

УДК 517.93

© С. П. Кузнецов

## ХАОС И ГИПЕРХАОС ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ПОТОКОВ НА МНОГООБРАЗИЯХ С КРИВИЗНОЙ, ОТВЕЧАЮЩИХ МЕХАНИЧЕСКИ СВЯЗАННЫМ РОТАТОРАМ: ПРИМЕРЫ И ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ

Исследуется система  $N$  ротаторов с наложенной связью, заданной условием обращения в ноль суммы косинусов углов поворота. Сформулированы уравнения динамики и приведены результаты численного моделирования для случаев  $N = 3, 4$  и  $5$ , которые отвечают геодезическим потокам на двумерном, трехмерном и четырехмерном многообразии в компактной области (в силу периодичности конфигурационного пространства по угловым переменным). Система из трех ротаторов демонстрирует хаос, характеризуемый наличием одного положительного показателя Ляпунова, а для систем из четырех и пяти элементов имеется, соответственно, два и три положительных показателя (гиперхаос). Реализован алгоритм, позволяющий вычислять секционную кривизну многообразия в ходе численного моделирования динамики в точках траектории. В случае  $N = 3$  кривизна двумерного многообразия отрицательна (за исключением конечного числа точек, где она нулевая), и реализуется геодезический поток Аносова. Для  $N = 4$  и  $5$  расчеты показывают, что условие отрицательной секционной кривизны не выполнено. Также изложена методика и представлены результаты проверки гиперболичности на основе численного анализа углов между подпространствами векторов малых возмущений, причем в случае  $N = 3$  гиперболичность подтверждается, а для  $N = 4$  и  $5$  нет.

*Ключевые слова:* геодезический поток, хаос, динамика Аносова, показатель Ляпунова.

DOI: [10.20537/vm180409](https://doi.org/10.20537/vm180409)

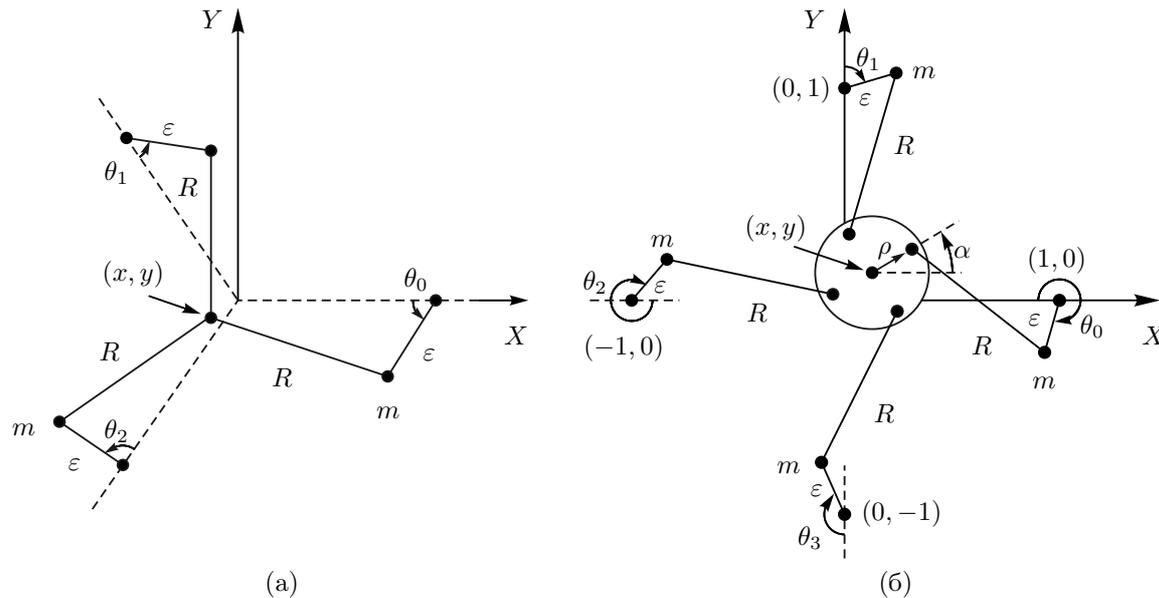
### Введение

Геодезические потоки — специальный класс динамических систем, фазовое пространство которых образовано множеством точек некоторого многообразия вместе с векторами скорости в этих точках [1, 2]. Движение имеет место по геодезическим линиям, с сохранением составляющей скорости в направлении геодезической. Это естественное обобщение свободного движения материальной точки по инерции в евклидовом пространстве на случай движения на искривленной поверхности или в многомерном пространстве с кривизной.

Геодезические потоки на компактных многообразиях отрицательной кривизны служат классическим примером хаотической динамики, относящейся к категории гиперболической динамики и обладающей в связи с этим свойством грубости или структурной устойчивости. Примеры такого рода восходят к Адамару [3], но далеко идущее развитие соответствующий раздел теории динамических систем получил, начиная с 60-х годов XX века, в результате работ Аносова и других исследователей [4–7].

Естественной областью приложения геодезических потоков с нетривиальной динамикой служат механические системы, совершающие движение в условиях сохранения механической энергии при наложении голономных связей, заданных алгебраическими соотношениями между координатами. Уравнения связей определяют форму многообразия как объекта, вложенного в объемлющее пространство, а метрика на многообразии естественным образом определяется квадратичной формой, отвечающей выражению кинетической энергии через обобщенные скорости.

На рис. 1, а показан шарнирный механизм, построенный из трех двухзвенных кривошипов, предложенный к рассмотрению в работе Тёрстона и Уикса [8], как пример системы с конфигурационным пространством в виде нетривиального многообразия. Его можно трактовать



**Рис. 1.** Шарнирные механизмы на основе ротаторов, углы поворота которых около неподвижных осей даются углами  $\theta_i(t)$ , с наложенной голономной связью, которая в предельном случае  $\varepsilon \ll R = 1$  описывается алгебраическим уравнением  $\sum_{i=0}^{N-1} \cos \theta_i = 0$ , где  $N=3$  (а) или 4 (б)

как систему трех ротаторов, на которую наложена связь, заданная алгебраическим соотношением между угловыми координатами. Хант и МакКей показали, что свободное движение этого механизма при надлежащем подборе параметров доставляет физически реализуемый пример потока Аносова на компактном двумерном многообразии отрицательной кривизны [9]. Специальный случай, когда уравнение связи упрощается в определенной асимптотике по параметрам и имеет вид равенства нулю суммы косинусов трех углов, определяющих поворот ротаторов около закрепленных осей, подробно обсуждался в работах [10, 11]. Конфигурационным пространством в этом случае служит двумерная искривленная поверхность, известная как  $P$ -поверхность Шварца [12]. Были рассмотрены также обобщения, подразумевающие замену алгебраических уравнений связи потенциальным взаимодействием ротаторов, выбранным так, что минимум потенциала отвечает поверхности Шварца [13–15]. Кроме того, обсуждалось введение в систему диссипации и обратных связей, что позволило реализовать хаотические автоколебания, отвечающие гиперболическому структурно устойчивому аттрактору, и указать способ построения электронного устройства, воспроизводящего динамику Аносова на аттракторе и выступающего как генератор грубого хаоса с привлекательными для приложений характеристиками [14, 15].

Напрашивается обобщение упомянутых исследований, состоящее в том, чтобы рассмотреть системы на основе другого числа ротаторов.

Случай двух ротаторов со связью, реализованной посредством шарнирного механизма, не представляется интересным в плане феноменов сложной динамики, поскольку конфигурационное пространство вырождается в систему пересекающихся прямых на плоскости двух угловых переменных. Впрочем, при замене механической связи на взаимодействие ротаторов посредством потенциальных сил могут реализоваться нетривиальные движения типа блуждания на двумерной решетке в плоскости угловых переменных [16], подобно орбитам на фазовой плоскости неавтономных систем, формирующим «стохастическую паутину» Заславского [17].

Предметом настоящей статьи будет рассмотрение систем на основе большего числа ротаторов  $N$  (конкретно будут обсуждаться случаи  $N = 3, 4, 5$ ), углы поворота которых  $\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{N-1}$

подчинены уравнению связи

$$\sum_{i=0}^{N-1} \cos \theta_i = 0.$$

В частности, для  $N = 4$  соответствующую ситуацию можно реализовать в показанном на рис. 1, б шарнирном механизме, рассмотрев определенную асимптотику по параметрам.

В § 1 формулируются уравнения для системы  $N$  ротаторов с наложенной связью, заданной условием обращения в ноль суммы косинусов углов поворота. Представлено две формы уравнений — в объемлющем пространстве с наложением условия связи, что удобно при проведении численного интегрирования уравнений и обработки получаемых данных, и эквивалентная формулировка с применением стандартных обозначений теории римановых многообразий [18], что позволяет установить и обсудить взаимосвязь с проблематикой теории Аносова. В § 2 приводятся и сопоставляются численные результаты для случаев  $N = 3$  (динамика Аносова, отвечающая хаосу с одним положительным показателем Ляпунова),  $N = 4$  (гиперхаотическая динамика с двумя положительными показателями Ляпунова на трехмерном искривленном многообразии) и  $N = 5$  (гиперхаотическая динамика на четырехмерном многообразии с тремя положительными показателями Ляпунова). В § 3 вводится алгоритм вычисления кривизны в точках траектории, который был оттестирован путем сравнения с аналитической формулой для случая  $N = 3$ , где кривизна отрицательна, за исключением конечного числа точек на многообразии, и реализуется динамика Аносова. Для случаев  $N = 4$  и 5 показано, что условие отрицательной секционной кривизны не выполнено, при движении по типичным траекториям встречаются также положительные значения кривизны. В § 4 обсуждается методика и представлены результаты проверки гиперболичности наблюдаемой динамики на основе численного анализа углов пересечения для подпространств векторов малых возмущений; в результате показано, что в случае  $N = 3$  гиперболичность подтверждается, а в случаях  $N = 4$  и 5 нет. В заключение обсуждаются возможные перспективы развития намеченных подходов к анализу хаотической динамики как для геодезических потоков, так и для реализующих аналогичную динамику иных типов динамических систем.

## § 1. Основные уравнения

Рассмотрим систему, составленную из  $N > 2$  ротаторов с единичным моментом инерции, характеризуемых зависящими от времени мгновенными значениями углов поворота  $\theta_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, N - 1$ , полагая, что кинетическая энергия дается выражением

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \dot{\theta}_i^2. \quad (1.1)$$

Кроме того, будем считать наложенным условие голономной связи

$$F(\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{N-1}) = \sum_{i=0}^{N-1} \cos \theta_i = 0, \quad (1.2)$$

что при  $N = 3$  и 4 можно реализовать посредством упомянутых во введении шарнирных механизмов.

Уравнения движения системы — уравнения Лагранжа — записываются в виде

$$\ddot{\theta}_i = \Lambda \partial F / \partial \theta_i = -\Lambda \sin \theta_i, \quad i = 0, 1, \dots, N - 1, \quad (1.3)$$

где множитель  $\Lambda$  подлежит определению с учетом дополнительного к дифференциальным уравнениям алгебраического условия механической связи (1.2). Дифференцируя уравнение связи по времени двукратно, имеем

$$\sum_{i=0}^{N-1} \ddot{\theta}_i \sin \theta_i + \sum_{i=0}^{N-1} \dot{\theta}_i^2 \cos \theta_i = 0. \quad (1.4)$$

Подставив сюда выражения для вторых производных из уравнений (1.3), получаем в явном виде формулу для множителя  $\Lambda$ :

$$\Lambda = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} \dot{\theta}_i^2 \cos \theta_i}{\sum_{i=0}^{N-1} \sin^2 \theta_i}. \quad (1.5)$$

Таким образом, приходим к замкнутой системе уравнений

$$\ddot{\theta}_i = -\frac{\sum_{j=0}^{N-1} \dot{\theta}_j^2 \cos \theta_j}{\sum_{j=0}^{N-1} \sin^2 \theta_j} \sin \theta_i, \quad i = 0, 1, \dots, N-1, \quad (1.6)$$

или, что эквивалентно,

$$\dot{\theta}_i = u_i, \quad \dot{u}_i = -\frac{\sum_{j=0}^{N-1} u_j^2 \cos \theta_j}{\sum_{j=0}^{N-1} \sin^2 \theta_j} \sin \theta_i, \quad i = 0, 1, \dots, N-1. \quad (1.7)$$

Условие связи (1.2) и соотношение, получаемое его дифференцированием, отвечают первым интегралам этой системы, формально имеющей порядок  $2N$ . Начальные условия должны быть таковы, чтобы эти два первых интеграла имели требуемые значения, а именно:

$$\sum_{i=0}^{N-1} \cos \theta_i = 0 \quad (1.8)$$

и

$$\sum_{i=0}^{N-1} u_i \sin \theta_i = 0. \quad (1.9)$$

Динамику системы (1.7) можно интерпретировать как движение точки на многообразии размерности  $N-1$ , заданном уравнением (1.8), по геодезическим линиям метрики, определенной квадратичной формой соответственно выражению для кинетической энергии, а именно:

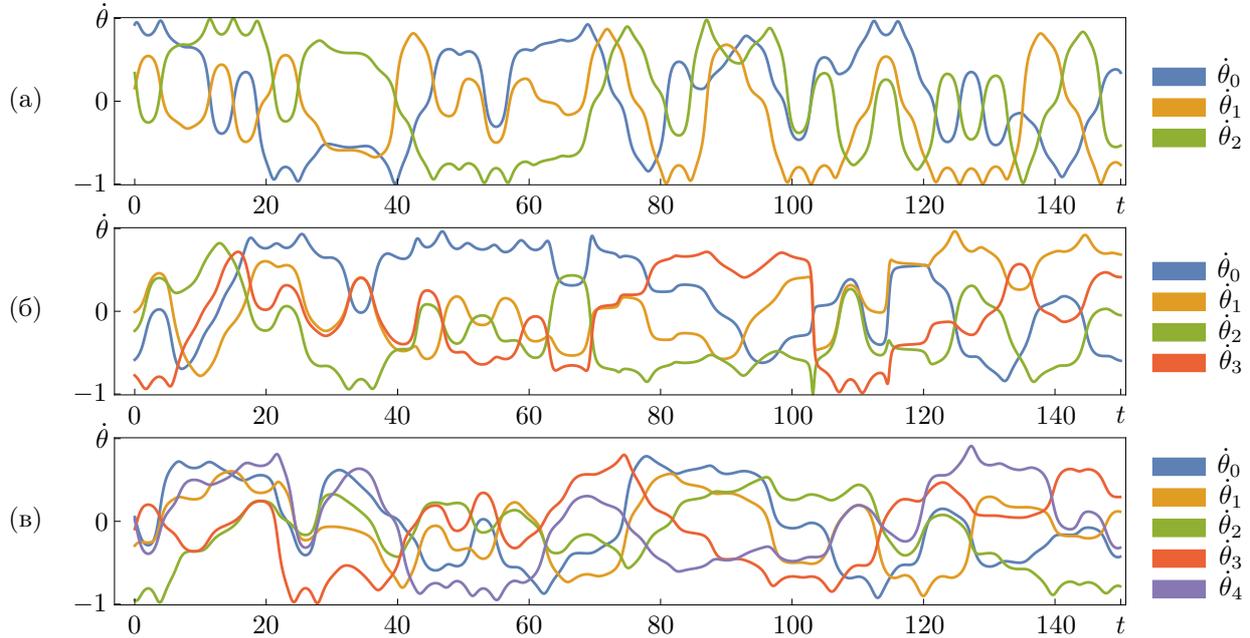
$$ds^2 = \sum_{i=0}^{N-1} d\theta_i^2, \quad (1.10)$$

с условием  $\sum_{i=0}^{N-1} \sin \theta_i d\theta_i = 0$ , возникающим в силу уравнения связи. Поскольку величины  $\theta_i$  имеют смысл угловых координат, их можно считать отнесенными к интервалу  $[0, 2\pi)$  и трактовать динамику как происходящую в компактной области.

Как очевидно из уравнений, движения, отличающиеся величиной кинетической энергии, идентичны с точностью до пересчета масштаба времени и скорости движения по геодезической. В связи с этим далее все конкретные данные будут приводиться для случая единичной абсолютной величины скорости, что соответствует энергии  $T = \frac{1}{2}$ .

Динамика системы для числа ротаторов 3, 4 и 5 иллюстрируется на рис. 2 графиками угловых скоростей в зависимости от времени, полученными при численном интегрировании уравнений (1.7) методом Рунге–Кутты. Как можно видеть из рисунка, во всех случаях поведение носит хаотический характер: зависимости демонстрируют очевидную нерегулярность и отсутствие наблюдаемой повторяемости форм. Хаотическая природа динамики подтверждается также видом спектров мощности, приведенным на рис. 3. Спектры построены обработкой временных рядов для угловой скорости одного из ротаторов, полученных при численном интегрировании уравнений, с применением методики статистической оценки спектральной плотности случайных процессов [19, 20]. Для этого временной ряд разбивается на участки некоторой длительности, существенно превышающей характерный временной масштаб сигнала, с последующим умножением отрезка временного ряда на функцию «окна» (для улучшения качества спектрального анализа вследствие купирования эффекта несовпадения сигнала на краях интервалов разбиения). Далее выполняется преобразование Фурье на каждом участке, квадраты

амплитуд спектральных компонент усредняются по множеству участков разбиения. Из рисунка видно, что в каждом из рассмотренных случаев спектр является сплошным, как у случайного процесса; выраженные дискретные составляющие отсутствуют. Хаотическая природа динамики подтверждается также анализом показателей Ляпунова в следующем параграфе.



**Рис. 2.** Графики зависимости угловых скоростей от времени для системы (1.7) для случаев  $N = 3$  (а),  $N = 4$  (б) и  $N = 5$  (в), отвечающие движению с единичной скоростью в направлении геодезической

Приведенные выше динамические уравнения (1.6) или (1.7) можно переписать, используя обозначения, принятые в теории римановых многообразий. Для этого угловую координату и скорость одного из ротаторов, скажем  $\theta_0$  и  $u_0$ , выразим через координаты и скорости остальных ротаторов, при этом набор их угловых скоростей  $(u_1, u_2, \dots, u_{N-1})$  полагаем компонентами контравариантного вектора  $u^\alpha$ . Подставляя результат в формулу для кинетической энергии, имеем

$$T = \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta, \quad (1.11)$$

где обозначенные греческими буквами индексы пробегает значения от 1 до  $N - 1$  и подразумевается суммирование по повторяющимся верхним и нижним индексам, а компоненты метрического тензора  $g_{\alpha\beta}$  даются соотношениями

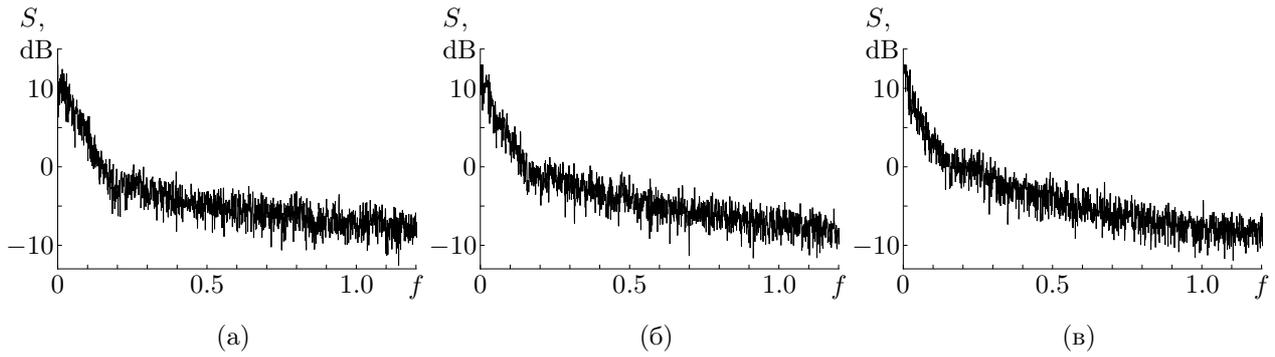
$$g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + \frac{\sin \theta_\alpha \sin \theta_\beta}{1 - \left( \sum_{\gamma=1}^{N-1} \cos \theta_\gamma \right)^2}. \quad (1.12)$$

Уравнения движения тогда принимают известную для геодезических потоков форму [1, 2, 5, 6], а именно:

$$\dot{u}^\alpha + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha u^\beta u^\gamma = 0, \quad (1.13)$$

где фигурируют символы Кристоффеля  $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ , выражающиеся через компоненты метрического тензора с использованием стандартных формул и имеющие в нашем конкретном случае вид

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \frac{\delta_{\beta\gamma} \cos \theta_\beta - \sin \theta_\beta \sin \theta_\gamma \sum_{\nu=1}^{N-1} \cos \theta_\nu \left[ 1 - \left( \sum_{\nu=1}^{N-1} \cos \theta_\nu \right)^2 \right]^{-1}}{1 + \sum_{\nu=1}^{N-1} \sin^2 \theta_\nu - \left( \sum_{\nu=1}^{N-1} \cos \theta_\nu \right)^2} \sin \theta_\alpha. \quad (1.14)$$



**Рис. 3.** Графики спектральной плотности мощности сигнала, представленного угловой скоростью одного из роторов, по результатам обработки данных численного моделирования системы (1.7) для случаев  $N = 3$  (а),  $N = 4$  (б) и  $N = 5$  (в) при движении с единичной скоростью по геодезической

Среди формул римановой геометрии полезно иметь в виду соотношение, позволяющее отследить компоненты вектора  $p^\alpha$ , подвергаемого параллельному переносу вдоль геодезической:

$$\dot{p}^\alpha + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha u^\beta p^\gamma = 0. \quad (1.15)$$

Приведенные соотношения, где выделенную роль играют  $\theta_0$  и  $u^0$ , отвечают выбору одной из  $N$  карт, составляющих атлас рассматриваемого многообразия. Для прочих карт формулы аналогичны и получаются циклической перестановкой индексов.

## § 2. Показатели Ляпунова

Формально размерность фазового пространства системы (1.7) составляет  $2N$ , соответственно, имеется  $2N$  показателей Ляпунова, характеризующих поведение возмущений около опорной траектории. Однако из их числа следует исключить нефизические два показателя, равные нулю, которые соответствуют возмущениям интегралов движения (1.8) и (1.9) и нарушают уравнения связи. Поэтому общее число значимых показателей Ляпунова —  $2N - 2$ . В силу консервативности системы и симметрии относительно обращения времени наличие каждого положительного показателя означает присутствие равного ему по абсолютной величине отрицательного. Спектр показателей Ляпунова содержит также обязательно два нулевых показателя, из которых один обусловлен автономной природой системы и отвечает за возмущение, направленное по касательной к фазовой траектории, а второй ассоциируется с возмущением сдвига по энергии.

Из сказанного выше следует, что для нахождения полного спектра показателей Ляпунова достаточно вычислить  $N - 2$  наибольших по величине показателя. Это можно реализовать в рамках вычислительной процедуры, осуществляющей решение уравнений динамики системы (1.7) совместно с набором из  $N - 2$  комплектов уравнений в вариациях [21–25]. Уравнения в вариациях получаются подстановкой в (1.7) динамических переменных с добавленными возмущениями:  $\theta_i \rightarrow \theta_i + \tilde{\theta}_i$ ,  $u_i \rightarrow u_i + \tilde{u}_i$  и линеаризацией с удержанием членов первого порядка по малым возмущениям:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\theta}}_i = \tilde{u}_i, \\ \dot{\tilde{u}}_i = -\frac{\sum_{j=0}^{N-1} (2u_j \tilde{u}_j \cos \theta_j - u_j^2 \tilde{\theta}_j \sin \theta_j)}{\sum_{j=0}^{N-1} \sin^2 \theta_j} \sin \theta_i - \left( \frac{\sum_{j=0}^{N-1} u_j^2 \cos \theta_j}{\sum_{j=0}^{N-1} \sin^2 \theta_j} \right) \tilde{\theta}_i \cos \theta_i + \\ + \frac{(\sum_{j=0}^{N-1} u_j^2 \cos \theta_j)}{(\sum_{j=0}^{N-1} \sin^2 \theta_j)^2} \sum_{j=0}^{N-1} \tilde{\theta}_j \sin 2\theta_j, \quad i = 0, 1, \dots, N-1. \end{cases} \quad (2.1)$$

В рамках вычислительной процедуры получаемые на каждом шаге интегрирования дифференциальных уравнений  $N - 2$  вектора возмущения  $\xi = (\tilde{\theta}_0, \dots, \tilde{\theta}_{N-1}, \tilde{u}_0, \dots, \tilde{u}_{N-1})$  подвергаются

ортогонализации и нормировке по Граму–Шмидту:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{x}}^{(1)}(t) &= \mathbf{x}_1 / \sqrt{\langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1 \rangle}, \quad \mathbf{x}_1 = \xi^{(1)}(t), \\ \tilde{\mathbf{x}}^{(2)}(t) &= \mathbf{x}_2 / \sqrt{\langle \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_2 \rangle}, \quad \mathbf{x}_2 = \xi^{(2)}(t) - \langle \xi^{(2)}(t), \tilde{\mathbf{x}}^{(1)}(t) \rangle \tilde{\mathbf{x}}^{(1)}(t), \\ \tilde{\mathbf{x}}^{(3)}(t) &= \mathbf{x}_3 / \sqrt{\langle \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_3 \rangle}, \quad \mathbf{x}_3 = \xi^{(3)}(t) - \langle \xi^{(3)}(t), \tilde{\mathbf{x}}^{(1)}(t) \rangle \tilde{\mathbf{x}}^{(1)}(t) - \langle \xi^{(3)}(t), \tilde{\mathbf{x}}^{(2)}(t) \rangle \tilde{\mathbf{x}}^{(2)}(t), \\ &\dots\end{aligned}\tag{2.2}$$

где угловые скобки означают скалярное произведение. В нашем случае определение скалярного произведения удобно принять вовлекаящим только координатные составляющие векторов, а именно:  $\langle \xi^{(s)}, \xi^{(r)} \rangle = \sum_{j=0}^{N-1} \tilde{\theta}_j^{(s)} \tilde{\theta}_j^{(r)}$ . (Это окажется полезным и адекватным также при вычислении кривизны, как описано в следующем параграфе.) Численную оценку показателей Ляпунова дают накапливающиеся суммы логарифмов норм  $\sqrt{\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i \rangle}$ , отнесенные ко времени наблюдения.

Так как в системе нет характерного временного масштаба, ненулевые показатели Ляпунова, характеризующие экспоненциальный рост и убывание возмущений за единицу времени, прямо пропорциональны скорости, то есть корню квадратному из кинетической энергии. В связи с этим конкретные результаты приводятся только для случая единичной скорости движения по геодезической.

Численные расчеты, выполненные для случаев  $N = 3, 4$  и  $5$ , дают для показателей Ляпунова следующие величины.

$N = 3$ :

$$\lambda_1 = 0.500, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = 0, \quad \lambda_4 = -0.500.$$

$N = 4$ :

$$\lambda_1 = 0.385, \quad \lambda_2 = 0.230, \quad \lambda_3 = 0, \quad \lambda_4 = 0, \quad \lambda_5 = -0.230, \quad \lambda_6 = -0.385.$$

$N = 5$ :

$$\lambda_1 = 0.298, \quad \lambda_2 = 0.227, \quad \lambda_3 = 0.121, \quad \lambda_4 = 0, \quad \lambda_5 = 0, \quad \lambda_6 = -0.121, \quad \lambda_7 = -0.227, \quad \lambda_8 = -0.298.$$

Как можно видеть, во всех трех случаях имеются положительные показатели Ляпунова, что говорит о хаотической природе динамики.

В первом случае  $N = 3$ , когда движение происходит на *двумерном* многообразии, представляющем собой поверхность Шварца, положительный показатель Ляпунова один. Во втором случае  $N = 4$  реализуется движение на *трехмерном* искривленном многообразии, характеризующееся двумя положительными показателями. Наконец, в случае  $N = 5$  имеем движение на *четырёхмерном* искривленном многообразии, и положительных показателей три. Хаотическое поведение, которому отвечает число положительных показателей Ляпунова больше одного, в литературе принято называть гиперхаосом [26, 27].

### § 3. Кривизна

Перейдем к рассмотрению численного метода нахождения кривизны многообразий в посещаемых траекториями точках. Полное описание локальной кривизны дается тензором Римана [18]. Однако, имея в виду содержание теории Аносова, естественно иметь дело с альтернативным способом описания кривизны, а именно в терминах секционной кривизны [5, 6]. Согласно Аносову, гиперболическая природа хаотической динамики геодезического потока и, соответственно, структурная устойчивость гарантированы, если секционная кривизна всюду отрицательна.

Рассмотрим движение с единичной абсолютной скоростью вдоль некоторой опорной траектории, заданной нашим геодезическим потоком, а также движения, полученные инфинитезимальными смещениями в направлениях ортогональных геодезической, при той же самой величине скорости. Двигаясь вдоль опорной траектории в процессе вычислений путем решения уравнений (1.7), одновременно проводим решение комплекта уравнений в вариациях (2.1), как при вычислении показателей Ляпунова. Для каждой точки  $A = (\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{N-1})$ , посещаемой при выполнении численного интегрирования уравнений, задаем ортонормированный репер из  $N$  векторов  $\mathbf{p}^{(0)}, \dots, \mathbf{p}^{(N-1)}$  в касательном пространстве. При этом вектор  $\mathbf{p}^{(0)}$  направлен вдоль опорной траектории, то есть  $\mathbf{p}^{(0)} = (u_0, u_1, \dots, u_{N-1})$ , а остальные задаются как координатные составляющие ляпуновских векторов, подвергнутых ортогонализации и нормировке, то есть  $\mathbf{p}^{(i)} = (\hat{\theta}_0^{(i)}, \dots, \hat{\theta}_{N-1}^{(i)})$ ,  $i = 1, \dots, N-1$ .

Далее с помощью той же разностной схемы, которая применяется при интегрировании дифференциальных уравнений (1.7) и уравнений в вариациях (2.1), вычисляются компоненты образующих репер ортов посредством их параллельного переноса вдоль опорной геодезической в точках, сдвинутых из исходного положения на один шаг по времени  $\Delta t$  вперед и назад. Это реализуется путем численного решения уравнений

$$\dot{p}_i^{(k)} = - \frac{\sum_{j=0}^{N-1} p_j^{(k)} u_j \cos \theta_j}{\sum_{j=0}^{N-1} \sin^2 \theta_j} \sin \theta_i, \quad i = 0, 1, \dots, N-1. \quad (3.1)$$

Как можно показать, в обозначениях римановой геометрии эти уравнения отвечают в точности соотношению (1.15).

Наконец, вычисляются коэффициенты разложения  $c^{(k)}$  по базису  $\mathbf{p}^{(1)}, \dots, \mathbf{p}^{(N-1)}$  для ляпуновских векторов в точках  $t \pm \Delta t$ . Эти коэффициенты должны удовлетворять следующему уравнению [6, с. 136]:

$$\frac{d^2 c_i^{(k)}}{dt^2} + \sum_{k=1}^{N-1} K_{ij}(t) c_j^{(k)} = 0, \quad (3.2)$$

где симметричная матрица  $K_{ij}$  размером  $(N-2) \times (N-2)$  представляет собой результат свертки тензора кривизны  $\mathbf{R}$ , относящегося к анализируемой точке на рассматриваемом многообразии:  $K_{ij} = \langle \mathbf{R}(\mathbf{p}^{(0)}, \mathbf{p}^{(j)}), \mathbf{p}^{(i)} \rangle$ .

Пусть  $\mathbf{r}$  — произвольный единичный вектор, ортогональный к вектору  $\mathbf{p}^{(0)}$  (направленному по геодезической). Тогда значение квадратичной формы  $\sum K_{ij} r_i r_j$  представляет собой кривизну многообразия в точке  $A$  в двумерном направлении, определяемом векторами  $\mathbf{p}^{(0)}$  и  $\mathbf{r}$ , которую и называют секционной кривизной. В частности, в рамках проведенного построения элемент матрицы  $K_{11}$  отвечает секционной кривизне в направлении, заданном вектором скорости и первым ляпуновским вектором (тем, что ассоциируется с наибольшим показателем Ляпунова), а остальные диагональные элементы — в направлениях, заданных вектором скорости и прочими ляпуновскими векторами.

Имея коэффициенты  $c_i^{(k)}$ , относящиеся к моментам времени  $t - \Delta t$ ,  $t$ ,  $t + \Delta t$ , и учитывая, что  $c_i^{(k)}(t) = \delta_{ik}$ , можно использовать для второй производной в формуле (3.2) разностную аппроксимацию и получить элементы матрицы  $K_{ij}$  численно:

$$K_{ij}(t) = \frac{c_i^{(j)}(t - \Delta t) - 2c_i^{(j)}(t) + c_i^{(j)}(t + \Delta t)}{\Delta t^2}. \quad (3.3)$$

В случае когда рассматривается система трех ротаторов, вместо матрицы имеем единственную величину  $K = K_{11}$ , являющуюся функцией угловых переменных и представляющую собой гауссову кривизну двумерного многообразия — поверхности Шварца, заданной уравнением  $\cos \theta_0 + \cos \theta_1 + \cos \theta_2 = 0$ . Ее можно выразить в явном виде [9–11]:

$$K = - \frac{\cos^2 \theta_0 + \cos^2 \theta_1 + \cos^2 \theta_2}{2(\sin^2 \theta_0 + \sin^2 \theta_1 + \sin^2 \theta_2)^2}. \quad (3.4)$$

Наличие аналитической формулы дает возможность надежно оттестировать описанный выше алгоритм путем прямого численного сравнения результатов расчетов и значений кривизны (3.4). Соответствие оказывается очень хорошим; например, при задании шага интегрирования уравнений методом Рунге–Кутты четвертого порядка  $\Delta t = 0.01$  совпадение имеет место до пятой значащей цифры.

Анализ формулы (3.4) показывает, что на всей поверхности кривизна отрицательна, за исключением восьми точек  $\theta_0 = \pm\pi/2$ ,  $\theta_1 = \pm\pi/2$ ,  $\theta_2 = \pm\pi/2$ , где она нулевая в силу обращения в ноль всех трех косинусов. Геодезический поток оказывается принадлежащим к классу систем Аносова, реализуя гиперболический хаос в его консервативном варианте. Наличие точек, где кривизна нулевая, этому не препятствует, поскольку их в рассматриваемой компактной части многообразия (области изменения углов от 0 до  $2\pi$ ) имеется лишь конечное число.

На рис. 4, а показана гистограмма значений кривизны в точках типичной траектории, построенная посредством обработки данных численного интегрирования уравнений движения на достаточно большом временном интервале. Из гистограммы видно, что значения кривизны распределены в интервале от  $-1$  до  $0$ , что находится в соответствии с формулой (3.4).

В случае четырех ротаторов движение осуществляется на трехмерном многообразии. При этом матрица  $K_{ij}$  имеет размер  $2 \times 2$ . На рис. 4, б показана гистограмма значений матричного элемента  $K_{11}$ , который характеризует секционную кривизну многообразия в направлении, заданном вектором скорости и ляпуновским вектором, отвечающим наибольшему показателю Ляпунова. На рис. 4, в приводится гистограмма для элемента  $K_{22}$ , то есть для секционной кривизны в направлении, заданном вектором скорости и вторым ляпуновским вектором, которому также отвечает положительный, но меньший по величине показатель Ляпунова. Как можно видеть из обеих гистограмм, кривизна по большей части отрицательна, в чем можно усмотреть соответствие с хаотической природой наблюдаемой динамики, однако с заметной статистической значимостью встречаются и положительные значения кривизны.

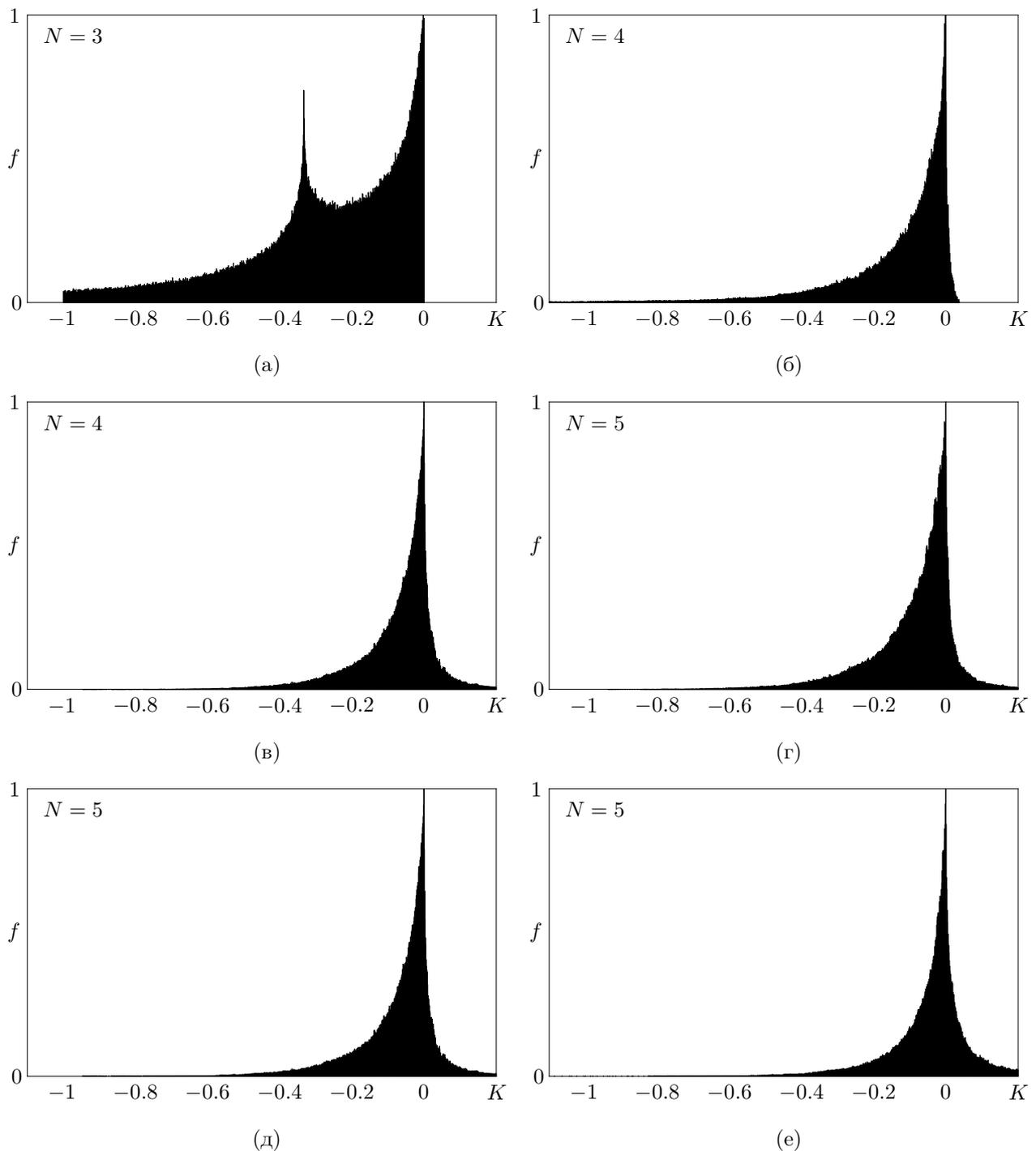
В случае пяти ротаторов движение осуществляется на четырехмерном искривленном многообразии, а матрица  $K_{ij}$  имеет размер  $3 \times 3$ . На рис. 4, г, д, е показаны гистограммы матричных элементов  $K_{11}$ ,  $K_{22}$ ,  $K_{33}$ , характеризующих секционную кривизну многообразия в направлениях, заданных вектором скорости и ляпуновскими векторами, отвечающим трем положительным показателям Ляпунова — наибольшему, следующему по величине и наименьшему. Снова можно видеть, что кривизна по большей части отрицательна, но встречаются и положительные ее значения.

Факт наблюдения положительных значений секционной кривизны в последних двух случаях  $N = 4$  и  $5$  не говорит однозначно о нарушении гиперболичности, но закрывает возможность воспользоваться для ее выявления просто ссылкой на достаточное условие, каковым было бы присутствие всюду отрицательной секционной кривизны.

#### § 4. Углы между подпространствами векторов возмущения

Идея проверки гиперболичности на основе статистики углов между устойчивыми и неустойчивыми направлениями для седловых инвариантных множеств была предложена в работе [28] и в дальнейшем применялась к различным ситуациям хаотической динамики в ряде конкретных примеров динамических систем [29–31]. Методика состоит в том, что в точках одной и той же принадлежащей рассматриваемому инвариантному множеству типичной траектории, проходимой вперед и назад во времени, определяются углы между подпространствами векторов малых возмущений, нарастающих и не нарастающих во времени, и анализируется статистическое распределение этих углов. Если полученное распределение не содержит углов, близких к нулю, то это указывает на гиперболичность инвариантного множества. Если же обнаруживается положительная вероятность нулевых углов, то касания между устойчивыми и неустойчивыми многообразиями присутствуют, и гиперболичности нет.

В случае систем высокой размерности для идентификации сжимающего подпространства удобнее использовать не принадлежащие ему векторы, а векторы, задающие его ортогональное



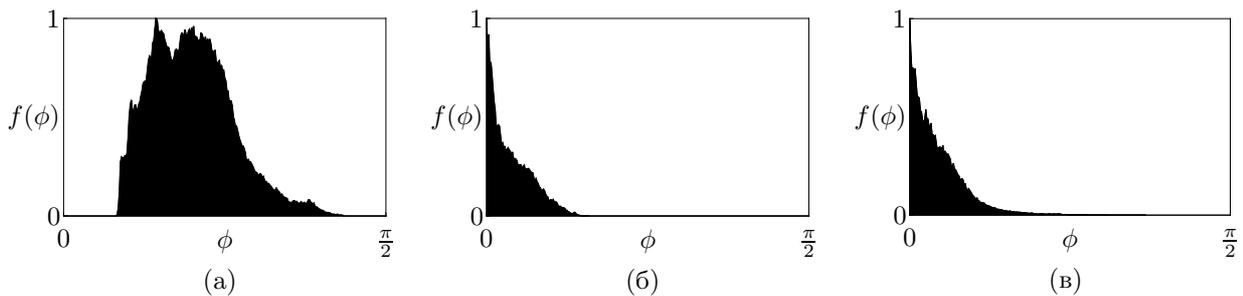
**Рис. 4.** Гистограммы значений кривизны, построенные посредством обработки данных численного интегрирования уравнений движения на типичной траектории для систем на основе  $N = 3$  (а),  $N = 4$  (б, в) и  $N = 5$  (г, д, е) ротаторов. Гистограммы (а), (б), (г) отвечают секционной кривизне в направлении, заданном вектором скорости и ляпуновским вектором, ассоциирующимся с наибольшим показателем Ляпунова. Остальные приведенные для  $N = 4$  и  $5$  гистограммы относятся к секционной кривизне в направлениях, заданных вектором скорости со вторым ((в) и (д)) и третьим (е) ляпуновскими векторами

дополнение, размерность которого обычно невелика [32]. Последние получаются из решения сопряженной системы линеаризованных уравнений в вариациях [32–35].

Расчеты начинаем с вычисления опорной орбиты  $\mathbf{x}(t)$ , проводя решение системы уравнений движения (1.7), которую здесь запишем символически как  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$ , за достаточно большой временной интервал. Затем берем линеаризованные уравнения для векторов возмущения  $\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{F}'(\mathbf{x}(t), t)\tilde{\mathbf{x}}$  (уравнения (2.1)) в количестве, равном размерности интересующего неустойчивого подпространства  $m$ , и интегрируем их вдоль найденной траектории  $\mathbf{x}(t)$  с ортогонализацией и нормировкой векторов  $\tilde{\mathbf{x}}^{(i)}$ ,  $i = 1, \dots, m$  на каждом шаге<sup>1</sup>. Далее, проводим интегрирование в обратном времени вдоль той же самой опорной траектории комплекта из  $m$  уравнений  $\dot{\mathbf{u}} = -[\mathbf{F}'(\mathbf{x}(t), t)]^T \mathbf{u}$ , где верхний индекс  $T$  означает матричное сопряжение. Это дает набор векторов, определяющих ортогональное дополнение к подпространству, включающему возмущения с нулевыми и отрицательными показателями Ляпунова; этот набор векторов также подвергается ортогонализации и нормировке. На основании накопленных данных в точках траектории на каждом шаге оцениваются углы между подпространствами интересующей размерности. Угол между двумя подпространствами определяется как минимальный возможный угол между двумя векторами, один из которых принадлежит одному, а другой – другому подпространству.

На рис. 5, а показана полученная численно гистограмма распределения углов между одномерным неустойчивым подпространством и подпространством, образованным векторами с отрицательными и нулевыми показателями Ляпунова, в точках типичной траектории для системы трех ротаторов при единичной скорости движения по геодезической. Как можно видеть, распределение с очевидностью располагается в удалении от нулевых значений углов  $\theta$ , то есть тест подтверждает гиперболичность геодезического потока.

На рис. 5, б и в представлены результаты проверки гиперболичности для систем четырех и пяти ротаторов. Здесь показаны гистограммы распределения углов между неустойчивыми подпространствами, имеющими размерность, соответственно, два и три, и подпространствами векторов с отрицательными и нулевыми показателями Ляпунова при единичной скорости движения по геодезической в этих системах. Как можно видеть, гистограммы демонстрируют присутствие углов вблизи нуля, что говорит о наличии касаний устойчивых и неустойчивых подпространств и негиперболической природе геодезического потока.



**Рис. 5.** Гистограммы углов между неустойчивым подпространством векторов возмущения типичной траектории и подпространством, отвечающим векторам с отрицательными и нулевыми показателями Ляпунова, построенные по результатам численных расчетов для систем на основе  $N = 3$  (а),  $N = 4$  (б) и  $N = 5$  (в) ротаторов

## § 5. Заключение

Отправной точкой этой работы послужили замечательные результаты Ханта и МакКея [9], которые указали тройной шарнирный механизм Тёрстона и Уикса [8] как пример физически

<sup>1</sup>Скалярное произведение определяется здесь в касательном пространстве размерности  $2N$ , как сумма произведений координатных и скоростных составляющих векторов возмущения, в отличие от предыдущих двух параграфов. Отметим, что величины показателей Ляпунова не зависят от выбора одного или другого определения скалярного произведения.

реализуемой механической системы, обеспечивающей хаотическую динамику Аносова для геодезического потока на двумерном искривленном многообразии. Такого же типа динамика имеет место для упрощенного варианта системы, где условие механической связи составляющих систему элементов имеет вид обращения в ноль суммы косинусов углов поворота [13, 14]. Вопрос заключался в том, будет ли обладать аналогичными свойствами динамика систем, построенных по этому образцу на основе числа элементов больше трех. В настоящей работе получен отрицательный ответ, по крайней мере для моделей, где условие связи записывается как равенство нулю суммы косинусов углов поворота.

А именно, численными расчетами показано, что для числа элементов четыре и пять, когда динамика отвечает геодезическим потокам на трехмерных и четырехмерных многообразиях, условия отрицательной секционной кривизны, которые были бы достаточны для реализации динамики Аносова, не имеют места. Также на основе численных расчетов установлено, что для систем из четырех и пяти элементов не выполняется условие гиперболичности, требующее трансверсальности пересечения подпространств, ассоциирующихся с положительными показателями Ляпунова и с показателями, не являющимися положительными. Эти результаты контрастируют со случаем трех ротаторов, соответствующим геодезическому потоку на двумерном многообразии — поверхности Шварца, где проведенные по тем же алгоритмам расчеты подтверждают принадлежность к классу систем Аносова и выполнение условия гиперболичности в смысле отсутствия касаний у подпространств векторов возмущений.

Тем не менее динамика во всех рассмотренных случаях хаотическая, что подтверждается видом наблюдаемых реализаций, расчетами показателей Ляпунова и спектров мощности сигналов, порождаемых движениями систем.

Для системы из трех элементов ранее был указан подход, позволяющий реализовать динамику Аносова на аттракторе в системе, представляющей собой электронный аналог — генератор хаоса со спектральными характеристиками, удовлетворительными с точки зрения радиофизических приложений [13–15]. Подобным же образом представляется возможным сконструировать электронные аналоги систем, составленных из четырех, пяти и большего числа элементов, реализующие гиперхаос — хаотический режим с двумя и более положительными показателями Ляпунова.

Возвращаясь к механическим системам в виде ротаторов со связью, определяемой алгебраическим уравнением, можно заметить, что вопрос о возможности реализовать динамику Аносова для геодезических потоков на многообразиях размерности три и выше в системах такого рода нельзя считать закрытым. Например, остается неисследованной возможность использования иного распределения масс по составляющим систему элементам.

Автор выражает благодарность П. В. Купцову за помощь в проведении расчетов углов между подпространствами векторов возмущения, результаты которых представлены в § 4.

## Приложение

Плоский шарнирный механизм, показанный на рис. 1, б можно трактовать как четыре ротатора, которые совершают вращение вокруг осей, расположенных в вершинах квадрата с координатами  $(\pm 1, 0)$  и  $(0, \pm 1)$  с наложенной связью. Связь между ротаторами обусловлена наличием стержней длины  $R$ , соединяющих шарниры, прикрепленные к ротаторам на расстоянии  $\varepsilon$  от их осей, с шарнирами, размещенными в вершинах правильного квадрата на подвижном диске, на расстоянии  $\rho$  от его центра.

Пусть  $x$  и  $y$  — координаты центра диска и  $\alpha$  — угол поворота диска. Углы поворота ротаторов отсчитываются от вертикальных или горизонтальных осей, как показано на рисунке, так что координаты концевых шарниров

$$(1 - \varepsilon \cos \theta_0, \varepsilon \sin \theta_0), (\varepsilon \sin \theta_1, 1 + \varepsilon \cos \theta_1), \\ (-1 + \varepsilon \cos \theta_2, -\varepsilon \sin \theta_2), (-\varepsilon \sin \theta_3, -1 - \varepsilon \cos \theta_3).$$

Координаты соединенных с ними четырех шарниров, расположенных на диске,

$$\begin{aligned} &(x + \rho \cos \alpha, y + \rho \sin \alpha), (x - \rho \sin \alpha, y + \rho \cos \alpha), \\ &(x - \rho \cos \alpha, y - \rho \sin \alpha), (x + \rho \sin \alpha, y - \rho \cos \alpha). \end{aligned}$$

Мгновенная конфигурация системы задается угловыми переменными  $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3$ , из которых только три являются независимыми в силу наложенной механической связи. Таким образом, конфигурационное пространство представляет собой трехмерное многообразие. Уравнения, задающие механическую связь, имеют вид

$$\begin{aligned} (1 - \varepsilon \cos \theta_0 - x - \rho \cos \alpha)^2 + (\varepsilon \sin \theta_0 - y - \rho \sin \alpha)^2 &= R^2, \\ (\varepsilon \sin \theta_1 - x + \rho \sin \alpha)^2 + (1 + \varepsilon \cos \theta_1 - y - \rho \cos \alpha)^2 &= R^2, \\ (-1 + \varepsilon \cos \theta_2 - x + \rho \cos \alpha)^2 + (-\varepsilon \sin \theta_2 - y + \rho \sin \alpha)^2 &= R^2, \\ (-\varepsilon \sin \theta_3 - x - \rho \sin \alpha)^2 + (-1 - \varepsilon \cos \theta_3 - y + \rho \cos \alpha)^2 &= R^2. \end{aligned}$$

Обратимся к рассмотрению асимптотического случая, когда  $\varepsilon \ll R, \rho \sim \varepsilon, (x, y) \sim \varepsilon$  и  $R = 1$ . Учитывая члены первого порядка малости, имеем

$$\begin{aligned} -\varepsilon \cos \theta_0 - x - \rho \cos \alpha &= 0, & -\varepsilon \cos \theta_1 + y + \rho \cos \alpha &= 0, \\ -\varepsilon \cos \theta_2 + x - \rho \cos \alpha &= 0, & -\varepsilon \cos \theta_3 - y + \rho \cos \alpha &= 0. \end{aligned}$$

Складывая уравнения, получаем

$$\cos \theta_0 + \cos \theta_1 + \cos \theta_2 + \cos \theta_3 = 0.$$

Предполагая, что массивными элементами системы являются только сами ротаторы, характеризующиеся единичным моментом инерции, для кинетической энергии имеем

$$T = \frac{1}{2}(\dot{\theta}_0^2 + \dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_3^2).$$

Для нашей системы это выражение задает функцию Лагранжа. Определяя с учетом наложенной голономной связи условный экстремум функционала действия  $\int (T - \Lambda F) dt$ , получаем уравнение движения в форме (1.6) или (1.7) для  $N = 4$ .

**Финансирование.** Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант 15-12-20035).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Paternain G.P. Geodesic flows. Birkhäuser, 1999. xiii+149 p. DOI: [10.1007/978-1-4612-1600-1](https://doi.org/10.1007/978-1-4612-1600-1)
2. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. Т. 2. Геометрия многообразий. М.: Эдиториал УРСС, 1998. 280 с.
3. Hadamard J. Les surfaces à courbures opposées et leurs lignes géodésique // Journal de Mathématiques Pures et Appliquées 5<sup>e</sup> série. 1898. Vol. 4. P. 27–74.
4. Аносов Д.В. Грубость геодезических потоков на компактных римановых многообразиях отрицательной кривизны // ДАН СССР. 1962. Т. 145. № 4. С. 707–709.
5. Аносов Д.В. Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны // Тр. МИАН СССР. 1967. Т. 90. С. 3–210.
6. Аносов Д.В., Синай Я.Г. Некоторые гладкие эргодические системы // Успехи математических наук. 1967. Т. 22. Вып. 5 (137). С. 107–172.
7. Аносов Д.В., Арансон С.Х., Гринес В.З., Плыкин Р.В., Сатаев Е.А., Сафонов А.В., Солодов В.В., Старков А.Н., Степин А.М., Шлячков С.В. Динамические системы с гиперболическим поведением // Итоги науки и техники. Сер. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 66. М.: ВИНТИ, 1991. С. 5–242.
8. Тёрстон У.П., Уикс Д.Р. Математика трехмерных многообразий // В мире науки. 1984. № 9. С. 74–88. <http://www.ega-math.narod.ru/Nquant/Space.htm>
9. Hunt T.J., MacKay R.S. Anosov parameter values for the triple linkage and a physical system with a uniformly chaotic attractor // Nonlinearity. 2003. Vol. 16. No. 4. P. 1499–1510. DOI: [10.1088/0951-7715/16/4/318](https://doi.org/10.1088/0951-7715/16/4/318)

10. Кузнецов С.П. Хаос в системе трех связанных ротаторов: от динамики Аносова к гиперболическому аттрактору // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Физика. 2015. Т. 15. Вып. 2. С. 5–17. <https://elibrary.ru/item.asp?id=23487933>
11. Кузнецов С.П. Гиперболический хаос в автоколебательных системах на основе тройного шарнирного механизма: проверка отсутствия касаний устойчивых и неустойчивых многообразий фазовых траекторий // Нелинейная динамика. 2016. Т. 12. № 1. С. 121–143. DOI: [10.20537/nd1601008](https://doi.org/10.20537/nd1601008)
12. Meeks III W.H., Ros A., Rosenberg H. The global theory of minimal surfaces in flat spaces. Berlin: Springer, 2002. 124 p. DOI: [10.1007/b83168](https://doi.org/10.1007/b83168)
13. Кузнецов С.П. От динамики Аносова на поверхности отрицательной кривизны к электронному генератору грубого хаоса // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Физика. 2016. Т. 16. Вып. 3. С. 131–144. DOI: [10.18500/1817-3020-2016-16-3-131-144](https://doi.org/10.18500/1817-3020-2016-16-3-131-144)
14. Kuznetsov S.P. From geodesic flow on a surface of negative curvature to electronic generator of robust chaos // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2016. Vol. 26. No. 14. 1650232. DOI: [10.1142/S0218127416502321](https://doi.org/10.1142/S0218127416502321)
15. Kuznetsov S.P. Chaos in three coupled rotators: From Anosov dynamics to hyperbolic attractors // Indian Academy of Sciences — Conference Series. 2017. Vol. 1. No. 1. P. 117–132. DOI: [10.29195/iascs.01.01.0017](https://doi.org/10.29195/iascs.01.01.0017)
16. Фельк Е.В., Кузнецов С.П., Савин А.В. Диффузия в конфигурационном пространстве системы двух связанных ротаторов // Материалы XI Международной школы-конференции «Хаотические автоколебания и образование структур». Саратов: ООО Издательский центр «Наука», 2016. С. 110. <https://www.sgu.ru/sites/default/files/conf/inf/2016-09/proceedings.pdf>
17. Заславский Г.М., Сагдеев Р.З., Усиков Д.А., Черников А.А. Слабый хаос и квазирегулярные структуры. М.: Наука, 1991. 235 с.
18. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. Методы и приложения. М.: Наука, 1986. 760 с.
19. Свешников А.А. Прикладные методы теории случайных функций. М.: Наука, 1968. 464 с.
20. Дженкинс Г., Ваттс Д. Спектральный анализ и его приложения. Т. 2. М.: Мир, 1972. 287 с.
21. Benettin G., Galgani L., Giorgilli A., Strelcyn J.-M. Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems; a method for computing all of them. Part I: Theory // Meccanica. 1980. Vol. 15. Issue 1. P. 9–20. DOI: [10.1007/BF02128236](https://doi.org/10.1007/BF02128236)
22. Shimada I., Nagashima T. A numerical approach to ergodic problem of dissipative dynamical systems // Progress of Theoretical Physics. 1979. Vol. 61. Issue 6. P. 1605–1616. DOI: [10.1143/PTP.61.1605](https://doi.org/10.1143/PTP.61.1605)
23. Kuznetsov S.P. Hyperbolic chaos: a physicist's view. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2012. xvi+320 p. DOI: [10.1007/978-3-642-23666-2](https://doi.org/10.1007/978-3-642-23666-2)
24. Pikovsky A., Politi A. Lyapunov exponents: a tool to explore complex dynamics. Cambridge: Cambridge University Press, 2016. 295 p. DOI: [10.1017/CBO9781139343473](https://doi.org/10.1017/CBO9781139343473)
25. Купцов П.В. Вычисление показателей Ляпунова для распределенных систем: преимущества и недостатки различных численных методов // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2010. Т. 18. Вып. 5. С. 91–110. DOI: [10.18500/0869-6632-2010-18-5-91-110](https://doi.org/10.18500/0869-6632-2010-18-5-91-110)
26. Rössler O.E. An equation for hyperchaos // Physics Letters A. 1979. Vol. 71. Issues 2–3. С. 155–157. DOI: [10.1016/0375-9601\(79\)90150-6](https://doi.org/10.1016/0375-9601(79)90150-6)
27. Letellier C., Rössler O.E. Hyperchaos // Scholarpedia. 2007. Vol. 2. Issue 8. P. 1936. DOI: [10.4249/scholarpedia.1936](https://doi.org/10.4249/scholarpedia.1936)
28. Lai Y.-C., Grebogi C., Yorke J.A., Kan I. How often are chaotic saddles nonhyperbolic? // Nonlinearity. 1993. Vol. 6. No. 5. P. 779–798. DOI: [10.1088/0951-7715/6/5/007](https://doi.org/10.1088/0951-7715/6/5/007)
29. Anishchenko V.S., Kopeikin A.S., Kurths J., Vadivasova T.E., Strelkova G.I. Studying hyperbolicity in chaotic systems // Physics Letters A. 2000. Vol. 270. No. 6. P. 301–307. DOI: [10.1016/S0375-9601\(00\)00338-8](https://doi.org/10.1016/S0375-9601(00)00338-8)
30. Кузнецов С.П. Динамический хаос и однородно гиперболические аттракторы: от математики к физике // УФН. 2011. Т. 181. Вып. 2. С. 121–149. DOI: [10.3367/UFNr.0181.201102a.0121](https://doi.org/10.3367/UFNr.0181.201102a.0121)
31. Кузнецов С.П., Круглов В.П. О некоторых простых примерах механических систем с гиперболическим хаосом // Труды МИАН. 2017. Т. 297. С. 232–259. DOI: [10.1134/S0371968517020133](https://doi.org/10.1134/S0371968517020133)
32. Kuptsov P.V. Fast numerical test of hyperbolic chaos // Physical Review E. 2012. Vol. 85. No. 1. 015203. DOI: [10.1103/PhysRevE.85.015203](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.85.015203)
33. Kuptsov P.V., Kuznetsov S.P. Numerical test for hyperbolicity of chaotic dynamics in time-delay systems // Physical Review E. 2016. Vol. 94. No. 1. 010201. DOI: [10.1103/PhysRevE.94.010201](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.94.010201)
34. Kuptsov P.V., Kuznetsov S.P. Numerical test for hyperbolicity in chaotic systems with multiple time delays // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2018. Vol. 56. P. 227–239. DOI: [10.1016/j.cnsns.2017.08.016](https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2017.08.016)

35. Kuptsov P.V., Kuznetsov S.P. Lyapunov analysis of strange pseudohyperbolic attractors: angles between tangent subspaces, local volume expansion and contraction // arXiv: 1805.06644 [nlin.CD]. 2018.  
<http://arxiv.org/pdf/1805.06644>

Поступила в редакцию 08.10.2018

Кузнецов Сергей Петрович, д. ф.-м. н., главный научный сотрудник, лаборатория нелинейного анализа и конструирования новых средств передвижения, Институт математики, информационных технологий и физики, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.  
 E-mail: [spkuz@yandex.ru](mailto:spkuz@yandex.ru)

*S. P. Kuznetsov*

**Chaos and hyperchaos of geodesic flows on curved manifolds corresponding to mechanically coupled rotators: Examples and numerical study**

**Citation:** *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2018, vol. 28, issue 4, pp. 565–581 (in Russian).

*Keywords:* geodesic flow, chaos, Anosov dynamics, Lyapunov exponent.

MSC2010: 37D40, 37D20, 37D25, 34D08, 32Q05, 32Q10, 70F20

DOI: [10.20537/vm180409](https://doi.org/10.20537/vm180409)

A system of  $N$  rotators is investigated with a constraint given by the condition of vanishing sum of the cosines of the rotation angles. Equations of the dynamics are formulated and results of numerical simulation for the cases  $N = 3, 4$ , and  $5$  are presented relating to the geodesic flows on a two-dimensional, three-dimensional, and four-dimensional manifold, respectively, in a compact region (due to the periodicity of the configuration space in angular variables). It is shown that a system of three rotators demonstrates chaos, characterized by one positive Lyapunov exponent, and for systems of four and five elements there are, respectively, two and three positive exponents (“hyperchaos”). An algorithm has been implemented that allows calculating the sectional curvature of a manifold in the course of numerical simulation of the dynamics at points of a trajectory. In the case of  $N = 3$ , curvature of the two-dimensional manifold is negative (except for a finite number of points where it is zero), and Anosov’s geodesic flow is realized. For  $N = 4$  and  $5$ , the computations show that the condition of negative sectional curvature is not fulfilled. Also the methodology is explained and applied for testing hyperbolicity based on numerical analysis of the angles between the subspaces of small perturbation vectors; in the case of  $N = 3$ , the hyperbolicity is confirmed, and for  $N = 4$  and  $5$  the hyperbolicity does not take place.

**Funding.** This work was supported by the Russian Science Foundation (project no. 15–12–20035).

#### REFERENCES

1. Paternain G.P. *Geodesic flows*, Birkhäuser, 1999, xiii+149 p. DOI: [10.1007/978-1-4612-1600-1](https://doi.org/10.1007/978-1-4612-1600-1)
2. Dubrovin B.A., Fomenko A.T., Novikov S.P. *Modern geometry – methods and applications. Part II: The geometry and topology of manifolds*, New York: Springer, 1985. xv+432 p.  
DOI: [10.1007/978-1-4612-1100-6](https://doi.org/10.1007/978-1-4612-1100-6)
3. Hadamard J. Les surfaces à courbures opposées et leurs lignes géodésiques, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées 5<sup>e</sup> série*, 1898, vol. 4, pp. 27–74.
4. Anosov D.V. Roughness of geodesic flows on compact Riemannian manifolds of negative curvature, *Soviet Mathematics. Doklady*, 1962, vol. 3, pp. 1068–1070.
5. Anosov D.V. Geodesic flows on closed Riemann manifolds with negative curvature, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 1967, vol. 90, pp. 1–235.
6. Anosov D.V., Sinai Ya.G. Some smooth ergodic systems, *Russian Mathematical Surveys*, 1967, vol. 22, no. 5, pp. 103–167. DOI: [10.1070/RM1967v022n05ABEH001228](https://doi.org/10.1070/RM1967v022n05ABEH001228)
7. Anosov D.V., Aranson S.Kh., Grines V.Z., Plykin R.V., Sataev E.A., Safonov A.V., Solodov V.V., Starkov A.N., Stepin A.M., Shlyachkov S.V., *Dynamical Systems with Hyperbolic Behaviour. Dynamical Systems IX, Encycl. Math. Sci.*, vol. 66, Berlin: Springer, 1995, 236 p.

8. Thurston W.P., Weeks J.R. The mathematics of three-dimensional manifolds, *Scientific American*, 1984, vol. 251, no. 1, pp. 108–121. <https://www.jstor.org/stable/24969417>
9. Hunt T.J., MacKay R.S. Anosov parameter values for the triple linkage and a physical system with a uniformly chaotic attractor, *Nonlinearity*, 2003, vol. 16, no. 4, pp. 1499–1510. DOI: [10.1088/0951-7715/16/4/318](https://doi.org/10.1088/0951-7715/16/4/318)
10. Kuznetsov S.P. Chaos in the system of three coupled rotators: from Anosov dynamics to hyperbolic attractor, *Izv. Saratov Univ. (N. S.) Ser. Physics*, 2015, vol. 15, issue 2, pp. 5–17 (in Russian). <https://elibrary.ru/item.asp?id=23487933>
11. Kuznetsov S.P. Hyperbolic chaos in self-oscillating systems based on mechanical triple linkage: Testing absence of tangencies of stable and unstable manifolds for phase trajectories, *Regular and Chaotic Dynamics*, 2015, vol. 20, no. 6, pp. 649–666. DOI: [10.1134/S1560354715060027](https://doi.org/10.1134/S1560354715060027)
12. Meeks III W.H., Ros A., Rosenberg H. *The global theory of minimal surfaces in flat spaces*, Springer, 2002, 124 p. DOI: [10.1007/b83168](https://doi.org/10.1007/b83168)
13. Kuznetsov S.P. From Anosov's dynamics on a surface of negative curvature to electronic generator of robust chaos, *Izv. Saratov Univ. (N. S.) Ser. Physics*, 2016, vol. 16, issue 3, pp. 131–144 (in Russian). DOI: [10.18500/1817-3020-2016-16-3-131-144](https://doi.org/10.18500/1817-3020-2016-16-3-131-144)
14. Kuznetsov S.P. From geodesic flow on a surface of negative curvature to electronic generator of robust chaos, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2016, vol. 26, no. 14, 1650232. DOI: [10.1142/S0218127416502321](https://doi.org/10.1142/S0218127416502321)
15. Kuznetsov S.P. Chaos in three coupled rotators: From Anosov dynamics to hyperbolic attractors, *Indian Academy of Sciences – Conference Series*, 2017, vol. 1, no. 1, pp. 117–132. DOI: [10.29195/iascs.01.01.0017](https://doi.org/10.29195/iascs.01.01.0017)
16. Fel'k E.V., Kuznetsov S.P., Savin A.V. Diffusion in the configuration space of a system of two coupled rotators, *Proceedings of the 11th International School on "Chaotic Oscillations and Pattern Formation"*, Saratov: Publishing Center "Science", 2016, p. 110 (in Russian). <https://www.sgu.ru/sites/default/files/conf/inf/2016-09/proceedings.pdf>
17. Zaslavskii G.M., Sagdeev R.Z., Usikov D.A., Chernikov A.A. *Weak chaos and quasi-regular patterns*, Cambridge University Press, 1991, 268 p.
18. Dubrovin B.A., Fomenko A.T., Novikov S.P. *Modern geometry – Methods and applications. Part I: The geometry of surfaces, transformation groups, and fields*, 2nd edition, Springer, 1991, xvi+470 p.
19. Sveshnikov A.A. *Applied methods of the theory of random functions*, Pergamon Press, 1966, 332 p. DOI: [10.1016/C2013-0-07845-0](https://doi.org/10.1016/C2013-0-07845-0)
20. Jenkins G.M., Watts D.G. *Spectral analysis and its applications*, Holden-Day, 1969, 525 p.
21. Benettin G., Galgani L., Giorgilli A., Strelcyn J.-M. Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems; a method for computing all of them. Part I: Theory, *Meccanica*, 1980, vol. 15, issue 1, pp. 9–20. DOI: [10.1007/BF02128236](https://doi.org/10.1007/BF02128236)
22. Shimada I., Nagashima T. A numerical approach to ergodic problem of dissipative dynamical systems, *Progress of Theoretical Physics*, 1979, vol. 61, issue 6, pp. 1605–1616. DOI: [10.1143/PTP.61.1605](https://doi.org/10.1143/PTP.61.1605)
23. Kuznetsov S.P. *Hyperbolic chaos: a physicist's view*, Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 2012, xvi, 320 p. DOI: [10.1007/978-3-642-23666-2](https://doi.org/10.1007/978-3-642-23666-2)
24. Pikovsky A., Politi A. *Lyapunov exponents: a tool to explore complex dynamics*, Cambridge: Cambridge University Press, 2016, 295 p. DOI: [10.1017/CBO9781139343473](https://doi.org/10.1017/CBO9781139343473)
25. Kuptsov P.V. Computation of Lyapunov exponents for spatially extended systems: advantages and limitations of various numerical methods, *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2010, vol. 18, issue 5, pp. 91–110 (in Russian). DOI: [10.18500/0869-6632-2010-18-5-91-110](https://doi.org/10.18500/0869-6632-2010-18-5-91-110)
26. Rössler O.E. An equation for hyperchaos, *Physics Letters A*, 1979, vol. 71, issues 2–3, pp. 155–157. DOI: [10.1016/0375-9601\(79\)90150-6](https://doi.org/10.1016/0375-9601(79)90150-6)
27. Letellier C., Rössler O.E. Hyperchaos, *Scholarpedia*, 2007, vol. 2, issue 8, p. 1936. DOI: [10.4249/scholarpedia.1936](https://doi.org/10.4249/scholarpedia.1936)
28. Lai Y.-C., Grebogi C., Yorke J.A., Kan I. How often are chaotic saddles nonhyperbolic?, *Nonlinearity*, 1993, vol. 6, no. 5, pp. 779–798. DOI: [10.1088/0951-7715/6/5/007](https://doi.org/10.1088/0951-7715/6/5/007)
29. Anishchenko V.S., Kopeikin A.S., Kurths J., Vadivasova T.E., Strelkova G.I. Studying hyperbolicity in chaotic systems, *Physics Letters A*, 2000, vol. 270, no. 6, pp. 301–307. DOI: [10.1016/S0375-9601\(00\)00338-8](https://doi.org/10.1016/S0375-9601(00)00338-8)
30. Kuznetsov S.P. Dynamical chaos and uniformly hyperbolic attractors: from mathematics to physics, *Physics-Uspekh*, 2011, vol. 54, no. 2, pp. 119–144. DOI: [10.3367/UFNe.0181.201102a.0121](https://doi.org/10.3367/UFNe.0181.201102a.0121)
31. Kuznetsov S.P., Kruglov V.P. On some simple examples of mechanical systems with hyperbolic chaos, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2017, vol. 297, issue 1, pp. 208–234. DOI: [10.1134/S0081543817040137](https://doi.org/10.1134/S0081543817040137)

32. Kuptsov P.V. Fast numerical test of hyperbolic chaos, *Physical Review E*, 2012, vol. 85, no. 1, 015203. DOI: [10.1103/PhysRevE.85.015203](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.85.015203)
33. Kuptsov P.V., Kuznetsov S.P. Numerical test for hyperbolicity of chaotic dynamics in time-delay systems, *Physical Review E*, 2016, vol. 94, no. 1, 010201. DOI: [10.1103/PhysRevE.94.010201](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.94.010201)
34. Kuptsov P.V., Kuznetsov S.P. Numerical test for hyperbolicity in chaotic systems with multiple time delays, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2018, vol. 56, pp. 227–239. DOI: [10.1016/j.cnsns.2017.08.016](https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2017.08.016)
35. Kuptsov P.V., Kuznetsov S.P. Lyapunov analysis of strange pseudohyperbolic attractors: angles between tangent subspaces, local volume expansion and contraction, 2018, arXiv: 1805.06644 [nlin.CD]. <http://arxiv.org/pdf/1805.06644>

Received 08.10.2018

Kuznetsov Sergei Petrovich, Doctor of Physics and Mathematics, Chief Researcher, Laboratory of Nonlinear Analysis and Design of New Vehicles, Institute of Mathematics, Information Technologies and Physics, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.  
E-mail: [spkuz@yandex.ru](mailto:spkuz@yandex.ru)