

УДК 514.712.2

© В. Н. Ушаков, М. В. Першаков

**К ОЦЕНКЕ ХАУСДОРФОВА ОТКЛОНЕНИЯ ВЫПУКЛЫХ МНОГОУГОЛЬНИКОВ В  $\mathbb{R}^2$  ОТ ИХ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ РАЗНОСТИ С КРУГАМИ**

Изучается задача, относящаяся к оценке хаусдорфова отклонения выпуклых многоугольников в  $\mathbb{R}^2$  от их геометрической разности с кругами достаточно малого радиуса. Задачи с такой тематикой, в которых рассматриваются не только выпуклые многоугольники, но и выпуклые компакты в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^n$ , возникают в различных областях математики и, в частности, в теории дифференциальных игр, теории управления, выпуклом анализе. Оценки хаусдорфовых отклонений выпуклых компактов в  $\mathbb{R}^n$  от их геометрической разности с замкнутыми шарами в  $\mathbb{R}^n$  присутствуют в работах Л. С. Понтрягина, его сотрудников и коллег. Эти оценки весьма существенны при выводе оценки рассогласования альтернированного интеграла Л. С. Понтрягина в линейных дифференциальных играх преследования и альтернированных сумм. Аналогичные оценки оказываются полезными при выводе оценки рассогласования множеств достижимости нелинейных управляемых систем в  $\mathbb{R}^n$  и аппроксимирующих их множеств.

В работе рассмотрен конкретный выпуклый семиугольник в  $\mathbb{R}^2$ . Для изучения геометрии этого семиугольника вводится понятие клина в  $\mathbb{R}^2$ . На базе этого понятия получена верхняя оценка величины хаусдорфова отклонения семиугольника от его геометрической разности с кругом в  $\mathbb{R}^2$  достаточно малого радиуса.

*Ключевые слова:* выпуклый многоугольник в  $\mathbb{R}^2$ , хаусдорфово отклонение, клин, конус, круг, геометрическая разность множеств.

DOI: [10.35634/vm200404](https://doi.org/10.35634/vm200404)**Введение**

В работе рассматривается выпуклый семиугольник  $\Phi$  в пространстве  $\mathbb{R}^2$ . На примере этого многоугольника предлагается схема получения оценки сверху хаусдорфова отклонения  $\Phi$  от его геометрической разности с кругом в  $\mathbb{R}^2$ .

Схема получения упомянутой оценки вкладывается в русло общей тематики исследования оценок хаусдорфовых отклонений компактов в  $\mathbb{R}^2$  от других компактов. Задачи с такой тематикой многочисленны и возникают в ряде важных областей математики и, в том числе, — в теории управления, теории дифференциальных игр, выпуклом анализе.

В связи с этим, упомянем исследования Л. С. Понтрягина [1, 2], его сотрудников [3, 4] и коллег [5–8] в теории линейных дифференциальных игр, основу которых составили конструкции альтернированного интеграла и ассоциированных с ним альтернированных сумм. В этих исследованиях при оценке рассогласования альтернированного интеграла и альтернированных сумм играют весомую роль верхние оценки хаусдорфовых отклонений выпуклых компактов в  $\mathbb{R}^n$  от их геометрической разности с замкнутыми шарами в  $\mathbb{R}^n$  определенного размера.

В теории управления нелинейными динамическими системами упоминавшиеся выше оценки вплетены в схему вывода оценки рассогласования множеств достижимости управляемых систем в  $\mathbb{R}^n$  и их аппроксимаций [9]. Вопросы, имеющие непосредственное отношение к тематике настоящей работы, рассматривались также в монографии [10].

Особенность этой работы состоит в том, что в ней впервые для вывода оценки отклонения многоугольника  $\Phi$  от круга в  $\mathbb{R}^2$  используется понятие клина в  $\mathbb{R}^2$ , имеющее локальную природу.

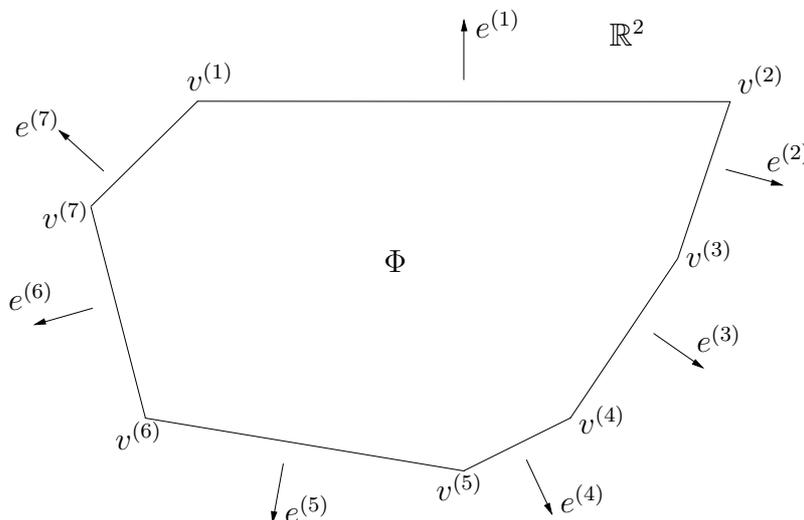
### § 1. Основной результат

Рассмотрим в плоскости  $\mathbb{R}^2$  выпуклый замкнутый семиугольник  $\Phi$  (см. рис. 1) с вершинами  $v^{(i)}$ ,  $i = \overline{1, 7}$ , и единичными векторами  $e^{(i)}$ ,  $i = \overline{1, 7}$ , внешних нормалей к  $\Phi$  в вершинах  $v^{(i)}$ , удовлетворяющих равенствам

$$\langle v^{(i)}, e^{(i)} \rangle = \langle v^{(i+1)}, e^{(i)} \rangle, \quad i = \overline{1, 7};$$

здесь  $\langle v, e \rangle$  — скалярное произведение векторов  $v$  и  $e$  в  $\mathbb{R}^2$ , а также

$$\begin{aligned} v^{(1)} &= (-4; 3), & v^{(2)} &= (6; 3), & v^{(3)} &= (5; 0), & v^{(4)} &= (3; -3), & v^{(5)} &= (1; -4), \\ v^{(6)} &= (-5; -3), & v^{(7)} &= (-6; 1); \\ e^{(1)} &= (0; 1), & e^{(2)} &= \left( \frac{3}{\sqrt{10}}; -\frac{1}{\sqrt{10}} \right), & e^{(3)} &= \left( \frac{3}{\sqrt{13}}; -\frac{2}{\sqrt{13}} \right), & e^{(4)} &= \left( \frac{1}{\sqrt{5}}; -\frac{2}{\sqrt{5}} \right), \\ e^{(5)} &= \left( -\frac{1}{\sqrt{37}}; -\frac{6}{\sqrt{37}} \right), & e^{(6)} &= \left( -\frac{4}{\sqrt{17}}; -\frac{1}{\sqrt{17}} \right), & e^{(7)} &= \left( -\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}} \right). \end{aligned}$$



**Рис. 1.** Семиугольник  $\Phi$

Введем обозначения

$$B(x^*; r) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x - x^*\| \leq r\}, \quad x^* \in \mathbb{R}^2, \quad r \in (0, \infty);$$

$$\Phi \dot{-} B(0; r) = \{x^* \in \Phi : B(x^*; r) \subset \Phi\};$$

$$h(\Phi^{(1)}, \Phi^{(2)}) = \max_{f^{(1)} \in \Phi^{(1)}} \min_{f^{(2)} \in \Phi^{(2)}} \|f^{(1)} - f^{(2)}\|,$$

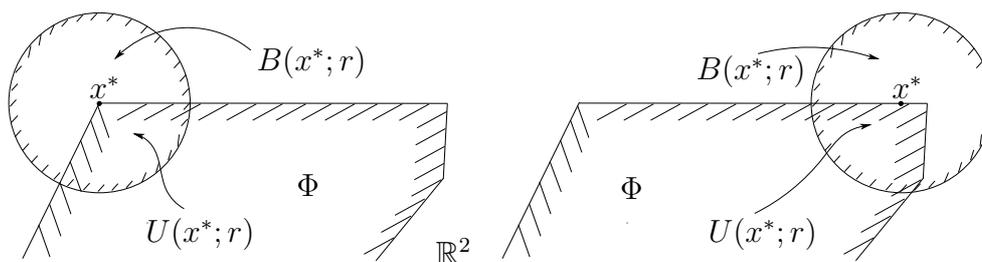
$\Phi^{(1)}$  и  $\Phi^{(2)}$  — компакты в  $\mathbb{R}^2$ ;  $\partial\Phi$  — граница в  $\mathbb{R}^2$  многоугольника  $\Phi$ .

Ниже изучим задачу об оценке хаусдорфова отклонения  $h(\Phi, \Phi \dot{-} B(0; r))$  многоугольника  $\Phi$  от геометрической разности  $\Phi$  и круга  $B(0; r)$ .

Пусть  $x^* \in \partial\Phi$ ,  $r \in (0, \infty)$ .

**Определение 1.** Локусом ( $r$ -локусом) множества  $\Phi$  в точке  $x^*$  назовем (см. рис. 2) множество

$$U(x^*; r) = \Phi \cap B(x^*; r).$$



**Рис. 2.** Локус множества  $\Phi$

Локус  $U(x^*; r)$  может быть круговым сектором в  $\mathbb{R}^2$  с вершиной  $x^*$ , но может им и не быть (см. рис. 2).

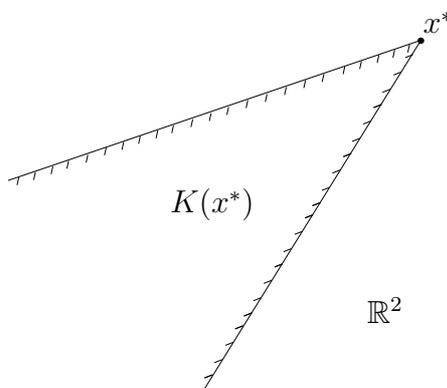
Наряду с локусом  $U(x^*; r)$  введем выпуклый конус  $K(x^*)$  и клин  $T(x^*; r)$  в  $\mathbb{R}^2$  с вершиной  $x^*$  и углом, меньшим  $\pi$  (см. рис. 3 и рис. 4). При этом пока не акцентируем внимание на величине угла конуса  $K(x^*)$  и направлении конуса.

**Определение 2.** Замкнутое выпуклое множество в  $\mathbb{R}^2$ , определенное равенством

$$K(x^*) = \Pi^{(1)} \cap \Pi^{(2)},$$

назовем *конусом* в  $\mathbb{R}^2$  с вершиной  $x^*$  (см. рис. 3).

Здесь  $\Pi^{(1)}$  и  $\Pi^{(2)}$  — замкнутые полуплоскости в  $\mathbb{R}^2$ . Считается при этом, что угол конуса  $K(x^*)$  при вершине  $x^*$  меньше, чем  $\pi$ .



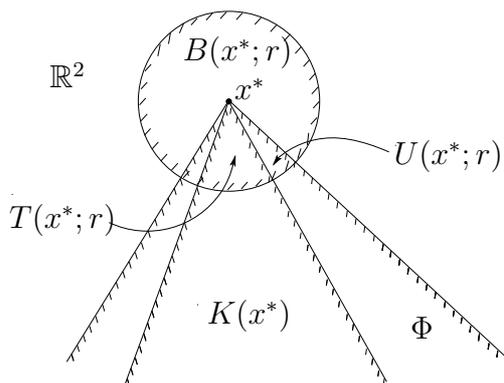
**Рис. 3.** Конус  $K(x^*)$

**Замечание 1.** Правильнее было бы назвать множество  $K(x^*)$  коническим множеством с вершиной  $x^*$ . Однако, мы называем его конусом для лаконичности.

**Определение 3.** Клином  $T(x^*; r)$  в  $\mathbb{R}^2$  назовем множество (см. рис. 4)

$$T(x^*; r) = B(x^*; r) \cap K(x^*).$$

Допустим, что локус  $U(x^*; r)$  есть круговой сектор в  $\mathbb{R}^2$  с вершиной  $x^*$ , и образующие лучи конуса  $K(x^*)$  заключены между лучами локуса  $U(x^*; r)$  (см. рис. 4). Иными словами,



**Рис. 4.** Клинь  $T(x^*; r)$

допустим, что локус  $U(x^*; r)$  есть круговой сектор в  $\mathbb{R}^2$  с вершиной  $x^*$  и выполняется включение

$$K(x^*) \subset K_\Phi(x^*),$$

где  $K_\Phi(x^*)$  — касательный конус к  $\Phi$  в точке  $x^*$  (см., например, [10]).

В этом случае клинь  $T(x^*; r)$  содержится в  $\Phi$  и, значит,

$$T(x^*; r) = B(x^*; r) \cap K(x^*) = \Phi \cap B(x^*; r) \cap K(x^*) = U(x^*; r) \cap K(x^*).$$

Будем говорить в этом случае, что  $T(x^*; r)$  есть клинь в  $\Phi$ . Учитывая, что  $\text{int } \Phi \neq \emptyset$ , получаем: при некоторых  $z^* \in \text{int } \Phi$  и  $r \in (0, \infty)$  справедливо включение

$$B(z^*; r) \subset \text{int } \Phi,$$

а также длина  $r$  меньше, чем длина каждого ребра  $[v^{(i)}, v^{(i+1)}]$  многоугольника  $\Phi$ .

Последующие рассуждения проведем в предположении, что такие  $z^*$  и  $r$  уже выделены. Справедливо следующее утверждение.

**Лемма 1.** Локусы  $U(v^{(i)}; r)$ ,  $i = \overline{1, 7}$ , есть круговые секторы с вершинами  $v^{(i)}$ .

**Доказательство.** Введем обозначения

$$K^{(i)}(z^*) = z^* - v^{(i)} + K_\Phi(v^{(i)})$$

— конус в  $\mathbb{R}^2$  с вершиной  $z^*$ , конгруэнтный конусу  $K_\Phi(v^{(i)})$  (см. рис. 5);

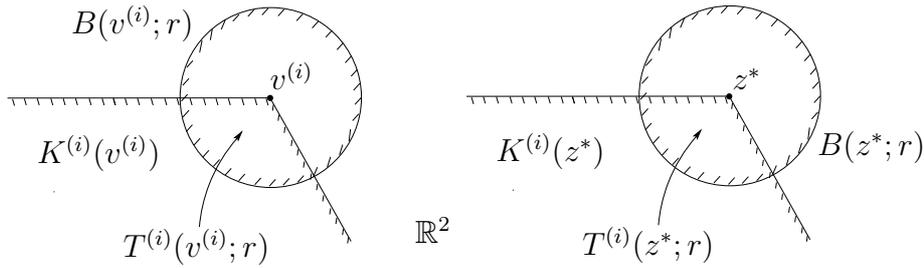
$$T^{(i)}(z^*; r) = B(z^*; r) \cap K^{(i)}(z^*)$$

— клинь в  $\Phi$  с вершиной  $z^*$ ;

$$T^{(i)}(v^{(i)}; r) = v^{(i)} - z^* + T^{(i)}(z^*; r)$$

— клинь в  $\mathbb{R}^2$  с вершиной  $v^{(i)}$ , конгруэнтный клину  $T^{(i)}(z^*; r)$ .

**Замечание 2.** Пока не установлено, что клинь  $T^{(i)}(v^{(i)}; r)$  есть клинь в  $\Phi$  с вершиной  $v^{(i)}$ .



**Рис. 5.** Конгруэнтные конусы  $T^{(i)}(v^{(i)}; r)$  и  $T^{(i)}(z^*; r)$

Сначала докажем включение

$$T^{(i)}(v^{(i)}; r) \subset \Phi, \quad i = \overline{1, 7}. \tag{1}$$

Проведем доказательство на примере включения (1) при  $i = 1$ .

В самом деле, для доказательства включения  $T^{(1)}(v^{(1)}; r) \subset \Phi$  прибегнем к применению опорных функций (см., например, [10]). Введем опорную функцию выпуклого компакта  $Z$  в  $\mathbb{R}^2$ :

$$h_Z(l) = \max_{z \in Z} \langle z, l \rangle, \quad l \in \mathbb{R}^2.$$

Учитываем, что  $\Phi$  — многоугольник в  $\mathbb{R}^2$ . Для выполнения включения  $T^{(1)}(v^{(1)}; r) \subset \Phi$  достаточно доказать, что

$$h_{T^{(1)}(v^{(1)}; r)}(e^{(i)}) = h_{T^{(1)}(z^*; r)}(e^{(i)}) + \langle e^{(i)}, v^{(1)} - z^* \rangle \leq h_{\Phi}(e^{(i)}), \quad i = \overline{1, 7}. \tag{2}$$

Так как по условиям, наложенным на  $z^*$  и  $r$ , выполняется

$$T^{(1)}(z^*; r) = B(z^*; r) \cap K^{(1)}(z^*) \subset \Phi,$$

то

$$h_{T^{(1)}(z^*; r)}(e^{(i)}) \leq h_{\Phi}(e^{(i)}), \quad i = \overline{1, 7},$$

и, значит, неравенство (2) выполняется для тех номеров  $i = \overline{1, 7}$ , для которых справедливо неравенство

$$\langle e^{(i)}, v^{(1)} - z^* \rangle \leq 0. \tag{3}$$

Нам остается показать, что (2) выполняется для тех номеров  $i = \overline{1, 7}$ , для которых

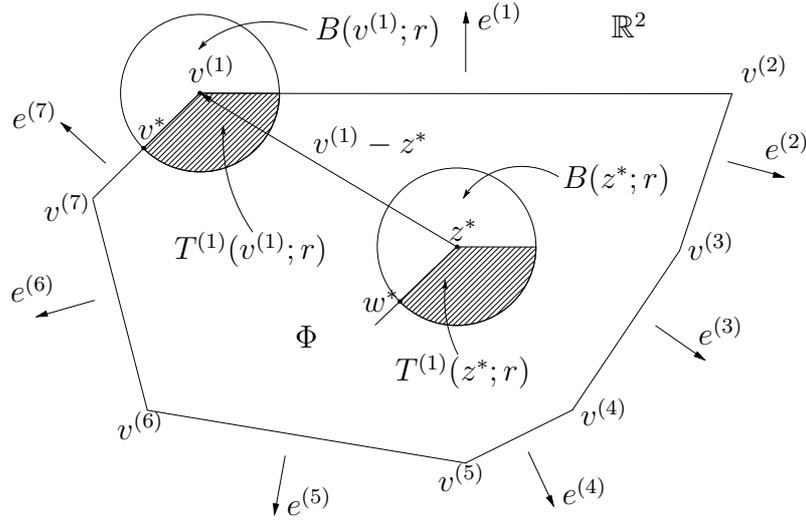
$$\langle e^{(i)}, v^{(1)} - z^* \rangle > 0. \tag{4}$$

Для этого обратимся к рис. 6, на котором изображен многоугольник  $\Phi$ . Из рисунка 6 видим, что (3) выполняется при  $i = \overline{2, 5}$  и (4) выполняется при  $i = 1, 6, 7$ . Значит, нам следует доказать, что (2) выполняется при  $i = 1, 6, 7$ .

Очевидно, что при  $i = 1, 7$  справедливо равенство  $h_{T^{(1)}(z^*; r)}(e^{(i)}) = \langle e^{(i)}, z^* \rangle$ , и, значит,

$$h_{T^{(1)}(v^{(1)}; r)}(e^{(i)}) = \langle e^{(i)}, z^* \rangle + \langle e^{(i)}, v^{(1)} - z^* \rangle = \langle e^{(i)}, v^{(1)} \rangle = h_{\Phi}(e^{(i)}).$$

Вычислим теперь  $h_{T^{(1)}(v^{(1)}; r)}(e^{(6)})$ . Для этого обозначим:  $w^*$  — точка из  $T^{(1)}(z^*; r)$ , удовлетворяющая равенству  $\langle e^{(6)}, w^* \rangle = h_{T^{(1)}(z^*; r)}(e^{(6)})$  (см. рис. 6),  $v^* = w^* + (v^{(1)} - z^*)$  — точка из  $T^{(1)}(v^{(1)}; r)$ .



**Рис. 6.** Многоугольник  $\Phi$

Справедливо равенство

$$w^* = z^* + r\|w^* - z^*\|^{-1}(w^* - z^*) = z^* + r\|v^* - v^{(1)}\|^{-1}(v^* - v^{(1)}),$$

и, следовательно,

$$v^* = v^{(1)} + r\|v^{(7)} - v^{(1)}\|^{-1}(v^{(7)} - v^{(1)}).$$

Отсюда получаем, что

$$h_{T^{(1)}(v^{(1)}; r)}(e^{(6)}) = \langle e^{(6)}, v^* \rangle.$$

Учитывая, что длина ребра  $[v^{(1)}, v^{(7)}]$  больше числа  $r$ , получаем, что  $v^* \in [v^{(1)}, v^{(7)}]$  и, значит,

$$\langle e^{(6)}, v^* \rangle \leq \langle e^{(6)}, v^{(7)} \rangle = h_{\Phi}(e^{(6)}).$$

Итак, при  $i = 6$  неравенство (2) доказано. Также доказано включение  $T^{(1)}(v^{(1)}; r) \subset \Phi$ . При помощи аналогичных рассуждений доказываются и остальные включения из (1). Принимая во внимание включения (1), запишем равенства

$$T^{(i)}(v^{(i)}; r) = T^{(i)}(v^{(i)}; r) \cap \Phi = B(v^{(i)}; r) \cap K_{\Phi}(v^{(i)}) \cap \Phi, \quad i = \overline{1, 7},$$

из которых следует

$$T^{(i)}(v^{(i)}; r) \subset B(v^{(i)}; r) \cap \Phi = U(v^{(i)}; r), \quad i = \overline{1, 7}. \tag{5}$$

С другой стороны, так как  $\Phi \subset K_{\Phi}(v^{(i)})$ ,  $i = \overline{1, 7}$ , то

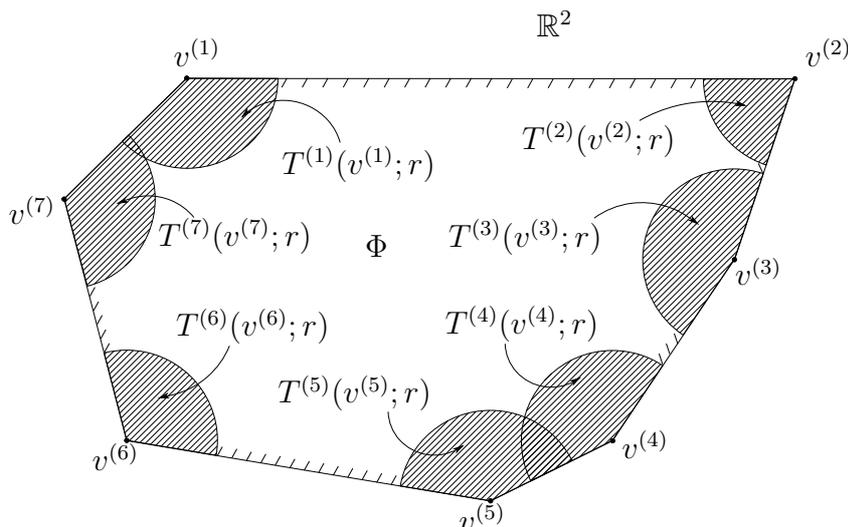
$$U(v^{(i)}; r) \subset B(v^{(i)}; r) \cap K_{\Phi}(v^{(i)}) = T^{(i)}(v^{(i)}; r), \quad i = \overline{1, 7}. \tag{6}$$

Из включений (5) и (6) следует

$$U(v^{(i)}; r) = T^{(i)}(v^{(i)}; r), \quad i = \overline{1, 7}.$$

Вместе с тем лемма 1 доказана. □

Таким образом, каждый локус  $U(v^{(i)}; r)$ ,  $i = \overline{1, 7}$ , есть клин в  $\Phi$  с вершиной  $v^{(i)}$ , порожденный касательным к  $\Phi$  конусом  $K_{\Phi}(v^{(i)})$  (см. рис. 7).



**Рис. 7.** Локусы  $U(v^{(i)}, r)$  многоугольника  $\Phi$

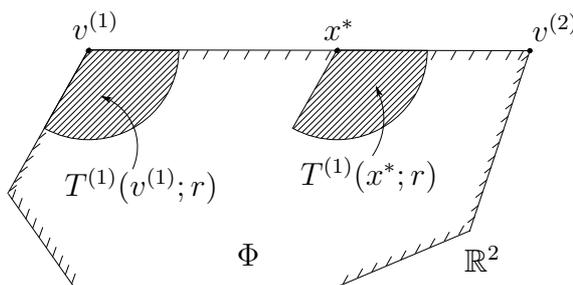
Обратимся снова к вершине  $v^{(1)}$  многоугольника  $\Phi$ . Рассмотрим наряду с  $v^{(1)}$  соседнюю с ней вершину  $v^{(2)}$  и ребро  $[v^{(1)}, v^{(2)}]$ , их соединяющее.

Нас интересуют точки  $x^* \in (v^{(1)}, v^{(2)})$  и возможности соответствующих этим точкам  $x^* \in \partial\Phi$  клиньев, содержащихся в  $\Phi$ . При этом в качестве этих клиньев нам желательно иметь клинья, структура которых нам знакома — клинья, конгруэнтные одному из клиньев  $T^{(1)}(v^{(1)}; r), T^{(2)}(v^{(2)}; r)$ .

Изучим такие возможности. Возьмем произвольную точку  $x^* \in (v^{(1)}, v^{(2)})$ . Полагаем

$$T^{(1)}(x^*; r) = x^* - v^{(1)} + T^{(1)}(v^{(1)}; r)$$

— множество в  $\mathbb{R}^2$ , конгруэнтное клину  $T^{(1)}(v^{(1)}; r)$  и полученное из него сдвигом на вектор  $x^* - v^{(1)}$  (см. рис. 8).



**Рис. 8.** Клин  $T^{(1)}(x^*; r)$

Для вершины  $v^{(1)}$  при  $i = 1, 7$  имеем

$$h_{T^{(1)}(v^{(1)}; r)}(e^{(i)}) = h_{\Phi}(e^{(i)}),$$

а также, учитывая ограничения на  $r$ , получаем при  $i = \overline{2, 6}$

$$h_{T^{(1)}(v^{(1)}; r)}(e^{(i)}) < h_{\Phi}(e^{(i)}), \tag{7}$$

То есть (7) может выполняться лишь при тех номерах  $i$ , для которых имеет место

$$\langle v^{(1)} - v^{(i)}, e^{(i)} \rangle < 0. \quad (8)$$

При  $i = \overline{2, 6}$  неравенство (7) имеет вид

$$\langle v^{(1)} - v^{(i)}, e^{(i)} \rangle + r < 0. \quad (9)$$

Аналогично, для любой другой вершины  $v^{(k)}$  многоугольника  $\Phi$  неравенство

$$\langle v^{(k)} - v^{(i)}, e^{(i)} \rangle + r < 0. \quad (10)$$

может выполняться лишь при тех номерах  $i$ , для которых

$$\langle v^{(k)} - v^{(i)}, e^{(i)} \rangle < 0.$$

Это условие является необходимым, но не достаточным.

В дополнение к условиям, наложенным на  $r \in (0, \infty)$  на стр. 588, предполагаем, что для любой вершины  $v^{(k)}$  многоугольника  $\Phi$  и для вершин  $v^{(i)}$  этого многоугольника, удовлетворяющих неравенству

$$\langle v^{(k)} - v^{(i)}, e^{(i)} \rangle < 0,$$

справедливо неравенство (9).

В данной работе мы будем считать его достаточным, то есть для любых  $k, i = \overline{1, 7}$ , при которых выполняется неравенство  $\langle v^{(k)} - v^{(i)}, e^{(i)} \rangle < 0$ , следует выполнение неравенства (10). Добиться этого можно путем уменьшения радиуса  $r$  клиньев  $T^{(i)}(v^{(i)}; r)$ .

Выясним, при каких ограничениях на точку  $x^*$ , дополнительных к  $x^* \in (v^{(1)}, v^{(2)})$ , множество  $T^{(1)}(x^*; r)$  есть клин, содержащийся в  $\Phi$ .

Такая постановка вопроса о дополнительных ограничениях относительно  $x^* \in (v^{(1)}, v^{(2)})$  имеет смысл, так как для точек  $x^* \in (v^{(1)}, v^{(2)})$ , достаточно близких к  $v^{(2)}$ , включение  $T^{(1)}(x^*; r) \subset \Phi$  заведомо нарушается.

Итак, выясним, для каких  $x^* \in (v^{(1)}, v^{(2)})$  справедливо неравенство

$$h_{T^{(1)}(x^*; r)}(e^{(i)}) \leq h_{\Phi}(e^{(i)}), \quad i = \overline{1, 7}. \quad (11)$$

Так как

$$\begin{aligned} h_{T^{(1)}(x^*; r)}(e^{(i)}) &= h_{T^{(1)}(v^{(1)}; r)}(e^{(i)}) + \langle x^* - v^{(1)}, e^{(i)} \rangle, \quad i = \overline{1, 7}, \\ h_{T^{(1)}(v^{(1)}; r)}(e^{(i)}) &\leq h_{\Phi}(e^{(i)}), \quad i = \overline{1, 7}, \end{aligned}$$

то неравенство (11) надлежит проверить лишь при тех  $i \in \overline{1, 7}$ , для которых

$$\langle x^* - v^{(1)}, e^{(i)} \rangle > 0,$$

или, что одно и то же, — при тех  $i \in \overline{1, 7}$ , для которых

$$\langle v^{(2)} - v^{(1)}, e^{(i)} \rangle > 0. \quad (12)$$

Неравенство (12) выполняется при  $i = 2, 3, 4$ , и, следовательно, нам надлежит выделить те  $x^* \in (v^{(1)}, v^{(2)})$ , для которых при  $i = 2, 3, 4$  выполняется (11).

Полагаем

$$x^* = x(\lambda_1) = v^{(1)} + \lambda_1 \cdot (v^{(2)} - v^{(1)}), \quad \lambda_1 \in (0, 1).$$

Неравенство (11) при  $i = 2, 3, 4$  принимает вид

$$\langle e^{(i)}, v^{(1)} + \lambda_1 \cdot (v^{(2)} - v^{(1)}) \rangle + r \leq \langle e^{(i)}, v^{(i)} \rangle. \quad (13)$$

Неравенство (13) запишем в виде

$$\max_{i=2,3,4} \left\{ (\langle e^{(i)}, v^{(1)} - v^{(i)} \rangle + r) + \lambda_1 \cdot \langle e^{(i)}, v^{(2)} - v^{(1)} \rangle \right\} \leq 0,$$

где  $\lambda_1 \in (0, 1)$ . Введем обозначения

$$\begin{aligned} a_1^{(i)} &= \langle e^{(i)}, v^{(1)} - v^{(i)} \rangle + r, \\ b_1^{(i)} &= \langle e^{(i)}, v^{(2)} - v^{(1)} \rangle, \quad i = 2, 3, 4. \end{aligned}$$

Постараемся найти максимальное  $\lambda_1 \in (0, 1)$ , при котором

$$\max_{i=2,3,4} \{a_1^{(i)} + \lambda_1 \cdot b_1^{(i)}\} = 0. \quad (14)$$

Числа  $a_1^{(i)}, b_1^{(i)}$ ,  $i = 2, 3, 4$  удовлетворяют неравенствам (см. (8))

$$a_1^{(i)} < 0, \quad b_1^{(i)} > 0, \quad i = 2, 3, 4.$$

Полагаем

$$\lambda_1^* = \min_{i=2,3,4} \frac{-a_1^{(i)}}{b_1^{(i)}}.$$

При таком определении числа  $\lambda_1^*$  имеем

$$\lambda_1^* \leq \frac{-a_1^{(i)}}{b_1^{(i)}}, \quad i = 2, 3, 4$$

и, значит,

$$a_1^{(i)} + \lambda_1^* b_1^{(i)} \leq 0, \quad i = 2, 3, 4,$$

и при этом среди номеров  $i = 2, 3, 4$  найдется номер  $i$ , при котором

$$\lambda_1^* = \frac{-a_1^{(i)}}{b_1^{(i)}}. \quad (15)$$

Для числа  $\lambda_1^*$  из (15) имеем

$$\max_{i=2,3,4} \{a_1^{(i)} + \lambda_1^* b_1^{(i)}\} = 0.$$

Так как  $b_1^{(i)} > 0$  при  $i = 2, 3, 4$ , то  $\lambda_1^* > 0$  есть максимальное среди чисел  $\lambda_1 > 0$ , удовлетворяющее (14).

Теперь убедимся в том, что  $\lambda_1^* < 1$ . Для этого выделим  $i = 2$  из номеров  $i = 2, 3, 4$  и рассмотрим число

$$\lambda_1^\nabla = \frac{-a_1^{(2)}}{b_1^{(2)}} = \frac{\langle e^{(2)}, v^{(2)} - v^{(1)} \rangle - r}{\langle e^{(2)}, v^{(2)} - v^{(1)} \rangle} = 1 - \frac{r}{\langle e^{(2)}, v^{(2)} - v^{(1)} \rangle}.$$

Поскольку справедливо неравенство

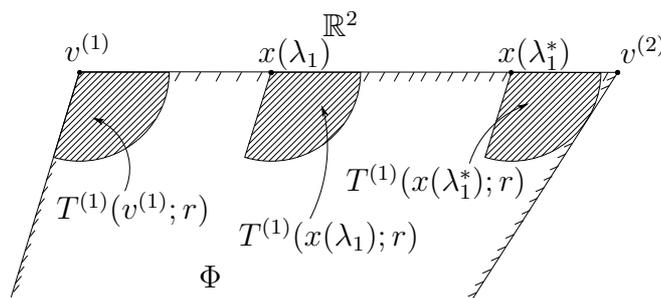
$$0 < r < \langle e^{(2)}, v^{(2)} - v^{(1)} \rangle,$$

то выполняется

$$0 < \frac{r}{\langle e^{(2)}, v^{(2)} - v^{(1)} \rangle} < 1$$

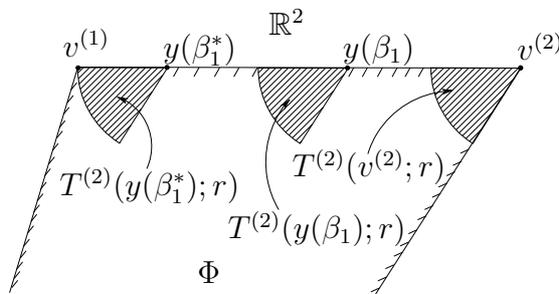
и, значит,  $0 < \lambda_1^\nabla < 1$ . Из этого следует, что  $\lambda_1^* \in (0, 1)$ .

Тогда  $x(\lambda_1^*)$ , по построению, — наиболее удаленная от вершины  $v^{(1)}$  среди точек  $x(\lambda_1) \in (v^{(1)}, v^{(2)})$ ,  $0 < \lambda_1 \leq \lambda_1^*$ , для которых выполняется включение  $T^{(1)}(x(\lambda_1); r) \subset \Phi$  (см. рис. 9).



**Рис. 9.** Клинь  $T^{(1)}(x(\lambda_1^*); r)$

Рассмотрим по аналогии с вершиной  $v^{(1)}$  вершину  $v^{(2)}$  многоугольника  $\Phi$ , связанную с  $v^{(1)}$  ребром  $[v^{(1)}, v^{(2)}]$ . Вершине  $v^{(2)}$  соответствует свой клинь  $T^{(2)}(v^{(2)}; r)$  (см. рис. 10).



**Рис. 10.** Клинь  $T^{(2)}(y(\beta_1^*); r)$

Полагаем

$$y^* = y(\beta_1) = v^{(2)} + \beta_1 \cdot (v^{(1)} - v^{(2)}), \quad \beta_1 \in (0, 1).$$

Справедливо включение  $y(\beta_1) \in [v^{(1)}, v^{(2)}]$ . Для точек  $y^* = y(\beta_1)$ ,  $\beta_1 \in (0, 1)$ , полагаем

$$T^{(2)}(y^*; r) = T^{(2)}(v^{(2)}; r) + \beta_1 \cdot (v^{(1)} - v^{(2)}). \quad (16)$$

Ту же схему рассуждений, применяющуюся к клину  $T^{(1)}(x^*; r)$ ,  $x^* = x(\lambda_1)$ ,  $\lambda_1 \in (0, 1)$ , применим к клину  $T^{(2)}(y^*; r)$ ,  $y^* = y(\beta_1)$ ,  $\beta_1 \in (0, 1)$ .

А именно, будем сдвигать  $T^{(2)}(y^*; r)$  от вершины  $v^{(2)}$  в направлении вектора  $v^{(1)} - v^{(2)}$  до тех пор, пока сохраняется включение  $T^{(2)}(y^*; r) \subset \Phi$  и, следовательно,  $T^{(2)}(y^*; r)$  остается клином, содержащимся в  $\Phi$ .

Введем обозначения

$$\begin{aligned} c_1^{(i)} &= \langle e^{(i)}, v^{(2)} - v^{(i)} \rangle + r, \\ d_1^{(i)} &= \langle e^{(i)}, v^{(1)} - v^{(2)} \rangle, \quad i = 5, 6, 7. \end{aligned}$$

Как отмечалось, нас интересуют точки  $y^* = y(\beta_1)$ ,  $\beta_1 \in (0, 1)$ , для которых  $T^{(2)}(y^*; r) \subset \Phi$ , то есть для которых

$$h_{T^{(2)}(y^*; r)}(e^{(i)}) \leq h_{\Phi}(e^{(i)}), \quad i = 5, 6, 7.$$

Из (16) вытекает равенство

$$h_{T^{(2)}(y^*; r)}(e^{(i)}) = h_{T^{(2)}(v^{(2)}; r)}(e^{(i)}) + \beta_1 \cdot \langle e^{(i)}, v^{(1)} - v^{(2)} \rangle,$$

а также выполняется неравенство

$$h_{T^{(2)}(v^{(2)}; r)}(e^{(i)}) \leq h_{B(v^{(2)}; r)}(e^{(i)}) = \langle e^{(i)}, v^{(2)} \rangle + r, \quad i = 5, 6, 7.$$

Из этих двух соотношений и равенства  $h_{\Phi}(e^{(i)}) = \langle e^{(i)}, v^{(i)} \rangle$  следует

$$(\langle e^{(i)}, v^{(2)} - v^{(i)} \rangle + r) + \beta_1 \cdot \langle e^{(i)}, v^{(1)} - v^{(2)} \rangle \leq 0, \quad i = 5, 6, 7, \quad (17)$$

где  $\beta_1 \in (0, 1)$ . Неравенству (17) сопоставим равенство

$$\max_{i=5,6,7} \{c_1^{(i)} + \beta_1 \cdot d_1^{(i)}\} = 0. \quad (18)$$

Числа  $c_1^{(i)}$ ,  $d_1^{(i)}$ ,  $i = 5, 6, 7$  удовлетворяют неравенствам

$$c_1^{(i)} < 0, \quad d_1^{(i)} > 0, \quad i = 5, 6, 7.$$

Очевидно, что все  $\beta_1 \in (0, 1)$ , которые удовлетворяют (18), удовлетворяют и (17). Тем самым, выделив  $\beta_1 \in (0, 1)$ , удовлетворяющие (18), мы удовлетворим и неравенствам (17). Полагаем

$$\beta_1^* = \min_{i=5,6,7} \frac{-c_1^{(i)}}{d_1^{(i)}}.$$

Число  $\beta_1^*$  удовлетворяет неравенству

$$c_1^{(i)} + \beta_1^* d_1^{(i)} \leq 0, \quad i = 5, 6, 7.$$

Также при некотором  $i \in \overline{5, 6, 7}$  выполняется равенство

$$c_1^{(i)} + \beta_1^* d_1^{(i)} = 0. \quad (19)$$

Отсюда получаем

$$\max_{i=5,6,7} \{c_1^{(i)} + \beta_1^* d_1^{(i)}\} = 0.$$

Покажем, что  $\beta_1^* < 1$  и, стало быть,  $\beta_1^* \in (0, 1)$ . В самом деле, рассмотрим число  $\beta_1^{\nabla} = \frac{-c_1^{(7)}}{d_1^{(7)}}$ , отвечающее номеру  $i = 7$ . Справедливо равенство

$$\beta_1^{\nabla} = \frac{-c_1^{(7)}}{d_1^{(7)}} = \frac{\langle e^{(7)}, v^{(7)} - v^{(2)} \rangle - r}{\langle e^{(7)}, v^{(1)} - v^{(2)} \rangle} = \frac{\langle e^{(7)}, v^{(7)} - v^{(2)} \rangle - r}{\langle e^{(7)}, v^{(7)} - v^{(2)} \rangle} = 1 - \frac{r}{\langle e^{(7)}, v^{(7)} - v^{(2)} \rangle}.$$

Так как  $c_1^{(7)} = \langle e^{(7)}, v^{(2)} - v^{(7)} \rangle + r < 0$ , то  $0 < r < \langle e^{(7)}, v^{(7)} - v^{(2)} \rangle$  и, значит,

$$0 < \frac{r}{\langle e^{(7)}, v^{(7)} - v^{(2)} \rangle} < 1.$$

Из этого следует, что  $\beta_1^\nabla \in (0, 1)$  и тогда, тем более,  $\beta_1^* \in (0, 1)$ .

Очевидно, что при  $\beta_1 \in (0, \beta_1^*)$  имеет место

$$\max_{i=5,6,7} \{c_1^{(i)} + \beta_1 d_1^{(i)}\} < 0.$$

и при  $\beta_1 \in (\beta_1^*, 1)$  имеет место

$$\max_{i=5,6,7} \{c_1^{(i)} + \beta_1 d_1^{(i)}\} > 0.$$

Из этих неравенств и равенства (19) следует, что  $\beta_1^*$  есть максимальное число из  $\beta_1 \in (0, 1)$ , удовлетворяющее (17).

Точка  $y(\beta_1^*)$ , как следует из ее определения, среди точек  $y(\beta_1) \in (v^{(1)}, v^{(2)})$  и удовлетворяющих включению  $T^{(2)}(y(\beta_1); r) \subset \Phi$ , наиболее удалена от вершины  $v^{(2)}$ , и, значит,  $T^{(2)}(y(\beta_1); r)$ ,  $\beta \in (0, \beta_1^*)$  есть клинья, содержащиеся в  $\Phi$  (см. рис. 10).

Подведем итог нашим рассуждениям.

Среди точек  $x(\lambda_1) \in [v^{(1)}, v^{(2)}]$ , удовлетворяющих включению  $T^{(1)}(x(\lambda_1); r) \subset \Phi$ , самой удаленной от  $v^{(1)}$  является точка  $x(\lambda_1^*)$ . Среди точек  $y(\beta_1) \in [v^{(1)}, v^{(2)}]$  и удовлетворяющих включению  $T^{(2)}(y(\beta_1); r) \subset \Phi$ , самой удаленной от  $v^{(2)}$  является точка  $y(\beta_1^*)$ .

Справедливы равенства

$$\begin{aligned} \|x(\lambda_1^*) - v^{(1)}\| &= \lambda_1^* \cdot \|v^{(1)} - v^{(2)}\|, \\ \|y(\beta_1^*) - v^{(2)}\| &= \beta_1^* \cdot \|v^{(1)} - v^{(2)}\|. \end{aligned}$$

В случае, когда

$$\lambda_1^* + \beta_1^* \geq 1, \quad (20)$$

отрезки  $[v^{(1)}, x(\lambda_1^*)]$  и  $[y(\beta_1^*), v^{(2)}]$  покрывают ребро  $[v^{(1)}, v^{(2)}]$ .

В этом случае каждой точке  $x^* \in [v^{(1)}, v^{(2)}]$  можно сопоставить клин  $T(x^*; r) \subset \Phi$  с вершиной  $x^*$ , конгруэнтный одному из клиньев  $T^{(1)}(v^{(1)}; r)$ ,  $T^{(2)}(v^{(2)}; r)$ .

Итак, мы рассмотрели две соседние вершины  $v^{(1)}$  и  $v^{(2)}$  выпуклого многоугольника  $\Phi$  в  $\mathbb{R}^2$  и установили достаточные условия (неравенство (20)), при которых любой точке  $x^* \in [v^{(1)}, v^{(2)}]$  можно сопоставить клин  $T(x^*; r)$  с вершиной  $x^*$ , содержащийся в  $\Phi$  и конгруэнтный одному из клиньев  $T^{(1)}(v^{(1)}; r)$ ,  $T^{(2)}(v^{(2)}; r)$ .

Точно так же, рассмотрев две другие соседние вершины  $v^{(i)}$  и  $v^{(i+1)}$  многоугольника  $\Phi$ , мы можем и для них вывести достаточные условия в виде неравенства, аналогичного неравенству (20), при которых любой точке  $x^*$  можно сопоставить клин  $T(x^*; r)$  в  $\Phi$ , конгруэнтный одному из клиньев  $T^{(i)}(v^{(i)}; r)$ ,  $T^{(i+1)}(v^{(i+1)}; r)$ .

В результате получим семь неравенств, аналогичных неравенству (20), отвечающих номерам  $i = \overline{1, 7}$ . Эти неравенства составят то достаточное условие, при котором любой точке  $x^* \in \partial\Phi$  можно сопоставить клин  $T(x^*; r) \subset \Phi$  с вершиной  $x^*$ , конгруэнтный одному из клиньев  $T^{(i)}(v^{(i)}; r)$ ,  $i = \overline{1, 7}$ .

В случае рассматриваемого нами семиугольника  $\Phi$  (см. рис. 1), при  $r = 0.25$  имеем

$$\lambda_1^* = \min_{i=2,3,4} \frac{-a_1^{(i)}}{b_1^{(i)}} = 1 - \frac{\sqrt{10}}{120}, \quad \beta_1^* = \min_{i=5,6,7} \frac{-c_1^{(i)}}{d_1^{(i)}} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{40};$$

$$\begin{aligned} \lambda_2^* &= \min_{i=3,4,5,6} \frac{-a_2^{(i)}}{b_2^{(i)}} = 1 - \frac{\sqrt{13}}{12}, & \beta_2^* &= \min_{i=1,7} \frac{-c_2^{(i)}}{d_2^{(i)}} = \frac{11}{12}; \\ \lambda_3^* &= \min_{i=4,5,6} \frac{-a_3^{(i)}}{b_3^{(i)}} = 1 - \frac{\sqrt{5}}{16}, & \beta_3^* &= \min_{i=1,2,7} \frac{-c_3^{(i)}}{d_3^{(i)}} = 1 - \frac{\sqrt{10}}{12}; \\ \lambda_4^* &= \min_{i=5,6,7} \frac{-a_4^{(i)}}{b_4^{(i)}} = 1 - \frac{\sqrt{37}}{32}, & \beta_4^* &= \min_{i=1,2,3} \frac{-c_4^{(i)}}{d_4^{(i)}} = 1 - \frac{\sqrt{13}}{16}; \\ \lambda_5^* &= \min_{i=1,6,7} \frac{-a_5^{(i)}}{b_5^{(i)}} = 1 - \frac{\sqrt{17}}{92}, & \beta_5^* &= \min_{i=2,3,4} \frac{-c_5^{(i)}}{d_5^{(i)}} = 1 - \frac{\sqrt{5}}{32}; \\ \lambda_6^* &= \min_{i=1,7} \frac{-a_6^{(i)}}{b_6^{(i)}} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{20}, & \beta_6^* &= \min_{i=2,3,4,5} \frac{-c_6^{(i)}}{d_6^{(i)}} = 1 - \frac{\sqrt{37}}{92}; \\ \lambda_7^* &= \min_{i=1,2,3} \frac{-a_7^{(i)}}{b_7^{(i)}} = 0.875, & \beta_7^* &= \min_{i=4,5,6} \frac{-c_7^{(i)}}{d_7^{(i)}} = 1 - \frac{\sqrt{17}}{40}, \end{aligned}$$

из чего следует справедливость неравенств

$$\lambda_i^* + \beta_i^* \geq 1, \quad i = \overline{1, 7}.$$

Учитывая это, зафиксируем произвольную точку  $x^* \in \partial\Phi$ . Найдется клин  $T(x^*; r) = (x^* - v^{(i)}) + T^{(i)}(v^{(i)}; r)$ ,  $i = \overline{1, 7}$ , с вершиной в  $x^*$ , содержащийся в  $\Phi$ . Он представляет собой круговой сектор в  $\mathbb{R}^2$  с вершиной  $x^*$ , углом  $\varphi_i = 2\alpha_i \in (0, \pi)$ , радиусом  $r > 0$ , и центральным направлением

$$\Lambda^{h_i} = \{x^* + l : l = \lambda h_i, \lambda \in (0, \infty)\},$$

где  $h_i \in \mathbb{R}^2$ ,  $\|h_i\| = 1$  (см. рис. 11).

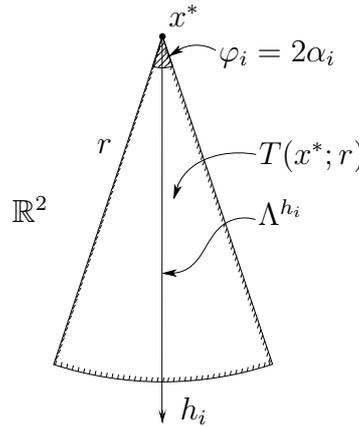
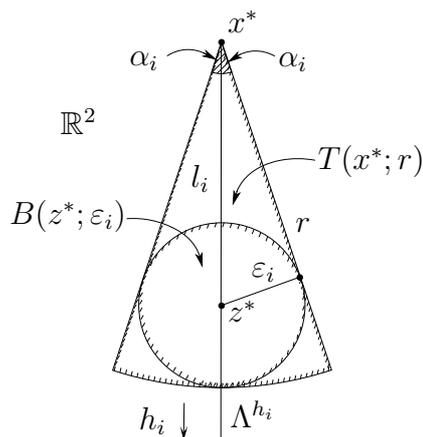


Рис. 11. Круговой сектор  $T(x^*; r)$

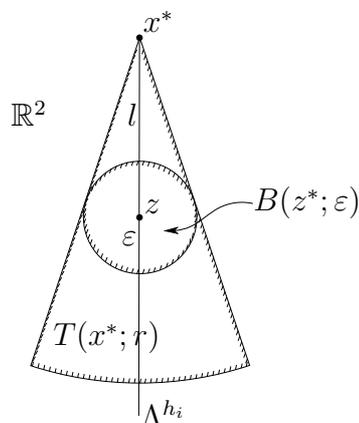
Впишем в сектор  $T(x^*; r)$  круг  $B(z^*; \varepsilon_i)$ ; здесь  $z^*$  — центр круга, лежащий на направлении  $\Lambda^{h_i}$ ,  $\varepsilon_i$  — радиус круга. Полагаем также  $l_i$  — расстояние между  $x^*$  и  $z^*$  (см. рис. 12).

Из рис. 12 видим, что справедливо равенство

$$l_i = \frac{1}{\sin \alpha_i} \cdot \varepsilon_i. \tag{21}$$



**Рис. 12.** Круг  $B(z^*; \varepsilon_i)$ , вписанный в сектор  $T(x^*; r)$



**Рис. 13.** Круг  $B(z; \varepsilon)$ , гомотетичный кругу  $B(z^*; \varepsilon_i)$

Далее, пусть точка  $z \in (x^*, z^*)$  и  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_i)$  таковы, что им отвечает круг  $B(z; \varepsilon)$  в  $\mathbb{R}^2$ , гомотетичный кругу  $B(z^*; \varepsilon_i)$  с центром гомотетии  $x^*$  (см. рис. 13). По построению, круг  $B(z; \varepsilon)$  касается изнутри образующих лучей клина  $T(x^*; r)$ .

Для любого такого круга  $B(z; \varepsilon)$ ,  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_i)$ , справедливо равенство

$$l = \frac{1}{\sin \alpha_i} \cdot \varepsilon,$$

аналогичное равенству (21); здесь  $l = \|x^* - z\|$ .

Так как  $B(z; \varepsilon) \subset T(x^*; r)$  и  $T(x^*; r) \subset \Phi$ , то  $B(z; \varepsilon) \subset \Phi$ ,  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_i)$ . Включение  $B(z; \varepsilon) \subset \Phi$  означает, что

$$z \in \Phi \dot{-} B(0; \varepsilon), \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_i]; \quad (22)$$

здесь  $\Phi \dot{-} B(0; \varepsilon)$  — геометрическая разность  $\Phi$  и  $B(0; \varepsilon)$ .

Из включения (22) и равенства  $l = \|x^* - z\|$  следует оценка

$$\rho(x^*, \Phi \dot{-} B(0; \varepsilon)) \leq l = \frac{1}{\sin \alpha_i} \cdot \varepsilon, \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_i]; \quad (23)$$

здесь обозначено  $\rho(x, X)$  — евклидово расстояние от точки  $x$  до компакта  $X$  в  $\mathbb{R}^2$ .

Введем обозначения

$$\alpha^* = \min_{i=\overline{1,7}} \alpha_i, \quad \varepsilon^* = \min_{i=\overline{1,7}} \varepsilon_i.$$

Из оценки (23) следует, что для любой точки  $x^* \in \partial\Phi$  имеет место оценка

$$\rho(x^*, \Phi \dot{-} B(0; \varepsilon)) \leq l = \frac{1}{\sin \alpha^*} \cdot \varepsilon, \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon^*].$$

Эту оценку запишем в виде

$$h(\partial\Phi, \Phi \dot{-} B(0; \varepsilon)) \leq l = \frac{1}{\sin \alpha^*} \cdot \varepsilon, \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon^*];$$

здесь  $h(\Phi^{(1)}, \Phi^{(2)})$  — хаусдорфово отклонение  $\Phi^{(1)}$  от  $\Phi^{(2)}$ .

Отсюда для выпуклого многоугольника  $\Phi$  в  $\mathbb{R}^2$  вытекает оценка

$$h(\Phi, \Phi \dot{-} B(0; \varepsilon)) \leq l = \gamma \cdot \varepsilon, \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon^*], \tag{24}$$

где  $\gamma = \frac{1}{\sin \alpha^*} \in (0, \infty)$ .

В оценке (24) указан спектр значений  $\varepsilon$ , при которых оценка имеет место, — полуинтервал  $(0, \varepsilon^*]$ . При этом возникает вопрос о том, можем ли мы сделать какие-либо уточнения относительно  $\varepsilon^*$ , например, о том, как это число соотносится с геометрией многоугольника  $\Phi$ .

Предложим некоторые уточнения. В самом деле, из рис. 12 видим, что  $l_i + \varepsilon_i = r$ ,  $i = \overline{1, 7}$  и, стало быть,

$$\varepsilon_i \cdot \left(1 + \frac{1}{\sin \alpha_i}\right) = r, \quad i = \overline{1, 7}.$$

Из этого равенства вытекает

$$\varepsilon^* = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{\sin \alpha^*}\right)} \cdot r. \tag{25}$$

В случае рассматриваемого нами семиугольника  $\Phi$  (см. рис. 1), при  $r = 0.25$  имеем

$$\alpha^* = \alpha_2 = \arcsin \frac{3}{\sqrt{10}}, \quad \varepsilon^* = \frac{3\sqrt{10} - 9}{4},$$

поэтому неравенство (24) примет вид

$$h(\Phi, \Phi \dot{-} B(0; \varepsilon)) \leq \frac{\sqrt{10}}{3} \cdot \varepsilon, \quad \varepsilon \in \left(0, \frac{3\sqrt{10} - 9}{4}\right].$$

Представление (25) числа  $\varepsilon^*$  через  $r$  и  $\alpha^*$  позволяет сделать следующие выводы:

(1) При  $r > 0$ , удовлетворяющем наложенным на него условиям, чем больше  $\alpha^*$ , тем больше  $\varepsilon^* > 0$ ;

(2) Чем больше  $r > 0$ , удовлетворяющее наложенным на него условиям, тем больше  $\varepsilon^*$ .

На этом завершим описание схемы получения оценки отклонения  $h(\Phi, \Phi \dot{-} B(0; \varepsilon))$  для выпуклого конкретного многоугольника  $\Phi$  в  $\mathbb{R}^2$ .

## § 2. Заключение

Описана схема получения оценки отклонения  $h(\Phi, \Phi \div B(0; \varepsilon))$  для выпуклого конкретного многоугольника  $\Phi$  в  $\mathbb{R}^2$ . При выводе этой оценки существенным образом использовалось понятие клина в  $\mathbb{R}^2$ , введенное в этой работе. Схема вывода оценки в этой работе, использующая понятие клина в  $\mathbb{R}^2$ , применима и в общем случае при рассмотрении выпуклых многоугольников в  $\mathbb{R}^2$ . Гораздо более сложным, по мнению авторов, представляется перенесение этой схемы вывода оценки на выпуклые невырожденные многогранники в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^n$ .

**Финансирование.** Работа выполнена в рамках исследований, проводимых в Уральском математическом центре.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Понтрягин Л.С. Линейные дифференциальные игры преследования // Математический сборник. 1980. Т. 112 (154). № 3 (7). С. 307–330. <http://mi.mathnet.ru/msb2728>
2. Понтрягин Л.С. Избранные научные труды. Т. 2. М.: Наука, 1988.
3. Никольский М.С. Об альтернированном интеграле Л. С. Понтрягина // Математический сборник. 1981. Т. 116 (158). № 1 (9). С. 136–144. <http://mi.mathnet.ru/msb2447>
4. Nikol'skii M.S. Approximate computation of the least guaranteed estimate in linear differential games with a fixed duration // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 1982. Vol. 46. No. 4. P. 550–552. [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(82\)90044-2](https://doi.org/10.1016/0021-8928(82)90044-2)
5. Половинкин Е.С. Стабильность терминального множества и оптимальность времени преследования в дифференциальных играх // Дифференциальные уравнения. 1984. Том 20. № 3. С. 433–446. <http://mi.mathnet.ru/de5120>
6. Пономарев А.П., Розов Н.Х. Устойчивость и сходимость альтернированных сумм Понтрягина // Вестник Московского университета. Серия 15: Вычислительная математика и кибернетика. 1978. № 1. С. 82–90.
7. Азамов А.А. Полуустойчивость и двойственность в теории альтернированного интеграла Понтрягина // Докл. АН СССР. 1988. Т. 299. № 2. С. 265–268. <http://mi.mathnet.ru/dan7722>
8. Половинкин Е.С., Иванов Г.Е., Балашов М.В., Константинов Р.В., Хорев А.В. Об альтернированном интеграле Л. С. Понтрягина. Стабильность терминального множества и оптимальность времени преследования в дифференциальных играх // Математический сборник. 2001. Т. 192. № 10. С. 95–122. <https://doi.org/10.4213/sm604>
9. Ушаков В.Н., Першаков М.В. О двусторонних аппроксимациях множеств достижимости управляемых систем с геометрическими ограничениями на управления // Труды ИММ УрО РАН. 2020. Т. 26. № 1. С. 239–255. <https://doi.org/10.21538/0134-4889-2020-26-1-239-255>
10. Половинкин Е.С., Балашов М.В. Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. М.: Физматлит, 2007.

Поступила в редакцию 06.08.2020

Ушаков Владимир Николаевич, член-корреспондент РАН, д. ф.-м. н., профессор, главный научный сотрудник, отдел динамических систем, Институт математики и механики УрО РАН, 620219, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0527-5375>

E-mail: [ushak@imm.uran.ru](mailto:ushak@imm.uran.ru)

Першаков Максим Вадимович, студент, Институт естественных наук и математики, Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б. Н. Ельцина, 620002, Россия, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19;

математик, отдел динамических систем, Институт математики и механики УрО РАН, 620219, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6150-8244>

E-mail: [Mper192@yandex.ru](mailto:Mper192@yandex.ru)

**Цитирование:** В. Н. Ушаков, М. В. Першаков. К оценке хаусдорфова отклонения выпуклых многоугольников в  $\mathbb{R}^2$  от их геометрической разности с кругами // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2020. Т. 30. Вып. 4. С. 585–603.

*V.N. Ushakov, M.V. Pershakov*

**On estimation of Hausdorff deviation of convex polygons in  $\mathbb{R}^2$  from their differences with disks**

*Keywords:* convex polygon in  $\mathbb{R}^2$ , Hausdorff deviation, wedge, cone, circle, geometric difference of sets.

MSC2010: 52A10, 28A75

DOI: [10.35634/vm200404](https://doi.org/10.35634/vm200404)

We study a problem concerning the estimation of the Hausdorff deviation of convex polygons in  $\mathbb{R}^2$  from their geometric difference with circles of sufficiently small radius. Problems with such a subject, in which not only convex polygons but also convex compacts in the Euclidean space  $\mathbb{R}^n$  are considered, arise in various fields of mathematics and, in particular, in the theory of differential games, control theory, convex analysis. Estimates of Hausdorff deviations of convex compact sets in  $\mathbb{R}^n$  in their geometric difference with closed balls in  $\mathbb{R}^n$  are presented in the works of L.S. Pontryagin, his staff and colleagues. These estimates are very important in deriving an estimate for the mismatch of the alternating Pontryagin's integral in linear differential games of pursuit and alternating sums. Similar estimates turn out to be useful in deriving an estimate for the mismatch of the attainability sets of nonlinear control systems in  $\mathbb{R}^n$  and the sets approximating them. The paper considers a specific convex heptagon in  $\mathbb{R}^2$ . To study the geometry of this heptagon, we introduce the concept of a wedge in  $\mathbb{R}^2$ . On the basis of this notion, we obtain an upper bound for the Hausdorff deviation of a heptagon from its geometric difference with the disc in  $\mathbb{R}^2$  of sufficiently small radius.

**Funding.** The work was performed as a part of research conducted in the Ural mathematical center.

#### REFERENCES

1. Pontryagin L.S. Linear differential games of pursuit, *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 1981, vol. 40, no. 3, pp. 285–303. <https://doi.org/10.1070/SM1981v040n03ABEH001815>
2. Pontryagin L.S. *Izbrannye nauchnye trudy. Tom 2* (Selected scientific works. Vol. 2), Moscow: Nauka, 1988.
3. Nikol'skii M.S. On the alternating integral of Pontryagin, *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 1981, vol. 44, no. 1, pp. 125–132. <http://doi.org/10.1070/SM1983v044n01ABEH000956>
4. Nikol'skii M.S. Approximate computation of the least guaranteed estimate in linear differential games with a fixed duration, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1982, vol. 46, no. 4, pp. 550–552. [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(82\)90044-2](https://doi.org/10.1016/0021-8928(82)90044-2)
5. Polovinkin E.S. Stability of the terminal set and optimality of the pursuit time in differential games, *Differ. Uravn.*, 1984, vol. 20, no. 3, pp. 433–446 (in Russian). <http://mi.mathnet.ru/de5120>
6. Ponomarev A.P., Rozov N.Kh. Stability and convergence of alternated Pontryagin sums, *Bulletin of Moscow University. Series 15: Computational Mathematics and Cybernetics*, 1978, no. 1, pp. 82–90.
7. Azamov A.A. Semistability and duality in the theory of the Pontryagin alternating integral, *Soviet Mathematics. Doklady*, 1988, vol. 37, no. 2, pp. 355–359. <https://zbmath.org/?q=an:0683.90108>
8. Polovinkin E.S., Ivanov G.E., Balashov M.V., Konstantinov R.V., Khorev A.V. An algorithm for the numerical solution of linear differential games, *Sbornik: Mathematics*, 2001, vol. 192, no. 10, pp. 1515–1542. <http://doi.org/10.1070/SM2001v192n10ABEH000604>
9. Ushakov V.N., Pershakov M.V. On two-sided approximations of reachable sets of control systems with geometric constraints on the controls, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2020, vol. 26, no. 1, pp. 239–255 (in Russian). <https://doi.org/10.21538/0134-4889-2020-26-1-239-255>
10. Polovinkin E.S., Balashov M.V. *Elementy vypuklogo i sil'no vypuklogo analiza* (Elements of convex and strongly convex analysis), Moscow: Fizmatlit, 2007.

Received 06.08.2020

Ushakov Vladimir Nikolaevich, Doctor of Physics and Mathematics, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Professor, Chief Researcher, Department of Dynamical Systems, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620219, Russia.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0527-5375>

E-mail: [ushak@imm.uran.ru](mailto:ushak@imm.uran.ru)

Pershakov Maksim Vadimovich, Student, Institute of Natural Sciences and Mathematics, Ural Federal University, ul. Mira, 19, Yekaterinburg, 620002, Russia;

Mathematician, Department of Dynamical Systems, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620219, Russia.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6150-8244>

E-mail: [Mper192@yandex.ru](mailto:Mper192@yandex.ru)

**Citation:** V. N. Ushakov, M. V. Pershakov. On estimation of Hausdorff deviation of convex polygons in  $\mathbb{R}^2$  from their differences with disks, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2020, vol. 30, issue 4, pp. 585–603.