициентов l_j и m_j достаточно громоздкий и здесь не приводится.

Затем при помощи близкой к тождественной канонической замены переменных $q_i, p_i \rightarrow \tilde{q}_i, \tilde{p}_i$ ($i = 1, 2$) проведем нормализацию преобразованных форм H_3 и H_4 .

При отсутствии резонансов третьего и четвертого порядков нормализованный гамильтониан возмущенного движения в «полярных» координатах φ_i и r_i , задаваемых формулами $\tilde{q}_i = \sqrt{2r_i} \sin \varphi_i$, $\tilde{p}_i = \sqrt{2r_i} \cos \varphi_i$ ($i = 1, 2$), имеет вид

$$H = \kappa_1 r_1 - \kappa_2 r_2 + c_{20} r_1^2 + c_{11} r_1 r_2 + c_{02} r_2^2 + O(r_j^{5/2}).$$

Здесь слагаемое $O(r_i^{5/2})$ 2π -периодично по угловым переменным φ_i ($i = 1, 2$). Постоянные коэффициенты c_{02} , c_{11} и c_{02} вычисляются по формулам

$$\begin{aligned}
 c_{20} &= \frac{3}{2(\kappa_2^2 - 4\kappa_1^2)\kappa_2\kappa_1} \left[(2(m_5 + 3m_2 + 3m_{17})\kappa_1 - 3((l_1 + l_6)^2 + 4l_6^2 + l_5^2))\kappa_2^3 + \right. \\
 &\quad + ((l_7 + l_{11})^2 + 2l_7^2 + 2l_{11}^2 + l_9^2 + l_3^2 + 3l_4^2)\kappa_1\kappa_2^2 - 8((l_{11} + l_7)^2 + l_4^2)\kappa_1^3 + \\
 &\quad \left. + (4(3(l_6 + l_1)^2 + 5l_6^2 + l_3(l_{11} - l_7) + l_4 l_9 + 3l_5^2) - 8(m_5 + 3m_{17} + 3m_2)\kappa_1)\kappa_1^2\kappa_2 \right], \\
 c_{02} &= \frac{3}{2\kappa_1\kappa_2(\kappa_1^2 - 4\kappa_2^2)} \left[8((l_2 + l_{13})^2 + l_{15}^2 - (m_{14} + 3m_3 + 3m_6)\kappa_1)\kappa_2^3 + \right. \\
 &\quad \left. + 4(l_{12}(l_{13} - l_2) - l_8 l_{15} - 2l_{14}^2 - 3((l_{10} + l_{16})^2 + 4l_{16}^2))\kappa_1\kappa_2^2 + (2(3m_3 + m_{14} + 3m_6)\kappa_1 - \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - (3l_{15}^2 + l_{12}^2 + 2l_{13}^2 + 2l_2^2 + (l_{13} + l_2)^2 + l_8^2) \kappa_1^2 \kappa_2 + 3((l_{16} + l_{10})^2 + 4l_{16}^2 + l_{14}^2) \kappa_1^3, \\
c_{11} = & \frac{6}{\kappa_1 \kappa_2 (4\kappa_1^4 - 17\kappa_1^2 \kappa_2^2 + 4\kappa_2^4)} \left[4((3l_{16} + l_{10})(l_{11} + l_7) + l_4 l_{14}) \kappa_1^5 - 4((3l_6 + l_1)(l_2 + l_{13}) + \right. \\
& + l_5 l_{15} - (m_1 + m_{13} + m_9 + m_{15}) \kappa_1) \kappa_2^5 + 2((l_2 - l_{13})^2 + l_{12}^2 + 2(l_{10} + 3l_{16} - 2l_3)(l_{11} + l_7) + \\
& + l_8^2 + l_{15}^2 + 2l_4(l_{14} + 2l_9)) \kappa_1 \kappa_2^4 - (17(m_1 + m_{13} + m_9 + m_{15}) \kappa_1 - 8(l_9^2 + (l_7 - l_{11})^2 + l_3^2 + l_4^2) - \\
& - 2l_{12}(l_2 - l_{13}) - 17(3l_6 + l_1)(l_2 + l_{13}) - l_{15}(2l_8 - 17l_5)) \kappa_1^2 \kappa_2^3 - (17(l_7 + l_{11})(l_{10} + 3l_{16}) + \\
& + 8(l_{15}^2 + l_8^2 + (l_{13} - l_2)^2 + l_{12}^2) - 2l_3(l_7 - l_{11}) + l_4(2l_9 + 17l_{14})) \kappa_1^3 \kappa_2^2 - 2((l_{11} - l_7)^2 + l_4^2 + l_9^2 + \\
& + l_3^2 + 2l_{15}(l_5 + 2l_8) + 2(l_1 + 3l_6)(l_{13} + l_2) + 4l_{12}(l_2 - l_{13}) - 2(m_1 + m_{13} + m_9 + m_{15}) \kappa_1) \kappa_1^4 \kappa_2 \left. \right].
\end{aligned}$$

Условие устойчивости (по Ляпунову) положения равновесия приведенной системы, отвечающего рассматриваемому перманентному вращению тела, следует из теоремы Арнольда-Мозера [24] и определяется неравенством

$$\Delta = c_{20} \kappa_2^2 + c_{11} \kappa_1 \kappa_2 + c_{02} \kappa_1^2 \neq 0.$$

Случай вырождения $\Delta = 0$ требует анализа в гамильтониане возмущенного движения слагаемых до шестого порядка включительно относительно возмущений, такой анализ в данной работе не проводится.

Если в системе реализуется резонанс третьего порядка ($\kappa_1 = 2\kappa_2$), то нормализованный гамильтониан записывается в виде

$$\hat{H} = \kappa_2(2r_1 - r_2) + \sqrt{r_1 r_2} \sqrt{k_{31}^2 + k_{32}^2} \sin(\varphi_1 + 2\varphi_2) + c_{20} r_1^2 + c_{11} r_1 r_2 + c_{02} r_2^2 + O(r_j^{5/2}).$$

Величины k_{31} и k_{32} в резонансном коэффициенте определяются выражениями

$$k_{31} = \sqrt{2}(l_{15} + l_8), \quad k_{32} = -\sqrt{2}(l_2 - l_{13} + l_{12}),$$

а коэффициенты c_{ij} вычисляются по приведенным выше формулам для нерезонансного случая, в которых сделана подстановка $\kappa_1 = 2\kappa_2$.

При выполнении условия $k_{31}^2 + k_{32}^2 \neq 0$ исследуемое решение неустойчиво. Если же выполнено условие $k_{31}^2 + k_{32}^2 = 0$ и при этом

$$c_{20} + 2c_{11} + 4c_{02} \neq 0,$$

то имеет место устойчивость [23].

Если в системе нет резонанса третьего порядка, но имеется резонанс четвертого порядка ($\kappa_1 = 3\kappa_2$), то нормализованный гамильтониан представляется в виде

$$\hat{H} = \kappa_2(3r_1 - r_2) + c_{20} r_1^2 + c_{11} r_1 r_2 + c_{02} r_2^2 + \sqrt{r_1 r_2} \sqrt{k_{41}^2 + k_{42}^2} \sin(\varphi_1 + 3\varphi_2) + O(r_j^{5/2}).$$

Здесь коэффициенты c_{02} , c_{11} и c_{20} совпадают с аналогичными для нерезонансного случая (при подстановке $\kappa_1 = 3\kappa_2$), а величины k_{41} и k_{42} вычисляются по формулам

$$\begin{aligned}
k_{41} = & -\frac{3}{5\kappa_2} \left[5(m_{18} + m_{11} - m_7 - m_{12}) \kappa_2 - 2l_2[3l_4 + 5l_{14}] - l_{12}[5l_{14} + 4l_4] + 2l_{11}[3l_{15} + 2l_8] + \right. \\
& + l_{15}[4l_7 + 10l_{16} + 10l_{10} + l_3] + l_8[6l_7 + 15l_{16} + 5l_{10} - l_3] + l_{13}[l_9 + 6l_4] + l_9[l_{12} - l_2] \left. \right]; \\
k_{42} = & \frac{3}{5\kappa_2} \left[5(m_8 + m_4 - m_{10} - m_{19}) \kappa_2 + l_{12}[6l_{11} + 4l_7 + 15l_{16} + l_3 + 5l_{10}] + l_{15}[4l_4 - l_9] + \right. \\
& + l_{13}[l_3 - 4l_{11} - 10l_{16} - 10l_{10} - 6l_7] + l_2[20l_{16} - l_3 + 6l_7 + 4l_{11}] + l_8[6l_4 + l_9 + 5l_{14}] \left. \right].
\end{aligned}$$

Условие устойчивости по Ляпунову определяется в этом случае неравенством [23]

$$|c_{20} + 3c_{11} + 9c_{02}| > 3\sqrt{3}\sqrt{k_{41}^2 + k_{42}^2}. \quad (3.13)$$

Если неравенство (3.13) выполнено с противоположным знаком, то перманентное вращение неустойчиво.

Таким образом, устойчивость исследуемого решения может нарушиться, если точка из рассматриваемой области пространства параметров, в которой выполнены только необходимые условия устойчивости, принадлежит поверхностям резонансов третьего или четвертого порядков или поверхности вырождения $\Delta = 0$.

Из выражений для κ_1 и κ_2 в формулах (3.11) следует, что резонансные соотношения $\kappa_1 = 2\kappa_2$ и $\kappa_1 = 3\kappa_2$ эквивалентны квадратным относительно величины η^4 уравнениям вида

$$u_1\eta^8 + v_1\eta^4 + w_1 = 0, \quad (3.14)$$

$$u_2\eta^8 + v_2\eta^4 + w_2 = 0 \quad (3.15)$$

соответственно. Здесь

$$\begin{aligned} u_1 &= \sigma^4(4\sigma^4 - (17\beta - 8)(\beta - 1)\sigma^2 + 4(\beta^2 - 1)^2), \\ v_1 &= -\beta\sigma^2(8\beta\sigma^4 - (\beta - 1)(34\beta^2 - 65\beta + 8)\sigma^2 + 4(2\beta^3 - 15\beta^2 + 6\beta - 2)(\beta - 1)^2), \\ w_1 &= \beta^2(4\beta^2\sigma^4 - \beta(\beta - 1)(17\beta^2 - 57\beta + 8)\sigma^2 + 4(\beta^4 - 17\beta^3 + 14\beta^2 - 8\beta + 1)(\beta - 1)^2), \\ u_2 &= \sigma^4(9\sigma^4 - 2(41\beta - 9)(\beta - 1)\sigma^2 + 9(\beta^2 - 1)^2), \\ v_2 &= -2\beta\sigma^2(9\beta\sigma^4 - (\beta - 1)(82\beta^2 - 95\beta + 9)\sigma^2 + (9\beta^3 - 155\beta^2 + 27\beta - 9)(\beta - 1)^2), \\ w_2 &= \beta^2(9\beta^2\sigma^4 - 2\beta(\beta - 1)(41\beta^2 - 86\beta + 9)\sigma^2 + (9\beta^4 - 328\beta^3 + 126\beta^2 - 72\beta + 9)(\beta - 1)^2). \end{aligned}$$

Из соотношений (3.14) и (3.15) следует, что в пространстве параметров задачи могут существовать не более двух резонансных поверхностей каждого вида. Проведенный расчет показал, что в исследуемой области имеется по одной резонансной поверхности третьего и четвертого порядков.

Для получения результатов нелинейного анализа в исследуемой части пространства параметров строились различные сечения $\beta = \text{const}$ ($\beta > 1$), в которых численно и аналитически определялись резонансные кривые и кривые вырождения и проверялись соответствующие критерии устойчивости. Расчеты были проведены на интервале $1 < \beta < 10$; выявлено, что картина устойчивости в рассмотренных сечениях для значений β из этого интервала качественно не меняется.

На рис. 6 в плоскости параметров σ , β представлен характерный вид описанных сечений, при этом показаны одновременно части сечения, относящиеся к областям I' и II на рис. 5. Исследуемая область устойчивости на рис. 6 не закрашена. Согласно (3.10) верхняя граница области задается соотношением $\eta = \eta_E$, нижняя — частями кривых $\eta = \eta_A$ и $\eta = \sqrt{\beta/\sigma}$, переходящими одна в другую при $\sigma = 2\sqrt{\beta(\beta - 1)}$. Координаты угловой точки области имеют вид

$$\sigma = \sqrt[4]{4\beta(\beta + 1)(\beta - 1)^2}, \quad \eta = \sqrt[4]{\frac{2\beta + (\beta - 1)\sqrt{\beta(\beta + 1)}}{2(\beta^2 - 1)}}.$$

Кривая резонанса третьего порядка показана на рис. 6 тонкой линией, кривая резонанса четвертого порядка — полужирной линией. Расчеты показали, что в каждом сечении имеется кривая вырождения (пунктирная линия). Все три кривые выходят из угловой точки области и вместе с граничными кривыми асимптотически приближаются к оси абсцисс при $\sigma \rightarrow \infty$. Кривая вырождения расположена между резонансными кривыми и внутри области не имеет с ними точек пересечения.

Была проведена проверка устойчивости по Ляпунову исследуемых движений для значений параметров, принадлежащих кривым резонансов третьего и четвертого порядков. Установлено,

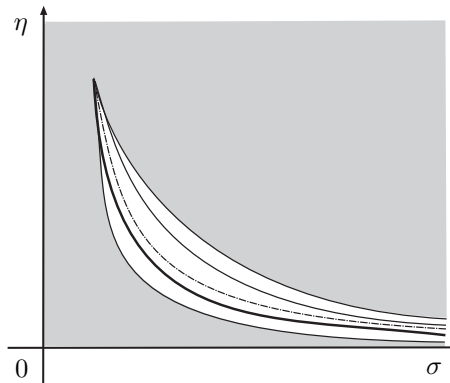


Рис. 6. Картина устойчивости в сечениях $\beta = \text{const}$

что на резонансных кривых третьего порядка имеет место неустойчивость, а на резонансных кривых четвертого порядка — устойчивость по Ляпунову.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Staude O. Ueber permanente Rotationsachsen bei der Bewegung eines schweren Körpers um einen festen Punkt // Journal für die Reine und Angewandte Mathematik. 1894. Issue 113. P. 318–334.
DOI: [10.1515/crll.1894.113.318](https://doi.org/10.1515/crll.1894.113.318)
2. Млодзеевский Б.К. О перманентных осях в движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки // Труды отделения физических наук Общества любителей естествознания. 1894. Т. 7. Вып. 1. С. 46–48.
3. Холостова О.В. Исследование устойчивости перманентных вращений Штауде. М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2008. 128 с.
4. Граммель Р. Гироскоп, его теория и применения. В 2-х томах. М.: Изд-во иностр. лит-ры. 1962.
5. Румянцев В.В. Устойчивость перманентных вращений тяжелого твердого тел // Прикладная математика и механика. 1956. Т. 20. Вып. 1. С. 51–66.
6. Румянцев В.В. Об устойчивости вращения тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой в случае С.В. Ковалевской // Прикладная математика и механика. 1954. Т. 18. Вып. 4. С. 457–458.
7. Магнус К. Гироскоп. Теория и применения. М.: Мир, 1974. 526 с.
8. Ковалев А.М., Савченко А.Я. Устойчивость равномерных вращений твердого тела вокруг главной оси // Прикладная математика и механика. 1975. Т. 39. Вып. 4. С. 650–660.
9. Сергеев В.С. Об устойчивости перманентных вращений тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки // Прикладная математика и механика. 1976. Т. 40. Вып. 3. С. 408–416.
10. Ковалев А.М., Савченко А.Я. Устойчивость стационарных движений гамильтоновых систем при наличии резонанса четвертого порядка // Механика твердого тела. Киев: Наукова думка, 1977. Вып. 9. С. 40–44.
11. Юдович В.И. Вибродинамика и виброгеометрия механических систем со связями // Успехи механики. 2006. Т. 4. № 3. С. 26–158.
12. Блехман И.И. Вибрационная механика. М.: Физматлит, 1994. 400 с.
13. Стрижак Т.Г. Методы исследования динамических систем типа «маятник». Алма-Ата: Наука, 1981. 253 с.
14. Холостова О.В. Задачи динамики твердых тел с вибрирующим подвесом. М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2016. 308 с.
15. Маркеев А.П. К теории движения твердого тела с вибрирующим подвесом // Доклады Академии наук. 2009. Т. 427. № 6. С. 771–775.
16. Маркеев А.П. Об уравнениях приближенной теории движения твердого тела с вибрирующей точкой подвеса // Прикладная математика и механика. 2011. Т. 75. № 2. С. 193–203.

17. Маркеев А.П. О движении тяжелого динамически симметричного твердого тела с вибрирующей точкой подвеса // Известия РАН. Механика твердого тела. 2012. № 4. С. 3–10.
18. Холостова О.В. Об устойчивости равновесий твердого тела с вибрирующей точкой подвеса // Вестник РУДН. Математика. Информатика. Физика. 2011. № 2. С. 111–122.
19. Беличенко М.В., Холостова О.В. Об устойчивости стационарных вращений в приближенной задаче о движении волчка Лагранжа с вибрирующей точкой подвеса // Нелинейная динамика. 2017. Т. 13. № 1. С. 81–104. DOI: [10.20537/nd1701006](https://doi.org/10.20537/nd1701006)
20. Вишенкова Е.А. Об устойчивости частных решений приближенных уравнений движения тяжелого твердого тела с вибрирующей точкой подвеса // Нелинейная динамика. 2015. Т. 11. № 3. С. 459–474. DOI: [10.20537/nd1503002](https://doi.org/10.20537/nd1503002)
21. Вишенкова Е.А., Холостова О.В. О влиянии вертикальных вибраций на устойчивость перманентных вращений твердого тела вокруг осей, лежащих в главной плоскости инерции // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2017. Т. 27. Вып. 1. С. 98–120. DOI: [10.20537/vm170109](https://doi.org/10.20537/vm170109)
22. Холостова О.В. Об устойчивости частных движений тяжелого твердого тела, обусловленных быстрыми вертикальными вибрациями одной из его точек // Нелинейная динамика. 2015. Т. 11. № 1. С. 99–116. DOI: [10.20537/nd1501005](https://doi.org/10.20537/nd1501005)
23. Маркеев А.П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978. 312 с.
24. Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И. Математические аспекты классической и небесной механики. М.: Едиториал УРСС, 2009. 416 с.

Поступила в редакцию 28.09.2017

Вишенкова Екатерина Алексеевна, инженер-программист, АО «НПФ «Инфосистем-35», 129626, г. Москва, ул. 3-я Мытищинская, д. 16, стр. 37.

E-mail: vishenkova@bk.ru

Холостова Ольга Владимировна, д. ф.-м. н., профессор, кафедра теоретической механики, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), 125080, Россия, г. Москва, Волоколамское ш., 4;

профессор, кафедра теоретической механики, Московский физико-технический институт (государственный университет), 141700, Россия, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский переулок, 9.

E-mail: kholostova_o@mail.ru

E. A. Vishenkova, O. V. Kholostova

A study of permanent rotations of a heavy dynamically symmetric rigid body with a vibrating suspension point

Citation: *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2017, vol. 27, issue 4, pp. 590–607 (in Russian).

Keywords: Staude's permanent rotations, high-frequency oscillations, rigid body, dynamic symmetry, stability, resonance.

MSC2010: 53A17, 70E20, 70E50

DOI: [10.20537/vm170409](https://doi.org/10.20537/vm170409)

The motion of a dynamically symmetric rigid body in a uniform gravity field is considered for the case of vertical high-frequency harmonic oscillations of small amplitude of one of its points (the suspension point). The investigation is carried out within the framework of an approximate autonomous system of differential equations of motion written in the canonical Hamiltonian form. A detailed description of admissible arcs of permanent rotations of the body about vertical axes is given. Special cases of motions of the body are found which are caused by fast vibrations of the suspension point. One of these cases is studied when the rotation axis lies in the principal plane of inertia which does not contain the center of mass of the body and does not coincide with the equatorial plane of inertia. A complete nonlinear stability analysis of the corresponding equilibrium position of the two-degree-of-freedom system is carried out. For all admissible

values of the three-dimensional parameter space, regions of linear stability are found. Cases of resonances of the third and fourth orders, as well as degeneration cases, are considered.

REFERENCES

1. Staude O. Ueber permanente Rotationsachsen bei der Bewegung eines schweren Körpers um einen festen Punkt, *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, 1894, issue 113, pp. 318–334.
DOI: [10.1515/crll.1894.113.318](https://doi.org/10.1515/crll.1894.113.318)
2. Mlodzeevskii B.K. About a permanent axis in the motion of a heavy rigid body around a fixed point, *Trudy Otdeleniya Fizicheskikh Nauk Obshchestva Lyubitelei Estestvoznaniya* (Proceedings of the Department of Physical Sciences of the Society of Naturalists), 1894, vol. 7, issue 1, pp. 46–48 (in Russian).
3. Kholostova O.V. *Issledovanie ustoichivosti permanentnykh vrashchenii Shtaude* (Investigation of stability of permanent rotations of Staude), Moscow–Izhevsk: Regular and Chaotic Dynamics, 2008, 128 p.
4. Grammel R. *Der kreisel. Seine theorie und seine anwendungen*, Berlin, 1950, bd. 1, 2. Translated under the title *Girooskop, ego teoriya i primeneniya*, vol. 1, 2, Moscow: Inostr. Lit., 1962.
5. Rumyantsev V.V. Stability of permanent rotations of a heavy rigid bodies, *Prikl. Mat. Mekh.*, 1956, vol. 20, issue 1, pp. 51–66 (in Russian).
6. Rumyantsev V.V. On stability of the rotation of a heavy rigid body with one fixed point in the case of S. V. Kovalevskaya, *Prikl. Mat. Mekh.*, 1954, vol. 18, issue 4, pp. 457–458 (in Russian).
7. Magnus K. *Kreisel. Theorie und anwendungen*, Berlin: Springer, 1971, 507 p. Translated under the title *Girooskop. Teoriya i primeneniya*, Moscow: Mir, 1974, 526 p.
8. Kovalev A.M., Savchenko A.Ia. Stability of uniform rotations of a rigid body about a principal axis, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1975, vol. 39, issue 4, pp. 623–633.
DOI: [10.1016/0021-8928\(75\)90063-5](https://doi.org/10.1016/0021-8928(75)90063-5)
9. Sergeev V.S. On the stability of permanent rotation of a heavy solid body about a fixed point, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1976, vol. 40, issue 3, pp. 370–378.
DOI: [10.1016/0021-8928\(76\)90028-9](https://doi.org/10.1016/0021-8928(76)90028-9)
10. Kovalev A.M., Savchenko A.Ya. Stability of stationary motions of Hamiltonian systems in the presence of fourth order resonance, *Mekh. Tverd. Tela* (Solid Mechanics), Kiev: Naukova Dumka, 1977, vol. 9, pp. 40–44 (in Russian).
11. Yudovich V.I. Vibrodynamics and vibrogeometry of mechanical systems with constraints, *Uspekhi Mekhaniki*, 2006, vol. 4, no. 3, pp. 26–158 (in Russian).
12. Blekhman I.I. *Vibratsionnaya mekhanika* (Vibration mechanics), Moscow: Fizmatlit, 1994, 400 p.
13. Strizhak T.G. *Metody issledovaniya dinamicheskikh sistem tipa "mayatnik"* (Methods of research of dynamic systems of the type "pendulum"), Alma-Ata: Nauka, 1981, 253 p.
14. Kholostova O.V. *Zadachi dinamiki tverdykh tel s vibriruyushchim podvesom* (Problems of dynamics of solids with vibrating suspension), Moscow–Izhevsk: Regular and Chaotic Dynamics, 2016, 308 p.
15. Markeev A.P. On the theory of motion of a rigid body with a vibrating suspension, *Doklady Physics*, 2009, vol. 54, issue 8, pp. 392–396. DOI: [10.1134/S10283335809080114](https://doi.org/10.1134/S10283335809080114)
16. Markeev A.P. The equations of the approximate theory of the motion of a rigid body with a vibrating suspension point, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2011, vol. 75, issue 2, pp. 132–139.
DOI: [10.1016/j.jappmathmech.2011.05.002](https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2011.05.002)
17. Markeev A.P. On the motion of a heavy dynamically symmetric body with vibrating suspension point, *Mechanics of Solids*, 2012, vol. 47, issue 4, pp. 373–379. DOI: [10.3103/S0025654412040012](https://doi.org/10.3103/S0025654412040012)
18. Kholostova O.V. On stability of relative equilibria of a rigid body with a vibrating point of support, *Vestn. Ross. Univ. Dr. Nar. Ser. Mat. Inform. Fiz.*, 2011, no. 2, pp. 111–122 (in Russian).
19. Belichenko M.V., Kholostova O.V. On the stability of stationary rotations in the approximate problem of motion of Lagrange's top with a vibrating suspension point, *Nelineinaya Dinamika*, 2017, vol. 13, no. 1, pp. 81–104 (in Russian). DOI: [10.20537/nd1701006](https://doi.org/10.20537/nd1701006)
20. Vishenkova E.A. Stability of special motions (permanent rotations) of a heavy rigid body with a suspension point vibrating along the vertical, *Nelineinaya Dinamika*, 2015, vol. 11, no. 3, pp. 459–474 (in Russian). DOI: [10.20537/nd1503002](https://doi.org/10.20537/nd1503002)
21. Vishenkova E.A., Kholostova O.V. On the influence of vertical vibrations on the stability of permanent rotations of a rigid body about axes lying in the main plane of inertia, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2017, vol. 27, issue 1, pp. 98–120 (in Russian). DOI: [10.20537/vm170109](https://doi.org/10.20537/vm170109)
22. Kholostova O.V. On the stability of the specific motions of a heavy rigid body due to fast vertical vibrations of one of its points, *Nelineinaya Dinamika*, 2015, vol. 11, no. 1, pp. 99–116 (in Russian).
DOI: [10.20537/nd1501005](https://doi.org/10.20537/nd1501005)

23. Markeev A.P. *Tochki libratsii v nebesnoi mekhanike i kosmodinamike* (Libration points in celestial mechanics and cosmodynamics), Moscow: Nauka, 1978, 312 p.
24. Arnold V.I., Kozlov V.V., Neishtadt A.I. *Mathematical aspects of classical and celestial mechanics*, Berlin: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006. DOI: [10.1007/978-3-540-48926-9](https://doi.org/10.1007/978-3-540-48926-9)

Received 28.09.2017

Vishenkova Ekaterina Alekseevna, Engineer–Programmer, Research and Production Company “Infosystem-35”, ul. Tret’ya Mytishchinskaya, 16, bld. 37, Moscow, 129626, Russia.

E-mail: vishenkova@bk.ru

Kholostova Ol’ga Vladimirovna, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Department of Theoretical Mechanics, Moscow Aviation Institute (National Research University), Volokolamskoe shosse, 4, Moscow, 125080, Russia;

Professor, Department of Theoretical Mechanics, Moscow Institute of Physics and Technology (State University), Institutskii per., 9, Dolgoprudnyi, Moscow oblast, 141700, Russia.

E-mail: kholostova_o@mail.ru