

© Е. А. Митюшов, Н. Е. Мисюра, С. А. Берестова

К 175-ЛЕТИЮ ОТКРЫТИЯ КВАТЕРНИОНОВ

DOI: [10.20537/vm180412](https://doi.org/10.20537/vm180412)

В 2018 году исполнилось 175 лет открытию кватернионов сэром Уильямом Роуэном Гамильтоном (рис. 1).



Рис. 1. Уильям Роуэн Гамильтон (4 августа 1805 – 2 сентября 1865)

Согласно современному определению, кватернионы (от лат. *quaterni*, по четыре) — система гиперкомплексных чисел, образующая векторное пространство размерностью четыре над полем вещественных чисел. Из него следует, что кватернионы представляют собой некоторую алгебраическую структуру, находящуюся в близком родстве с комплексными числами $z = a + bi$, $i = \sqrt{-1}$, которые, в свою очередь, появились в математике в связи с проблемой решения алгебраических уравнений. При этом первая польза от комплексных чисел стала видна из формул Кардано для решения кубических уравнений. Темпы «комплексификации» математики быстро нарастали. Все больше идей, появившихся при изучении вещественных чисел, распространялись на комплексные числа. В 1797 году норвежец Каспар Вессель опубликовал метод представления комплексных чисел точками на плоскости. Работая землемером, он изобрел способ представления геометрии на плоскости в терминах комплексных чисел. В 1797 году Вессель представил свою работу, первую и единственную свою научную статью по математике, Датской королевской академии. Работа оставалась неизвестной, пока через 100 лет ее не перевели на французский язык. Тем временем французский математик Жан-Робер Арган независимо предложил ту же идею и опубликовал ее в 1806 году. В 1811 году мысль, что комплексные числа можно рассматривать как точки на плоскости, также независимо пришла в голову королю математики Карлу Фридриху Гауссу.

Гамильтон интересовался комплексными числами с начала 1830-х годов и был первым, кто показал в 1833 году, что они образуют алгебру пар чисел. То есть формальные правила арифметических операций действительны для определенных таким образом объектов. В течение следующих десяти лет Гамильтон был занят, если не одержим, двумя проблемами. С одной стороны, Гамильтон тщетно пытался расширить концепцию комплексного числа как пары, чтобы определить тройку (триплет), с одной реальной и двумя мнимыми единицами. С другой стороны, в его уме начинает формироваться понятие вектора. В течение этого периода непрерывных поисков Гамильтон в конце концов изобрел понятие вектора, он создал в своем уме картину сложения и умножения векторов, но была операция, которая сбивала его с толку. Из этой озабоченности Гамильтон изобрел самую красивую алгебру века. Гениальное решение

проблемы пришло ему в голову как озарение, в результате которого он понял, что надо отказаться от алгебры триплетов и рассмотреть алгебру четверок — кватернионов. Вот как сам Уильям Гамильтон описывает это в своем письме к сыну Арчибальду 5 августа 1865 года (за месяц до своей кончины) [1].

Письмо от сэра У. Р. Гамильтона преподобному Арчибальду Г. Гамильтону

5 августа 1865 г.

МОЙ ДОРОГОЙ АРЧИБАЛЬД. (1) Я ждал случая поговорить с тобой о КВАТЕРНИОНАХ; и теперь такой представился, поскольку во вчерашнем послании, которое я получил этим утром, ты пишешь, что «размышляешь о некоторых связанных с ними» (кватернионами) моментах, «в частности с *Умножением Векторов*».

(2) Не менее важно, и действительно, это фундаментальный вопрос во всей Теории Кватернионов, который может быть предложен: *Что это за УМНОЖЕНИЕ?* Каковы его правила, его цели, его результаты? Какие существуют *Аналогии* между ним и другими *Операциями*, которые получили то же самое общее *Наименование?* И наконец, каково (если оно есть) его *Применение?*

(3) Если говорить от своего имени в связи с этим предметом, я мог бы сделать это таким образом, который напомнил бы тебе о *докватернионовом* времени, когда ты был еще совсем *ребенком*, но воспринял от меня понятие *Вектора*, представленное как *Триплет*: и в самом деле мне удалось запомнить год и месяц — октябрь 1843 г., после недавних поездок в Корк и Парсонстаун, связанных с собранием Британской ассоциации, желание открыть законы этого умножения возродили у меня определенную силу и серьезность, которые в течение нескольких лет спали во мне, но затем пробудились, и мы с тобой это обсуждали. Каждое утро в начале упомянутого месяца, когда я спускался к завтраку, твой (тогда) маленький брат Уильям Эдвин, как и ты, спрашивал меня: «Ну, папа, можешь ли ты умножать *триплеты?*» На что я всегда вынужден был отвечать, грустно качая головой: «Нет, я могу лишь *складывать* и *вычитать* их».

(4) Но 16-го числа того же месяца — это был понедельник и консульский день в Королевской Ирландской Академии — я шел, чтобы присутствовать и председательствовать там, а твоя приехавшая туда мать шла со мной вдоль Королевского канала, и, хотя она говорила со мной урывками, *подспудные* мысли протекали в моей голове, которые дали наконец *результат*, о чем не слишком много, чтобы сказать, что я *сразу* почувствовал важность. *Электрическая* цепь, казалось, *замкнулась*; и вспыхнула *искра*, вестник (как я *предвидел*, *сразу*) многих долгих лет определенного направления мысли и работы, *моей собственной*, если пощадят, и отчасти *других* людей, если бы мне было позволено жить достаточно долго, чтобы освещать эту теорию. И я не мог противиться искушению, пусть звучит не по-философски, и вырезал ножом на камне Броухемского моста, когда мы проходили его, фундаментальную формулу с символами i, j, k , а именно

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1,$$

которая содержит *Решение Задачи*, но, конечно, надпись давно стерлась с тех пор. Однако остается более длительная запись в Консульских книгах Академии от того дня (16 октября 1843 г.), запечатлевающая тот факт, что я тогда попросил и получил отпуск, чтобы читать Статью о *Кватернионах* на *Первом Общем Собрании* сессии, чтение которой произошло в понедельник 13 ноября.

Таким *кватернионом абзацев* я заканчиваю это письмо, но надеюсь, что вскоре напишу тебе еще.

Твой любящий отец,

УИЛЬЯМ РОУЭН ГАМИЛЬТОН

На мосту Брум в Дублине висит памятная табличка (рис. 2): «Здесь на прогулке 16 октября 1843 года сэр Уильям Роуэн Гамильтон во вспышке гения открыл фундаментальную формулу умножения кватернионов $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ и вырезал ее на камне этого моста».

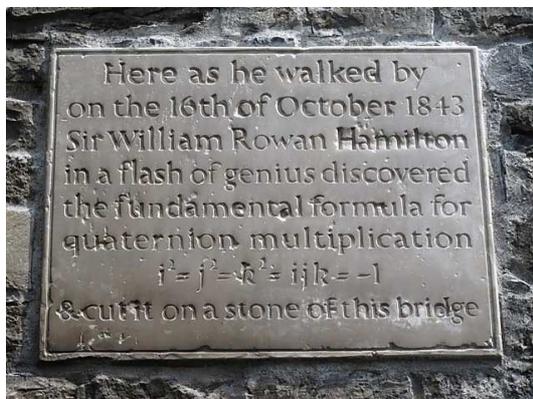


Рис. 2. Памятная табличка на мосту Брум в Дублине

Это не единственное сохранившееся воспоминание У. Гамильтона о том знаменательном дне [1].

Отрывок из письма сэра У. Р. Гамильтона профессору П. Г. Тэйту

Письмо от 15 октября 1858 г.

...P.S. Завтра будет 15-я годовщина кватернионов. Они вошли в жизнь или свет вполне зрелыми в понедельник 16 октября 1843 г., когда я шел с леди Гамильтон в Дублине и мы пришли к Броухемскому мосту, который мои ребята с тех пор называют «Кватернионский мост». То есть тогда я почувствовал, что на мне *замкнулась* гальваническая цепь мысли; и искры, посылавшиеся из нее, явились *фундаментальными уравнениями, связывающими i, j, k точно такими же*, которые я использую с тех пор. Я немедленно вытащил записную книжку, которая сохранилась, и сделал запись, которая, как я почувствовал *в тот самый момент*, будет стоить того, чтобы поработать над ней по крайней мере десять (или, может быть, пятнадцать) грядущих лет. Но справедливо будет сказать, что я в тот момент чувствовал, что *решена задача*, которая *мучила* меня по крайней мере *пятнадцать лет перед этим*, и было удовлетворено интеллектуальное желание.

Прошло менее часа, и я попросил у Совета Ирландской королевской ассоциации, президентом которой я тогда был, и получил отпуск, чтобы *прочитать на следующем Общем собрании доклад* о кватернионах, что я и сделал 13 ноября 1843 г.

Некоторые из моих недавних писем в Академию еще могут иметь определенный интерес для людей, подобных Вам, которые с тех пор хорошо изучили мою книгу, которая затем не публиковалась десять лет.

Между тем не отметишь ли ты завтрашний *день рождения* добавочной чашечкой чернил, поскольку может быть устарело предлагать XXX или даже XYZ.

Ход рассуждений, которые привели к открытию кватернионов, Гамильтон описывает в письме к своему другу юристу и математику Джону Томасу Грейвсу на следующий день (17 октября 1843 года) после открытия [2].

Во втором номере журнала «Материалы Ирландской академии» за 1844 год Гамильтон уже на первой странице (рис. 3) приводит определение операции, поисками которой он был одержим в течение долгих десяти лет.

pelled into the more posterior parts of the tubular prolongations, and into the oval bodies in which these terminate. Mr. Bergin had pointed out to Dr. Allman the existence of muscular fibres in the walls of the oval dilatations. The contraction, therefore, of these muscles, will cause the contained fluid to impinge upon the inverted extremity of the proboscis, which will thus be forced outwards, and the proboscis injected with the fluid. The source of this fluid would appear to be in the oval bodies themselves, whose structure is, in all probability, glandular, and which, besides possessing a contractile power, by which the contents of their cavities are expelled, would seem also to be the secerners of the fluid which plays so important a part in the protrusion of the proboscides.

The Chair having been taken *pro tem.* by the Rev. H. Lloyd, D. D., Vice-President,

The President read a paper on a new Species of Imaginary Quantities, connected with a theory of Quaternions.

It is known to all students of algebra that an imaginary equation of the form $i^2 = -1$ has been employed so as to conduct to very varied and important results. Sir Wm. Hamilton proposes to consider some of the consequences which result from the following system of imaginary equations, or equations between *a system of three different imaginary quantities* :

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1; \quad (\text{A})$$

$$ij = k, \quad jk = i, \quad ki = j; \quad (\text{B})$$

$$ji = -k, \quad kj = -i, \quad ik = -j; \quad (\text{C})$$

no linear relation between i, j, k being supposed to exist, so that the equation

$$q = q',$$

in which

$$q = w + ix + jy + kz,$$

$$q' = w' + ix' + jy' + kz',$$

Научный мир встретил открытие Гамильтона с воодушевлением. Создатель электромагнетизма Клерк Максвелл писал: «Открытие кватернионного исчисления — это поистине скачок в нашем понимании свойств пространства, скачок, сравнимый, пожалуй, с открытием Декартом координатных троек! Идеи этого исчисления, как отличающиеся от своих операций и символов, приспособлены для наибольшего использования во всех областях науки». Максвелл использовал кватернионную запись для формулировки своих уравнений электромагнитного поля. Анри Пуанкаре писал о кватернионах: «Их появление дало мощный толчок развитию алгебры; исходя от них, наука пошла по пути обобщения понятия числа, придя к концепциям матрицы и линейного оператора, пронизывающим современную математику. Это была революция в арифметике, подобная той, которую сделал Лобачевский в геометрии» [4].

Не все были того же мнения. В частности, лорд Кельвин (Уильям Томсон) в одном из своих писем писал: «Кватернионы пришли от Гамильтона после того, как его действительно хорошая работа была выполнена; несмотря на красоту и изобретательность, они были чистым злом для тех, кто коснулся их каким-либо образом, включая Клерка Максвелла». Отрицательно к кватернионам относились Герман Грассман, Уиллард Гибсон и Оливер Хевисайд.

На основе работ Гамильтона Джозайя Уиллард Гиббс и Оливер Хевисайд выделили и развили систему векторного анализа, уже отделенную от теории кватернионов; она оказалась чрезвычайно полезной в прикладной математике. Вот как об этом пишет Оливер Хевисайд в 1883 году: «Позже я пришел к выводу, что, поскольку требуемый векторный анализ был необходим, кватернион был не только не нужен, но был положительным злом без какой-либо незначительной величины и что благодаря его избеганию создание векторного анализа стало простым, а его использование также упростилось, так как его можно удобно согласовать с обычной декартовой работой».

Приемник У. Гамильтона и продолжатель его дела Питер Гатри Тейт, оценивая эту новую тенденцию, высказал свое разочарование в предисловии к третьему изданию «Элементарного трактата о кватернионах»: «Даже профессор Гиббс оценивается как один из замедлителей прогресса кватернионов, учитывая, что его брошюра «Векторный анализ», своего рода гермафродитный монстр, усугубляется обозначениями Гамильтона и Грассмана» [5].

Гамильтон оставил после себя выдающиеся результаты в геометрической оптике и механике, но кватернионы провозгласил своим величайшим открытием и принялся с воодушевлением (как он сам выражался) «расшифровывать послания высших сфер». Два следующих десятилетия после открытия Гамильтон посвятил подробному исследованию новых чисел и практическим приложениям, написав на эту тему сто девять статей и две объемные монографии: «Лекции о кватернионах» и «Элементы кватернионов».

Известный английский математик и популяризатор математики Иэн Стюарт писал [6]: «Гамильтон, сходя в могилу, верил, что кватернионы составляли его самый главный вклад в естественные науки и математику. На протяжении следующей сотни лет мало кто, за исключением его последователей Питера Гатри Тейта и Чарльза Сандерса Пирса, с ним бы согласился, и кватернионы оставались позабытой тихой заводью викторианской алгебры. Если вам требовался пример бесплодной самодовлеющей математики, то кватернионы были пропуском в этот клуб. Даже в университетских курсах чистой математики кватернионы никогда не появлялись; их даже не показывали в качестве курьеза. Согласно Беллу, «глубочайшей трагедией Гамильтона были не алкоголь и не неудачный брак, а его упрямая вера в то, что кватернионы содержат в себе ключ к математике и физике вселенной. История показала, что Гамильтон трагически обманывал себя, когда продолжал утверждать: «Я по-прежнему определенно заявляю, что это открытие представляется мне настолько же важным для середины девятнадцатого столетия, насколько открытие флюксий было важным для семнадцатого столетия». Никогда еще великий математик столь отчаянно не ошибался».

Так ли это? Кватернионы, быть может, развивались не вполне тем способом, какой предначертал Гамильтон, но их значимость растет с каждым годом. Они стали абсолютно фундаментальными для математики, и мы также увидим, что кватернионы и их обобщения играют фундаментальную роль и в алгебре, и в математической физике.

Еще сравнительно недавно (1986 г.) в достаточно безапелляционной форме известный математик и историк Симон Л. Альтманн писал [7] «Кватернионы, кажется, источают воздух распада девятнадцатого века, как довольно неудачный вид в борьбе за жизнь математических идей. Математики, по общему признанию, все еще сохраняют теплое отношение в своих сердцах за замечательные алгебраические свойства кватернионов, но, увы, такой энтузиазм мало значит для ученого-физика».

Активный интерес к кватернионам начал проявляться в конце XX века, и в настоящее время этот интерес только возрастает. Они применяются в квантовой механике, инерциальной навигации и теории управления, в современной компьютерной графике и программировании игр. С 2003 года издается журнал «Гиперкомплексные числа в геометрии и физике» [8].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Graves R.P. Life of Sir William Rowan Hamilton. Vol. II. Ch. XXVIII. Dublin: University Press, 1885. 719 p. <https://archive.org/details/lifeofsirwilliam02grav/page/n7>
2. Copy of a letter from sir William R. Hamilton to John T. Graves, ESQ // Philosophical Magazine. 3rd series. 1844. Vol. 25. P. 489–495. Edited by David R. Wilkins, 1999. <https://www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/People/Hamilton/QLetter/QLetter.pdf>
3. Hamilton W.R. On a new species of imaginary quantities connected with the theory of quaternions // Proceedings of the Royal Irish Academy. 1844. Vol. 2. P. 424–434. <http://www.jstor.org/stable/20520177>
4. Полак Л.С. Уильям Роуэн Гамильтон (к 150-летию со дня рождения) // Труды института истории естествознания и техники. Т. 15. История физико-математических наук. М.: АН СССР, 1956. С. 206–276.
5. Pritchard Ch. Flaming swords and hermaphrodite monsters: Peter Guthrie Tait and the promotion of quaternions. Part II // The Mathematical Gazette. 1998. Vol. 82. No. 494. P. 235–241. DOI: [10.2307/3620406](https://doi.org/10.2307/3620406)
6. Stewart I. Why beauty is truth: a history of symmetry. New York: Basic Books, 2007. 304 p.
7. Altmann S.L. Hamilton, Rodrigues, and the quaternion scandal // Mathematics Magazine. 1989. Vol. 62. No. 5. P. 291–308. DOI: [10.2307/2689481](https://doi.org/10.2307/2689481)
8. Журнал «Гиперкомплексные числа в геометрии и физике». <http://hypercomplex.xpsweb.com/section.php?lang=ru&genre=3>

Поступила в редакцию 03.07.2018

Митюшов Евгений Александрович, д. ф.-м. н., профессор, кафедра теоретической механики, Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б. Н. Ельцина, 620002, Россия, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19.

E-mail: mityushov-e@mail.ru

Мисюра Наталья Евгеньевна, старший преподаватель, кафедра теоретической механики, Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б. Н. Ельцина, 620002, Россия, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19.

E-mail: n_misura@mail.ru

Берестова Светлана Александровна, д. ф.-м. н., доцент, заведующая кафедрой теоретической механики, Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б. Н. Ельцина, 620002, Россия, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19.

E-mail: s.a.berestova@urfu.ru

E. A. Mityushov, N. E. Misyura, S. A. Berestova

To the 175th anniversary of the discovery of quaternions

Citation: *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2018, vol. 28, issue 4, pp. 611–617 (in Russian).

DOI: [10.20537/vm180412](https://doi.org/10.20537/vm180412)

REFERENCES

1. Graves R.P. *Life of Sir William Rowan Hamilton. Vol. II. Ch. XXVIII*, Dublin: University Press, 1885, 719 p. <https://archive.org/details/lifeofsirwilliam02grav/page/n7>
2. Copy of a letter from sir William R. Hamilton to John T. Graves, ESQ, *Philosophical Magazine, 3rd series*, 1844, vol. 25, pp. 489–495. Edited by David R. Wilkins, 1999. <https://www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/People/Hamilton/QLetter/QLetter.pdf>
3. Hamilton W.R. On a new species of imaginary quantities connected with the theory of quaternions, *Proceedings of the Royal Irish Academy*, 1844, vol. 2, pp. 424–434. <http://www.jstor.org/stable/20520177>
4. Polak L.S. William Rowan Hamilton (on the occasion of the 150th anniversary of his birth), *Trudy Instituta Istorii Estestvoznaniya i Tekhniki. Tom 15. Istoriya fiziko-matematicheskikh nauk* (Proceedings of the Institute of the History of Natural Science and Technics. Vol. 15. History of Physics and Mathematics Sciences), Moscow: USSR Academy of Sciences, 1956, pp. 206–276 (in Russian).
5. Pritchard Ch. Flaming swords and hermaphrodite monsters: Peter Guthrie Tait and the promotion of quaternions. Part II, *The Mathematical Gazette*, 1998, vol. 82, no. 494, pp. 235–241. DOI: [10.2307/3620406](https://doi.org/10.2307/3620406)
6. Stewart I. *Why beauty is truth: a history of symmetry*, New York: Basic Books, 2007, 304 p.
7. Altmann S.L. Hamilton, Rodrigues, and the quaternion scandal, *Mathematics Magazine*, 1989, vol. 62, no. 5, pp. 291–308. DOI: [10.2307/2689481](https://doi.org/10.2307/2689481)
8. Journal “Hypercomplex numbers in geometry and physics”. <http://hypercomplex.xpsweb.com/section.php?lang=en&genre=3>

Received 03.07.2018

Mityushov Evgenii Aleksandrovich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Department of Theoretical Mechanics, Ural Federal University named after the first President of Russia B. N. Yeltsin, ul. Mira, 19, Yekaterinburg, 620002, Russia.

E-mail: mityushov-e@mail.ru

Misyura Natal'ya Evgen'evna, Senior Lecturer, Department of Theoretical Mechanics, Ural Federal University named after the first President of Russia B. N. Yeltsin, ul. Mira, 19, Yekaterinburg, 620002, Russia.

E-mail: n_misura@mail.ru

Berestova Svetlana Aleksandrovna, Doctor of Physics and Mathematics, Head of the Department of Theoretical Mechanics, Ural Federal University named after the first President of Russia B. N. Yeltsin, ul. Mira, 19, Yekaterinburg, 620002, Russia.

E-mail: s.a.berestova@urfu.ru