МАТЕМАТИКА 2018. Т. 28. Вып. 4

УДК 517.983.54

© *В. П. Танана, А. А. Ершова*

О РЕШЕНИИ ОБРАТНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ КОМПОЗИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ

В настоящей работе сформулирована, поставлена и решена обратная граничная задача теплопроводности, при условии, что коэффициент теплопроводности является кусочно-постоянным. Эта задача занимает важное место в технике, так как теплонагруженные узлы технических конструкций покрывают теплоизолирующим слоем, термические характеристики которого сильно отличаются от термических характеристик самой конструкции. Подобные задачи находят свое применение при планировании стендовых испытаний летательных аппаратов. Современные композитные материалы решают эту проблему, предоставляя разработчикам целый ряд преимуществ. В ракетных двигателях внутреннюю стенку камеры внутреннего сгорания покрывают теплозащитным слоем, который изготавливают из композитных материалов. Благодаря свойствам этих материалов теплозащитный слой значительно снижает температуру стенки внутреннего сгорания. При решении обратной граничной задачи необходимо учитывать разницу коэффициентов теплопроводности составных частей композитных материалов, из которых изготавливают стенку камеры. Задача исследовалась с помощью ряда Фурье по собственным функциям для уравнения с разрывным коэффициентом. Доказано, что для решения обратной задачи применимо преобразование Фурье по переменной времени. Для решения обратной задачи использовано преобразование Фурье, позволяющее свести обратную задачу к операторному уравнению, которое было решено методом невязки.

Ключевые слова: метод проекционной регуляризации, обратная задача теплопроводности, кусочно-постоянный коэффициент теплопроводности.

DOI: 10.20537/vm180404

В технических приложениях часто встречаются теплонагруженные узлы. Так как технические конструкции могут подвергаться тепловой нагрузке, то необходимо учитывать возможность воздействия тепла на конструкцию. Тепловая нагрузка может привести к изменению ряда свойств материала, что приведет к выводу устройства из строя, его повреждению или утрате важных эксплуатационных свойств.

Чтобы уменьшить тепловую нагрузку, можно наносить на узлы, подверженные тепловому воздействию, защитные покрытия. Таким образом, мы сталкиваемся с задачей о теплопроводности уже композитных материалов, свойства теплопроводности которых меняются скачком.

Для данного класса задач производная от решения по пространственной координате имеет точки разрыва. Отсюда следует, что классического решения задачи не существует.

Обобщенное решение для исследуемой задачи не подходит, так как в нем производная от решения по пространственной координате принадлежит пространству $L_2[0,1]\times[0,\infty)$. Следовательно, значение производной в точке 0 не определено.

В работе предлагается другое понятие решения. Это понятие, в отличие от классического, допускает точки разрыва производной по координате и, в отличие от обобщенного решения, позволяет определить производную в концевых точках.

§ 1. Постановка задачи и исследование прямой задачи

Пусть тепловой процесс описывается системой уравнений

$$\frac{\partial u_1(x,t)}{\partial t}=a_1^2\frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial x^2},\quad x\in(0,x_0),\quad t\in(0,\infty), \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial u_2(x,t)}{\partial t} = a_2^2 \frac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial x^2}, \quad x \in (x_0, 1), \quad t \in (0, \infty), \tag{1.2}$$

$$u_1(x,0) = 0, \quad x \in [0; x_0), \qquad u_2(x,0) = 0, \quad x \in (x_0; 1], \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial u_1(0,t)}{\partial x} = 0, \quad t \in (0, +\infty), \tag{1.4}$$

$$u_2(1,t) = q(t), \quad t \in (0, +\infty), \tag{1.5}$$

$$u_1(x_0,t) = u_2(x_0,t), \quad t \in (0, +\infty), \tag{1.6}$$

$$a_1 \frac{\partial u_1(x_0,t)}{\partial x} = a_2 \frac{\partial u_2(x_0,t)}{\partial x}, \quad t \in (0, \infty), \tag{1.7}$$

где используются следующие обозначения: x — пространственная координата, t — координата по времени.

Предположим, что функция $q(t)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$q(t) \in C^2[0, +\infty), \quad q(0) = q'(0) = 0, \tag{1.8}$$

и пусть существуют $r_1,\ b > 0$ и $\gamma_0 \in [0, 1/8]$ такие, что для любого $t \geqslant 0$ выполняются неравенства

$$\sup_{t \geqslant 0}\{|q(t)|,\ |q'(t)|,\ |q''(t)|\} \leqslant r_1, \ \text{а} \ \ |q(t)|^2 \leqslant b^2/(1+t^2)^{\frac{1}{2}(1+\gamma_0)}. \tag{1.9}$$

В прямой задаче (1.1)–(1.7) требуется найти функции $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$.

Будем искать формальное решение системы (1.1)–(1.7) в виде ряда по собственным функциям $\{S_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ соответствующей задачи Штурма–Лиувилля:

$$u(x,t) = q(t) - \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) S_n(x), \tag{1.10}$$

где функции $u(x,t)$ и $S_n(x)$ определены формулами

$$u(x,t) = \begin{cases} u_1(x,t), & x \in (0, x_0), \quad t \in (0, +\infty), \\ u_2(x,t), & x \in (x_0, 1), \quad t \in (0, +\infty), \end{cases} \qquad S_n(x) = \begin{cases} S_n^1(x), & x \in (0, x_0), \\ S_n^2(x), & x \in (x_0, 1). \end{cases}$$

Задача Штурма–Лиувилля для системы (1.1)–(1.7) приведена в [1].

Там же приведена система собственных функций $\{S_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$,

$$S_n(x) = \beta_n \begin{cases} \cos\left(\dfrac{\lambda_n x}{a_1}\right) \sin\left(\dfrac{\lambda_n (1-x_0)}{a_2}\right), & x \in [0, x_0], \\ \sin\left(\dfrac{\lambda_n (1-x)}{a_2}\right) \cos\left(\dfrac{\lambda_n x_0}{a_1}\right), & x \in [x_0, 1], \end{cases} \tag{1.11}$$

где

$$\beta_n^2 = \frac{2a_1 a_2}{a_2 x_0 \sin^2 \dfrac{\lambda_n(1-x_0)}{a_2} + a_1(1-x_0)\cos^2\left(\dfrac{\lambda_n x_0}{a_1}\right)}, \tag{1.12}$$

$$\lambda_n = \frac{\pi a_1 a_2 (2n-1)}{2(a_2 x_0 + a_1(1-x_0))}, \quad n = 1, 2, 3, ..., \tag{1.13}$$

а

$$u_n(t) = \frac{\alpha_n}{\lambda_n} \int_0^t \exp(-\lambda_n^2 (t-\tau)) q'(\tau)\, d\tau, \qquad \alpha_n = \beta_n \cos\left(\frac{\lambda_n x_0}{a_n}\right).$$

Утверждение 1. *Система функций $\{S_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ полна и ортонормирована в пространстве $L_2[0,1]$ с соответствующим весом.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ортонормированность системы функций $\{S_n(x)\}$ следует из вида соответствующей задачи Штурма–Лиувилля, а ее полнота — из того, что все $\lambda_n > 0$ на основании теоремы Гильберта–Шмидта [2]. □

Определение 1. Решение задачи (1.1)–(1.7) заключается в определении функций $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$, для которых выполняются следующие условия:

(1) $u_1(x,t)$ удовлетворяет уравнению (1.1) на множестве $(0,x_0)\times(0,\infty)$, а $u_2(x,t)$ удовлетворяет уравнению (1.2) на множестве $(x_0,1)\times(0,\infty)$;

(2) $u(x,t)\in C([0,1]\times[0,\infty))\bigcap C^{2,1}((0,x_0)\times(0,\infty))\bigcup C^{2,1}((x_0,1)\times(0,\infty))$;

(3) $u(x,t)$ удовлетворяет начальному условию (1.3), граничным условиям (1.4), (1.5), а также условиям согласования (1.6), (1.7).

Теперь докажем, что решение (1.10) задачи (1.1)–(1.7) удовлетворяет этим условиям. Для этого докажем несколько лемм.

Приведем одно полезное равенство. Для этого разделим обе части соотношения (1.13) на число $\dfrac{a_1a_2}{2(a_1(1-x_0)+a_2x_0)}$ и, произведя в правой части дроби почленное деление, получим

$$\frac{\lambda_n(1-x_0)}{a_2}+\frac{\lambda_n x_0}{a_1}=\frac{\pi(2n-1)}{2},$$

откуда

$$\frac{\lambda_n(1-x_0)}{a_2}=\frac{\pi(2n-1)}{2}-\frac{\lambda_n x_0}{a_1}. \tag{1.14}$$

Вычисляя синус от правой и левой частей равенства (1.14), окончательно получим

$$\sin\left(\frac{\lambda_n(1-x_0)}{a_2}\right)=(-1)^{n+1}\cos\left(\frac{\lambda_n x_0}{a_1}\right). \tag{1.15}$$

Лемма 1. *Пусть число β_n^2 определено формулой* (1.12). *Тогда для любого n выполнено*

$$\beta_n^2\cos^2\left(\frac{\lambda_n x_0}{a_1}\right)=\frac{2a_1a_2}{a_2x_0+a_1(1-x_0)}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из равенства (1.15) следует, что

$$\sin^2\left(\frac{\lambda_n(1-x_0)}{a_2}\right)=\cos^2\left(\frac{\lambda_n x_0}{a_1}\right),$$

а из (1.12) — что

$$\beta_n^2=\frac{2a_1a_2}{(a_2x_0+a_1(1-x_0))\cos^2\dfrac{\lambda_n x_0}{a_1}}.$$

Таким образом,

$$\beta_n^2\cos^2\left(\frac{\lambda_n x_0}{a_1}\right)=\frac{2a_1a_2}{a_2x_0+a_1(1-x_0)}.$$

Тем самым лемма доказана. □

Лемма 2. *Пусть* $\dfrac{a_1}{2(a_2x_0+a_1(1-x_0))}<1$. *Тогда для любого достаточно малого* $\varepsilon>0$ *функциональные ряды* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\beta_n^2}{\lambda_n}\cos^2\left(\frac{\lambda_n x_0}{a_1}\right)\sin\left(\frac{\lambda_n(1-x)}{a_2}\right)$, $x\in[x_0,1)$, *и*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\beta_n^2}{\lambda_n}\cos\left(\frac{\lambda_n x_0}{a_1}\right)\sin\left(\frac{\lambda_n(1-x_0)}{a_2}\right)\cos\left(\frac{\lambda_n x}{a_1}\right),\quad x\in[0,x_0],$$

сходятся равномерно. Первый ряд сходится на отрезке $[x_0;1-\varepsilon]$, *а второй ряд — на* $[0,x_0]$.

Доказательство. Рассмотрим первый ряд. Согласно лемме 1 этот ряд сведется к следующему

$$\frac{2a_1a_2}{a_1(1-x_0)+a_2x_0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(\dfrac{\lambda_n(1-x)}{a_2}\right)}{\lambda_n}. \tag{1.16}$$

Теперь докажем, что для любого достаточно малого $\varepsilon>0$ ряд (1.16) сходится равномерно на отрезке $[x_0,1-\varepsilon]$. Заметим, что поскольку множитель, стоящий перед знаком ряда (1.16), на равномерную сходимость не влияет, то мы его опустим. Затем в самом ряде сделаем замену

$$y=\frac{\pi a_1}{2(a_2x_0+a_1(1-x_0))}(1-x),$$

которая позволит свести ряд (1.16) к более простому виду:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)y}{\lambda_n}. \tag{1.17}$$

Для доказательства равномерной сходимости ряда (1.17) используем признак Дирихле. Разбив слагаемые ряда (1.17) на два множителя, заметим, что последовательность $\left\{\dfrac{1}{\lambda_n}\right\}$, убывая, стремится к нулю при $n\to\infty$, а для второй последовательности $\{\sin(2n-1)y\}$ справедливо соотношение

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists d_1(\varepsilon)\ \ \forall N\ \forall y\in\left[\frac{\pi a_1\varepsilon}{2(a_2x_0+a_1(1-x_0))},\frac{\pi a_1(1-x_0)}{2(a_2x_0+a_1(1-x_0))}\right],$$

$$\left|\sum_{n=1}^{N}\sin(2n-1)y\right|\leqslant d_1(\varepsilon). \tag{1.18}$$

Для доказательства (1.18) сумму, стоящую под знаком модуля в левой части (1.18), умножим и поделим на $2\sin y$. После чего она примет вид

$$\sum_{n=1}^{N}\sin(2n-1)y=\frac{1}{2\sin y}\left[\sum_{n=1}^{N}2\sin y\sin(2n-1)y\right]. \tag{1.19}$$

Так как $2\sin y\cdot\sin(2n-1)y=\cos 2(n-1)y-\cos 2ny$, то из (1.19)

$$\left|\sum_{n=1}^{N}\sin(2n-1)y\right|\leqslant\frac{1}{|\sin y|}. \tag{1.20}$$

Из (1.20) следует, что существует $d_1(\varepsilon)$, например $d_1(\varepsilon)=\dfrac{2(a_2x_0+a_1(1-x_0))}{\pi a_1\varepsilon}$. Тем самым мы доказали, что для любого $\varepsilon>0$ первый ряд сходится равномерно на отрезке $[x_0,1-\varepsilon]$.

Теперь перейдем к доказательству равномерной сходимости второго ряда. Для этого с помощью леммы 1 и формулы (1.15) сведем второй ряд к виду

$$\frac{2a_1a_2}{a_2x_0+a_1(1-x_0)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\lambda_n}\cos\left(\frac{\lambda_n x}{a_2}\right),\quad 0\leqslant x\leqslant x_0. \tag{1.21}$$

Далее, используя замену

$$z=\frac{\pi a_1 x}{2(a_2x_0+a_1(1-x_0))}, \tag{1.22}$$

сведем ряд (1.21) к более простому:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\lambda_n}\cos(2n-1)z. \tag{1.23}$$

Каждое слагаемое ряда (1.23) разложим на два множителя: $\dfrac{1}{\lambda_n}$ и $(-1)^n\cos(2n-1)z$.

Из формулы (1.13) следует, что последовательность $\left\{\dfrac{1}{\lambda_n}\right\}$, убывая, стремится к нулю при $n\to\infty$.

Теперь докажем существование числа $d_2>0$ такого, что

$$\forall N \text{ и } \forall z\in\left[0,\frac{\pi a_1x_0}{2(a_2x_0+a_1(1-x_0))}\right] \text{ выполняется } \left|\sum_{n=1}^{N}(-1)^{n+1}\cos(2n-1)z\right|\leqslant d_2. \tag{1.24}$$

Так как $\cos(2n-1)z-\cos(2n+1)z=-2\sin z\cdot\sin 2nz$, то из (1.24) следует, что

$$\sum_{n=1}^{N}(-1)^{n+1}\cos(2n-1)z=2\sin z\sum_{n=1}^{N}\sin 2nz,$$

а ввиду того, что $\left|\sum_{n=1}^{N}\sin 2nz\right|\leqslant\dfrac{2}{|2\sin z|}$, получим $\left|\sum_{n=1}^{N}(-1)^{n+1}\cos(2n-1)z\right|\leqslant 2$.

Равномерная сходимость ряда (1.23) на отрезке $\left[0,\dfrac{\pi a_1x_0}{2(a_2x_0+a_1(1-x_0))}\right]$ следует из признака Дирихле, а следовательно, ввиду (1.22) следует равномерная сходимость ряда (1.21) на отрезке $[0,x_0]$.

Тем самым лемма доказана. □

Теорема 1. *Пусть функция $q(t)$ удовлетворяет условиям (1.8), (1.9). Тогда существует решение задачи (1.1)–(1.7), удовлетворяющее определению 1.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проинтегрируем каждое слагаемое ряда (1.10) по частям. После чего

$$\alpha_n\frac{S_n(x)}{\lambda_n}\int_0^t\exp(-\lambda_n^2(t-\tau))q'(\tau)\,d\tau=q'(t)\left[\frac{\alpha_nS_n(x)}{\lambda_n^3}\right]-\frac{\alpha_nS_n(x)}{\lambda_n^3}\int_0^t\exp(-\lambda_n^2(t-\tau))q''(\tau)\,d\tau.$$

Из (1.9), (1.11)–(1.13) следует, что для любых n и $t\geqslant 0$

$$\left|\int_0^t\exp(-\lambda_n^2(t-\tau))q''(\tau)\,d\tau\right|\leqslant\frac{r_1}{\lambda_n^2}, \tag{1.25}$$

а из (1.11) и (1.25) следует, что для любых $d_3>0$, n и $t\geqslant 0$

$$\left|\alpha_n\frac{S_n(x)}{\lambda_n}\int_0^t\exp(-\lambda_n^2(t-\tau))q'(\tau)\,d\tau\right|\leqslant\frac{d_3}{\lambda_n^3}.$$

Так как из (1.13) следует, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^3}<\infty$, то по признаку Вейерштрасса ряд (1.10) сходится равномерно на полосе $[0,1]\times[0,\infty)$ и, следовательно,

$$u(x,t)\in C([0,1]\times[0,\infty)).$$

Совершенно аналогично доказывается, что

$$\frac{\partial u_1(x,t)}{\partial x}\in C([0,x_0]\times(0,\infty)) \quad \text{и} \quad \frac{\partial u_2(x,t)}{\partial x}\in C([x_0,1]\times(0,\infty)),$$

а также выполнены условия (1.7) и существует $r_3>0$ для любого $x\in[0,1]$ и $t\geqslant 0$:

$$\left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|\leqslant r_3. \tag{1.26}$$

Теперь перейдем к исследованию $\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$. Для этого рассмотрим ряд составленных из вторых производных по x членов ряда (1.10). Тогда интересующий нас ряд будет иметь вид

$$-q'(t)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha_n S_n''(x)}{\lambda_n^3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha_n S_n''(x)}{\lambda_n^3}\int_0^t\exp(-\lambda_n^2(t-\tau))q''(\tau)\,d\tau, \tag{1.27}$$

где $0\leqslant x\leqslant x_0-\varepsilon,\quad x_0+\varepsilon\leqslant x\leqslant 1-\varepsilon,\quad \varepsilon>0,\ t>0.$

Так как

$$\forall\varepsilon>0\quad \forall x\in[0,x_0-\varepsilon]\bigcup[x_0+\varepsilon,1-\varepsilon],$$

$$|\alpha_n S_n''(x)|\leqslant\lambda_n^2A^2\sqrt{\frac{2a_1a_2}{a_2x_0+a_1(1-x_0)}},$$

где $A=\max(1/a_1,1/a_2)$, то

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists r_2(\varepsilon)$$

$$\left|\frac{\alpha_n S_n''(x)}{\lambda_n^3}\int_0^t\exp(-\lambda_n^2(t-\tau))q''(\tau)\,d\tau\right|\leqslant\frac{Ar_2(\varepsilon)}{\lambda_n^2} \tag{1.28}$$

при $x\in[\varepsilon,x_0-\varepsilon]\bigcup[x_0+\varepsilon,1-\varepsilon]$ и $t>0$.

Из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\lambda_n^2}$, на основании (1.28), для любого $\varepsilon>0$ следует равномерная сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha_n S_n''(x)}{\lambda_n^3}\int_0^t\exp(-\lambda_n^2(t-\tau))q''(\tau)\,d\tau$$

на множестве $[0,x_0-\varepsilon]\bigcup[x_0+\varepsilon,1-\varepsilon]\times[\varepsilon,\infty)$.

Теперь перейдем к исследованию первого ряда, из выражения (1.27)

$$-q'(t)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha_n S_n''(x)}{\lambda_n^3},\quad 0\leqslant x\leqslant x_0-\varepsilon,\quad x_0+\varepsilon\leqslant x\leqslant 1-\varepsilon,\ t>0.$$

Так как для любого $\varepsilon>0$ производные

$$S_n''(x)=\begin{cases}-\lambda_n^2S_n^1(x)\cdot a_1^{-2} & \text{при}\ \ x\in[0,x_0-\varepsilon],\\ -\lambda_n^2S_n^2(x)\cdot a_2^{-2} & \text{при}\ \ x\in[x_0+\varepsilon,1-\varepsilon],\end{cases} \tag{1.29}$$

то для любого $\varepsilon > 0$ из (1.29) следует, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n S_n''(x)}{\lambda_n^3} = \begin{cases} a_1^{-2} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\alpha_n S_n^1(x)}{\lambda_n}, & x \in [0, x_0 - \varepsilon], \\ a_2^{-2} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\alpha_n S_n^2(x)}{\lambda_n}, & x \in [x_0 + \varepsilon, 1 - \varepsilon]. \end{cases} \tag{1.30}$$

Из леммы 2 следует, что для любого $\varepsilon > 0$ ряды, стоящие в правой части (1.30), сходятся равномерно на $[0, x_0 - \varepsilon] \bigcup [x_0 + \varepsilon, 1 - \varepsilon]$.

Таким образом, $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists r_3(\varepsilon) \; \forall x \in [0, x_0 - \varepsilon] \bigcup [x_0 + \varepsilon, 1 - \varepsilon]$ и $t \geqslant \varepsilon$,

$$\left| \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \right| \leqslant r_3(\varepsilon). \tag{1.31}$$

Кроме того, $\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \in C\{([0, x_0) \bigcup (x_0, 1)) \times (0, \infty)\}$, а также $u_1(x,t)$ удовлетворяет уравнению (1.1) на $[0, x_0) \times (0, \infty)$, а $u_2(x,t)$ — уравнению (1.2) на $(x_0, 1) \times (0, \infty)$, и, следовательно, доказано, что решение $u(x,t)$ удовлетворяет всем условиям, приведенным в определении 1. $\square$

§ 2. Постановка обратной граничной задачи

Предположим, что в условии (1.5) функция $q(t)$ неизвестна, а вместо нее дана функция $f(t)$, определяемая формулой

$$u(x_0, t) = f(t). \tag{2.1}$$

Требуется, используя $f(t)$, определить функцию $q(t)$ такую, что при подстановке ее в условие (1.5) решение $u(x,t)$ задачи (1.1)–(1.7) удовлетворяет соотношению (2.1).

Так как обратная задача некорректно поставлена, то дополнительно предположим, что при $f(t) = f_0(t) \in C[0, \infty)$ существует решение $q_0(t)$ обратной задачи (1.1)–(1.4), (2.1), удовлетворяющее условиям (1.8), (1.9), а при подстановке функции $q_0(t)$ в условие (1.5) прямой задачи (1.1)–(1.7) решение этой задачи будет удовлетворять условию (2.1), но вместо функции $f_0(t)$ нам даны некоторое приближение $f_\delta(t) \in C[0, \infty)$ и уровень погрешности $\delta > 0$ такие, что

$$\sup_{t \geqslant 0} |f_\delta(t) - f_0(t)| \leqslant \delta. \tag{2.2}$$

Требуется, используя исходные данные (f_δ, δ) и условие (2.2), определить функцию q_δ и оценить величину $\|q_\delta - q_0\|$.

Замечание 1. Теорему единственности решения задачи (1.1)–(1.7), играющую важную роль при дальнейшем изложении, мы докажем чуть позже, когда будет построен математический аппарат для решения обратной задачи.

§ 3. Сведение задачи (1.1)–(1.7) к задаче, для которой применимо преобразование Фурье по t

Заметим, что для получения оценки погрешности приближенного решения обратной задачи важную роль играет преобразование Фурье по t, но условий (1.8) и (1.9), наложенных на функцию $q(t)$, не достаточно для применения преобразования Фурье к задаче (1.1)–(1.7). Для решения этой проблемы сделаем замену, то есть введем новую функцию

$$v(x,t) = \begin{cases} v_1(x,t), & 0 \leqslant x < x_0, \\ v_2(x,t), & x_0 \leqslant x < 1, \end{cases} \quad t \geqslant 0,$$

которую определим формулой

$$v(x,t) = u(x,t) e^{-\overline{b}t}, \;\; \overline{b} > 0, \;\; x \in [0,1], \;\; t \geqslant 0. \tag{3.1}$$

Новая функция $v(x,t)$ будет удовлетворять следующей системе уравнений:

$$\frac{\partial v_1(x,t)}{\partial t} = a_1^2 \frac{\partial v_1(x,t)}{\partial x^2} - \overline{b} v_1(x,t), \quad 0 < x < x_0, \ t > 0, \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial v_2(x,t)}{\partial t} = a_2^2 \frac{\partial v_2(x,t)}{\partial x^2} - \overline{b} v_2(x,t), \quad x_0 < x < 1, \ t > 0, \tag{3.3}$$

$$v_1(x,0) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant x_0, \quad v_2(x,0) = 0, \ x_0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{3.4}$$

$$\frac{\partial v_1(0,t)}{\partial x} = 0, \qquad t > 0, \tag{3.5}$$

$$v_2(1,t) = h(t); \quad t > 0, \tag{3.6}$$

где

$$h(t) = q(t) e^{-\bar{b}t}, \tag{3.7}$$

$$v_1(x_0,t) = v_2(x_0,t), \quad t > 0, \tag{3.8}$$

$$a_1 \frac{\partial v_1(x_0,t)}{\partial x} = a_2 \frac{\partial v_2(x_0,t)}{\partial x}, \quad t > 0. \tag{3.9}$$

По аналогии с задачей (1.1)–(1.4), (2.1), обратной к задаче (1.1)–(1.7), поставим обратную задачу к преобразованной задаче (3.2)–(3.9).

То есть в этой задаче функцию $h_0(t)$, определяемую формулой (3.7) и стоящую в условии (3.6), будем считать неизвестной. Вместо нее дана функция $g_0(t)$:

$$g_0(t) = v(x_0,t).$$

Так же как и в задаче (1.1)–(1.4), (2.1), эту функцию будем считать заданной приближенно, и

$$\|g_\delta(t) - g_0(t)\|_{L_2} \leqslant \frac{\delta}{\sqrt{2\overline{b}}}. \tag{3.10}$$

Из (1.8) будет следовать, что

$$h_0(t) \in H_0^2[0,\infty), \quad h_0(0) = h_0'(0) = 0, \tag{3.11}$$

$$\|h_0(t)\|^2_{H_0^2[0,\infty)} \leqslant \frac{r_1^2}{2\overline{b}}. \tag{3.12}$$

Из формул (3.1) и соотношений (1.26) и (1.31) будет следовать применимость преобразования Фурье по t к задаче (3.2)–(3.9).

После преобразования Фурье по t сведем эту задачу к следующей:

$$i\tau\widehat{v}_1(x,\tau) = a_1^2 \frac{\partial^2 \widehat{v}_1(x,\tau)}{\partial x^2} - \overline{b}\widehat{v}_1(x,\tau), \ x \in (0,x_0), \ \tau \in (-\infty,\infty),$$

$$i\tau\widehat{v}_2(x,\tau) = a_2^2 \frac{\partial \widehat{v}_2(x,\tau)}{\partial x^2} - \overline{b}\widehat{v}_2(x,\tau), \quad x \in (x_0,1), \quad \tau \in (-\infty,\infty),$$

$$\frac{\partial \widehat{v}_1(0,\tau)}{\partial x} = 0, \quad -\infty < \tau < \infty,$$

$$\widehat{v}_1(x_0,\tau)=\widehat{v}_2(x_0,\tau),\quad -\infty<\tau<\infty, \tag{3.13}$$

где $\widehat{v}_1(x,\tau)=F_t[v_1(x,t)]$, $\widehat{v}_2(x,\tau)=F_t[v_2(x,t)]$,

$$\widehat{v}(x,\tau)=\begin{cases}\widehat{v}_1(x,\tau), & x\in[0,x_0],\\ \widehat{v}_2(x,\tau), & x\in[x_0,1],\end{cases}$$

F_t — преобразование Фурье по t, а $\widehat{v}(x_0,\tau)=\widehat{g}(\tau)$, $-\infty<\tau<\infty$. Используя функцию $g(\tau)$, требуется определить функцию $\widehat{v}(1,\tau)=\widehat{h}(\tau)$, $-\infty<\tau<\infty$. Решая обратную задачу (3.13), сведем ее к операторному уравнению:

$$T(\tau)\widehat{h}(\tau)=\widehat{g}(\tau),\quad -\infty<\tau<\infty, \tag{3.14}$$

где

$$T(\tau)=\frac{\mathrm{ch}\{\sqrt{b+i\tau}(1-x_0)/a_2\}}{\mathrm{ch}\{\sqrt{b+i\tau}(x_0/a_1+(1-x_0))/a_2\}},\quad -\infty<\tau<\infty. \tag{3.15}$$

Так как обратная граничная задача (1.1)–(1.4), (2.1) сводится к последней обратной задаче (3.14), (3.15) с помощью конечного числа инъективных преобразований, то отсюда следует единственность решения обратной задачи (1.1)–(1.4), (2.1).

§ 4. Теорема единственности решения задачи (1.1)–(1.7)

Теорема 2. *При условиях на функцию $g(t)$, сформулированных в теореме 1, прямая задача (1.1)–(1.7) имеет единственное решение.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим противное, т. е. что задача (1.1)–(1.7) имеет два различных решения — $u^1(x,t)$ и $u^2(x,t)$, причем

$$u^1(x,t)\neq u^2(x,t). \tag{4.1}$$

Так как задача (1.1)–(1.7) с помощью конечного набора инъективных преобразований сводится к задаче (3.14), то из (4.1) следует, что задача (3.13) имеет два различных решения — $\widehat{v}^1(x,\tau)$ и $\widehat{v}^2e(x,\tau)$, т. е.

$$\widehat{v}^1(x,\tau)\neq\widehat{v}^2(x,\tau). \tag{4.2}$$

Из (4.2) следует, что функция $\widehat{z}(x,\tau)$ такова, что

$$\widehat{z}(x,\tau)=\widehat{v}^1(x,\tau)-\widehat{v}^2(x,\tau)\neq 0. \tag{4.3}$$

Причем из (3.13) следует, что функция $\widehat{z}(x,\tau)$ будет удовлетворять следующей системе уравнений:

$$i\tau\widehat{z}_1(x,\tau)=a_1^2\frac{\partial^2\widehat{z}_1(x,\tau)}{\partial x^2}-\overline{b}\widehat{z}_1(x,\tau),\quad x\in(0,x_0),\quad \tau\in(-\infty,\infty),$$

$$i\tau\widehat{z}(x,\tau)=a_2^2\frac{\partial^2\widehat{z}_2(x,\tau)}{\partial x^2}-\overline{b}\widehat{z}_2(x,\tau),\quad x\in(x_0,\tau),\quad \tau\in(-\infty,\infty),$$

$$\frac{\partial\widehat{z}_1(0,\tau)}{\partial x}=0,\quad \tau\in(-\infty,\infty),$$

$$\widehat{z}_2(1,\tau)=0,\quad \tau\in(-\infty,\infty), \tag{4.4}$$

$$\widehat{z}_1(x_0,\tau)=\widehat{z}_2(x_0,\tau)=0,\quad \tau\in(-\infty,\infty),$$

$$a_1\frac{\partial\widehat{z}_1(x_0,\tau)}{\partial x}=a_2\frac{\partial\widehat{z}_2(x_0,\tau)}{\partial x},\quad \tau(-\infty,\infty).$$

Решая первые два уравнения системы (4.4), получим

$$\widehat{z}_1(x,\tau)=D_1\operatorname{ch}(\sqrt{i\tau+b}\cdot x/a_1),\tag{4.5}$$

а

$$\widehat{z}_2(x,\tau)=D_2\operatorname{ch}(\sqrt{i\tau+b}\cdot(1-x)/a_2),\tag{4.6}$$

коэффициенты D_1 и D_2, определенные формулами (4.5), (4.6), удовлетворяют системе уравнений

$$D_1\operatorname{ch}(\sqrt{i\tau+b}\cdot x_0/a_1)=D_2\operatorname{sh}(\sqrt{i\tau+b}\cdot(1-x_0)/a_2),$$

$$D_1(\sqrt{i\tau+b})\operatorname{sh}(\sqrt{i\tau+b}\cdot x_0/a_1)=-D_2\sqrt{i\tau+b}\operatorname{ch}(\sqrt{i\tau+b}\cdot(1-x_0)/a_2).\tag{4.7}$$

Система уравнений (4.7) относительно D_1 и D_2 однородна, а определитель этой системы не равен нулю. Таким образом, $D_1=D_2=0$, а

$$\widehat{z}(x,\tau)=0,\quad x\in[0,1],\ \tau\in(-\infty,\infty).\tag{4.8}$$

Из (4.3) и (4.8) следует, что

$$\widehat{v}^1(x,\tau)=\widehat{v}^2(x,\tau),\quad x\in[0,1],\ \tau\in(-\infty,\infty),$$

что противоречит (4.2). Тем самым теорема доказана. □

§ 5. Решение операторного уравнения (3.14), (3.15)

Уравнение (3.14) является некорректной задачей. Потому для решения этого уравнения необходима дополнительная информация.

Предположим, что при $\widehat{g}(\tau)=\widehat{g}_0(\tau)\in L_2(-\infty,\infty)$ существует точное решение $\widehat{h}_0(\tau)$, т. е.

$$T(\tau)\cdot\widehat{h}_0(\tau)=\widehat{g}_0(\tau),\quad \tau\in(-\infty,\infty),\tag{5.1}$$

но $\widehat{g}_0(\tau)$ неизвестна, а вместо нее дана функция $\widehat{g}_\delta(\tau)$ такая, что на основании (3.10)

$$\|\widehat{g}_\delta(\tau)-\widehat{g}_0(\tau)\|^2_{L_2}\leqslant\frac{\delta^2}{2\overline{b}}.\tag{5.2}$$

Кроме того, из (3.11), (3.12) следует, что

$$\widehat{h}_0(\tau)\in\widehat{H}^2(-\infty,\infty),\tag{5.3}$$

где

$$\|\widehat{h}_0(\tau)\|^2_{\widehat{H}^2}=\int_{-\infty}^{\infty}(1+\tau^2)\|\widehat{h}_0(\tau)\|^2\,d\tau,\tag{5.4}$$

а из (3.12) — что

$$\|\widehat{h}_0(\tau)\|^2_{\widehat{H}^2}\leqslant\frac{\tau_1^2}{2\overline{b}}.\tag{5.5}$$

Для решения задачи (3.14), (5.1)–(5.5) используем известный метод невязки [3–5]. Этот метод заключается в сведении данной задачи к вариационной:

$$\inf\left\{\|\widehat{h}(\tau)\|^2_{\widehat{H}^2}:\|T(\tau)\widehat{h}(\tau)-\widehat{g}_\delta(\tau)\|^2_{L_2}\leqslant\frac{\delta^2}{2\overline{b}}\right\}.\tag{5.6}$$

Из [5] следуют существование и единственность решения задачи (5.6). Обозначим это решение через $\widehat{h}_\delta(\tau)$ и назовем его приближенным решением уравнения (3.14).

Из [6] следует, что для этого решения справедлива оценка

$$\|\widehat{h}_\delta(\tau)-\widehat{h}_0(\tau)\|_{L_2}\leqslant\sqrt{\frac{2}{\overline{b}}}\omega(\delta,r_1), \tag{5.7}$$

где, следуя [7],

$$\omega(\delta,\tau_1)=\sup_{\widehat{h}(\tau)}\Big\{\|\widehat{h}(\tau)\|_{L_2}\ :\ \|\widehat{h}(\tau)\|^2_{\widehat{H}^2}\leqslant r_1^2,\ \ \|T(\tau)\widehat{h}(\tau)-\widehat{g}_\delta(\tau)\|^2\leqslant\delta^2\Big\}. \tag{5.8}$$

Из [8, 9], (5.7), (5.8) следует существование числа $\overline{A}>0$ такого, что при достаточно малых значениях $\delta>0$

$$\omega(\delta,r_1)\leqslant\overline{A}\ln^{-2}(1/\delta). \tag{5.9}$$

Теперь, используя функцию $\widehat{h}_\delta(\tau)$, определим приближенное решение $h_\delta(t)$ обратной задачи (3.2)–(3.5), (3.8)–(3.10):

$$h_\delta(t)=\begin{cases}\Re[F_t^{-1}(\widehat{h}_\delta^{-1}(\tau))], & t\geqslant 0,\\ 0, & t>0.\end{cases} \tag{5.10}$$

Так как преобразование Фурье F_t изометрично в пространстве $L_2(-\infty,\infty)$, то из (5.8)–(5.10) следует, что

$$\|h_\delta(t)-h_0(t)\|_{L_2}\leqslant\frac{\overline{A}}{\sqrt{2\overline{b}}}\ln^{-2}(1/\delta). \tag{5.11}$$

§ 6. Решение основной обратной задачи

Из (1.9) следует, что решение обратной задачи $q_0(t)$ удовлетворяет условию

$$|q_0(t)|^2\leqslant b^2(1+t^2)^{-(\frac{1}{2}+\gamma_0)},\ \ \gamma_0\in(0,1/8),\ \ t\geqslant 0, \tag{6.1}$$

а из (3.7) следует, что

$$q(t)=e^{\overline{b}t}\cdot h(t)=P(h(t)), \tag{6.2}$$

где P — линейный замкнутый оператор в пространстве $L_2[0,\infty)$.

Известно, что при $h(t)=h_0(t)$ существует функция $q_0(t)$, удовлетворяющая задаче (6.2). Предположим, что функция $h_0(t)$ неизвестна, а вместо нее дана функция $h_\delta(t)$, определяемая формулой (5.10). Тогда из (5.11) следует, что

$$\|h_\delta(t)-h_0(t)\|_{L_2}\leqslant\frac{\overline{A}}{\sqrt{2\overline{b}}}\ln^{-2}(1/\delta). \tag{6.3}$$

Заметим, что

$$\int_0^\infty(1+t^2)^{-(1+\gamma)/2}\,dt\leqslant 2/\gamma_0. \tag{6.4}$$

Из (6.1) и (6.4) следует, что для любого $\gamma\in(0,\gamma_0)$

$$\int_0^\infty|q_0(t)|^2t^{\gamma-\gamma_0}\,dt\leqslant\frac{4\overline{b}^2}{\gamma}. \tag{6.5}$$

Величину $4\overline{b}^2/\gamma$ обозначим через $r^2(\gamma)$.

Теперь перейдем к решению задачи (6.2), (6.3) и (6.5). Для ее решения используем нелинейный метод проекционной регуляризации [10]:

$$q_\delta(t) = P_\delta[h_\delta(t)] = \begin{cases} h_\delta(t)e^{\overline{b}t}, & t \in [0, \overline{\alpha}(\delta, h_\delta)], \\ 0, & t \geqslant \overline{\alpha}(\delta, h_\delta), \end{cases} \tag{6.6}$$

где $\overline{\alpha}(\delta, h_\delta)$ — решение уравнения

$$\int_\alpha^\infty h_\delta^2(t)\,dt = \frac{8\overline{A}^2}{\overline{b}} \ln^{-4}\left(\frac{1}{\delta}\right). \tag{6.7}$$

Из [10], леммы 2 следует, что при условии $\int_0^\infty h^2(t)dt > \dfrac{8\overline{A}^2}{\overline{b}} \ln^{-4}(1/\delta)$ существует решение $\overline{\alpha}(\delta, h_\delta)$ уравнения (6.7), которое однозначно определяет $q_\delta(t)$.

Теперь перейдем к оценке величины $\|q_\delta(t) - q_0(t)\|_{L_2}$.

Для любого $\gamma \in (0, \gamma_0]$ введем множество

$$M_\gamma = \left\{ q(t)\colon |q(t)| \cdot t^{\frac{\gamma-\gamma_0}{2}} \in L_2[0,\infty),\ \int_0^\infty |q(t)|^2 t^{\gamma-\gamma_0}\,dt \leqslant r^2(\gamma) \right\}, \tag{6.8}$$

где $r^2(\gamma) = \dfrac{4}{\gamma}$.

Из (6.5) и (6.8) следует, что для любого $\gamma \in (0, \gamma_0]$ имеет место включение

$$q_0(t) \in M_\gamma. \tag{6.9}$$

Из (5.11), (6.2), (6.5), (6.6), (6.9) и из теоремы, доказанной в [10], следует, что

$$\|q_\delta(t) - q_0(t)\|_{L_2} \leqslant 7\omega_\gamma(r(\gamma), \mu(\delta)), \tag{6.10}$$

где для любого $\gamma \in (0, \gamma_0]$

$$\omega_\gamma(r(\gamma), \mu(\delta)) = \sup\left\{ \|q(t)\|_{L_2}\colon q(t) \in M_\gamma,\ \|P^{-1}q(t)\|_{L_2} \leqslant \mu(\delta) \right\}, \tag{6.11}$$

а $\mu(\delta) = \dfrac{\overline{A}}{\sqrt{2\overline{b}}} \ln^{-2}\left(\dfrac{1}{\delta}\right)$. Так как $q_0(t) \in M_\gamma$ и $\|h_\delta(t)\| > 4\mu(\delta)$, то, следуя [9, 10], а также соотношениям (6.10), (6.11), получим

$$\|q_\delta(t) - q_0(t)\|_{L_2} \leqslant \frac{14\overline{b}}{\sqrt{\gamma}} G_\gamma(\chi(\delta, \gamma)), \tag{6.12}$$

где функция $G_\gamma(\chi)$ определена параметрически:

$$\overline{G}_\gamma(\theta) = \theta^{-(\frac{\gamma-\gamma_0}{2})},\ \chi = e^{-\overline{b}\theta}, \tag{6.13}$$

а $\chi(\delta, \gamma)$ удовлетворяет уравнению

$$G_\gamma(\chi)\chi = \frac{\mu(\delta)}{r(\gamma)}. \tag{6.14}$$

Из (6.13) следует, что

$$G_\gamma(\chi) = \frac{\overline{b}^{\frac{\gamma-\gamma_0}{2}}}{\ln^{\frac{\gamma-\gamma_0}{2}}\left(\dfrac{1}{\chi}\right)}. \tag{6.15}$$

Так как из (6.15) следует, что функция $G_\gamma(\chi)$ строго возрастает, то уравнение (6.14) заменим более простым:

$$\overline{b}^{\frac{\gamma-\gamma_0}{2}}\chi^2 = \frac{\mu(\delta)}{r(\gamma)}. \tag{6.16}$$

Решая уравнение (6.16), получим

$$\overline{\chi}(\delta,\gamma) = \left[\frac{\mu(\delta)}{\tau(\gamma)}\cdot \overline{b}^{\frac{\gamma_0-\gamma}{2}}\right]^{1/2}. \tag{6.17}$$

Ввиду того что

$$\ln^{\frac{\gamma_0-\gamma}{2}}\left(\frac{1}{\chi}\right) > \chi \quad \text{при } \chi\in(0,1),$$

и на основании (6.14) и (6.17) будем иметь, что

$$\chi(\delta,\gamma) < \overline{\chi}(\delta,\gamma).$$

Из (6.12), (6.15) и (6.17) для любого $\gamma\in(0,\gamma_0)$ следует, что

$$\|q_\delta(t)-q_0(t)\|_{L_2} \leqslant \frac{14\overline{b}}{\sqrt{\gamma}}G_\gamma[\overline{\chi}(\delta,\gamma)], \tag{6.18}$$

а из (6.18) — что

$$\|q_\delta(t)-q_0(t)\|_{L_2} \leqslant \inf_{\gamma\in(0,\gamma_0]}\frac{14\overline{b}}{\sqrt{\gamma}}G_\gamma[\overline{\chi}(\delta,\gamma)]. \tag{6.19}$$

Из (6.19) следует, что для уточнения оценки величины $\|q_\delta(t)-q_0(t)\|$ необходимо взять $\gamma=\gamma(\mu(\delta))$.

Пусть

$$\gamma(\delta) = \frac{1}{\ln\ln\dfrac{1}{\mu(\delta)}}. \tag{6.20}$$

Тогда, используя (6.15) и (6.20) и сделав вычисления, аналогичные приведенным в статье [10, с. 286–288], получим оценку

$$\|q_\delta(t)-q_0(t)\| \leqslant \frac{d\cdot\sqrt{\ln\ln\frac{1}{\mu(\delta)}}}{\ln^{\gamma_0/2}\left(\dfrac{1}{\mu(\delta)}\right)},$$

где d — некоторая константа.

§ 7. Заключение

В данной работе дана постановка обратной граничной задачи теплопроводности для композитных материалов. Для получения оценки погрешности приближенного решения данная задача сведена к синтезу двух некорректных задач. Приведено решение каждой из этих задач, а также получена оценка погрешности окончательного приближенного решения исходной задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. Сборник задач по математической физике. М.: Физматлит, 2004. 688 с.

2. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Физматлит, 2004. 572 с.
3. Phillips D.L. A technique for the numerical solution of certain integral equations of the first kind // Journal of the ACM. 1962. Vol. 9. No. 1. P. 84–97. DOI: 10.1145/321105.321114
4. Иванов В.К. О приближенном решении операторных уравнений // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1966. Т. 6. № 6. С. 1089–1094. http://mi.mathnet.ru/zvmmf7435
5. Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978. 208 с.
6. Танана В.П. Об оптимальности методов решения нелинейных неустойчивых задач // ДАН СССР. 1975. Т. 220. № 5. С. 1035–1037.
7. Иванов В.К., Королюк Т.И. Об оценке погрешности при решении линейных некорректно поставленных задач // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1969. Т. 9. № 1. С. 30–41. http://mi.mathnet.ru/zvmmf7172
8. Танана В.П., Колесникова Н.Ю. Об оценке погрешности приближенного решения одной обратной задачи тепловой диагностики // Известия Уральского Государственного Университета. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2008. № 58. С. 155–162. http://hdl.handle.net/10995/24615
9. Танана В.П., Сидикова А.И. О гарантированной оценке точности приближенного решения одной обратной задачи тепловой диагностики // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16. № 2. С. 238–252. http://mi.mathnet.ru/timm565
10. Танана В.П., Бредихина А.Б., Камалтдинова Т.С. Об оценке погрешности приближенного решения одной обратной задачи в классе кусочно-гладких функций // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18. № 1. С. 281–288. http://mi.mathnet.ru/timm797

Поступила в редакцию 01.10.2018

Танана Виталий Павлович, д. ф.-м. н., главный научный сотрудник, кафедра системного программирования, Южно-Уральский государственный университет, 454080, Челябинск, пр. Ленина, 76;
профессор, кафедра теории управления и оптимизации, Челябинский государственный университет, 454001, г. Челябинск, ул. Братьев Кашириных, 129.
E-mail: tvpa@susu.ac.ru

Ершова Анна Александровна, математик, отдел динамических систем, Институт математики и механики УрО РАН, 620219, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.
E-mail: ershova@imm.uran.ru

V. P. Tanana, A. A. Ershova

On the solution of an inverse boundary value problem for composite materials

Citation: *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2018, vol. 28, issue 4, pp. 474–488 (in Russian).

Keywords: projection regularization method, inverse problem of thermal conduction, piecewise constant thermal diffusivity.

MSC2010: 31A25, 49N45, 65R32

DOI: 10.20537/vm180404

In the present paper, an inverse boundary value problem of thermal conduction is formulated, posed and solved, provided that the thermal diffusivity is piecewise constant. This task holds a prominent place in technology, since thermally loaded units of technical constructions are covered with a heat insulating layer, the thermal characteristics of which are very different from the thermal characteristics of the structure itself. Such tasks are used in the planning of bench tests of aircraft. Modern composite materials solve this problem, giving developers a number of advantages. In rocket engines, the inner wall of the internal combustion chamber is covered with a heat-shielding layer, which is made of composite materials. Due to the properties of these materials, the heat-shielding layer significantly reduces the temperature of the internal combustion wall. When solving an inverse boundary problem, it is necessary to take into account the difference in the thermal conductivity coefficients of the component parts of composite materials, which make the wall of the chamber. The problem was investigated using a Fourier series in eigenfunctions for an equation with a discontinuous coefficient. It is proved that for the solution of the inverse problem the Fourier transform with respect to t is applicable. To solve the inverse problem, the Fourier transform was used, which made it possible to reduce the inverse problem to the operator equation, which was solved by the discrepancy method.

REFERENCES

1. Budak B.M., Samarskii A.A., Tikhonov A.N. *Sbornik zadach po matematicheskoi fizike* (Collection of problems in mathematical physics), Moscow: Fizmatlit, 2004, 688 p.
2. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. *Elementy teorii funktsii i funktsional'nogo analiza* (Elements of the theory of functions and functional analysis), Moscow: Fizmatlit, 2004, 572 p.
3. Phillips D.L. A technique for the numerical solution of certain integral equations of the first kind, *Journal of the ACM*, 1962, vol. 9, no. 1, pp. 84–97. DOI: 10.1145/321105.321114
4. Ivanov V.K. The approximate solution of operator equations of the first kind, *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1966, vol. 6, issue 6, pp. 197–205. DOI: 10.1016/0041-5553(66)90171-6
5. Ivanov V.K., Vasin V.V., Tanana V.P. *Teoriya lineinykh nekorrektnykh zadach i ee prilozheniya* (Theory of linear ill-posed problems and its applications), Moscow: Nauka, 1978, 208 p.
6. Tanana V.P. On the optimality of methods for solving nonlinear unstable problems, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1975, vol. 220, no. 5, pp. 1035–1037 (in Russian).
7. Ivanov V.K., Korolyuk T.I. Error estimates for solutions of incorrectly posed linear problems, *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1969, vol. 9, issue 1, pp. 35–49. DOI: 10.1016/0041-5553(69)90005-6
8. Tanana V.P., Kolesnikova N.Yu. On the estimation of the error of the approximate solution of an inverse problem of thermal diagnostics, *Izv. Ural. Gos. Univ. Ser. Mat. Mekh. Inform.*, 2008, no. 58, pp. 155–162 (in Russian). `http://hdl.handle.net/10995/24615`
9. Tanana V.P., Sidikova A.I. On the guaranteed accuracy estimate of an approximate solution of one inverse problem of thermal diagnostics, *Tr. Inst. Mat. Mekh. Ural. Otd. Ross. Akad. Nauk*, 2010, vol. 16, no. 2, pp. 238–252 (in Russian). `http://mi.mathnet.ru/eng/timm565`
10. Tanana V.P., Bredikhina A.B., Kamaltdinova T.S. On an error estimate for the approximate solution of an inverse problem in the class of piecewise smooth functions, *Tr. Inst. Mat. Mekh. Ural. Otd. Ross. Akad. Nauk*, 2012, vol. 18, no. 1, pp. 281–288 (in Russian). `http://mi.mathnet.ru/eng/timm797`

Received 01.10.2018

Tanana Vitalii Pavlovich, Doctor of Physics and Mathematics, Main Researcher, Department of System Programming, South Ural State University, pr. Lenina, 76, Chelyabinsk, 454080, Russia;
Professor, Department of Control Theory and Optimization, Chelyabinsk State University, ul. Brat'ev Kashirinykh, 129, Chelyabinsk, 454001, Russia.
E-mail: tvpa@susu.ac.ru

Ershova Anna Aleksandrovna, Mathematician, Department of Dynamic Systems, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620219, Russia.
E-mail: ershova@imm.uran.ru