

УДК 521.92, 517.928.7

© П. С. Красильников, О. М. Подвигина

ОБ ЭВОЛЮЦИИ УГЛА НАКЛОНА ОСИ ВРАЩЕНИЯ ПЛАНЕТЫ В ПЛАНЕТНОЙ СИСТЕМЕ В НЕРЕЗОНАНСНОМ СЛУЧАЕ

Исследуется эволюция угла наклона оси вращения планеты в поле притяжения звезды и внешних планет, входящих в планетную систему. Считаем, что исследуемая планета является динамически-симметричным твердым телом ($A = B$). Полагаем также, что сама планета и внешние планеты движутся по кеплеровским эллипсам вокруг звезды со средними движениями ω и $\omega_2, \dots, \omega_N$, где N — число небесных тел, воздействующих на планету.

В переменных Депри–Андуайе получена функция Гамильтона задачи в рамках спутникова приближения. Проведено осреднение функции Гамильтона по быстрым переменным вращательного и орбитального движений при условии отсутствия резонансов между быстрыми частотами указанных движений. Показано, что осредненная функция Гамильтона содержит, помимо классических параметров, параметры D_i , являющиеся функционалами на семействе орбит исследуемой планеты и внешних планет. Показано, что осредненная функция Гамильтона допускает разделение переменных и, как следствие, существует три первых интеграла в инволюции.

При рассмотрении гравитационных моментов от внешних планет как малых возмущений, получены, с помощью интеграла энергии осредненных уравнений, явные приближенные формулы для угла нутации исследуемой планеты. Получены также приближенные формулы для возмущенного периода прецессии планеты.

Проведены расчеты размаха колебаний по углу нутации планеты, возмущенного периода ее прецессии для частного случая планетной системы, состоящей из звезды, самой планеты и массивной внешней планеты (подобной Юпитеру) с симметрично расположенными орбитами, плоскости которых пересекаются под углом γ .

Ключевые слова: вращения планеты, планетная система, осредненные уравнения, угол нутации, период прецессии.

DOI: [10.20537/vm180408](https://doi.org/10.20537/vm180408)

Введение

Известно, что величина наклона оси собственных вращений Земли, а также колебания по углу наклона этой оси оказывают существенное влияние на климат планеты. К примеру, ледниковый период связывают с изменениями в угле нутации Земли [1], совместное изменение в наклонении оси вращения и в эксцентриситете орбиты планеты оказывает фундаментальное воздействие на ее глобальный климат [2], при углах наклона в 90 градусов невозможна жизнь на планете [3]. Поэтому исследованию наклона оси вращения Земли (либо планеты, подобной Земле), его влиянию на климат планеты посвящены сотни работ западных исследователей. К примеру, известны результаты численного исследования прецессии Земли, изменения ее угла нутации, инсоляции поверхности Земли [4–6], в которой отмечается «стабилизирующая» роль Луны (Луна резко уменьшает амплитуду нутационных колебаний Земли, вызванных эволюцией орбиты Земли, и стабилизирует угол нутации в окрестности 23,5 градусов), описаны хаотические колебания угла нутации Земли, когда угол нутации меняется в пределах от 60 до 90 градусов. В статье [7] исследуется влияние больших планет на изменение эксцентриситета орбиты Земли и влияние его на климат Земли. Есть цикл работ, посвященных воздействию диссипативных сил (сил приливного трения) на колебания по углу нутации планеты (см., например, [8]). Заслуживают внимания работы, посвященные нутационным колебаниям оси собственных вращений Сатурна [9, 10]. В этих статьях исследуется влияние вековых возмущений

в долготе восходящего узла орбиты Сатурна, вызванных Нептуном, на наклонение оси вращения планеты. Предполагается, что эволюция угла нутации обусловлена спин-орбитальным резонансом между частотой прецессии оси Сатурна и частотой регрессии узла орбиты Сатурна. Предпринята попытка объяснить наклонение оси Сатурна в 26,7 градусов на основе прохождения системы через спин-орбитальный резонанс. Отметим также работу [11], в которой предлагается альтернативная модель исследования прецессии Сатурна под действием притяжения Солнца, Юпитера и спутников планеты, показано, что возмущения от Юпитера вносят основной вклад в эволюцию угла нутации Сатурна.

Цель статьи — получить явные приближенные формулы, описывающие период прецессии оси вращения планеты и колебания по углу нутации оси под действием гравитационных моментов от массивной звезды и всех внешних планет, входящих в планетную систему. Параметры системы будем считать произвольными, орбиты планет — кеплеровскими эллипсами. Такая общая постановка задачи, небесно-механическая, обладает достоинствами: результаты исследований можно применить как к планетам солнечной системы, так и к экзопланетам, находящимся за пределами Солнечной системы, если будут известны массово-инерционные характеристики этих планет и параметры их орбитального движения. Небесно-механическая постановка задачи позволит исследовать общие закономерности вращения планеты в рамках принятой модели, избегая частности, которыми обременены подчас исследования вращений планет Солнечной системы.

§ 1. Постановка задачи

Итак, рассмотрим небесно-механическую модель — ограниченную задачу $(N + 1)$ тел, одно из которых — твердое тело (обозначим ее как планету M), остальные тела — материальные точки (звезда и $(N - 1)$ внешние планеты). Исследуем прецессию планеты M под действием гравитационных моментов от звезды и внешних планет, входящих в планетную систему. Считаем, что исследуемая планета является динамически-симметричным телом с главными центральными моментами инерции $A = B \neq C$. Предположим, что масса m_1 звезды превалирует над массой m исследуемой планеты и массами m_2, \dots, m_N внешних планет, т. е. $m_1 \gg m, m_2, \dots, m_N$. Задачу рассмотрим в ограниченной постановке, предполагая, что взаимные расстояния между планетой M и внешними планетами существенно больше характерных размеров исследуемой планеты. Тогда вращение самой планеты не влияет на движение ее центра масс. Будем считать, что внешние планеты и планета M движутся по кеплеровским эллипсам с фокусом в звезде и со средними частотами $\omega_2, \dots, \omega_N$ и ω соответственно. Введем инерциальную систему координат $OXYZ$ с началом O , расположенным в звезде, плоскость OXY которой совпадает с плоскостью орбиты исследуемой планеты (с плоскостью «эклиптики»), ось OX направим в перигей орбиты планеты, а OZ направим по нормали к плоскости OXY . В центр масс планеты поместим начало кениговой системы координат $Mx_1y_1z_1$, направление осей которой совпадает с направлением осей абсолютной системы координат $OXYZ$, $Mxyz$ — подвижные оси, направленные по главным центральным осям инерции планеты. Для описания вращения планеты воспользуемся каноническими переменными Депри–Андуайе $l, \varphi_2, \varphi_3, L, I_2, I_3$, которые задают ориентацию системы координат $Mxyz$ относительно кениговых осей $Mx_1y_1z_1$ и которые приспособлены для применения методов теории возмущений.

Вращение планеты вокруг собственного центра масс в переменных Депри–Андуайе описывается канонической системой уравнений с гамильтонианом

$$H = \frac{I_2^2 - L^2}{2A} + \frac{L^2}{2C} + \sum_{i=1}^N U_i, \quad U_i = \frac{3\mu_i}{2R_i^3}(C - A)\gamma_{i3}^2. \quad (1.1)$$

Здесь A, C — экваториальный и осевой моменты инерции планеты, $\mu_i = fm_i$, где f — гравитационная постоянная, R_i — расстояние между центром масс M и центром масс i -го тяжелого тела, γ_{i3} — косинусы углов между радиус-векторами \mathbf{R}_i и осью вращения планеты Mz .

Несложно показать, что

$$\gamma_{i3} = \frac{\alpha_3 R_{iX}}{R_i} + \frac{\beta_3 R_{iY}}{R_i} + \frac{\gamma_3 R_{iZ}}{R_i},$$

где $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ — направляющие косинусы между осью симметрии Mz и осями Mx_1, y_1, z_1 :

$$\begin{aligned}\alpha_3 &= \sin \delta_2 (\cos \varphi_3 \sin \varphi_2 + \sin \varphi_3 \cos \delta_1 \cos \varphi_2) + \cos \delta_2 \sin \varphi_3 \sin \delta_1, \\ \beta_3 &= \sin \delta_2 (\sin \varphi_3 \sin \varphi_2 - \cos \varphi_3 \cos \delta_1 \cos \varphi_2) - \cos \delta_2 \cos \varphi_3 \sin \delta_1, \\ \gamma_3 &= -\sin \delta_2 \sin \delta_1 \cos \varphi_2 + \cos \delta_2 \cos \delta_1, \quad \cos \delta_1 = \frac{I_3}{I_2}, \quad \cos \delta_2 = \frac{L}{I_2}.\end{aligned}$$

Радиус-вектор \mathbf{R}_i имеет следующий вид:

$$\mathbf{R}_i = (R_{iX}, R_{iY}, R_{iZ}), \quad R_{iX} = (X - X_i), \quad R_{iY} = (Y - Y_i), \quad R_{iZ} = (Z - Z_i),$$

где X, Y, Z ($Z = 0$) — координаты центра масс планеты, X_i, Y_i, Z_i — координаты центра масс i -го тела.

В силу постановки задачи эти координаты являются известными функциями времени. Представим их в виде рядов Фурье:

$$\begin{aligned}X(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k^{(1)} \exp(ik\omega)t, \quad Y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k^{(2)} \exp(ik\omega)t, \quad Z(t) = 0, \\ X_1 &= Y_1 = Z_1 = 0, \\ X_i(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_{kx_i}^{(1)} \exp(ik\omega_i)t, \quad Y_i(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_{ky_i}^{(2)} \exp(ik\omega_i)t, \quad Z_i(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_{kz_i}^{(3)} \exp(ik\omega_i)t \\ &\quad (i = 2, \dots, N).\end{aligned}$$

Здесь ω, ω_i — средние частоты периодических кеплеровских движений планет. Коэффициенты этих рядов рассматриваем как параметры задачи.

Введем в рассмотрение быстрые переменные орбитального движения планет:

$$\theta = \omega t, \quad \theta_i = \omega_i t.$$

Отметим, что эти переменные являются средними аномалиями соответствующих кеплеровских орбит. Они связаны с истинными аномалиями ν, ν_i планеты M и i -й внешней планеты по формулам

$$\frac{d\theta}{d\nu} = \frac{(1 - e^2)^{3/2}}{(1 + e \cos \nu)^2}, \quad \frac{d\theta_i}{d\nu_i} = \frac{(1 - e_i^2)^{3/2}}{(1 + e_i \cos \nu_i)^2}.$$

Эти соотношения позволят в дальнейшем, на основе замены переменных $\theta_i \rightarrow \nu_i$ в кратных интегралах, упростить вычисление некоторых функционалов, избегая тем самым явного представления орбитального движения планет в виде рядов Фурье.

§ 2. Осредненные уравнения вращений. Первые интегралы

Теперь учтем, что эллипсоид инерции планеты близок к сфере, т.е. $C = J_0 + \varepsilon C_1$, $A = J_0 + \varepsilon A_1$, где $\varepsilon \ll 1$, J_0 — момент инерции тела сферической структуры. Тогда H является 2π -периодической функцией по аргументам $l, \varphi_2, \varphi_3, \theta, \theta_i$. Разложим гамильтониан (1.1) в ряд по ε :

$$H = \frac{I_2^2}{2J_0} + \varepsilon H_1 + o(\varepsilon),$$

где

$$H_1 = -\frac{1}{2J_0^2} [L^2 C_1 + (I_2^2 - L^2) A_1] + \frac{3}{2} \sum_{i=1}^N \frac{\mu_i}{R_i^3} (C_1 - A_1) \gamma_{i3}^2.$$

Из уравнений Гамильтона следует, что φ_2 ($\dot{\varphi}_2 \sim I_2/J_0$) есть быстрая переменная вращательных движений, в то время как $l, \varphi_3, L, I_2, I_3$ — медленные переменные. Считаем, что в системе отсутствуют резонансы между частотами $\omega, \omega_i, I_2/J_0$.

Проводим усреднение по всем быстрым переменным орбитального и вращательного движений:

$$\overline{H}_1 = \frac{1}{(2\pi)^{N+1}} \int_0^{2\pi} H_1 d\varphi_2 d\theta d\theta_2 \dots d\theta_N.$$

Преобразования показывают, что усредненная функция Гамильтона допускает разделение переменных по канонически сопряженным переменным L, l и I_3, φ_3 :

$$\overline{H}_1 = F(I_2, L, l)G(I_2, I_3, \varphi_3),$$

где

$$\begin{aligned} F(I_2, L, l) &= -(C_1 - A_1) \left(\frac{2}{3} - \sin^2 \delta_2 \right), \\ G(I_2, I_3, \varphi_3) &= \frac{I_2^2}{2J_0^2} + \frac{9}{4} \left[\left(\frac{1}{3} - \cos^2 \varphi_3 \sin^2 \delta_1 \right) \sum_{i=1}^N \mu_i (D_{iY^2} - D_{iX^2}) - \right. \\ &\quad - \left(\frac{2}{3} - \sin^2 \delta_1 \right) \sum_{i=1}^N \mu_i (D_{iZ^2} - D_{iX^2}) + \sin 2\varphi_3 \sin^2 \delta_1 \sum_{i=1}^N \mu_i D_{iXY} - \\ &\quad \left. - \sin 2\delta_1 \left(\sin \varphi_3 \sum_{i=1}^N \mu_i D_{iXZ} - \cos \varphi_3 \sum_{i=1}^N \mu_i D_{iYZ} \right) \right]. \end{aligned}$$

Здесь

$$D_{i\rho^2} = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_0^{2\pi} \frac{R_{i\rho}^2}{R_i^5} d\theta d\theta_2 \dots d\theta_N, \quad D_{i\rho\nu} = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_0^{2\pi} \frac{R_{i\rho}R_{i\nu}}{R_i^5} d\theta d\theta_2 \dots d\theta_N,$$

ρ и ν принимают значения X, Y, Z .

Учитывая, что \overline{H}_1 не зависит от φ_2 , имеем полный набор первых интегралов в инволюции:

$$I_2 = \text{const}, \quad F(I_2, L, l) = \text{const}, \quad G(I_2, I_3, \varphi_3) = \text{const}.$$

Существование интеграла $I_2 = \text{const}$ означает, что во все время вращения планеты M вокруг собственного центра масс ее вектор кинетического момента постоянен по модулю. Интеграл $F(I_2, L, l) = \text{const}$ описывает движение системы $Mxyz$ вокруг вектора I_2 , т. е. вращение планеты вокруг вектора кинетического момента. Известно, что для планеты с произвольными моментами инерции интеграл $F = \text{const}$ задает движение по Эйлеру–Пуансо, но с измененной скоростью перемещения вдоль полюдий. В частном случае динамически-симметричного тела ($A = B$) имеем регулярную прецессию тела вокруг вектора I_2 на постоянном угловом расстоянии δ_2 . Для большинства планет Солнечной системы угол δ_2 мал (особенно для планет-гигантов). Поэтому, предполагая малость δ_2 для исследуемой планеты, ось ее вращения отождествим с вектором кинетического момента, рассматривая движение этого вектора как движение оси планеты.

Опишем движение вектора I_2 в поступательно движущемся пространстве $Mx_1y_1z_1$, так как эти движения связаны с изменением угла нутации δ_1 (угла наклона) оси вращения планеты. Интеграл $G = \text{const}$ поможет решить эту задачу. Представим его в виде

$$G(I_2, I_3, \varphi_3) = \text{const}, \quad G = \frac{I_2^2}{2J_0^2} + \frac{9}{4} \tilde{G},$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{G}(I_2, I_3, \varphi_3) = & (-D_1 \sin^2 \varphi_3 - D_2 \cos^2 \varphi_3 + D_3 + D_4 \sin 2\varphi_3) \sin^2 \delta_1 - \\ & - \sin 2\delta_1 (D_5 \sin \varphi_3 - D_6 \cos \varphi_3), \quad \cos \delta_1 = \frac{I_3}{I_2}. \end{aligned}$$

Углы δ_1 , φ_3 задают ориентацию вектора \mathbf{I}_2 (т.е. оси вращения планеты) в поступательно движущемся пространстве $Mx_1y_1z_1$, связанном с центром масс планеты. Угол φ_3 является углом прецессии, так как он задает вращение вектора \mathbf{I}_2 вокруг нормали (вокруг оси Mz_1) к плоскости OXY . Отсчитывается он от оси Mx_1 , параллельной оси OX абсолютной системы координат.

Параметры D_i являются функционалами на множестве квазипериодических орбит внешних планет и самой планеты M . Они таковы:

$$D_k = D_k^{(1)} + \sum_{i=2}^N D_k^{(i)} \quad (k = 1, \dots, 6), \quad (2.1)$$

где

$$\begin{aligned} D_1^{(i)} = \mu_i D_{iX^2}, \quad D_2^{(i)} = \mu_i D_{iY^2}, \quad D_3^{(i)} = \mu_i D_{iZ^2}, \\ D_4^{(i)} = \mu_i D_{iXY}, \quad D_5^{(i)} = \mu_i D_{iXZ}, \quad D_6^{(i)} = \mu_i D_{iYZ}. \end{aligned}$$

Здесь $D_k^{(1)}$ — значения функционалов в задаче двух тел «звезда – планета», т.е. при $\mu_i = 0$ ($i = 2, \dots, N$). Они имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} D_1^{(1)} = \frac{fm_1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{X^2}{R_1^5} \frac{(1-e^2)^{3/2}}{(1+e \cos \nu)^2} d\nu, \quad D_2^{(1)} = \frac{fm_1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{Y^2}{R_1^5} \frac{(1-e^2)^{3/2}}{(1+e \cos \nu)^2} d\nu, \\ D_3^{(1)} = \frac{fm_1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{Z^2}{R_1^5} \frac{(1-e^2)^{3/2}}{(1+e \cos \nu)^2} d\nu, \quad D_4^{(1)} = \frac{fm_1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{XY}{R_1^5} \frac{(1-e^2)^{3/2}}{(1+e \cos \nu)^2} d\nu, \quad (2.2) \\ D_5^{(1)} = \frac{fm_1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{XZ}{R_1^5} \frac{(1-e^2)^{3/2}}{(1+e \cos \nu)^2} d\nu, \quad D_6^{(1)} = \frac{fm_1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{YZ}{R_1^5} \frac{(1-e^2)^{3/2}}{(1+e \cos \nu)^2} d\nu, \end{aligned}$$

при условии, что

$$X = R_1 \cos \nu, \quad Y = R_1 \sin \nu, \quad Z = 0, \quad R_1 = \frac{p}{1 + e \cos \nu}. \quad (2.3)$$

Интеграл $\tilde{G} = g$, где g — постоянная интегрирования, подробно исследован в статье [12] при произвольных значениях D_k . Показано, что топология движений вектора кинетического момента \mathbf{I}_2 на небесной сфере имеет сложный вид, бифурцирующий при определенных значениях параметров D_k . В случае планетной системы параметры D_k близки к их «невозмущенным» значениям в задаче двух тел ($D_1 \approx D_2$, остальные параметры D_k малы), поэтому движение вектора кинетического момента можно рассматривать как испорченную прецессию вокруг оси, составляющей малый угол с нормалью \mathbf{n} к плоскости OXY и проходящей через центр небесной сферы и две стационарные точки 1 (рис. 1). При этом исключаем из рассмотрения малую окрестность плоскости экватора, так как вблизи экватора движение вектора \mathbf{I}_2 меняется качественно.

§ 3. Возмущенная нутация оси вращения планеты, период возмущенной прецессии

Получим явные формулы изменения угла нутации под действием гравитационных моментов внешних планет, рассматривая движения вектора кинетического момента \mathbf{I}_2 типа испорченной прецессии. С этой целью запишем эволюционные уравнения по $\varphi_3(t)$, $I_3(t)$:

$$\frac{d\varphi_3}{dt} = \Lambda \frac{\partial \tilde{G}}{\partial I_3}, \quad \frac{dI_3}{dt} = -\Lambda \frac{\partial \tilde{G}}{\partial \varphi_3}, \quad (3.1)$$

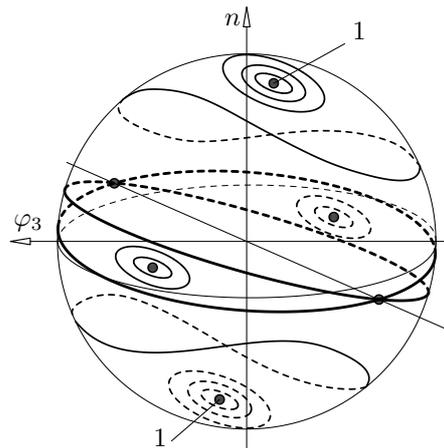


Рис. 1. Нерезонансные траектории вектора I_2 в планетной системе

где

$$\Lambda = \varepsilon \frac{9}{4} F = \frac{3}{4} (A - C) (3 \cos^2 \delta_2 - 1).$$

Исследуем для начала задачу двух тел, когда исследуемая планета вращается вокруг собственного центра масс под действием гравитационных моментов от звезды. Считаем, что планета описывает кеплеровский эллипс, принадлежащий плоскости OXY с фокусом в звезде. Имеем $\mu_i = 0$ ($i = 2, \dots, N$), при этом декартовы координаты планеты вычисляются по формулам (2.3). Вычисление параметров (2.2) показывает, что

$$D_1^{(1)} = D_2^{(1)} = \frac{f m_1 (1 - e^2)^{3/2}}{2p^3}, \quad D_3^{(1)} = D_4^{(1)} = D_5^{(1)} = D_6^{(1)} = 0. \quad (3.2)$$

Интеграл $\tilde{G} = g$ приводится к виду

$$\sin^2 \delta_1 = \tilde{g}, \quad \tilde{g} = -g/D_1^{(1)}.$$

Отсюда следует, что угол наклона планеты δ_1 есть величина постоянная, зависящая от начальных значений I_{30}, I_{20} и параметров орбиты p, e . В дальнейшем будем обозначать этот угол как δ_{11} . Далее,

$$\varphi_3 = \omega_0 t + \varphi_3(0), \quad I_3 = I_{30},$$

где

$$\omega_0 = \frac{3}{4} \frac{(A - C) (3 \cos^2 \delta_2 - 1) n^2 \cos \delta_{11}}{I_2 (1 - e^2)^{3/2}}, \quad n^2 = f \frac{m_1}{a^3}, \quad p = a(1 - e^2).$$

Выражение для ω_0 есть классическая формула для частоты прецессии симметричного спутника в центральном поле тяготения. Получена Белецким В. В. [13]. В более ранних работах [14, 15] эта формула известна для частного случая $e = 0, \delta_2 = 0$.

Итак, для невозмущенного случая (задача двух тел) имеем классические результаты, описывающие движение оси вращения симметричной планеты, при условии, что ось вращения совпадает с вектором кинетического момента планеты ($\delta_2 = 0$): под действием гравитационных моментов от звезды ось вращения планеты прецессирует с постоянной угловой скоростью

$$\omega_0 = \frac{3}{2} \frac{(A - C) n^2 \cos \delta_{11}}{I_2 (1 - e^2)^{3/2}}$$

вокруг нормали к плоскости орбиты OXY на постоянном угловом расстоянии δ_{11} от нее.

Рассмотрим возмущенную задачу, когда учитываются притяжения внешних планет с массами m_2, \dots, m_N . Как следует из предыдущего анализа, эти планеты влияют, в первом приближении метода усреднения, на вращение планеты через функционалы D_i , меняя их значение. В случае малости масс m_j ($j = 2, \dots, N$) по сравнению с массой m_1 звезды второе слагаемое в правой части формулы (2.1) будет малой величиной первого порядка малости по малым параметрам μ_2, \dots, μ_N .

Получим зависимость $I_3 = I_3(\varphi_3)$, используя интеграл $\tilde{G} = g$ и учитывая возмущения в параметрах D_i (см. (2.1)). С этой целью запишем интеграл $\tilde{G} = g$ в виде

$$\left[- \left(D_1^{(1)} + D_1^* \right) \sin^2 \varphi_3 - \left(D_2^{(1)} + D_2^* \right) \cos^2 \varphi_3 + D_3^* + D_4^{(*)} \sin 2 \varphi_3 \right] \sin^2 \delta_1 - \sin 2 \delta_1 \left(D_5^* \sin \varphi_3 - D_6^* \cos \varphi_3 \right) = g^{(1)} + g^*. \quad (3.3)$$

Здесь $D_1^{(1)}, D_2^{(1)}$ вычисляются по формулам (3.2), D_i^* — возмущения в параметрах D_i , имеющие вид

$$\begin{aligned} D_1^* &= \sum_{i=2}^N \mu_i D_{iX^2}, & D_2^* &= \sum_{i=2}^N \mu_i D_{iY^2}, & D_3^* &= \sum_{i=2}^N \mu_i D_{iZ^2}, \\ D_4^* &= \sum_{i=2}^N \mu_i D_{iXY}, & D_5^* &= \sum_{i=2}^N \mu_i D_{iXZ}, & D_6^* &= \sum_{i=2}^N \mu_i D_{iYZ}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Далее,

$$g^{(1)} = -D_1^{(1)} \sin^2 (\delta_1(0)), \quad g^* = \tilde{G}(\delta_1(0), \varphi_3(0), D_i^*) \text{ при } D_1^{(1)} = D_2^{(1)} = 0,$$

где g^* — возмущенное значение константы g , обусловленное суммарным воздействием планет.

Ищем $I_3(\varphi_3)$ в виде ряда по малым параметрам μ_i :

$$I_3(\varphi_3) = I_{31} + I_3^*(\varphi_3) + \dots, \quad I_{31} = \text{const}, \quad I_3^*(\varphi_3) = \sum_{i=2}^N \mu_i I_{3i}(\varphi_3). \quad (3.5)$$

Подставляем выражение для I_3 в интеграл (3.3), раскладываем интеграл в ряд по μ_i , имеем (с точностью до членов второго порядка малости по μ_i)

$$\begin{aligned} -D_1^{(1)} \sin^2 \delta_{11} + 2 \frac{D_1^{(1)} \cos \delta_{11} I_3^*}{I_2} + \left(-D_1^* \sin^2 \varphi_3 - D_2^* \cos^2 \varphi_3 + D_3^* + D_4^* \sin 2 \varphi_3 \right) \times \\ \times \sin^2 \delta_{11} - \sin 2 \delta_{11} \left(D_5^* \sin \varphi_3 - D_6^* \cos \varphi_3 \right) = g^{(1)} + g^*, \quad \cos \delta_{11} = \frac{I_{31}}{I_2}. \end{aligned}$$

Удерживая члены одного порядка малости в правой и левой частях этого равенства, получим

$$\begin{aligned} g^{(1)} &= -D_1^{(1)} \sin^2 \delta_{11}, \\ I_3^*(\varphi_3) &= \frac{I_2}{2D_1^{(1)} \cos \delta_{11}} \left[g^* + \left(D_1^* \sin^2 \varphi_3 + D_2^* \cos^2 \varphi_3 - D_3^* - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - D_4^* \sin 2 \varphi_3 \right) \sin^2 \delta_{11} + \sin 2 \delta_{11} \left(D_5^* \sin \varphi_3 - D_6^* \cos \varphi_3 \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Для угла нутации

$$\delta_1 = \arccos \left(\frac{I_{31} + I_3^*(\varphi_3) + \dots}{I_2} \right)$$

имеем, раскладывая эту формулу в ряд по малым параметрам μ_i , следующее представление:

$$\delta_1(t) = \delta_{11} - \frac{I_3^*(\varphi_3)}{C\omega_r \sin \delta_{11}} + \dots, \quad \varphi_3 = \omega_0 t + \varphi_{30}. \quad (3.7)$$

Здесь δ_{11} есть угол наклона (угол нутации) оси планеты под действием гравитационных моментов от звезды, ω_r — угловая скорость собственного вращения планеты вокруг оси динамической симметрии, $I_2 \approx C\omega_r$, так как вектор угловой скорости планеты имеет одну превалирующую компоненту ω_r , остальные компоненты малы.

Теперь на основе формул (3.6), (3.7) сделаем некоторые качественные выводы о поведении возмущенного угла нутации планеты M в зависимости от параметров ее невозмущенного вращения.

Во-первых, невозмущенный угол наклона δ_{11} меняется на постоянную величину и принимает постоянное возмущенное значение δ_{11}^* :

$$\delta_{11}^* = \delta_{11} - \frac{I_2}{C\omega_r D_1^{(1)} \sin 2\delta_{11}} g^* = \delta_{11} - \frac{3(A-C)}{2\omega_0 C\omega_r \sin \delta_{11}} g^*. \quad (3.8)$$

Здесь

$$g^* = (-D_1^* \sin^2 \varphi_{30} - D_2^* \cos^2 \varphi_{30} + D_3^* + D_4^* \sin 2\varphi_{30}) \sin^2 \delta_{11} - \sin 2\delta_{11} (D_5^* \sin \varphi_{30} - D_6^* \cos \varphi_{30}). \quad (3.9)$$

Во-вторых, появляются колебания по углу нутации в окрестности возмущенного значения $\delta_{11} = \delta_{11}^*$. Эти колебания описываются вторым членом, входящим в правую часть формулы (3.7), при условии, что функция $I_3^*(\varphi_3)$ вычисляется при $g^* = 0$.

В-третьих, с увеличением невозмущенного отклонения δ_{11} размах колебаний по углу нутации возрастает. Действительно, из формул (3.6)–(3.9) следует, что

$$\delta_1 = \delta_{11} - \frac{1}{D_1^{(1)}} \left[(D_1^* (\sin^2 \varphi_3 - \sin^2 \varphi_{30}) + D_2^* (\cos^2 \varphi_3 - \cos^2 \varphi_{30}) + D_4^* (\sin 2\varphi_3 - \sin 2\varphi_{30})) \frac{\operatorname{tg} \delta_{11}}{2} + (D_5^* (\sin \varphi_3 - \sin \varphi_{30}) - D_6^* (\cos \varphi_3 - \cos \varphi_{30})) \right] + \dots,$$

поэтому амплитуда колебаний растет с ростом δ_{11} по закону $\operatorname{tg} \delta_{11}$. Таким образом, увеличение δ_{11} отрицательно влияет на климат на планете, что согласуется с результатами исследований [3, 4].

Теперь получим выражение для периода прецессии исследуемой планеты. Из первого равенства эволюционной системы уравнений (3.1) следует формула для периода прецессии:

$$T = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi_3}{\Lambda \tilde{G}'_{I_3}(I_3, \varphi_3)}.$$

Упростим подынтегральное выражение в этой формуле. Для этого преобразуем дробь $1/(\Lambda \tilde{G}'_{I_3})$, подставляя в нее (3.5), (3.6), раскладывая ее в ряд по малым параметрам D_i^* , g^* , удерживая члены нулевого и первого порядка малости:

$$\frac{1}{\Lambda \tilde{G}'_{I_3}} \approx \frac{1}{\omega_0} - \frac{\Lambda}{\omega_0^2} \left(\sum_{i=1}^6 B_i D_i^* + B_7 g^* \right). \quad (3.10)$$

Здесь

$$B_1 = \frac{1 + \cos^2 \delta_{11}}{I_2 \cos \delta_{11}} \sin^2 \varphi_3, \quad B_2 = \frac{1 + \cos^2 \delta_{11}}{I_2 \cos \delta_{11}} \cos^2 \varphi_3, \quad B_3 = \frac{1 + \cos^2 \delta_{11}}{I_2 \cos \delta_{11}},$$

$$B_4 = \frac{1 + \cos^2 \delta_{11}}{I_2 \cos \delta_{11}} \sin 2\varphi_3, \quad B_5 = \frac{2 \cos^2 \delta_{11}}{I_2 \sin \delta_{11}} \sin \varphi_3, \quad B_6 = \frac{2 \cos^2 \delta_{11}}{I_2 \sin \delta_{11}} \cos \varphi_3,$$

$$B_7 = \frac{1}{I_2 \cos \delta_{11}}.$$

Интегрируя (3.10) по φ_3 в пределах от нуля до 2π , получим выражение для периода T^* возмущенной прецессии планеты с точностью до членов второго порядка малости по μ_i :

$$T^* = \frac{2\pi}{\omega_0} \left\{ 1 - \frac{\Lambda}{2\omega_0} \frac{1}{I_2 \cos \delta_{11}} [(1 + \cos^2 \delta_{11}) (D_1^* + D_2^* + 2D_3^*) + 2g^*(\varphi_{30})] \right\}. \quad (3.11)$$

Отметим интересный эффект зависимости периода прецессии (3.11) от начальных условий φ_{30} . Такой зависимости нет в периоде невозмущенной прецессии. Дело в следующем. В невозмущенной прецессии конец оси вращения планеты описывает окружность на небесной сфере с центром на оси Mz_1 , направленной по нормали к плоскости орбиты планеты. Любые начальные возмущения в угле прецессии φ_3 сохраняют положение оси на окружности, поэтому ось планеты продолжает свое движение по этой окружности и сохраняется период прецессии. Если мы учитываем гравитационные моменты со стороны других планет, ситуация меняется. Ось вращения описывает на единичной сфере некоторую кривую L , отличную от окружности. В этом случае начальные возмущения по φ_3 уведут нас с этой кривой в силу ее «искривленности». Но тогда конец оси вращения планеты будет перемещаться вдоль близкой кривой, отличной от L . Период прецессии меняется.

Описанный эффект сродни эффекту асинхронности нелинейных колебаний одномерной системы, при которых частота колебаний есть функция начальных условий (начальной амплитуды). При этом синхронными движениями относительно начальных возмущений по φ_3 следует считать невозмущенную прецессию оси вращения планеты в задаче двух тел.

§ 4. Эволюция угла наклона планеты под действием притяжения звезды и внешней массивной планеты

Рассмотрим простую модельную систему, состоящую из звезды массы m_S , планеты M массы m и внешней массивной планеты массы m_J , которую мы считаем подобной Юпитеру (см. рис. 2) с соответствующим отношением масс $m_J/m_S = 0.001$. Считаем орбиты планет кеплеровскими эллипсами с фокусом в звезде. Модель можно рассматривать как некоторое гипотетическое приближение к системе небесных тел «Солнце–Венера–Юпитер».

Цель исследований — изучить влияние эксцентриситета e_J внешней планеты и угла наклона γ плоскости ее орбиты на размах колебаний по углу нутации планеты и на период ее прецессии. Параметры орбит двух планет выбирались достаточно произвольно, учитывая качественный характер исследований. Отметим только, что последние астрофизические наблюдения показали, что параметры орбит экзопланет (планет, находящихся за пределами Солнечной системы) могут принимать самые разные значения по эксцентриситету и углу наклона плоскости орбиты.

Предположим, что звезда находится в начале координат $OXYZ$, орбита планеты принадлежит плоскости OXY , орбиты обеих планет — кеплеровские эллипсы, плоскости которых пересекаются вдоль оси OY так, что большие полуоси орбит перпендикулярны оси OY . Угол между плоскостями орбит обозначим как γ .

Определим размах колебаний по углу δ_1 в виде

$$\Delta = \text{abs max}_{-\infty < t < \infty} \delta_1(t) - \text{abs min}_{-\infty < t < \infty} \delta_1(t).$$

Здесь abs max (abs min) — глобальный максимум (минимум).

Запишем декартовы координаты звезды, планеты M и внешней планеты:

$$\begin{aligned} X_S(t) &= Y_S(t) = Z_S(t) = 0, \\ X &= \frac{p \cos \nu}{1 + e \cos \nu}, \quad Y = \frac{p \sin \nu}{1 + e \cos \nu}, \quad Z(t) = 0, \\ X_J &= \cos \gamma \frac{p_J \cos \nu_J}{1 + e_J \cos \nu_J}, \quad Y_J = \frac{p_J \sin \nu_J}{1 + e_J \cos \nu_J}, \quad Z_J = \sin \gamma \frac{p_J \cos \nu_J}{1 + e_J \cos \nu_J}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

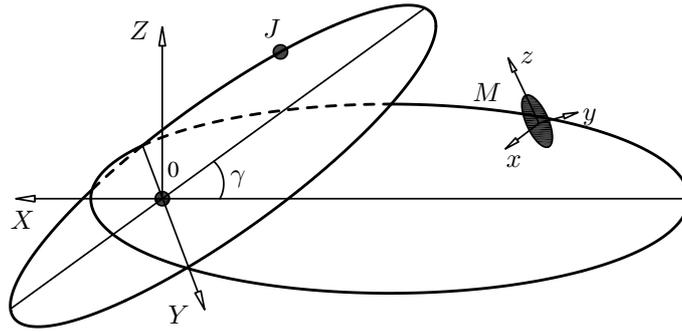


Рис. 2. Планетарная система: звезда, планета M и внешняя планета J

Здесь p, p_J — фокальные параметры, ν, ν_J — истинные аномалии орбитальных движений исследуемой планеты и планеты (J).

Колебания по углу δ_1 определяется вторым членом правой части формулы (3.7). Максимум и минимум колебаний по углу δ_1 задаются равенством $dd_1/d\varphi_3 = 0$, т. е.

$$((D_2^* - D_1^*) \sin 2\varphi_3 + 2D_4^* \cos 2\varphi_3) \sin^2 \delta_{11} - \sin 2\delta_{11} (D_5^* \cos \varphi_3 + D_6^* \sin \varphi_3) = 0, \tag{4.2}$$

где

$$\begin{aligned} D_1^* &= \frac{fm_J}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(X - X_J)^2}{R_J^5} \Xi \, d\nu \, d\nu_J, & D_2^* &= \frac{fm_J}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(Y - Y_J)^2}{R_J^5} \Xi \, d\nu \, d\nu_J, \\ D_3^* &= \frac{fm_J}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(Z - Z_J)^2}{R_J^5} \Xi \, d\nu \, d\nu_J, & D_4^* &= \frac{fm_J}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(X - X_J)(Y - Y_J)}{R_J^5} \Xi \, d\nu \, d\nu_J, \\ D_5^* &= \frac{fm_J}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(X - X_J)(Z - Z_J)}{R_J^5} \Xi \, d\nu \, d\nu_J, & D_6^* &= \frac{fm_J}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(Y - Y_J)(Z - Z_J)}{R_J^5} \Xi \, d\nu \, d\nu_J. \end{aligned}$$

Здесь принято обозначение

$$\Xi = \frac{(1 - e^2)^{3/2}}{(1 + e \cos \nu)^2} \frac{(1 - e_J^2)^{3/2}}{(1 + e_J \cos \nu_J)^2}.$$

Из условия ортогональности больших полуосей a, a_J оси OY , т. е. прямой, вдоль которой пересекаются плоскости орбит, следует, что $D_4^* = D_6^* = 0$. Действительно, отображение $Y \rightarrow -Y, Y_J \rightarrow -Y_J$ переводит кеплеровские орбиты обеих планет самих в себя, поэтому значения коэффициентов D_i^* сохраняются. С другой стороны, параметры D_4^*, D_6^* меняют знак при этом отображении, поэтому они равны нулю.

В этом случае из уравнения (4.2) следует, что $\varphi_3 = \pi/2, 3\pi/2$ являются экстремальными точками функции $\delta_1(\varphi_3)$. Эта функция принимает также экстремальные значения в точках φ_3 , удовлетворяющих уравнению

$$2(D_2^* - D_1^*) \sin \varphi_3 \sin^2 \delta_{11} - D_5^* \sin 2\delta_{11} = 0 \tag{4.3}$$

при условии

$$|\operatorname{tg} \delta_{11}| > |D_5^*|/|D_2^* - D_1^*|. \tag{4.4}$$

Если неравенство (4.4) нарушается, то у функции $\delta_1(\varphi_3)$ на интервале $0 \leq \varphi_3 < 2\pi$ есть один минимум и один максимум в точках $\varphi_3 = \pi/2, 3\pi/2$. Вычисляя значение δ_1 (см. (3.7)) в этих точках, получим $\Delta = 2|D_5^*|/D_1$.

Если неравенство (4.4) выполняется, то уравнение (4.3) имеет два решения относительно φ_3 на интервале $0 \leq \varphi_3 < 2\pi$, функция $\delta_1(\varphi_3)$ имеет два максимума и два минимума. Вторая производная $\delta_1(\varphi_3)$ положительна в точках $\varphi_3 = \pi/2, 3\pi/2$, если $(D_2^* - D_1^*) > 0$, и отрицательна

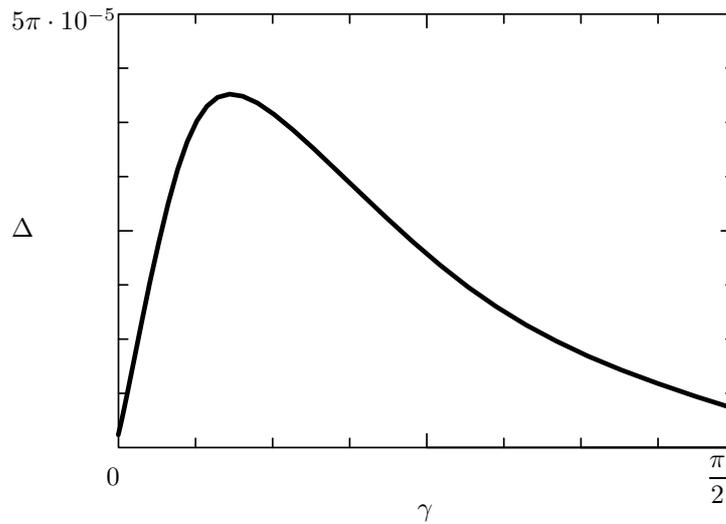


Рис. 3. Зависимость Δ от γ . Параметры системы:
 $m_J/m_S = 0.001$, $p = 1$, $p_J = 2$, $e = 0.1$, $e_J = 0.5$ и $\delta_{11} = \pi/8$

в противном случае, поэтому тип экстремума в этих двух точках совпадает, но он зависит от знака $(D_2^* - D_1^*)$. Вычисляя $\delta_1(\varphi_3)$ в точках $\varphi_3 = \pi/2, 3\pi/2$, а также при φ_3 , удовлетворяющих уравнению (4.3), сравнивая между собой максимальные значения δ_1 , а также минимальные значения, принимая во внимание случаи разных знаков у параметра $(D_2^* - D_1^*)$ и у параметра D_5^* , получим окончательное выражение для Δ :

$$\Delta = \begin{cases} 2 \frac{|D_5^*|}{D_1^{(1)}}, & \text{если } |\operatorname{tg} \delta_{11}| < \frac{|D_5^*|}{|D_2^* - D_1^*|}, \\ \frac{|D_5^*|}{D_1^{(1)}} + \frac{|D_2^* - D_1^*|}{2D_1^{(1)}} \operatorname{tg} \delta_{11} + \frac{(D_5^*)^2}{2D_1^{(1)}|D_2^* - D_1^*|} \operatorname{tg}^{-1} \delta_{11}, & \text{если } |\operatorname{tg} \delta_{11}| > \frac{|D_5^*|}{|D_2^* - D_1^*|}. \end{cases} \quad (4.5)$$

Результаты расчетов размаха колебаний Δ по углу наклона оси вращения планеты M в зависимости от угла пересечения γ орбитальных плоскостей двух планет, в зависимости от эксцентриситета e_J орбиты внешней планеты и зависимость возмущенного периода прецессии планеты от γ приведены на рис. 3, 4, 5.

Из рис. 3 следует, что первоначальное увеличение γ ведет к резкому увеличению размаха колебаний по углу δ_1 с последующим уменьшением амплитуды колебаний, при этом абсолютная величина Δ остается малой, следовательно, вращение планеты M близко к регулярной прецессии. Малость размаха колебаний по углу δ_1 обусловлено малостью «невозмущенного» угла δ_{11} .

Наиболее интересен рис. 4, иллюстрирующий изменение Δ в функции e_J в плоском случае движения двух планет ($\gamma = 0$). Помимо того, что зависимость $\Delta(e_J)$ имеет сложный характер, мы видим, что при значениях $e \approx 0.152$ и $e \approx 0.426$ размах колебаний равен нулю. Это значит, что при указанных значениях эксцентриситета орбиты внешней планеты ось вращения исследуемой планеты прецессирует с постоянной возмущенной угловой скоростью $\omega^* = 2\pi/T^*$ на постоянном угловом расстоянии δ_{11}^* вокруг оси, составляющей малый угол с нормалью к плоскости OXY . В этом частном случае влияние внешней планеты сказывается на значениях возмущенного угла нутации δ_{11}^* в соответствии с формулой (3.8), угловой скорости прецессии ω^* и на значении угла наклона оси вращения планеты к нормали плоскости OXY .

В заключение отметим, что усредненные уравнения вращений с функцией Гамильтона

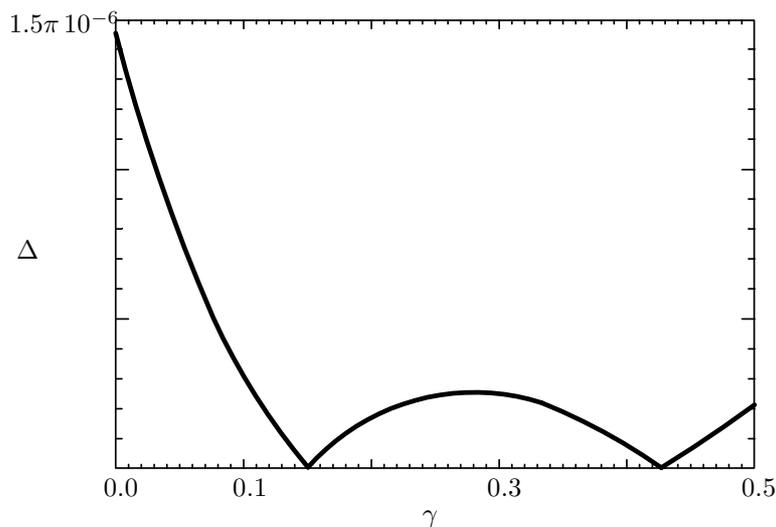


Рис. 4. Зависимость Δ от ε_J . Параметры системы: $m_J/m_S = 0.001$, $p = 1$, $p_J = 2$, $e = 0.25$, $\gamma = 0$ и $\delta_{11} = \pi/8$

$H = I_2^2(2J_0)^{-1} + \varepsilon \bar{H}_1$, при условии вычисления параметров D_i с точностью до членов второго порядка малости по μ_i , содержат N малых параметров $\varepsilon, \mu_2, \dots, \mu_N$ в первой степени. Поэтому точность, с которой решения усредненной системы первого приближения аппроксимируют решения строгих уравнений с функцией Гамильтона (1.1), определяется на основе обобщенной теоремы Боголюбова Н. Н. (см. [16]). Метод усреднения с независимыми малыми параметрами гарантирует точность приближения первого порядка малости по малым параметрам на асимптотически большем промежутке времени, т. е. для любых малых величин $\delta_1 > 0, \dots, \delta_N > 0$ существуют константы $A(\delta_1, \dots, \delta_N) > 0, b_1 > 0, \dots, b_N > 0$ такие, что

$$\|u(t) - v(t)\| \leq A(\delta_1, \dots, \delta_N) \left(b_1 \varepsilon + \sum_{i=2}^N b_i \mu_i \right),$$

когда $t \sim 1/\|(\varepsilon, \mu_2, \dots, \mu_N)\|$, $0 \leq \varepsilon \leq \delta_1, \dots, 0 \leq \mu_N \leq \delta_N$. Здесь $u(t)$ есть решение исходных уравнений вращения с функцией Гамильтона (1.1), $v(t)$ — решение усредненных уравнений, при этом $u(0) = v(0)$.

Примечание. Отметим, что если исследуемая планета имеет массивный спутник, то необходимо учесть гравитационные моменты от спутника, так как они оказывают существенное влияние на вращение планеты. Эти исследования проводятся аналогично, на основе анализа формул (3.7), (3.11), только при этом надо учесть, что в параметры D_j будут входить дополнительные члены, соответствующие гравитационному воздействию спутника планеты.

§ 5. Заключение

Исследована нерезонансная эволюция угла наклона оси вращения планеты под действием гравитационных моментов массивной звезды и $(N - 1)$ небесных тел, входящих в планетную систему, при том условии, что траектории движения планет — эллипсы. На основе анализа первых интегралов усредненных уравнений вращения сделаны выводы о характере вращения планеты для случая, когда массы внешних планет много меньше массы звезды [12]: для всех начальных условий по углу нутации δ_1 (исключая узкую область вблизи экватора) планета совершает движения типа испорченной прецессии вокруг оси, составляющей малый угол с нормалью к плоскости орбиты планеты.

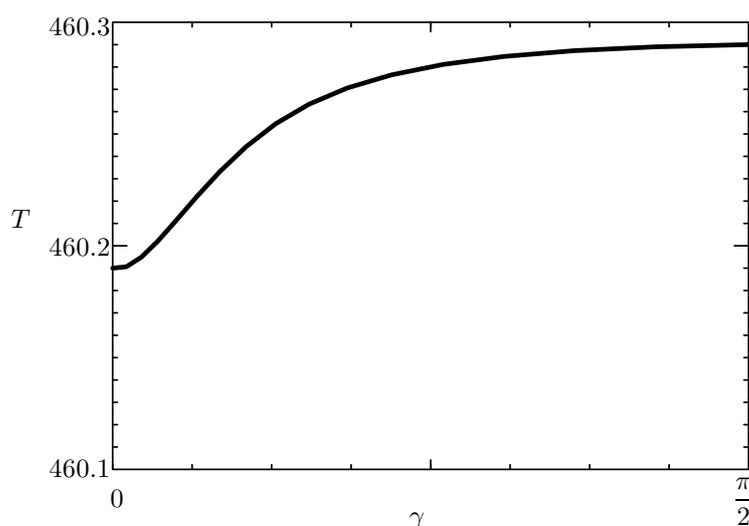


Рис. 5. Зависимость T от γ . Параметры: $C - A = 10^{-2}$, $I_2 = 1$, $m_J/m_S = 0.001$, $p = 1$, $p_J = 2$, $e = 0.1$, $e_J = 0.5$, $\delta_{11} = \pi/8$ и $\varphi_{30} = 0$

Для движений типа испорченной прецессии получены, в первом приближении метода усреднения, явные формулы (3.7) изменения угла нутации планеты в функции параметров задачи и невозмущенного угла прецессии $\varphi_3 = \omega_0 t + \varphi_{30}$. Получены также формулы возмущенного периода прецессии планеты в функции параметров задачи (см. (3.11)), а также формулы (4.5), описывающие размах колебаний по углу нутации в окрестности невозмущенного значения δ_{11} для случая, когда планетная система состоит из трех тел (звезда и две планеты), при этом орбиты планет имеют симметрию относительно плоскости OXZ . Показано, что период возмущенной прецессии зависит от начальных значений по углу прецессии φ_3 («асинхронность» возмущенных движений по углу прецессии).

Численный анализ частного случая планетной системы, состоящей из звезды и двух планет с симметричными орбитами, показал, что размах колебаний по углу нутации планеты зависит от эксцентриситета орбиты второй внешней планеты сложным образом. Если орбиты двух планет лежат в одной плоскости, то при определенных значениях эксцентриситета размах колебаний равен нулю, поэтому ось собственного вращения планеты регулярно прецессирует, что гарантирует относительно стабильный климат на планете. Зависимость размаха колебаний от угла наклона орбиты второй планеты по отношению к плоскости «эклиптики» имеет участки монотонного возрастания амплитуды колебаний по углу нутации (участки дестабилизация климата на поверхности планеты) и участки монотонного убывания (стабилизация климата).

Увеличение угла наклона орбиты второй планеты ведет также к увеличению возмущенного периода прецессии оси вращения планеты.

Финансирование. Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-01-00820.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Drysdale R.N., Hellstrom J.C., Zanchetta G., Fallick A.E., Sánchez Goñi M.F., Couchoud I., McDonald J., Maas R., Lohmann G., Isola I. Evidence for obliquity forcing of glacial termination. II // *Science*. 2009. Vol. 325. No. 5947. P. 1527–1531. DOI: [10.1126/science.1170371](https://doi.org/10.1126/science.1170371)
2. Dressing C.D., Spiegel D.S., Scharf C.A., Menou K., Raymond S.N. Habitable climates: the influence of eccentricity // *The Astrophysical Journal*. 2010. Vol. 721. No. 2. P. 1295–1307. DOI: [10.1088/0004-637x/721/2/1295](https://doi.org/10.1088/0004-637x/721/2/1295)
3. Williams D.M., Kasting J.F. Habitable planets with high obliquities // *Icarus*. 1997. Vol. 129. No. 1. P. 254–267. DOI: [10.1006/icar.1997.5759](https://doi.org/10.1006/icar.1997.5759)

4. Laskar J., Joutel F., Boudin F. Orbital, precessional, and insolation quantities for the Earth from -20 Myr to $+10$ Myr // *Astronomy and Astrophysics*. 1993. Vol. 270. Nos. 1–2. P. 522–533.
5. Laskar J., Robutel P. The chaotic obliquity of the planets // *Nature*. 1993. Vol. 361. No. 6413. P. 608–612. DOI: [10.1038/361608a0](https://doi.org/10.1038/361608a0)
6. Laskar J., Foutel F., Robutel P. Stabilization the Earth's obliquity by the Moon // *Nature*. 1993. Vol. 361. No. 6413. P. 615–617. DOI: [10.1038/361615a0](https://doi.org/10.1038/361615a0)
7. Spiegel D.S., Raymond S.N., Dressing C.D., Scharf C.A., Mitchell J.L. Generalized Milankovitch cycles and longterm climatic habitability // *The Astrophysical Journal*. 2010. Vol. 721. No. 2. P. 1308–1318. DOI: [10.1088/0004-637x/721/2/1308](https://doi.org/10.1088/0004-637x/721/2/1308)
8. Heller R., Leconte J., Barnes R. Tidal obliquity evolution of potentially habitable planets // *Astronomy and Astrophysics*. 2011. Vol. 528. A27. 16 p. DOI: [10.1051/0004-6361/201015809](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201015809)
9. Ward W.R., Hamilton D.P. Tilting Saturn. I. Analytic Model // *The Astronomical Journal*. 2004. Vol. 128. No. 5. P. 2501–2509. DOI: [10.1086/424533](https://doi.org/10.1086/424533)
10. Ward W.R., Hamilton D.P. Tilting Saturn. II. Numerical Model // *The Astronomical Journal*. 2004. Vol. 128. No. 5. P. 2510–2517. DOI: [10.1086/424534](https://doi.org/10.1086/424534)
11. Красильников П.С., Амелин Р.Н. О прецессии Сатурна // *Космические исследования*. 2018. Т. 56. № 4. С. 326–336. DOI: [10.31857/S002342060000348-0](https://doi.org/10.31857/S002342060000348-0)
12. Красильников П.С., Захарова Е.Е. Нерезонансные вращения спутника относительно центра масс на условно-периодической орбите в ограниченной задаче N тел // *Космические исследования*. 1993. Т. 31. № 6. С. 11–21.
13. Белецкий В.В. Движение искусственного спутника Земли относительно центра масс // *Искусственные спутники Земли*. М.: Изд-во АН СССР, 1958. Вып. 1. С. 25–43.
14. Routh E.J. The advanced part of a treatise on the dynamics of a system of rigid bodies. Cambridge: Cambridge University Press, 2013. DOI: [10.1017/cbo9781139237284](https://doi.org/10.1017/cbo9781139237284)
15. Gray A. A treatise on gyrostatics and rotational motion. Theory and application. London: Macmillan and Co, 1918. 530 p.
16. Красильников П.С. О нелинейных колебаниях маятника переменной длины на вибрирующем основании. // *ПММ*. 2012. Т. 76. № 1. С. 36–51.

Поступила в редакцию 09.06.2018

Красильников Павел Сергеевич, д. ф.-м. н., профессор, зав. кафедрой моделирования динамических систем, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), 125993, Россия, г. Москва, Волоколамское шоссе, 4.
E-mail: krasil06@rambler.ru

Подвигина Ольга Михайловна, д. ф.-м. н., ведущий научный сотрудник, Институт теории прогноза землетрясений и математической геофизики РАН, 117997, Россия, г. Москва, ул. Профсоюзная, 84/32.
E-mail: olgap@mitp.ru

P. S. Krasil'nikov, O. M. Podvigina

On evolution of the planet's obliquity in a non-resonant planetary system

Citation: *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2018, vol. 28, issue 4, pp. 549–564 (in Russian).

Keywords: planet's rotation, planetary system, averaged equations, planet's obliquity, precession period.

MSC2010: 70F15, 70K65

DOI: [10.20537/vm180408](https://doi.org/10.20537/vm180408)

We investigate the evolution of the obliquity of a planet in the gravitational field of a star and other planets comprising a planetary system. The planet is assumed to be an axially symmetric rigid body ($A = B$). This planet and other planets move around the star along Keplerian ellipses with frequencies ω and $\omega_2, \dots, \omega_N$, respectively, where N is the number of celestial bodies (material points) affecting the planet.

We derive Hamiltonian for the problem in the Depri–Andoyer variables in the satellite approximation. The Hamiltonian is averaged over the fast variables of the rotational and orbital motions, assuming that the motions are not resonant. The averaged Hamiltonian involves, in addition to the classic parameters, parameters D_i , that can be considered as functionals on the family of orbits of celestial bodies comprising the planetary system. The averaged Hamiltonian admits separation of variables, which implies the existence of three first integrals in involution.

Regarding the gravitational torques of the other planets as small perturbations, we obtain from the energy integral of the averaged equations explicit approximate expressions for obliquity of the planet and its perturbed period of precession.

We investigate numerically the amplitude of oscillations of the planet's obliquity and its perturbed period of precession for a planetary system involving a star, the planet itself and another massive planet (similar to Jupiter), whose orbits satisfy certain symmetry conditions and orbital planes intersect at angle γ .

Funding. This work was supported by Russian Foundation for Basic Research under Grant 18–01–00820.

REFERENCES

1. Drysdale R.N., Hellstrom J.C., Zanchetta G., Fallick A.E., Sánchez Goñi M.F., Couchoud I., McDonald J., Maas R., Lohmann G., Isola I. Evidence for obliquity forcing of glacial termination. II, *Science*, 2009, vol. 325, no. 5947, pp. 1527–1531. DOI: [10.1126/science.1170371](https://doi.org/10.1126/science.1170371)
2. Dressing C.D., Spiegel D.S., Scharf C.A., Menou K., Raymond S.N. Habitable climates: the influence of eccentricity, *The Astrophysical Journal*, 2010, vol. 721, no. 2, pp. 1295–1307. DOI: [10.1088/0004-637X/721/2/1295](https://doi.org/10.1088/0004-637X/721/2/1295)
3. Williams D.M., Kasting J.F. Habitable planets with high obliquities, *Icarus*, 1997, vol. 129, no. 1, pp. 254–267. DOI: [10.1006/icar.1997.5759](https://doi.org/10.1006/icar.1997.5759)
4. Laskar J., Joutel F., Boudin F. Orbital, precessional, and insolation quantities for the Earth from -20 Myr to $+10$ Myr, *Astronomy and Astrophysics*, 1993, vol. 270, nos. 1–2, pp. 522–533.
5. Laskar J., Robutel P. The chaotic obliquity of the planets, *Nature*, 1993, vol. 361, no. 6413, pp. 608–612. DOI: [10.1038/361608a0](https://doi.org/10.1038/361608a0)
6. Laskar J., Joutel F., Robutel P. Stabilization the Earth's obliquity by the Moon, *Nature*, 1993, vol. 361, no. 6413, pp. 615–617. DOI: [10.1038/361615a0](https://doi.org/10.1038/361615a0)
7. Spiegel D.S., Raymond S.N., Dressing C.D., Scharf C.A., Mitchell J.L. Generalized Milankovitch cycles and longterm climatic habitability, *The Astrophysical Journal*, 2010, vol. 721, no. 2, pp. 1308–1318. DOI: [10.1088/0004-637X/721/2/1308](https://doi.org/10.1088/0004-637X/721/2/1308)
8. Heller R., Leconte J., Barnes R. Tidal obliquity evolution of potentially habitable planets, *Astronomy and Astrophysics*, 2011, vol. 528, A27, 16 p. DOI: [10.1051/0004-6361/201015809](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201015809)
9. Ward W.R., Hamilton D.P. Tilting Saturn. I. Analytic Model, *The Astronomical Journal*, 2004, vol. 128, no. 5, pp. 2501–2509. DOI: [10.1086/424533](https://doi.org/10.1086/424533)
10. Ward W.R., Hamilton D.P. Tilting Saturn. II. Numerical Model, *The Astronomical Journal*, 2004, vol. 128, no. 5, pp. 2510–2517. DOI: [10.1086/424534](https://doi.org/10.1086/424534)
11. Krasil'nikov P.S., Amelin R.N. On the precession of Saturn, *Cosmic Research*, 2018, vol. 56, no. 4, pp. 306–316. DOI: [10.1134/S0010952518040019](https://doi.org/10.1134/S0010952518040019)
12. Krasil'nikov P.S., Zakharova E.E. Non-resonant rotation of a satellite relative to the center of mass on a quasi-periodic orbit in the restricted N body problem, *Kosmicheskie Issledovaniya*, 1993, vol. 31, no. 6, pp. 11–21 (in Russian).
13. Beletskii V.V. The motion of an artificial Earth satellite relative to the center of mass, *Iskusstvennye Sputniki Zemli* (Artificial Earth Satellites), Moscow: USSR Academy of Sciences, 1958, issue 1, pp. 25–43 (in Russian).
14. Routh E.J. *The advanced part of a treatise on the dynamics of a system of rigid bodies*, Cambridge: Cambridge University Press, 2013. DOI: [10.1017/cbo9781139237284](https://doi.org/10.1017/cbo9781139237284)
15. Gray A. *A treatise on gyrostatics and rotational motion. Theory and application*. London: Macmillan and Co, 1918, 530 p.
16. Krasil'nikov P.S. The non-linear oscillations of a pendulum of variable length on a vibrating base, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2012, vol. 76, no. 1, pp. 25–35. DOI: [10.1016/j.jappmathmech.2012.03.003](https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2012.03.003)

Krasil'nikov Pavel Sergeevich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Head of Department of Modeling of Dynamic Systems, Moscow Aviation Institute, Volokolamskoe shosse, 4, Moscow, 125993, Russia.

E-mail: krasil06@rambler.ru

Podvigina Ol'ga Mikhailovna, Doctor of Physics and Mathematics, Leading Researcher, Institute of Earthquake Prediction Theory and Mathematical Geophysics, Russian Academy of Sciences, ul. Profsoyuznaya, 84/32, Moscow, 117997, Russia.

E-mail: olgap@mitp.ru