

УДК 531.36, 521.1

© *О. В. Холостова*

## О ДВИЖЕНИЯХ БЛИЗКОЙ К АВТОНОМНОЙ ГАМИЛЬТОНОВОЙ СИСТЕМЫ В СЛУЧАЯХ ДВУХ НУЛЕВЫХ ЧАСТОТ

Рассматривается движение близкой к автономной, периодической по времени гамильтоновой системы с двумя степенями свободы в окрестности тривиального равновесия. Предполагается, что система зависит от трех параметров, один из которых мал, и при его нулевом значении система автономна. Пусть в автономном случае для некоторого набора двух других параметров обе частоты малых линейных колебаний системы в окрестности равновесия равны нулю и ранг матрицы коэффициентов линеаризованных уравнений возмущенного движения равен трем, двум или единице. Исследуется структура областей устойчивости и неустойчивости тривиального равновесия системы в окрестности резонансной точки трехмерного пространства параметров, изучается вопрос о существовании, числе и устойчивости (в линейном приближении) периодических движений системы, аналитических по целым или дробным степеням малого параметра. В качестве приложения построены периодические движения динамически симметричного спутника (твердого тела) относительно центра масс в окрестности его стационарного вращения (цилиндрической прецессии) на слабоэллиптической орбите в рассматриваемом случае двух нулевых частот, доказана их неустойчивость.

*Ключевые слова:* гамильтонова система, нормализация, нулевые частоты, устойчивость, динамически симметричный спутник, цилиндрическая прецессия.

DOI: [10.35634/vm200410](https://doi.org/10.35634/vm200410)

### Введение

Устойчивость и нелинейные колебания близких к автономным, периодическим по времени гамильтоновым системам с одной и двумя степенями свободы в окрестности положения равновесия при наличии однократного параметрического резонанса изучались в работах [1–3]. Сравнительно недавно начато исследование случаев кратных параметрических резонансов в близких к автономным гамильтоновым системам с двумя или большим числом степеней свободы. Такие случаи встречаются, например, в задачах небесной механики, зависящих от нескольких параметров [4–8]. Общие вопросы построения областей параметрического резонанса в этих случаях обсуждаются в работах [4, 7], где впервые показана возможность существования нескольких (от одной до трех) областей неустойчивости в окрестности резонансной точки в плоскости параметров системы. Задача о существовании, числе и устойчивости (в линейном приближении) резонансных периодических движений системы, аналитических по дробным или целым степеням малого параметра, исследована в случаях, когда в соответствующей автономной системе 1) одна из частот малых колебаний линеаризованных уравнений возмущенного движения целая или полуцелая, а другая равна нулю [9]; 2) одна из этих частот целая, а другая полуцелая [10]; 3) обе частоты равны единице (резонанс 1:1:1) и при этом автономная квадратичная часть гамильтониана приводится к сумме квадратов [11].

Цель данной работы — исследование нелинейных колебаний близкой к автономной, периодической по времени гамильтоновой системы с двумя степенями свободы в случаях двух нулевых частот, для которых в автономном случае ранг матрицы линеаризованных уравнений возмущенного движения равен трем, двум или единице. Изучается структура областей устойчивости и неустойчивости тривиального равновесия системы в окрестности

резонансной точки трехмерного пространства параметров, решается вопрос о существовании, числе и устойчивости (в линейном приближении) периодических движений системы, аналитических по целым или дробным степеням малого параметра. Ранее устойчивость автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы в случае двух нулевых частот исследовалась в статье [12].

В качестве приложения исследуется случай двух нулевых частот, для которого ранг вышеупомянутой матрицы равен трем, в задаче о движении динамически симметричного спутника (твердого тела) относительно центра масс в окрестности его стационарного вращения (цилиндрической прецессии) на слабоэллиптической орбите. Построены периодические движения в окрестности резонансной точки пространства параметров, показана их неустойчивость.

## § 1. Постановка задачи

Рассмотрим движения  $2\pi$ -периодической по времени гамильтоновой системы с двумя степенями свободы, описываемой гамильтонианом  $H(q_j, p_j, t; \alpha, \beta, \varepsilon)$ . Здесь  $q_j$  и  $p_j$  ( $j = 1, 2$ ) — канонически сопряженные координаты и импульсы,  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\varepsilon$  — параметры системы, причем параметр  $\varepsilon$  мал ( $0 < \varepsilon \ll 1$ ) и при  $\varepsilon = 0$  система автономна.

Пусть начало координат  $q_j = p_j = 0$  фазового пространства является положением равновесия системы и для достаточно малых значений  $q_j$  и  $p_j$  гамильтониан аналитичен в некоторой области трехмерного пространства параметров  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\varepsilon$ . Представим его в виде ряда

$$H = H^{(0)}(q_j, p_j; \alpha, \beta) + \varepsilon H^{(1)}(q_j, p_j, t; \alpha, \beta) + \varepsilon^2 H^{(2)}(q_j, p_j, t; \alpha, \beta) + O(\varepsilon^3).$$

Будем считать, что разложения функций  $H^{(k)}$  в ряды по  $q_j$  и  $p_j$  содержат слагаемые только четных степеней по этим переменным, т.е.

$$H^{(k)} = H_{2k} + H_{4k} + \dots$$

Здесь  $H_{lk}$  — однородная форма степени  $l$  по  $q_j$  и  $p_j$  с постоянными (при  $k = 0$ ) или  $2\pi$ -периодическими по  $t$  (при  $k = 1, 2, \dots$ ) коэффициентами, а многочлен означает совокупность слагаемых, степень которых по  $q_j$  и  $p_j$  не меньше шести.

Пусть в некоторой точке  $\varepsilon = 0$ ,  $\alpha = \alpha_*$ ,  $\beta = \beta_*$  из указанной области пространства параметров в системе реализуется кратный резонанс, для которого обе частоты  $\omega_1$  и  $\omega_2$  малых колебаний линеаризованных в окрестности тривиального равновесия уравнений движения системы равны нулю.

Имеется [12] несколько качественно различных случаев двух нулевых частот, определяемых рангом  $r$  матрицы коэффициентов линеаризованных уравнений возмущенного движения, вычисленной в резонансной точке. Ранг  $r$  может принимать значения 3, 2, 1 и 0, а соответствующие квадратичные формы  $H_{20}$  приводятся к следующему виду (нормальной форме):

$$H_{20} = \frac{1}{2} p_1^2 - q_1 q_2 \quad (r = 3), \quad (1.1)$$

$$H_{20} = \frac{1}{2} p_1^2 + \frac{1}{2} \delta p_2^2, \quad \delta = \pm 1 \quad (r = 2), \quad (1.2)$$

$$H_{20} = \frac{1}{2} p_2^2 \quad (r = 1), \quad (1.3)$$

$$H_{20} = 0 \quad (r = 0).$$

Цель данной работы — исследование нелинейных колебаний системы в окрестности тривиального равновесия для значений параметров, близких к резонансным и отвечающих

случаям двух нулевых частот при  $r = 3, 2$  и  $1$ . Изучается структура областей устойчивости и неустойчивости тривиального равновесия, решаются вопросы о существовании, числе и устойчивости (в линейном приближении) периодических движений системы, аналитических по целым или дробным степеням малого параметра.

В последнем разделе в качестве приложения исследуются резонансные периодические движения динамически симметричного спутника (твердого тела) относительно центра масс в окрестности его стационарного вращения (цилиндрической прецессии) на слабоэллиптической орбите для значений параметров, соответствующих случаю двух нулевых частот.

## § 2. Построение модельных гамильтонианов

Пусть автономная квадратичная часть  $H_{20}$  гамильтониана возмущенного движения уже приведена к нормальной форме, соответствующей рассматриваемому резонансу. Проведем дальнейшее преобразование гамильтониана, осуществив нормализацию формы  $H_{40}$  четвертой степени в автономной части гамильтониана, а также нормализацию неавтономной квадратичной формы (в слагаемых до требуемого порядка по  $\varepsilon$ ) в малой окрестности резонансной точки  $\alpha = \alpha_*$ ,  $\beta = \beta_*$ ,  $\varepsilon = 0$ . Структура преобразованной части гамильтониана определяется исходной нормальной формой  $H_{20}$ , которую будем называть «опорной». Оба указанных преобразования могут быть получены, например, при помощи метода Депри–Хори [13]; их явный вид весьма громоздкий и далее не приводится.

### 2.1. Нормализация формы $H_{40}$

Исходная форма  $H_{40}$  содержит в общем случае 35 групп слагаемых — комбинаций четвертой степени переменных  $q_1, q_2, p_1, p_2$ . В случае  $r = 3$ , используя в качестве «опорной» квадратичную форму  $H_{20}$  из (1.1) и проводя нормализацию, число этих групп можно уменьшить до пяти. Обозначая преобразованную форму через  $K_{40}$ , а новые координаты и импульсы через  $x_j$  и  $X_j$  ( $j = 1, 2$ ), запишем результат в виде

$$K_{40} = \gamma_1 X_2^4 + (\gamma_2 X_1 + \gamma_3 x_2) X_2^3 + \gamma_4 X_1^2 X_2^2 + \gamma_5 X_2 X_1^3. \quad (2.1)$$

Здесь и далее  $\gamma_k$  — постоянные коэффициенты.

«Опорной» в случае  $r = 2$  является квадратичная форма (1.2), а нормализованная форма четвертой степени  $K_{40}$  содержит следующие группы переменных

$$K_{40} = g_4(x_1, x_2) + g_2(x_1, x_2)(x_1 X_2 \mp X_1 x_2) + \gamma'(x_1 X_2 \mp X_1 x_2)^2. \quad (2.2)$$

В случае  $r = 1$  при помощи (1.3) число слагаемых четвертой степени можно уменьшить, однако форма  $K_{40}$  остается весьма громоздкой:

$$K_{40} = g_4(x_1, x_2) + g_3(x_1, x_2) X_1 + g_2(x_1, x_2) X_1^2 + g_1(x_1, x_2) X_1^3 + \gamma' X_1^4. \quad (2.3)$$

В (2.2) и (2.3)  $g_l(x_1, x_2)$  — однородные формы степени  $l$  по  $x_1$  и  $x_2$  с постоянными коэффициентами, а  $\gamma' = \text{const}$ .

### 2.2. Нормализация неавтономной квадратичной части

Введем малую, ширины порядка  $\varepsilon$ , окрестность резонансной точки ( $\nu_1$  и  $\mu_k$  — константы):

$$\alpha = \alpha_* + \varepsilon \nu_1, \quad \beta = \beta_* + \varepsilon \mu_1 + \varepsilon^2 \mu_2 + \varepsilon^3 \mu_3 + \varepsilon^4 \mu_4 + \dots \quad (2.4)$$

Представим квадратичную часть гамильтониана возмущенного движения в виде

$$H_2 = H_{20}(q_j, p_j, \alpha, \beta) + \varepsilon H_{21}(q_j, p_j, \alpha, \beta, t) + \varepsilon^2 H_{22}(q_j, p_j, \alpha, \beta, t) + \dots$$

Будем считать, что среднее за период (по времени) значение функции  $H_{21}$  равно нулю ( $\langle H_{21} \rangle = 0$ ); это условие довольно часто выполняется в задачах классической и небесной механики.

С учетом выражений (2.4), разложим форму  $H_2$  в ряд по степеням  $\varepsilon$ :

$$H_2 = \tilde{H}_{20} + \varepsilon \tilde{H}_{21} + \varepsilon^2 \tilde{H}_{22} + \dots, \tag{2.5}$$

$$\tilde{H}_{20} = H_{20}, \quad \tilde{H}_{21} = H_{21}|_* + \left. \frac{\partial H_{20}}{\partial \alpha} \right|_* \nu_1 + \left. \frac{\partial H_{20}}{\partial \beta} \right|_* \mu_1, \dots$$

Здесь часть  $\tilde{H}_{20}$  записана в нормальной форме, а символ  $*$  означает, что соответствующая функция вычисляется при  $\alpha = \alpha_*$ ,  $\beta = \beta_*$ . Второе и третье слагаемые в  $\tilde{H}_{21}$  — квадратичные формы с постоянными коэффициентами, представим их в виде

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial H_{20}}{\partial \alpha} \right|_* &= a_1 q_1^2 + a_2 q_2^2 + a_3 p_1^2 + a_4 p_2^2 + \\ &+ a_5 q_1 q_2 + a_6 q_1 p_1 + a_7 q_1 p_2 + a_8 q_2 p_1 + a_9 q_2 p_2 + a_{10} p_1 p_2, \tag{2.6} \\ \left. \frac{\partial H_{20}}{\partial \beta} \right|_* &= b_1 q_1^2 + b_2 q_2^2 + b_3 p_1^2 + b_4 p_2^2 + \\ &+ b_5 q_1 q_2 + b_6 q_1 p_1 + b_7 q_1 p_2 + b_8 q_2 p_1 + b_9 q_2 p_2 + b_{10} p_1 p_2. \end{aligned}$$

Проведем  $2\pi$ -периодическое по времени нормализующее преобразование и уничтожим время в слагаемых до требуемого порядка  $k$  по  $\varepsilon$  в форме  $H_2$ . Затем упростим структуру слагаемых с постоянными коэффициентами. Обозначим преобразованные переменные через  $x_j, X_j, j = 1, 2$  (как в разд. 2.1) и представим преобразованную квадратичную форму в виде

$$K_2 = K_{20} + \varepsilon K_{21}(x_j, X_j) + \dots + \varepsilon^k K_{2k}(x_j, X_j) + \varepsilon^{k+1} \tilde{K}_2(x_j, X_j, t; \varepsilon). \tag{2.7}$$

Здесь и далее  $K_{20}$  — это форма  $\tilde{H}_{20}$  при замене  $q_j$  на  $x_j$  и  $p_j$  на  $X_j$  ( $j = 1, 2$ ). Явный вид форм  $K_{2l}$  для каждого резонансного случая и (при необходимости) для систем различного приближения по  $\varepsilon$ , будет выписан в соответствующих разделах. Последнее слагаемое в (2.7)  $2\pi$ -периодично по  $t$ .

В некоторых случаях специфические свойства системы при наличии резонансов могут проявиться только в меньшей окрестности резонансной точки (например, ширины порядка  $\varepsilon^2$ ); в других случаях переход в меньшую окрестность приводит к качественным изменениям свойств системы (см. [9–11]). Ниже для случая  $r = 3$  будет проведено сравнение свойств изучаемой системы в  $\varepsilon$ - и  $\varepsilon^2$ -окрестностях резонансной точки. Вторая из этих окрестностей задается соотношениями

$$\alpha = \alpha_* + \varepsilon^2 \nu_2, \quad \beta = \beta_* + \varepsilon^2 \mu_2 + \varepsilon^3 \mu_3 + \varepsilon^4 \mu_4 + \dots \tag{2.8}$$

В этом случае имеем  $\tilde{H}_{21} = 0$ , а формы (2.6) содержатся в слагаемых порядка  $\varepsilon^2$ . Нормализованная квадратичная форма задается формулой (2.7), в которой  $K_{21}(x_j, X_j) = 0$ .

### 2.3. О случае $r = 0$

В случае  $r = 0$ , когда  $H_{20} = 0$ , на первом этапе методом Депри–Хори уничтожается время в квадратичной части гамильтониана в слагаемых до требуемого порядка по  $\varepsilon$  [7]. Автономная квадратичная часть порядка  $\varepsilon$  состоит из второго и третьего слагаемых в форме  $\tilde{H}_{21}$  из (2.5), при учете соотношений (2.6). Проводится нормализация этой квадратичной части обычными методами нормализации линейных автономных гамильтоновых систем. Вид

полученной нормальной формы  $\varepsilon K_{21}$  определяет (в соответствующей окрестности тривиального равновесия) структуру нормализованной формы четвертой степени  $H_{40}$ . Случай  $r = 0$  далее не рассматривается.

#### 2.4. Модельные гамильтонианы

В результате проведения описанных нормализующих преобразований гамильтониан системы представляется в виде

$$K = K_2 + K_4 + O_6. \quad (2.9)$$

Квадратичная часть  $K_2$  определена в (2.7). Часть  $K_4$  четвертой степени имеет вид

$$K_4 = K_{40} + \varepsilon \tilde{K}_4(x_j, X_j, t; \varepsilon),$$

причем формы  $K_{40}$  выписаны в разд.2.1, а второе слагаемое  $2\pi$ -периодично по  $t$ .

Слагаемое  $O_6$  в (2.9) означает совокупность членов четных степеней (начиная с шестой) по  $x_j$  и  $X_j$  ( $j = 1, 2$ ) с  $2\pi$ -периодическими по  $t$  коэффициентами.

Для изучения свойств системы в  $\varepsilon$ -окрестности (2.4) резонансной точки пространства параметров положим в гамильтониане (2.9)

$$x_j = \varepsilon^{1/2} y_j, \quad X_j = \varepsilon^{1/2} Y_j \quad (j = 1, 2)$$

и перепишем его в виде

$$\Gamma^{(1)} = \Gamma^{(10)} + O(\varepsilon^2), \quad \Gamma^{(10)} = \Gamma_{20} + \varepsilon(\Gamma_{21} + \Gamma_{40}). \quad (2.10)$$

Здесь  $\Gamma_{20}$ ,  $\Gamma_{40}$  и  $\Gamma_{21}$  — это формы  $K_{20}$ ,  $K_{40}$  и  $K_{21}$  соответственно, в которых  $x_j$  и  $X_j$  заменены на  $y_j$  и  $Y_j$ . Слагаемое  $O(\varepsilon^2)$   $2\pi$ -периодично по  $t$ .

При необходимости исследования некоторой выделенной части рассматриваемой окрестности резонансной точки, ширины порядка  $\varepsilon^2$ , строится система второго приближения. Для этого полагаем в (2.9)

$$x_j = \varepsilon y_j, \quad X_j = \varepsilon Y_j \quad (j = 1, 2)$$

и получаем гамильтониан

$$\Gamma^{(2)} = \Gamma^{(20)} + O(\varepsilon^3), \quad \Gamma^{(20)} = \Gamma_{20} + \varepsilon \tilde{\Gamma}_{21} + \varepsilon^2(\tilde{\Gamma}_{22} + \Gamma_{40}). \quad (2.11)$$

Здесь  $\tilde{\Gamma}_{2l}$  — это форма  $K_{2l}$ , вычисленная для указанной окрестности, с последующей заменой  $x_j$ ,  $X_j$  на  $y_j$ ,  $Y_j$

Если для исследования требуется дальнейшее уточнение, рассматривается система третьего приближения по  $\varepsilon$ . Полагаем в (2.9)

$$x_j = \varepsilon^{3/2} y_j, \quad X_j = \varepsilon^{3/2} Y_j \quad (j = 1, 2)$$

и переписываем гамильтониан в виде

$$\Gamma^{(3)} = \Gamma^{(30)} + O(\varepsilon^4), \quad \Gamma^{(30)} = \Gamma_{20} + \varepsilon \tilde{\Gamma}_{21} + \varepsilon^2 \tilde{\Gamma}_{22} + \varepsilon^3(\tilde{\Gamma}_{23} + \Gamma_{40}). \quad (2.12)$$

Слагаемые  $O(\varepsilon^3)$  и  $O(\varepsilon^4)$  в (2.11) и (2.12)  $2\pi$ -периодичны по  $t$ .

Подобным же образом, при необходимости, составляются системы последующих приближений.

Главные (автономные) части  $\Gamma^{(10)}$ ,  $\Gamma^{(20)}$ ,  $\Gamma^{(30)}$ , ... гамильтонианов  $\Gamma^{(1)}$ ,  $\Gamma^{(2)}$ ,  $\Gamma^{(3)}$ , ... будем называть модельными гамильтонианами, а соответствующие им системы — модельными системами первого, второго, третьего, ... приближений.

В §§ 3–5 будут изучаться модельные системы (различных приближений) для исследуемых в работе случаев двух нулевых частот.

### §3. Случай $r = 3$

В случае  $r = 3$  при помощи соотношений (1.1) и (2.6) преобразуем квадратичную часть  $\tilde{H}_{21}$  из (2.5), сначала уничтожив в ней время, а затем в полученной автономной форме уменьшая число групп слагаемых (квадратичных комбинаций переменных системы) с десяти до двух. Имеем в итоге форму вида

$$K_{21} = (c_{10} - c_1)X_1X_2 + c_4X_2^2. \quad (3.1)$$

Такую же структуру имеют и другие части преобразованной формы  $K_2$ :

$$K_{2k} = [(b_{10} - b_1)\mu_k + d_k^{(1)}]X_1X_2 + (b_4\mu_k + d_k^{(2)})X_2^2 \quad (k = 2, 3, 4, \dots).$$

В (3.1) и далее в аналогичных формулах введены обозначения

$$c_j = a_j\nu_1 + b_j\mu_1, \quad (3.2)$$

где коэффициенты  $a_j$  и  $b_j$  определены в (2.6). Величины  $d_k^{(n)}$  — некоторые многочлены степени  $k$  по  $\nu_1$  и  $\mu_1$  и степеней  $k - l$  по  $\mu_l$  ( $2 \leq l \leq k - 1$ ).

#### 3.1. Система первого приближения

Рассмотрим  $\varepsilon$ -окрестность (2.4) резонансной точки и, используя формулы (1.1), (3.1) и (2.1), составим модельный гамильтониан  $\Gamma^{(10)}$  из (2.10).

Характеристическое уравнение линейной системы с гамильтонианом  $\Gamma_{20} + \varepsilon\Gamma_{21}$  имеет вид

$$\lambda^4 + a\lambda^2 + b = 0. \quad (3.3)$$

Если выполнены условия

$$a > 0, \quad b > 0, \quad d = a^2 - 4b > 0, \quad (3.4)$$

то корни этого уравнения чисто мнимые, и тривиальное равновесие линейной системы устойчиво. При изменении на противоположный знака хотя бы одного из неравенств (3.4) уравнение (3.3) имеет корни с положительными вещественными частями, и это равновесие неустойчиво, как в линейной, так и в нелинейной модельной системе.

Для значений параметров, соответствующих равенствам  $b = 0$  и/или  $d = 0$  требуется рассмотрение модельной системы следующего приближения по  $\varepsilon$ , так как характер устойчивости тривиального равновесия и другие свойства системы могут измениться.

Для изучаемой линейной системы с гамильтонианом  $\Gamma_{20} + \varepsilon\Gamma_{21}$  имеем

$$a = -2\varepsilon(c_{10} - c_1) + O(\varepsilon^2), \quad b = -2\varepsilon c_4 + O(\varepsilon^2), \quad d = 8\varepsilon c_4 + O(\varepsilon^2).$$

Отсюда следует, что если  $c_4 \neq 0$ , то при достаточно малых  $\varepsilon$  условия (3.4) несовместны, и тривиальное равновесие модельной системы неустойчиво.

Найдем другие положения равновесия этой системы. Приравняем к нулю частные производные гамильтониана  $\Gamma^{(10)}$  по координатам и импульсам. Получим алгебраическую систему уравнений для нахождения равновесных значений  $y_j, Y_j$  ( $j = 1, 2$ ):

$$\begin{aligned} y_2 = 0, \quad y_1 - \varepsilon\gamma_3 Y_2^3 &= 0, \\ Y_1 + \varepsilon[(c_{10} - c_1) + \gamma_2 Y_2^3 + 2\gamma_4 Y_1 Y_2 + 3\gamma_5 Y_1^2] Y_2 &= 0, \\ (c_{10} - c_1) Y_1 + 2c_4 Y_2 + 4\gamma_1 Y_2^3 + 3\gamma_2 Y_1 Y_2^2 + 2\gamma_4 Y_1^2 Y_2 + \gamma_5 Y_1^3 &= 0. \end{aligned}$$

Ненулевые решения системы существуют при условии  $c_4\gamma_1 < 0$  и, с точностью до слагаемых порядка  $\varepsilon^2$ , имеют вид

$$\begin{aligned} y_2 &= 0, & Y_2 &= Y_{20} + O(\varepsilon), & Y_{20}^2 &= -\frac{c_4}{2\gamma_1}, \\ y_1 &= \varepsilon\gamma_3 Y_{20}, & Y_1 &= -\varepsilon(c_{10} - c_1 + \gamma_2 Y_{20}^2)Y_{20}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Зададим возмущения переменных  $y_j, Y_j$  ( $j = 1, 2$ ) относительно их равновесных значений и рассмотрим линеаризованные уравнения возмущенного движения. Для обоих равновесий (3.5) (отличающихся знаками величины  $Y_{20}$ ) коэффициенты и дискриминант соответствующих характеристических уравнений таковы:

$$a = \frac{3c_4\gamma_2 - 2(c_{10} - c_1)\gamma_1}{\gamma_1}\varepsilon + O(\varepsilon^2), \quad b = 4\varepsilon c_4 + O(\varepsilon^2), \quad d = -16\varepsilon c_4 + O(\varepsilon^2).$$

Таким образом, при достаточно малых  $\varepsilon$  равновесия (3.5) неустойчивы в области существования, за исключением, может быть, случая  $c_4 = 0$ .

Полагая в (2.4)  $\mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \dots = 0$ , запишем условие  $c_4 = a_4\nu_1 + b_4\mu_1 = 0$  в виде

$$a_4(\alpha - \alpha_*) + b_4(\beta - \beta_*) = 0. \quad (3.6)$$

Соотношение (3.6) определяет в плоскости параметров  $\alpha, \beta$  прямую, в малой окрестности которой свойства движений системы меняются.

### 3.2. Система второго приближения

Рассмотрим окрестность этой прямой, полагая  $\mu_1 = \mu_{10}(\nu_1) = -(a_4/b_4)\nu_1$  и  $\mu_2 \neq 0$ . В этой выделенной окрестности (ширины порядка  $\varepsilon^2$ ) исследуем модельную систему второго приближения. Нормализованные квадратичные части  $\tilde{\Gamma}_{21}$  и  $\tilde{\Gamma}_{22}$  модельного гамильтониана  $\Gamma^{(20)}$  имеют вид

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{21} &= \kappa_1\nu_1 Y_1 Y_2, & \tilde{\Gamma}_{22} &= s_1 Y_1 Y_2 + s_2 Y_2^2, \\ \kappa_1 &= a_{10} - a_1 - a_4(b_{10} - b_1)/b_4, \\ s_1 &= (b_{10} - b_1)\mu_2 + \alpha_2\nu_1^2 + \alpha_1\nu_1 + \alpha_0, & s_2 &= b_4\mu_2 + \beta_2\nu_1^2 + \beta_1\nu_1 + \beta_0, \end{aligned} \quad (3.7)$$

где  $\alpha_k$  и  $\beta_k$  — некоторые константы.

Коэффициенты и дискриминант характеристического уравнения линейной системы с гамильтонианом  $\Gamma_{20} + \varepsilon\tilde{\Gamma}_{21} + \varepsilon^2\tilde{\Gamma}_{22}$  вычисляются по формулам

$$a = -2\varepsilon\kappa_1\nu_1 + O(\varepsilon^2), \quad b = \varepsilon^2(\kappa_1^2\nu_1^2 - 2s_2) + O(\varepsilon^3), \quad d = 8\varepsilon^2 s_2 + O(\varepsilon^3).$$

Если  $\kappa_1 \neq 0$ , то в этом приближении по  $\varepsilon$  появляется область устойчивости тривиального равновесия, задаваемая условиями

$$\kappa_1\nu_1 < 0, \quad 0 < s_2 < \kappa_1^2\nu_1^2/2.$$

Второе из этих неравенств, с учетом выражения для  $s_2$ , задает интервал изменения параметра  $\mu_2$ :

$$\mu_{21}(\nu_1) < \mu_2 < \mu_{22}(\nu_1).$$

Здесь в случае  $b_4 > 0$  введены обозначения

$$\mu_{21}(\nu_1) = -\frac{1}{b_4}(\beta_2\nu_1^2 + \beta_1\nu_1 + \beta_0), \quad \mu_{22}(\nu_1) = \frac{1}{b_4} \left[ \left( \frac{1}{2}\kappa_1^2 - \beta_2 \right) \nu_1^2 - \beta_1\nu_1 - \beta_0 \right],$$

а при  $b_4 < 0$  выражения для  $\mu_{21}(\nu_1)$  и  $\mu_{22}(\nu_1)$  меняются местами.

Соответствующая область устойчивости в трехмерном пространстве параметров заключена между двумя поверхностями, задаваемыми параметрически в виде

$$\alpha = \alpha_* + \varepsilon\nu_1, \quad \beta = \beta_* + \varepsilon\mu_{10}(\nu_1) + \varepsilon^2\mu_{2j}(\nu_1) \quad (j = 1, 2).$$

Точки пересечения этих поверхностей составляют кривую, определяемую равенствами

$$\alpha = \alpha_* + O(\varepsilon^2), \quad \beta = \beta_* - \frac{\beta_0}{b_4}\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3).$$

Вне указанной выше области тривиальное равновесие модельной системы с гамильтонианом  $\Gamma^{(20)}$  неустойчиво.

При условии  $\gamma_1(\kappa_1^2\nu_1^2 - 2s_2) > 0$  исследуемая модельная система имеет еще пару равновесий, описываемую (с точностью до слагаемых порядка  $\varepsilon^3$ ) соотношениями

$$\begin{aligned} y_2 = 0, \quad Y_2 = Y_{20} + O(\varepsilon), \quad Y_{20}^2 = \frac{\kappa_1^2\nu_1^2 - 2s_2}{4\gamma_1}, \quad y_1 = \varepsilon^2\gamma_3Y_{20}^3, \\ Y_1 = -\varepsilon[\kappa_1\nu_1 + \varepsilon(s_1 + \gamma_2Y_{20}^2)]Y_{20}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Для этой пары коэффициенты соответствующего характеристического уравнения и его дискриминант таковы:

$$a = -2\kappa_1\nu_1\varepsilon + O(\varepsilon^2), \quad b = 2(2s_2 - \kappa_1^2\nu_1^2)\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3), \quad d = 4(-4s_2 + 3\kappa_1^2\nu_1^2)\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3).$$

Отсюда находим, что если  $\kappa_1 \neq 0$ , то при  $\gamma_1 > 0$  эти равновесия всегда неустойчивы в области существования. При  $\gamma_1 < 0$  они устойчивы в линейном приближении, если выполнены условия

$$\kappa_1\nu_1 < 0, \quad \frac{1}{2}\kappa_1^2\nu_1^2 < s_2 < \frac{3}{4}\kappa_1^2\nu_1^2,$$

и неустойчивы, если меняется на противоположный знак первого из этих неравенств и  $s_2 > (1/2)\kappa_1^2\nu_1^2$ , либо если знак первого неравенства сохраняется, но  $s_2 > (3/4)\kappa_1^2\nu_1^2$ .

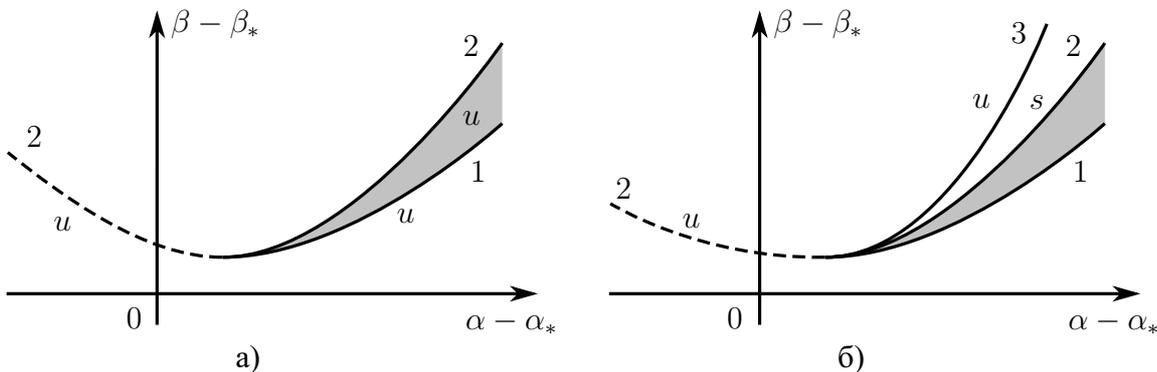


Рис. 1. Картина устойчивости при  $r = 3$

На рис. 1, а и 1, б показано сечение окрестности резонансной точки плоскостью  $\varepsilon = \text{const}$  в случаях  $\gamma_1 > 0$  и  $\gamma_1 < 0$  соответственно. На этих и последующих аналогичных рисунках область устойчивости (в линейном приближении) тривиального равновесия системы закрашена. Представлен один из вариантов расположения указанной области в рассматриваемом сечении, определяемый знаками коэффициентов гамильтониана  $\Gamma^{(20)}$ ; другие

варианты качественно не отличаются от данного. Символами 1, 2 и 3 помечены кривые, отвечающие соотношениям  $s_2 = 0$ ,  $s_2 = (1/2)\kappa_1^2\nu_1^2$  и  $s_2 = (3/4)\kappa_1^2\nu_1^2$ . Пунктирные части кривых 2 на рис. 1 соответствуют границе области существования нетривиальных равновесий модельной системы в той части окрестности резонансной точки, где тривиальное равновесие всегда неустойчиво. Области устойчивости в линейном приближении и неустойчивости нетривиальных равновесий системы помечены символами  $s$  и  $u$  соответственно; в непомеченных областях эти равновесия не существуют.

Если параметры системы таковы, что выполнено условие  $\kappa_1 = 0$ , то область устойчивости тривиального равновесия в этом приближении не определяется, а нетривиальные равновесия (3.8) неустойчивы. В этом случае условие  $s_2 = 0$  задает бифуркационное значение  $\mu_2$ , для которого исследуется система третьего приближения по  $\varepsilon$ . При необходимости могут быть рассмотрены системы следующих приближений.

### 3.3. $\varepsilon^2$ -окрестность резонансной точки

В данном разделе уменьшим масштаб исследуемой окрестности резонансной точки пространства параметров, предполагая выполненными соотношения (2.8).

Осуществим в этой окрестности нормализацию неавтономной квадратичной части гамильтониана возмущенного движения в слагаемых до четвертой степени включительно по  $\varepsilon$ . Результат запишется в виде (2.7), где  $K_{21} = 0$ , а

$$\begin{aligned} K_{22} &= (a_4\nu_2 + b_4\mu_2 + \alpha_1) X_1^2 + [(a_{10} - a_1)\nu_2 + (b_{10} - b_1)\mu_2 + \alpha_2] X_1 X_2, \\ K_{23} &= (b_4\mu_3 + \beta_1) X_2^2 + [(b_{10} - b_1)\mu_3 + \beta_2] X_1 X_2, \\ K_{24} &= (b_4\mu_4 + g_2^{(1)}) X_2^2 + [(b_{10} - b_1)\mu_4 + g_2^{(2)}] X_1 X_2. \end{aligned}$$

Здесь  $\alpha_j$  и  $\beta_j$  ( $j = 1, 2$ ) — некоторые константы, а  $g_2^{(j)}$  — многочлены второй степени относительно  $\mu_2$  и  $\nu_2$  с постоянными коэффициентами.

Используя приведенные выражения, составим модельные гамильтонианы для систем второго, третьего и четвертого приближений. Переход к системам третьего и четвертого приближений осуществляется для бифуркационных значений

$$\mu_2 = \mu_{20}(\nu_2) = -\frac{1}{b_4} (a_4\nu_2 + \alpha_1) \quad \text{и} \quad \mu_3 = \mu_{30} = -\frac{\beta_1}{b_4}$$

соответственно.

Тривиальное равновесие в модельных системах второго и третьего приближений неустойчиво. Для системы четвертого приближения имеется область устойчивости этого равновесия, задаваемая неравенствами

$$\kappa_1\nu_2 + \kappa_0 < 0, \quad \min(\mu_{40}, \mu'_{40}) < \mu_4 < \max(\mu_{40}, \mu'_{40}),$$

причем величина  $\kappa_1$  определена в (3.7),  $\kappa_0 = \alpha_2 - \alpha_1(b_{10} - b_1)/b_4$ , а

$$\mu'_{40} = -\frac{g_2^{(1)}(\nu_1, \mu_{20}(\nu_2))}{b_4} = -\frac{\delta_2\nu_2^2 + \delta_1\nu_2 + \delta_0}{b_4} \quad (\delta_j = \text{const}), \quad \mu_{40} = \mu'_{40} + \frac{(\kappa_1\nu_1 + \kappa_0)^2}{2b_4}.$$

Таким образом, тривиальное равновесие системы неустойчиво в рассматриваемой окрестности резонансной точки, за исключением узкой области, уравнения границ которой становятся различимыми только в слагаемых четвертой степени по  $\varepsilon$ . Соответствующая область устойчивости заключена между двумя граничными поверхностями в трехмерном пространстве параметров, задаваемых уравнениями вида (2.8), в которых следует положить  $\mu_2 = \mu_{20}$ ,

$\mu_3 = \mu_{30}$ ,  $\mu_4 = \mu_{40}$  и  $\mu_4 = \mu'_{40}$ . Общие точки граничных поверхностей составляют кривую, задаваемую соотношениями

$$\alpha = \alpha_* + \varepsilon^2 \nu_{2*} + O(\varepsilon^3), \quad \beta = \beta_* + \varepsilon^2 \mu_{20}(\nu_{2*}) + O(\varepsilon^3), \quad \nu_{2*} = -\frac{\kappa_0}{\kappa_1}.$$

Рассмотрим вопрос о существовании и устойчивости нетривиальных равновесий исследуемых модельных систем. В модельной системе  $k$ -го приближения ( $k = 2, 3, 4$ ) при выполнении условия  $b_4 \gamma_1 (\mu_k - \mu_{k0}) < 0$  существует пара нетривиальных равновесий, для которых

$$y_1 = \varepsilon^k \gamma_3 Y_{20}^3, \quad y_2 = 0, \quad Y_2 = Y_{20} + O(\varepsilon), \quad Y_{20}^2 = -\frac{b_4(\mu_k - \mu_{k0})}{2\gamma_1},$$

а равновесные значения  $Y_1$  таковы:

$$Y_1 = -\varepsilon^2 [(a_{10} - a_1)\nu_2 + (b_{10} - b_1)\mu_2 + \alpha_2 + \gamma_2 Y_{20}^2] Y_{20} \quad (k = 2),$$

$$Y_1 = -\varepsilon^2 [(a_{10} - a_1)\nu_2 + (b_{10} - b_1)\mu_{20} + \alpha_2] Y_{20} + O(\varepsilon^3) \quad (k = 3, 4).$$

Выписанные положения равновесия в модельных системах второго и третьего приближений неустойчивы в областях существования, так как для соответствующих характеристических уравнений (3.3) нарушаются условия (3.4) (величины  $b$  и  $d$  имеют разные знаки).

Для системы четвертого приближения в случае  $\gamma_1 > 0$  нетривиальные равновесия также неустойчивы в области существования. При  $\gamma_1 < 0$  для этих равновесий имеется область устойчивости в линейном приближении, определяемая неравенствами

$$\kappa_1 \nu_2 + \kappa_0 < 0, \quad \frac{1}{2} (\kappa_1 \nu_2 + \kappa_0)^2 < b_4 \mu_4 + \delta_2 \nu_2^2 + \delta_1 \nu_2 + \delta_0 < \frac{3}{4} (\kappa_1 \nu_2 + \kappa_0)^2$$

Таким образом, качественная картина устойчивости тривиального и нетривиальных равновесий модельной системы четвертого приближения не отличается от представленной на рис. 1, а и 1, б для случаев  $\gamma_1 > 0$  и  $\gamma_1 < 0$ . При этом размер исследуемой окрестности резонансной точки и ширина области устойчивости другие (порядков  $\varepsilon^2$  и  $\varepsilon^4$  соответственно).

#### § 4. Случай $r = 2$

В случае  $r = 2$  в качестве «опорного» используется квадратичный гамильтониан (1.2). Линейная по  $\varepsilon$  квадратичная форма  $K_{21}$  может быть приведена к виду

$$K_{21} = c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2 + c_5 x_1 x_2 + \frac{1}{2} (c_7 \mp c_8) (x_1 X_2 \mp X_1 x_2). \quad (4.1)$$

Здесь и ниже, в разд. 4.1 и 4.2, верхний и нижний знаки отвечают случаям  $\delta = 1$  и  $\delta = -1$  в (1.2).

Соответствующая модельная система первого приближения описывается гамильтонианом  $\Gamma^{(10)}$  из (2.10), определяемым при помощи формул (1.2), (4.1) и (2.2).

##### 4.1. Об устойчивости тривиального равновесия системы

Коэффициенты и дискриминант характеристического уравнения линейной системы с гамильтонианом  $\Gamma_{20} + \varepsilon \Gamma_{21}$  таковы:

$$a = \varepsilon a_0 + O(\varepsilon^2), \quad b = \varepsilon^2 b_0 + O(\varepsilon^3), \quad a_0 = 2(c_1 \pm c_2), \quad b_0 = \pm(4c_1 c_2 - c_5^2),$$

$$d = \varepsilon^2 d_0 + O(\varepsilon^3), \quad d_0 = 4[(c_1 \mp c_2)^2 \pm c_5^2].$$

**4.1.1. Случай  $\delta = 1$ .** Если величины  $c_1 - c_2$  и  $c_5$  одновременно не обращаются в нуль, то при достаточно малых  $\varepsilon$  условия устойчивости тривиального равновесия линейной системы имеют вид

$$c_1 + c_2 > 0, \quad 4c_1c_2 - c_5^2 > 0. \quad (4.2)$$

Второе условие (4.2) с учетом (3.2) переписывается в виде неравенства

$$(4b_1b_2 - b_5^2)\mu_1^2 + 2(2a_2b_1 + 2a_1b_2 - a_5b_5)\mu_1\nu_1 + (4a_1a_2 - a_5^2)\nu_1^2 > 0, \quad (4.3)$$

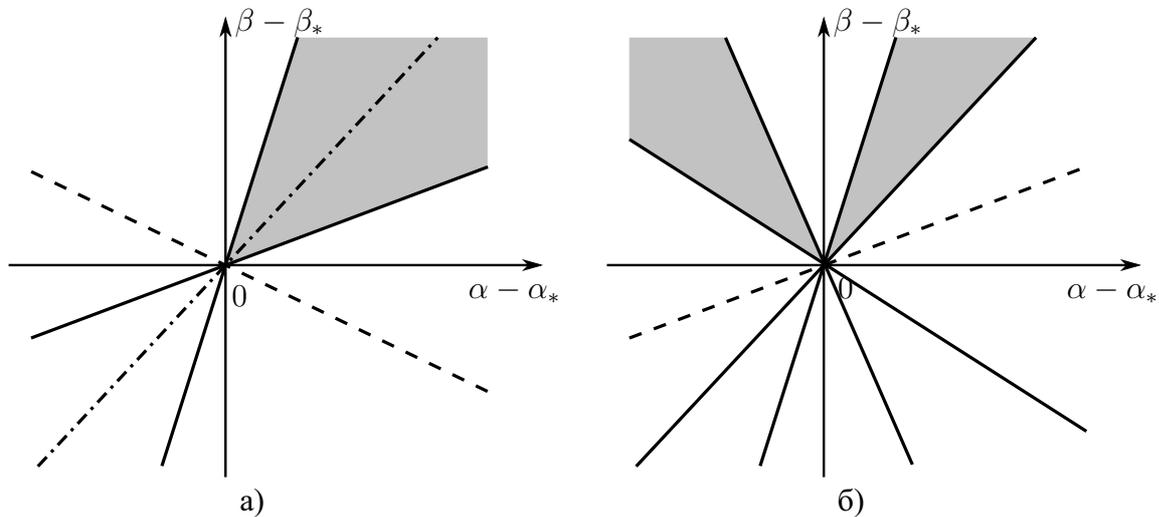
левая часть которого — квадратичная форма величин  $\mu_1$  и  $\nu_1$  с дискриминантом

$$\Delta = (b_2a_1 - b_1a_2)^2 + (b_5a_2 - b_2a_5)(a_1b_5 - b_1a_5). \quad (4.4)$$

Несложный анализ выражения для  $\Delta$  как квадратного трехчлена относительно  $a_1$  или  $b_1$ , показывает, что при выполнении условий  $4a_1a_2 - a_5^2 > 0$  и/или  $4b_1b_2 - b_5^2 > 0$  величина  $\Delta$  всегда положительна, и величина  $b_0$  разлагается на два линейных по  $\nu_1$  и  $\mu_1$  множителя с вещественными коэффициентами:

$$b_0 = (m_1\nu_1 + n_1\mu_1)(m_2\nu_1 + n_2\mu_1),$$

Равенства  $m_1\nu_1 + n_1\mu_1 = 0$  и  $m_2\nu_1 + n_2\mu_1 = 0$  отвечают двум прямым в плоскости параметров  $\alpha, \beta$ , разделяющим окрестность резонансной точки на четыре области с чередующимися знаками коэффициента  $b_0$ . Эти прямые изображены сплошными линиями на рис. 2, а в плоскости величин  $\alpha - \alpha_*, \beta - \beta_*$



**Рис. 2.** Области устойчивости и неустойчивости тривиального равновесия при  $r = 2$

Граница  $(a_1 + a_2)\nu_1 + (b_1 + b_2)\mu_1 = 0$  области выполнения первого неравенства (4.2) соответствует прямой (пунктирная линия на рис. 2, а), проходящей через области  $b_0 < 0$ . Оба условия (4.2) удовлетворяются только в одной из областей положительных  $b_0$  (см. рис. 2, а).

Если выполнены условия  $4a_1a_2 - a_5^2 < 0$  и  $4b_1b_2 - b_5^2 < 0$ , то величина  $\Delta$  может принимать значения любого знака. Случай  $\Delta > 0$  не отличается от предыдущего, а при  $\Delta < 0$  неравенство (4.3) нарушается, и тривиальное равновесие системы неустойчиво.

Пусть теперь условия  $c_1 - c_2 = 0$ ,  $c_5 = 0$  выполняются одновременно. Если  $a_1 = a_2$  и  $b_1 = b_2$ , то общая картина устойчивости такая же, как на рис. 2, а; при этом отдельного

рассмотрения требует прямая, соответствующая условию  $c_5 = 0$  (штрих-пунктирная прямая на рис. 2, а). Для точек части прямой, лежащей в незакрашенной области, где  $a_0 < 0$ , тривиальное равновесие неустойчиво. Для точек другой части прямой имеем  $a_0 > 0$ ,  $b_9 > 0$  и  $d_0 = 0$ . При этом легко проверить, что гамильтониан  $\Gamma_{20} + \varepsilon\Gamma_{21}$  — положительно определенная квадратичная форма переменных  $y_j, Y_j$  ( $j = 1, 2$ ), и значит, тривиальное равновесие системы устойчиво на основании теоремы Ляпунова об устойчивости.

Аналогичные выводы делаются в случае  $a_5 = b_5 = 0$  при рассмотрении прямой отвечающей условию  $c_1 = c_2$ , а также в случае выполнения соотношения  $(a_1 - a_2)/a_5 = (b_1 - b_2)/b_5$ , когда две упомянутые прямые совпадают.

Если одновременно выполнены условия  $a_1 = a_2$ ,  $b_1 = b_2$  и  $a_5 = b_5 = 0$ , то условие устойчивости тривиального равновесия имеет вид  $c_1 > 0$  и удовлетворяется в одной из полуплоскостей, на которые плоскость параметров разделяется прямой, соответствующей равенству  $c_1 = 0$ .

**4.1.2. Случай  $\delta = -1$ .** В случае  $\delta = -1$  тривиальное равновесие линейной системы с гамильтонианом  $\Gamma_{20} + \varepsilon\Gamma_{21}$  устойчиво при выполнении неравенств

$$c_1 > c_2, \quad 4c_1c_2 < c_5^2 < (c_1 + c_2)^2. \quad (4.5)$$

При  $c_5 = 0$  условия устойчивости имеют вид  $c_1 > 0$ ,  $c_2 < 0$ .

При  $c_5 \neq 0$  проводится анализ, схожий с анализом из разд. 4.1.1. Если величина  $\Delta$  из (4.4) положительна, то второе неравенство в (4.5) удовлетворяется в четырех областях из окрестности резонансной точки, с границами, соответствующими знакам равенства в этом соотношении. С учетом первого неравенства (4.5) остаются две области (см. рис. 2, б, где сплошные и пунктирная прямые имеют тот же смысл, что и на рис. 2, а).

Если  $\Delta < 0$ , то левая часть двойного неравенства в (4.5) всегда выполнена, а его правая часть реализуется в точках двух областях плоскости параметров. Оба неравенства (4.5) удовлетворяются в этом случае только в одной области; и картину устойчивости представляет рис. 2, а.

## 4.2. Нетривиальные положения равновесия

Нетривиальные положения равновесия изучаемой модельной системы описываются соотношениями

$$y_1 = y_{10} + O(\varepsilon), \quad y_2 = y_{20} + O(\varepsilon), \quad Y_1 = \varepsilon Y_{10}, \quad Y_2 = \varepsilon Y_{20},$$

$$Y_{10} = \pm \left[ \frac{c_7 \mp c_8}{2} + g_2(y_{10}, y_{20}) \right] y_{20}, \quad Y_{20} = -\frac{y_{10}}{y_{20}} Y_{10}, \quad (4.6)$$

в которых равновесные значения  $y_{10}$  и  $y_{20}$  удовлетворяют уравнениям

$$2c_1y_{10} + c_3y_{20} + g'_{4y_1}(y_{10}, y_{20}) = 0, \quad 2c_2y_{20} + c_3y_{10} + g'_{4y_2}(y_{10}, y_{20}) = 0. \quad (4.7)$$

Здесь в функциях  $g_i(x_1, x_2)$  сделана замена  $x_j = y_j$  ( $j = 1, 2$ ).

Умножим первое из этих уравнений на  $2c_2y_{20} + c_5y_{10}$ , а второе на  $2c_1y_{10} + c_5y_{20}$ , и результаты вычтем почленно один из другого. Имеем уравнение–следствие, содержащее однородную форму четвертой степени относительно  $y_{10}$  и  $y_{20}$ . Перепишем его в виде уравнения четвертой степени для величины  $k = y_{10}/y_{20}$  (или величины  $k' = y_{20}/y_{10}$ , если коэффициент при  $y_{10}^4$  равен нулю). Число вещественных корней этого уравнения варьируется от нуля до четырех.

Пусть  $k = k_0$  — один из корней. Тогда, используя, например, первое уравнение из (4.7), получаем два решения

$$y_{10} = k_0 y_{20}, \quad y_{20}^2 = -\frac{2c_1 k_0 + c_3}{g'_{4y_1}(k_0, 1)}$$

системы (4.7), при условии, что правая часть второго из этих соотношений положительна. Далее для каждого решения  $y_{10}, y_{20}$  системы (4.7) строятся соответствующие равновесные решения (4.6) модельной системы.

Таким образом, рассматриваемая модельная система может иметь четное число (до восьми) нетривиальных положений равновесия.

Заметим, что изучаемое уравнение–следствие, с учетом равенства (3.2), может быть переписано в виде

$$f_1(k)\nu_1 + f_2(k)\mu_1 = 0, \quad (4.8)$$

где  $f_1(k)$  и  $f_2(k)$  — многочлены четвертой степени по  $k$ , причем

$$f_1(k) = (2a_2 + a_5k)g'_{4y_1}(k, 1) - (2a_1k + a_5)g'_{4y_2}(k, 1),$$

а  $f_2(k)$  отличается от  $f_1(k)$  заменой  $a_j$  на  $b_j$  ( $j = 1, 2, 5$ ).

Соотношение  $\mu_1 = \lambda\nu_1$  при заданном вещественном  $\lambda$  соответствует прямой в плоскости параметров  $\alpha, \beta$ , на которой число корней уравнения (4.8) фиксировано. Изменение этого числа происходит при переходе через прямые, которым отвечают кратные корни уравнения (4.8). Данными прямыми окрестность резонансной точки разбивается на ряд областей с различным числом положений равновесия модельной системы.

Коэффициенты и дискриминант соответствующего характеристического уравнения возмущенного движения таковы:

$$a = 2(\hat{c}_1 + \hat{c}_2)\varepsilon + O(\varepsilon^2), \quad b = (4\hat{c}_1\hat{c}_2 - \hat{c}_5^2)\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3), \quad d = 4((\hat{c}_2 - \hat{c}_1)^2 + \hat{c}_5^2)\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3),$$

$$\hat{c}_1 = c_1 + \frac{1}{2}g''_{4y_1y_1}(k_0, 1)y_{20}^2, \quad \hat{c}_2 = c_2 + \frac{1}{2}g''_{4y_2y_2}(k_0, 1)y_{20}^2, \quad \hat{c}_5 = c_5 + g''_{4y_1y_2}(k_0, 1)y_{20}^2.$$

Если  $\hat{c}_1 \neq \hat{c}_2$  и  $\hat{c}_5 \neq 0$ , то при достаточно малых  $\varepsilon$  условие устойчивости (в линейном приближении) исследуемого равновесия определяется неравенствами

$$\hat{c}_1 > 0, \quad 4\hat{c}_1\hat{c}_2 - \hat{c}_5^2 > 0.$$

Если выполнены одновременно условия  $\hat{c}_1 = \hat{c}_2, \hat{c}_5 = 0$ , то в случае  $\hat{c}_1 > 0$  квадратичная часть гамильтониана возмущенного движения — положительно определенная квадратичная форма, и исследуемое равновесие устойчиво, а при  $\hat{c}_1 < 0$  имеем  $a < 0$ , и это равновесие неустойчиво.

Более детальный анализ числа и устойчивости равновесных точек модельной системы весьма сложен из-за большого числа параметров. При некотором ограничении на параметры исследование может быть проведено в полном объеме. В следующем разделе рассматривается один из таких случаев.

Подводя итоги исследования случая  $r = 2$ , укажем, что в общем случае вопросы об устойчивости тривиального равновесия, а также числе и устойчивости нетривиальных равновесий решаются рассмотрением модельной системы первого приближения. Необходимость перехода к модельной системе второго приближения возникает при выполнении ряда специальных соотношений между коэффициентами нормальной формы системы первого приближения (см. конец разд. 4.3).

### 4.3. Частный случай

Пусть  $\delta = 1, c_5 = 0$  и  $g_4 = \gamma_1x_1^4 + \gamma_2x_1^2x_2^2 + \gamma_3x_2^4$ . Тогда тривиальное равновесие системы устойчиво при выполнении условий  $c_1 > 0, c_2 > 0$ .

Рассмотрим нетривиальные равновесия системы. При выполнении условий  $c_2\gamma_3 < 0$  и  $c_1\gamma_1 < 0$  решениями системы (4.7) являются соответственно пары точек

$$y_{10} = 0, \quad y_{20}^2 = -\frac{c_2}{2\gamma_3} \quad \text{и} \quad y_{20} = 0, \quad y_{10}^2 = -\frac{c_1}{2\gamma_1}. \quad (4.9)$$

Если, кроме того, знаки трех выражений

$$4\gamma_1\gamma_3 - \gamma_2^2, \quad u_1 = c_2\gamma_2 - 2\gamma_3c_1 \quad \text{и} \quad u_2 = \gamma_2c_1 - 2c_2\gamma_1$$

совпадают, то имеется еще четыре решения

$$y_{10} = \pm \sqrt{\frac{u_1}{4\gamma_1\gamma_3 - \gamma_2^2}}, \quad y_{20} = \pm \sqrt{\frac{u_2}{4\gamma_1\gamma_3 - \gamma_2^2}}. \quad (4.10)$$

Здесь знаки выбираются в любых сочетаниях.

Решения, отвечающие первой паре из (4.9), устойчивы в линейном приближении при выполнении условий

$$\gamma_3 > 0, \quad c_2 < 0, \quad u_1 < 0,$$

а решения, отвечающие второй паре, — при

$$\gamma_1 > 0, \quad c_1 < 0, \quad u_2 < 0.$$

В остальных случаях данные решения в областях своего существования неустойчивы.

Равновесные решения, соответствующие (4.10), в области существования либо одновременно устойчивы в линейном приближении (если  $4\gamma_1\gamma_3 - \gamma_2^2 > 0$ ), либо одновременно неустойчивы (если  $4\gamma_1\gamma_3 - \gamma_2^2 < 0$ ).

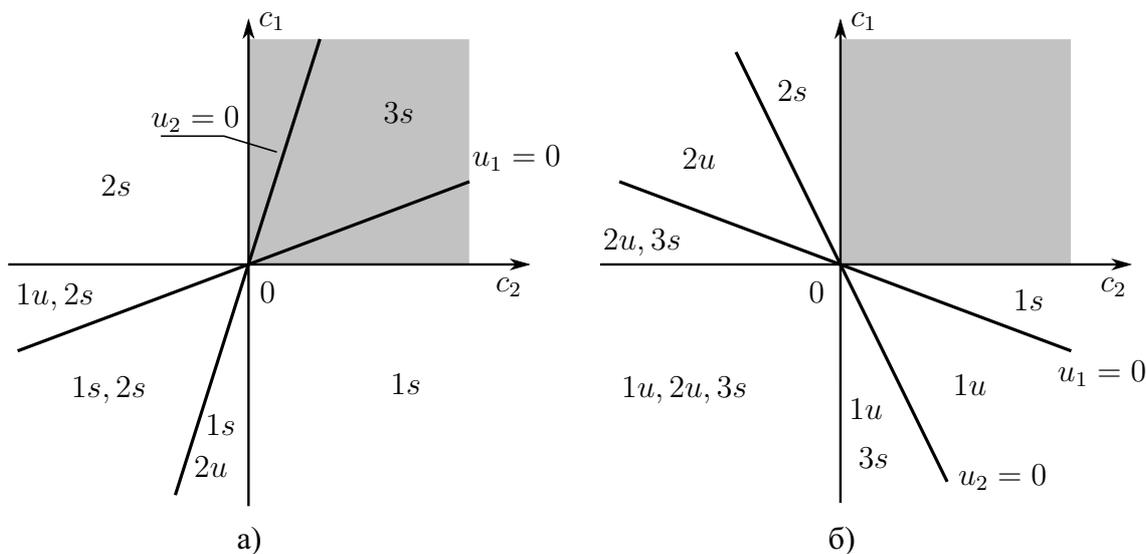


Рис. 3. Картина устойчивости при  $r = 2$ ; частный случай

На рис. 3, а и 3, б в плоскости величин  $c_1$  и  $c_2$  показаны два варианта взаимного расположения областей существования и устойчивости положений равновесия модельной системы, относящиеся к случаям  $\gamma_2 > 0$  (рис. 3, а) и  $\gamma_2 < 0$  (рис. 3, б); в обоих случаях принято, что  $\gamma_1 > 0, \gamma_3 > 0, 4\gamma_1\gamma_3 > \gamma_2^2$ . Границами областей являются прямые  $c_1 = 0, c_2 = 0, u_1 = 0$  и  $u_2 = 0$ . Как и ранее, область устойчивости тривиального равновесия системы закрашена. Номера 1, 2 и 3 соответствуют первой паре, второй паре точек из (4.9) и четверке точек из (4.10) (в тех областях, где они существуют); символы  $s$  или  $u$  указывают на устойчивость (в линейном приближении) или неустойчивость этих равновесий.

Другие варианты знаков величин  $\gamma_i$  и комбинации  $4\gamma_1\gamma_3 - \gamma_2^2$  могут быть рассмотрены аналогично.

В случае  $c_1 = c_2 = 0$  (что реализуется, например, для точек прямой из плоскости параметров, отвечающей условию  $c_1 = 0$ , при  $a_2 = b_2 = 0$ ) все перечисленные равновесия системы становятся тривиальными. В этом случае для значений параметров из малой окрестности указанной прямой исследуется система второго приближения. Имеем для нее

$$K_{21} = \frac{1}{2}(\hat{c}_7 - \hat{c}_8)(x_1 X_2 - X_1 x_2), \quad K_{22} = C_1 x_1^2 + C_2 x_2^2 + C_3 x_1 x_2 + \frac{1}{2} C_4 (x_1 X_2 - X_1 x_2),$$

где  $\hat{c}_7$  и  $\hat{c}_8$  — это величины  $c_7$  и  $c_8$ , в которые сделана подстановка  $\mu_1 = -(a_1/b_1)$ ,  $\nu_1$ , следующая из условия  $c_1 = 0$ , а

$$C_1 = b_1 \mu_2 + d_1(\nu_1), \quad C_2 = d_2(\nu_1), \quad C_3 = d_3(\nu_1), \quad C_4 = (b_7 - b_8) \mu_2 + d_4(\nu_1).$$

Здесь  $d_j(\nu_1) = \xi_j \nu_1^2 + \eta_j$  ( $j = 1, \dots, 4$ ), причем  $\xi_j$  и  $\eta_j$  — вещественные коэффициенты, не зависящие от  $\nu_1$  и  $\mu_2$ .

Пусть структура исходного гамильтониана такова, что  $\xi_3 = \eta_3 = 0$ . Тогда нетривиальные равновесия рассматриваемой модельной системы второго приближения разбиваются на две пары, для которых

$$y_1 = 0, \quad Y_2 = 0, \quad y_2 = y_{20} + O(\varepsilon), \quad Y_1 = \frac{\varepsilon}{2}(\hat{c}_7 - \hat{c}_8)y_{20} + O(\varepsilon^2), \quad y_{20}^2 = -\frac{C_2 - \hat{c}}{2\gamma_3}$$

и

$$y_2 = 0, \quad Y_1 = 0, \quad y_1 = y_{10} + O(\varepsilon), \quad Y_2 = -\frac{\varepsilon}{2}(\hat{c}_7 - \hat{c}_8)y_{10} + O(\varepsilon^2), \quad y_{10}^2 = -\frac{C_1 - \hat{c}}{2\gamma_1},$$

и четверку, для которой

$$\begin{aligned} y_1 &= y_{10} + O(\varepsilon), \quad y_2 = y_{20} + O(\varepsilon), \\ Y_1 &= \frac{\varepsilon}{2}(\hat{c}_7 - \hat{c}_8)y_{20} + O(\varepsilon^2), \quad Y_2 = -\frac{\varepsilon}{2}(\hat{c}_7 - \hat{c}_8)y_{10} + O(\varepsilon^2), \\ y_{10}^2 &= \frac{\gamma_2 C_2 - 2\gamma_3 C_1 + (2\gamma_3 - \gamma_2)\hat{c}}{4\gamma_1 \gamma_3 - \gamma_2^2}, \quad y_{20}^2 = \frac{\gamma_2 C_1 - 2\gamma_1 C_2 + (2\gamma_1 - \gamma_2)\hat{c}}{4\gamma_1 \gamma_3 - \gamma_2^2}. \end{aligned}$$

В приведенных формулах введено обозначение  $\hat{c} = (\hat{c}_7 - \hat{c}_8)^2/8$ .

Области существования пар равновесий задаются соответственно условиями  $\gamma_3(C_2 - \hat{c}) < 0$  и  $\gamma_1(C_1 - \hat{c}) < 0$ , четверка равновесий существует, если величины  $4\gamma_1 \gamma_3 - \gamma_2^2$ ,  $v_1 = \gamma_2 C_2 - 2\gamma_3 C_1 + (2\gamma_3 - \gamma_2)\hat{c}$  и  $v_2 = \gamma_2 C_1 - 2\gamma_1 C_2 + (2\gamma_1 - \gamma_2)\hat{c}$  одного знака.

Полученные нетривиальные равновесия аналогичны нетривиальным равновесиям модельной системы первого приближения. Однако большее числа параметров, имеющих в модельной системе второго приближения, делает более подробный анализ выписанных равновесий весьма сложным; в данной работе такой анализ не проводится.

## § 5. Случай $r = 1$

В случае  $r = 1$  при помощи «опорного» гамильтониана (1.3) можно несколько упростить квадратичную часть гамильтониана в слагаемых порядка  $\varepsilon$  и выше, уничтожив четыре группы слагаемых из десяти. Имеем

$$\begin{aligned} K_{21} &= c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2 + c_5 x_1 x_2 + c_3 X_1^2 + (c_6 x_1 + c_8 x_2) X_1, \\ K_{22} &= C_1 x_1^2 + C_2 x_2^2 + C_5 x_1 x_2 + C_3 X_1^2 + (C_6 x_1 + C_8 x_2) X_1, \dots, \end{aligned} \quad (5.1)$$

где введены обозначения  $C_i = b_i\mu_2 + d_2^{(i)}$ .

Составим характеристическое уравнение линейной системы с гамильтонианом  $K_{20} + \varepsilon K_{21} + \varepsilon^2 K_{22}$ . Его коэффициенты и дискриминант таковы:

$$\begin{aligned} a &= 2\varepsilon c_2 + \varepsilon^2(2C_2 - c_6^2 + 4c_1c_3) + O(\varepsilon^3), \\ b &= \varepsilon^3 b_0 + O(\varepsilon^4), \quad b_0 = 2(-c_5^2 c_3 + c_6 c_5 c_8 - c_6^2 c_2 + 4c_1 c_2 c_3 - c_1 c_8^2), \\ d &= 4\varepsilon^2 c_2^2 + 4\varepsilon^3(2C_2 c_2 + c_6^2 c_2 - 4c_1 c_2 c_3 + 2c_5^2 c_3 - 2c_6 c_5 c_8 + 2c_1 c_8^2) + O(\varepsilon^4). \end{aligned} \quad (5.2)$$

При достаточно малых  $\varepsilon$  условия устойчивости тривиального равновесия системы определяются неравенствами

$$c_2 > 0, \quad f = -c_5^2 c_3 + c_6 c_5 c_8 - c_6^2 c_2 + 4c_1 c_2 c_3 - c_1 c_8^2 > 0, \quad (5.3)$$

левые части которых — линейная и кубическая формы величин  $\mu_1$  и  $\nu_1$ .

С учетом (3.2), представим функцию  $f$  в виде

$$\begin{aligned} f &= u_0 \mu_1^3 + u_1 \mu_1^2 \nu_1 + u_2 \mu_1 \nu_1^2 + u_3 \nu_1^3, \\ u_0 &= -b_5^2 b_3 + b_6 b_5 b_8 - b_6^2 b_2 + 4b_1 b_2 b_3 - b_1 b_8^2, \quad u_1 = a_1 b_8^2 - a_2 b_6^2 - a_3 b_5^2 + \\ &+ (b_5 a_6 + a_5 b_6 - 2a_8 b_1) b_8 + (a_8 b_5 - 2b_2 a_6) b_6 - 2a_5 b_5 b_3 + 4b_3(a_2 b_1 + a_1 b_2) + 4b_1 b_2 a_3, \end{aligned}$$

Выражения для  $u_2$  и  $u_3$  получаются из выражений для соответственно  $u_1$  и  $u_0$  при замене  $a_j \leftrightarrow b_j$ .

Рассмотрим кубическое уравнение

$$u_0 \kappa^3 + u_1 \kappa^2 + u_2 \kappa + u_3$$

и его дискриминант

$$D = -4u_1^3 u_3 + u_1^2 u_2^2 - 4u_0 u_2^3 + 18u_0 u_1 u_2 u_3 - 27u_0^2 u_3^2.$$

При  $D > 0$  это уравнение имеет три вещественных корня  $\kappa = \kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ , а при  $D < 0$  — один вещественный корень  $\kappa = \kappa_0$ .

В первом случае три прямые  $\mu_1 = \kappa_j \mu_1$  ( $j = 1, 2, 3$ ) разбивают окрестность резонансной точки на шесть областей с чередующимися знаками функции  $f$  (и коэффициента  $b_0$ ). Оба условия (5.3) выполняются в одной из областей и части другой области; один из возможных вариантов представлен на рис. 4, а. Во втором случае условие  $f = 0$  дает одну граничную прямую  $\mu_1 = \kappa_0 \mu_1$ , и имеется только одна область устойчивости (рис. 4, б). На этих рисунках прямые, изображенные сплошными и пунктирными линиями, соответствуют условиям  $b_0 = 0$  и  $c_2 = 0$ .

На граничной прямой  $c_2 = 0$  получаем из (5.2):

$$b = 2(c_6 c_5 c_8 - c_1 c_8^2 - c_5^2 c_3) \varepsilon^3 + O(\varepsilon^4), \quad d = -8(c_6 c_5 c_8 - c_1 c_8^2 - c_5^2 c_3) \varepsilon^3 + O(\varepsilon^4).$$

Отсюда следует, что если  $c_6 c_5 c_8 - c_1 c_8^2 - c_5^2 c_3 \neq 0$ , то для достаточно малых значений  $\varepsilon$  тривиальное равновесие системы на этой границе неустойчиво.

Рассмотрим вопрос о существовании нетривиальных равновесий соответствующей модельной системы первого приближения, гамильтониан  $\Gamma^{(10)}$  которой составлен при помощи формул (1.3), (5.1) и (2.3). Для этих равновесий имеем  $Y_2 = 0$ , а величины  $y_1, y_2$  и  $Y_1$  удовлетворяют системе уравнений вида

$$\begin{aligned} 2c_3 Y_1 + c_6 y_1 + c_8 y_2 + 4\gamma' Y_1^3 + 3g_1 Y_1^2 + 2g_2 Y_1 + g_3 &= 0, \\ 2c_1 y_1 + c_5 y_2 + c_6 Y_1 + g'_{1y_1} Y_1^3 + g'_{2y_1} Y_1^2 + g'_{3y_1} Y_1 + g'_{4y_1} &= 0, \\ 2c_2 y_2 + c_5 y_1 + c_8 Y_1 + g'_{1y_2} Y_1^3 + g'_{2y_2} Y_1^2 + g'_{3y_2} Y_1 + g'_{4y_2} &= 0. \end{aligned} \quad (5.4)$$

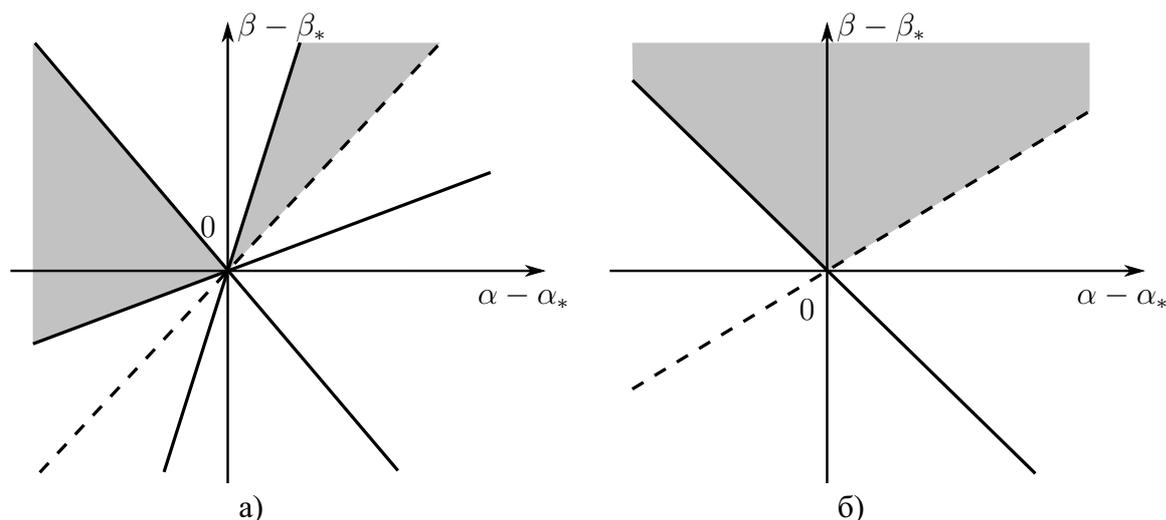


Рис. 4. Области устойчивости и неустойчивости тривиального равновесия при  $r = 1$

Здесь, как и выше, в функциях  $g_i(x_1, x_2)$  сделана замена  $x_j = y_j$  ( $j = 1, 2$ ).

Выберем какие-либо две пары уравнений системы, например, первое, второе и первое, третье уравнения, и, как в случае  $r = 2$ , умножим каждое уравнение пары на линейную часть другого уравнения и почленно вычтем результаты один из другого.

Получаем два уравнения–следствия, содержащие однородные формы четвертой степени по  $y_1, y_2$  и  $Y_1$ . Положим в них  $y_1 = kY_1$  и  $y_2 = lY_1$ , где  $k$  и  $l$  — вещественные числа, и рассмотрим систему двух уравнений четвертой степени относительно  $k$  и  $l$ :

$$(2c_1k + c_5l + c_6)(4\gamma' + 3g_1 + 2g_2 + g_3) - (2c_3 + c_6k + c_8l) \frac{\partial}{\partial y_1}(g_1 + g_2 + g_3 + g_4) = 0,$$

$$(4c_2l + c_5k + c_8)(4\gamma' + 3g_1 + 2g_2 + g_3) - (2c_3 + c_6k + c_8l) \frac{\partial}{\partial y_2}(g_1 + g_2 + g_3 + g_4) = 0.$$

В этих уравнениях аргументы  $y_1$  и  $y_2$  функций  $g_1, \dots, g_4$  и их частных производных заменяются на  $k$  и  $l$  соответственно. Число решений такой системы, в зависимости от значений коэффициентов, меняется от 0 до 16.

Пусть  $k = k_0, l = l_0$  — одно из этих решений. Делая подстановку  $y_1 = k_0Y_1, y_2 = l_0Y_1$ , например, в первое уравнение (5.4), определяем

$$Y_1^2 = -\frac{2c_3 + c_6k_0 + c_8l_0}{4\gamma' + 3g_1(k_0, l_0) + 2g_2(k_0, l_0) + g_3(k_0, l_0)}.$$

Если правая часть этого соотношения неотрицательна, находим два равновесных значения  $Y_1$  и соответствующие значения  $y_1$  и  $y_2$ .

Таким образом, рассматриваемая модельная система может иметь четное, от 0 до 32, число положений равновесия. Более детальный анализ может быть проведен для каждого заданного набора значений коэффициентов нормализованного гамильтониана.

## § 6. О периодических решениях полной системы

Вернемся к рассмотрению полных преобразованных неавтономных систем с гамильтонианами  $\Gamma^{(k)}$  ( $k = 1, 2, 3, 4$ ), общий вид которых, вместе с главными (модельными) частями, описан в разд. 2.4. Рассмотрим окрестности найденных в §§ 3–5 нетривиальных равновесий модельных систем, исключив из рассмотрения сложные особые точки, соответствующие кратным корням уравнений, определяющих равновесные значения переменных системы.

В указанных окрестностях полные системы являются квазилинейными с возмущениями порядка  $O(\varepsilon^{k+1})$ . При этом корни характеристических уравнений линеаризованных (в окрестности равновесий) уравнений имеют порядок  $O(\varepsilon^{k/2})$ , а возмущения являются  $2\pi$ -периодическими функциями времени.

Таким образом, имеет место нерезонансный случай теории периодических движений Пуанкаре [14], и каждое нетривиальное равновесие модельной системы  $k$ -го приближения вида

$$y_1 = \hat{y}_1, \quad y_2 = \hat{y}_2, \quad Y_1 = \hat{Y}_1, \quad Y_2 = \hat{Y}_2$$

порождают единственное решение полной преобразованной системы вида

$$y_1 = \hat{y}_1 + O(\varepsilon^{k+1}), \quad y_2 = \hat{y}_2 + O(\varepsilon^{k+1}), \quad Y_1 = \hat{Y}_1 + O(\varepsilon^{k+1}), \quad Y_2 = \hat{Y}_2 + O(\varepsilon^{k+1}),$$

где слагаемые  $O(\varepsilon^{k+1})$  аналитичны по  $\varepsilon$  и  $2\pi$ -периодичны по времени.

Проведем обратную последовательность замен переменных, перейдя сначала к переменным  $x_j, X_j$  по формулам  $x_j = \varepsilon^{k/2}y_j, X_j = \varepsilon^{k/2}Y_j$  ( $j = 1, 2$ ). Применим затем формулы метода Дебри–Хори и найдем замену переменных  $x_j, X_j \rightarrow q_j, p_j$  ( $j = 1, 2$ ), обратную к замене, используемой при нормализации форм второй и четвертой степеней гамильтониана возмущенного движения. Получаем в результате  $2\pi$ -периодическое по времени решение исходной системы, аналитическое по дробным (для нечетных  $k$ ) или целым (для четных  $k$ ) степеням малого параметра.

Периодические решения, рождающиеся из неустойчивых и устойчивых в линейном приближении равновесий модельных систем, являются неустойчивыми или устойчивыми в линейном приближении соответственно. Это следует из непрерывности по малому параметру характеристических показателей соответствующих линеаризованных уравнений возмущенного движения.

## § 7. Периодические движения динамически симметричного спутника на слабоэллиптической орбите в случае двух нулевых частот

### 7.1. Гамильтониан возмущенного движения. Резонансная точка

Рассмотрим движение спутника (твёрдого тела) относительно центра масс в центральном ньютоновском гравитационном поле на эллиптической орбите. Пусть центральный эллипсоид инерции спутника является эллипсоидом вращения, через  $C$  и  $A$  обозначим осевой и экваториальный моменты инерции. Ориентацию главных центральных осей инерции спутника в орбитальной системе координат зададим при помощи углов Эйлера  $\psi, \theta, \varphi$ . Координата  $\varphi$  циклическая, приведенная система с двумя степенями свободы описывает движение оси симметрии спутника. Соответствующий гамильтониан приведен в [15].

Существует [16] частное движение этой системы

$$\psi = \pi, \quad \theta = \frac{\pi}{2}, \quad p_\psi = 0, \quad p_\theta = 0,$$

отвечающее вращению спутника с постоянной угловой скоростью  $r_0$  вокруг оси его динамической симметрии, расположенной перпендикулярно плоскости орбиты (цилиндрическая прецессия). Будем исследовать движения спутника в окрестности этого стационарного вращения, предполагая, что эксцентриситет  $e$  орбиты центра масс мал ( $0 < e \ll 1$ ). Введем возмущения по формулам

$$\psi = \pi + q_2, \quad \theta = \frac{\pi}{2} + q_1, \quad p_\psi = p_2, \quad p_\theta = p_1$$

и представим гамильтониан возмущенного движения в виде

$$H = H_2 + H_4 + \dots, \quad H_2 = H_{20} + eH_{21} + e^2H_{22} + e^3H_{23} + \dots, \quad H_4 = H_{40} + \dots; \quad (7.1)$$

$$\begin{aligned} H_{20} &= \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + (\alpha\beta - 1)p_2q_1 + \frac{1}{2}\left(3\alpha - 3 - \alpha\beta + \alpha^2\beta^2\right)q_1^2 + p_1q_2 + \frac{1}{2}\alpha\beta q_2^2, \\ H_{21} &= \left(-p_1^2 - p_2^2 - 2\alpha\beta p_2q_1 + \left[\frac{3}{2}(\alpha - 1) - \alpha^2\beta^2\right]q_1^2\right) \cos \nu, \\ H_{22} &= \frac{3}{2}\alpha\beta \cos(2\nu) p_2q_1 + \frac{3}{4}\alpha\beta(1 - 2\alpha\beta \sin^2 \nu) q_1^2 + \frac{3}{2}(p_1^2 + p_2^2) \cos^2 \nu - \frac{3}{4}\alpha\beta q_2^2, \\ H_{23} &= -2(p_1^2 + p_2^2) \cos^3 \nu - \alpha\beta \cos \nu(4 \cos^2 \nu - 3)p_2q_1 - \alpha^2\beta^2 \cos \nu(2 \cos^2 \nu - 3)q_1^2, \\ H_{24} &= \alpha\beta \left[-\frac{3}{16} + \alpha\beta\left(\frac{5}{2} \cos^4 \nu - \frac{9}{2} \cos^2 \nu + \frac{3}{2}\right)\right] q_1^2 + \frac{3}{16}\alpha\beta q_2^2 + \\ &\quad + \frac{5}{2}(p_1^2 + p_2^2) \cos^4 \nu + \alpha\beta\left(\left(5 \cos^4 \nu - \frac{9}{2} \cos^2 \nu + \frac{3}{8}\right)p_2q_1\right); \end{aligned} \quad (7.2)$$

$$\begin{aligned} H_{40} &= \left(-\frac{5}{24}\alpha\beta - \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\alpha^2\beta^2\right) q_1^4 - \frac{1}{6}p_1q_2^3 + \frac{1}{4}\alpha\beta q_1^2q_2^2 + \\ &\quad + \left(\frac{5}{6}\alpha\beta - \frac{1}{3}\right) p_2q_1^3 + \frac{1}{2}p_2^2q_1^2 + \frac{1}{2}p_2q_1q_2^2 - \frac{1}{24}\alpha\beta q_2^4. \end{aligned} \quad (7.3)$$

В формулах (7.2) и (7.3) введены безразмерные параметры

$$\alpha = C/A \quad (0 < \alpha \leq 2), \quad \beta = r_0/\omega_0,$$

где  $\omega_0$  — среднее движения центра масс по орбите. За независимую переменную принята истинная аномалия  $\nu$ .

Уравнение частот колебаний линейной системы с гамильтонианом  $H_{20}$ , отвечающим случаю круговой ( $e = 0$ ) орбиты, имеет вид

$$\omega^4 - (3\alpha - 1 + \alpha^2\beta^2 - 2\alpha\beta)\omega^2 + (\alpha\beta - 1)(\alpha\beta + 3\alpha - 4) = 0.$$

Исследуемый в данной работе случай двух нулевых частот реализуется в точке

$$\alpha = \frac{2}{3}, \quad \beta = \frac{3}{2} \quad (7.4)$$

плоскости параметров  $\alpha, \beta$ , являющейся «угловой» точкой границы области устойчивости в линейном приближении цилиндрической прецессии спутника на круговой орбите [16]. Нетрудно проверить, что в этой точке ранг  $r$  соответствующей матрицы коэффициентов линеаризованных уравнений возмущенного движения равен трем.

Ранее в статье [7] в  $e^2$ -окрестности точки (7.4) аналитически найдены границы области устойчивости тривиального равновесия линейной системы с гамильтонианом  $H_2$  из (7.1), (7.2). В обозначениях данной работы на этих границах коэффициенты  $\mu_k$  из соотношений (2.8) таковы:  $\mu_2 = \mu_{20} = -(9/4)\nu_2$ ,  $\mu_3 = 0$ , а  $\mu_4 = \mu_{40}$  и  $\mu_4 = \mu_{40} - \mu_0$ , где

$$\mu_{40} = \frac{81}{256} + \frac{27}{8}\nu_2^2, \quad \mu_0 = \frac{27}{8}(\nu_2 + 3)^2.$$

## 7.2. Резонансные периодические движения спутника

Опираясь на теорию, разработанную в § 3, исследуем резонансные периодические движения оси симметрии спутника в окрестности нормали к плоскости орбиты. Будем считать,

что значения параметров задачи принадлежат  $e^2$ -окрестности точки (7.4), заданной формулами (2.8), в которых полагаем  $\varepsilon = e$  и  $\alpha_* = 2/3$ ,  $\beta_* = 3/2$ .

Нормальная форма в слагаемых четвертой степени автономной части гамильтониана имеет вид

$$K_{40} = \frac{1}{8}X_2^4 + \frac{1}{4}X_1^2X_2^2 + \frac{3}{8}X_1^3X_2, \quad (7.5)$$

а нормализованный квадратичный гамильтониан в слагаемых до четвертой степени по  $e$  включительно представляется в виде

$$\begin{aligned} K_2 = & \frac{1}{2}X_1^2 - y_1y_2 + \left[ \left( -\frac{3}{2}\nu_2 - \frac{9}{2} \right) X_1X_2 + \left( \frac{3}{4}\nu_2 + \frac{1}{3}\mu_2 \right) X_2^2 \right] e^2 + \frac{1}{3}\mu_3X_2^2e^3 + \\ & + \left[ \left( -\frac{9}{8}\nu_2^2 - \frac{103}{3}\mu_2 - 120\nu_2 - \frac{2}{9}\mu_2^2 - \frac{66993}{512} - \nu_2\mu_2 \right) X_1X_2 + \right. \\ & \left. + \left( \frac{2565}{256} - \frac{2}{9}\mu_2^2 - \frac{3}{2}\nu_2\mu_2 + \frac{65}{6}\mu_2 - \frac{9}{4}\nu_2^2 + \frac{1}{3}\mu_4 + \frac{249}{8}\nu_2 \right) X_2^2 \right] e^4. \end{aligned} \quad (7.6)$$

При помощи (7.5) и (7.6) в соответствующей части  $e^{k/2}$ -окрестности начала координат фазового пространства можно составить модельные гамильтонианы  $k$ -го приближения ( $k = 2, 3, 4$ ) и определить равновесные точки модельных систем. Сразу отметим, что, согласно результатам § 4, все эти равновесия будут неустойчивыми, так как коэффициент  $\gamma_1 = 1/8$  нормализованной формы  $K_{40}$  положителен.

Картина устойчивости качественно соответствует рис. 1, а, при этом общая граничная точка кривых 1 и 2 имеет координаты

$$\alpha = \frac{2}{3} - 3e^2 + O(e^4), \quad \beta = \frac{3}{2} = \frac{27}{4}e^2 + O(e^4).$$

Далее отметим, что при рассмотрении модельных систем описанного в § 3 вида могут быть найдены только главные части  $Y_{20}$  равновесных значений переменной  $Y_2$ . Чтобы получить достаточное полное представление о виде искомым периодических решениях, надо знать еще части  $Y_{21}, Y_{22}, \dots$ . С этой целью были рассмотрены уточненные модельные системы, в которых в формах второй и четвертой степеней учитывались соответственно слагаемые до порядков  $e^{k+2}$  и  $e^2$  включительно. Явный вид этих дополнительных слагаемых здесь не приводим.

Для нетривиальных равновесий описанных модельных систем имеем

$$y_1 = y_2 = 0, \quad Y_2 = Y_{20} + eY_{21} + e^2Y_{22} + O(e^3), \quad Y_1 = e^2Y_{12} + O(e^3), \quad Y_{12} = \frac{3}{2}(3 + \nu_2)Y_{20},$$

причем для системы второго приближения

$$\begin{aligned} Y_{20}^2 = & -3\nu_2 - \frac{4}{3}\mu_2, \quad (\mu_2 < \mu_{20}), \\ Y_{21} = & 0, \quad Y_{22} = \left( -\frac{32}{27}\mu_2^2 - \frac{25}{3}\nu_2\mu_2 + \frac{130}{3}\mu_2 + \frac{27}{128} - \frac{21}{2}\nu_2^2 + \frac{195}{2}\nu_2 \right) \frac{1}{Y_{20}}, \end{aligned} \quad (7.7)$$

для системы третьего приближения

$$\begin{aligned} Y_{20}^2 = & -\frac{4}{3}\mu_3 \quad (\mu_3 < 0), \\ Y_{21} = & -\frac{864\nu_2^2 + 81}{512\mu_3}Y_{20}, \quad Y_{22} = \left[ \frac{243}{131072\mu_3} (32\nu_2^2 + 3)^2 - \left( 3\nu_2 - \frac{130}{3} \right) \mu_3 \right] \frac{1}{Y_{20}}, \end{aligned} \quad (7.8)$$

и для системы четвертого приближения

$$Y_{20}^2 = \frac{9}{2}\nu_2^2 + \frac{27}{64} - \frac{4}{3}\mu_4, \quad Y_{21} = 0 \quad (\mu_4 < \mu_{40}), \quad (7.9)$$

$$Y_{22} = -\frac{173420352\nu_2^2 + 430309661 - 7558272\nu_2^3 + 227533293\nu_2 + 124416\mu_4(27\nu_2 - 353)}{1990656Y_{20}}.$$

В скобках указаны условия существования данных равновесий.

Найденные равновесия системы  $k$ -го приближения ( $k = 2, 3, 4$ ) порождают в отвечающих им полных системах  $2\pi$ -периодические по  $\nu$  движения оси симметрии спутника. В исходных переменных эти движения описываются соотношениями

$$\theta = \frac{\pi}{2} + e^{k/2+2} \left[ -\frac{9}{16} Y_{20} \sin 2\nu + O(e) \right], \quad (7.10)$$

$$\psi = \pi + e^{k/2} [Y_{20} + e(Y_{21} - 2Y_{20} \cos \nu) + e^2 q_{2k} + O(e^3)], \quad (7.11)$$

причем стоящие в квадратных скобках функции аналитичны по  $e$ .

Здесь

$$q_{22} = Y_{22} - 2Y_{21} \cos \nu - \frac{1}{2} Y_{12} - \frac{11}{48} Y_{20}^3 + \left( \frac{3}{8} \nu_2 - \frac{1}{6} \mu_2 + \frac{7}{2} + \frac{3}{16} \cos 2\nu \right) Y_{20},$$

а величины  $q_{23}$  и  $q_{24}$  получаются из  $q_{22}$  при подстановке  $\mu_2 = -(9/4)\nu_2$  и удалении слагаемого с  $Y_{20}^3$ . Значения  $Y_{ij}$  в приведенных выражениях задаются, в соответствии с рассматриваемой системой, формулами (7.7), (7.8) или (7.9).

Из вышеизложенного следует, что данные периодические движения неустойчивы в области своего существования.

Если в (7.10) и (7.11) отбросить слагаемые порядка  $e^{k/2+2}$  и выше, то эти выражения описывают плоские гармонические колебания оси симметрии спутника с угловой амплитудой порядка  $e^{k/2+1}$ .

**Финансирование.** Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 19–11–00116) в Московском авиационном институте (национальном исследовательском университете).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Маркеев А.П. Параметрический резонанс и нелинейные колебания тяжелого твердого тела в окрестности его плоских вращений // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 1995. № 5. С. 34–44.
2. Холостова О.В. Параметрический резонанс в задаче о нелинейных колебаниях спутника на эллиптической орбите // Космические исследования. 1996. Т. 3. Вып. 3. С. 312–316.
3. Холостова О.В. О периодических движениях неавтономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы при параметрическом резонансе основного типа // Прикладная математика и механика. 2002. Т. 66. Вып. 4. С. 540–551.
4. Маркеев А.П. О кратном резонансе в линейных системах Гамильтона // Доклады РАН. 2005. Т. 402. № 3. С. 339–343. <http://mi.mathnet.ru/dan1234>
5. Маркеев А.П. Об одном особом случае параметрического резонанса в задачах небесной механики // Письма в Астрономический журнал. 2005. Т. 31. Вып. 5. С. 388–394.
6. Маркеев А.П. Кратный резонанс в одной задаче об устойчивости движения спутника относительно центра масс // Письма в Астрономический журнал. 2005. Т. 31. № 9. С. 701–708.

7. Маркеев А.П. О кратном параметрическом резонансе в системах Гамильтона // Прикладная математика и механика. 2006. Т. 70. Вып. 2. С. 200–220.
8. Маркеев А.П. Линейные гамильтоновы системы и некоторые задачи об устойчивости движения спутника относительно центра масс. М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2009.
9. Холостова О.В. О периодических движениях неавтономной гамильтоновой системы в одном случае кратного параметрического резонанса // Нелинейная динамика. 2017. Т. 13. № 4. С. 477–504. <https://doi.org/10.20537/nd1704003>
10. Холостова О.В. О периодических движениях близкой к автономной системы в случаях двойного параметрического резонанса // Прикладная математика и механика. 2019. Т. 83. № 2. С. 175–201. <https://doi.org/10.1134/S0032823519020103>
11. Kholostova O.V. On the motions of one near-autonomous Hamiltonian system at a 1:1:1 resonance // Regular and Chaotic Dynamics. 2019. Vol. 24. No. 3. P. 235–265. <https://doi.org/10.1134/S1560354719030018>
12. Сокольский А.Г. Об устойчивости автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы в случае нулевых частот // Прикладная математика и механика. 1981. Т. 45. Вып. 3. С. 441–449.
13. Маркеев А.П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. Москва: Наука, 1978.
14. Малкин И.Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. Москва: УРСС, 2004.
15. Маркеев А.П. О вращательном движении динамически симметричного спутника на эллиптической орбите // Космические исследования. 1967. Т. 5. № 4. С. 530–539.
16. Белецкий В.В. Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. М.: МГУ, 1975.

Поступила в редакцию 01.07.2020

Холостова Ольга Владимировна, д. ф.-м. н., профессор, кафедра мехатроники и теоретической механики, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), 125993, Россия, г. Москва, Волоколамское ш., 4.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6810-2025>

E-mail: [kholostova\\_o@mail.ru](mailto:kholostova_o@mail.ru)

**Цитирование:** О. В. Холостова. О движениях близкой к автономной гамильтоновой системы в случаях двух нулевых частот // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2020. Т. 30. Вып. 4. С. 672–695.

**O. V. Kholostova**

**On the motions of a near-autonomous Hamiltonian system in the cases of two zero frequencies**

*Keywords:* Hamiltonian system, normalization, zero frequencies, stability, dynamically symmetric satellite, cylindrical precession.

MSC2010: 70H08, 70H12, 70H14, 70H15, 70M20

DOI: [10.35634/vm200410](https://doi.org/10.35634/vm200410)

We consider the motion of a near-autonomous, time-periodic two-degree-of-freedom Hamiltonian system in the vicinity of trivial equilibrium. It is assumed that the system depends on three parameters, one of which is small, and when it is zero, the system is autonomous. Suppose that in the autonomous case for a set of two other parameters, both frequencies of small linear oscillations of the system in the vicinity of the equilibrium are equal to zero, and the rank of the coefficient matrix of the linearized equations of perturbed motion is three, two, or one. We study the structure of the regions of stability and instability of the trivial equilibrium of the system in the vicinity of the resonant point of a three-dimensional parameter space, as well as the existence, number and stability (in a linear approximation) of periodic motions of the system that are analytic in integer or fractional powers of the small parameter. As an application, periodic motions of a dynamically symmetric satellite (solid) with respect to the center of mass are obtained in the vicinity of its stationary rotation (cylindrical precession) in a weakly elliptical orbit in the case of two zero frequencies under study, and their instability is proved.

**Funding.** This work is supported by the Russian Science Foundation (project no. 19–11–00116) at Moscow Aviation Institute (National Research University).

#### REFERENCES

1. Markeev A.P. Parametric resonance and nonlinear oscillations of heavy solid near its flat rotations, *Izvestiya Rossiiskoi Akademii Nauk. Mekhanika Tverdogo Tela*, 1995, issue 5, pp. 34–44 (in Russian).
2. Kholostova O.V. Parametric resonance in the problem on satellite nonlinear oscillations in elliptic orbit, *Kosmicheskie Issledovaniya*, 1996, vol. 3, no. 3, pp. 312–316 (in Russian).
3. Kholostova O.V. The periodic motions of a non-autonomous Hamiltonian system with two degrees of freedom at parametric resonance of the fundamental type *J. Appl. Math. Mech.*, 2002, vol. 66, issue 4, pp. 529–538. [https://doi.org/10.1016/S0021-8928\(02\)00071-0](https://doi.org/10.1016/S0021-8928(02)00071-0)
4. Markeev A.P. On a multiple resonance in linear Hamiltonian systems, *Doklady Physics*, 2005, vol. 50, issue 5, pp. 278–282. <https://doi.org/10.1134/1.1941506>
5. Markeev A.P. On one special case of parametric resonance in problems of celestial mechanics, *Astron. Lett.*, 2005, vol. 31, no. 5, pp. 350–356. <https://doi.org/10.1134/1.1922534>
6. Markeev A.P. Multiple resonance in one problem of the stability of the motion of a satellite relative to the center of mass, *Astron. Lett.*, 2005, vol. 31, no. 9, pp. 627–633. <https://doi.org/10.1134/1.2039974>
7. Markeyev A.P., Multiple parametric resonance in Hamilton systems, *J. Appl. Math. Mech.*, 2006, vol. 70, issue 2, pp. 176–194. <https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2006.06.001>
8. Markeev A.P. *Lineinye gamil'tonovy sistemy i nekotorye zadachi ob ustoychivosti dvizheniya sputnika otositel'no centra mass* (Linear Hamiltonian systems and some problems on stability of motion of a satellite about its center of mass), Izhevsk: R&C Dynamics, Institute of Computer Science, 2009.
9. Kholostova O.V. On periodic motions of a nonautonomous Hamiltonian system in one case of multiple parametric resonance, *Nelineinaya Dinamika*, 2017, vol. 13, issue 4, pp. 477–504 (in Russian). <https://doi.org/10.20537/nd1704003>
10. Kholostova O.V. On periodic motions of a nearly autonomous Hamiltonian system in the occurrence of double parametric resonance, *Mechanics of Solids*, 2019, vol. 54, issue 2, pp. 211–233. <https://doi.org/10.3103/S0025654419030154>

11. Kholostova O.V. On the motions of one near-autonomous Hamiltonian system at a 1:1:1 resonance, *Regular and Chaotic Dynamics*, 2019, vol. 24, issue 3, pp. 235–265.  
<https://doi.org/10.1134/S1560354719030018>
12. Sokol'skii A.G. On stability of self-contained Hamiltonian system with two degrees of freedom in the case of zero frequencies, *J. Appl. Math. Mech.*, 1981, vol. 45, issue 3, pp. 321–327.  
[https://doi.org/10.1016/0021-8928\(81\)90060-5](https://doi.org/10.1016/0021-8928(81)90060-5)
13. Markeev A.P. *Tochki libratsii v nebesnoi mekhanike i kosmodinamike* (Libration points in celestial mechanics and space dynamics), Moscow: Nauka, 1978.
14. Malkin I.G. *Nekotorye zadachi teorii nelineinykh kolebaniy* (Some problems in the theory of nonlinear oscillations), Moscow: URSS, 2004.
15. Markeev A.P. On rotational motion of a dynamically symmetrical satellite in an elliptic orbit, *Kosmicheskie Issledovaniya*, 1967, vol. 5, issue 4, pp. 530–539 (in Russian).
16. Beletskii V.V. *Dvizhenie sputnika otnositel'no tsentra mass v gravitatsionnom pole* (Satellite's motion about the center of mass in a gravitational field), Moscow: Moscow State University, 1975.

Received 01.07.2020

Kholostova Ol'ga Vladimirovna, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Department of Mecha-  
tronics and Theoretical Mechanics, Moscow Aviation Institute (National Research University), Voloko-  
lamskoe shosse, 4, Moscow, 125993, Russia.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6810-2025>

E-mail: [kholostova\\_o@mail.ru](mailto:kholostova_o@mail.ru)

**Citation:** O. V. Kholostova. On the motions of a near-autonomous Hamiltonian system in the cases of two zero frequencies, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2020, vol. 30, issue 4, pp. 672–695.