МАТЕМАТИКА 2022. Т. 32. Вып. 4. С. 546–556.

УДК 517.977

© *И. В. Изместьев, В. И. Ухоботов*

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ НАГРЕВОМ СИСТЕМЫ СТЕРЖНЕЙ ПРИ НАЛИЧИИ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Рассматривается задача управления параболической системой, которая описывает нагрев заданного количества стержней. Функции плотности внутренних источников тепла стержней точно неизвестны, а задан только отрезок их изменения. Управлением являются точечные источники тепла, которые находятся на концах стержней. Цель выбора управления заключается в том, чтобы в фиксированный момент времени модуль линейной функции, определяемой с помощью средних температур стержней, не превышал заданного значения при любых допустимых функциях плотности внутренних источников тепла. Разработана методика сведения этой задачи к одномерной задаче управления при наличии неопределенности. Найдены необходимые и достаточные условия окончания.

Ключевые слова: управление, неопределенность, параболическая система.

DOI: 10.35634/vm220404

Введение

При изучении управляемых процессов теплопроводности, диффузии, фильтрации возникают математические задачи управления параболическими уравнениями [1–5]. В приложениях часто возникают задачи о распространении тепла в стержне, концы которого находятся при переменных управляемых температурах. Эти задачи сводятся к исследованию уравнения теплопроводности, граничные условия которого содержат управления (см., например, [6, 7]).

Возможны случаи, когда часть параметров уравнения и граничных условий не заданы точно, а также имеется воздействие со стороны внешних помех [8–11]. В работах [8, 9] строится стабилизирующее управление для неустойчивого одномерного уравнения теплопроводности с неопределенной помехой на правой границе. Статья [10] посвящена управлению активным подавлением помех в модели теплового потока. В [11] для неустойчивого уравнения теплопроводности с помехой разработан адаптивный робастный граничный регулятор.

При исследовании таких задач можно применить метод оптимизации гарантированного результата [12], в основе которого лежит теория дифференциальных игр [13–16]. Неопределенность принимается за второго игрока — противника. В работах [13, 14] управление строится в рамках концепции позиционных дифференциальных игр. В [15] для решения игровой задачи в параболической системе применяется метод разрешающих функций. В [16] игровая задача управления параболической системой сводится к дифференциальной игре, динамика в которой описывается бесконечным количеством линейных дифференциальных уравнений.

В работе [17] рассмотрена задача управления процессом нагрева стержня, когда управляется скорость изменения температуры на левом конце стержня, а скорость изменения температуры на правом конце стержня определяется ограниченной по величине помехой. В [18] рассматривается модификация задачи из [17] в случае, когда на правом конце стержня температура задается неизвестной ограниченной по величине функцией.

Следуя изложенному в [17, 18] подходу, в данной статье решается задача управления параболической системой, которая описывает нагрев заданного количества стержней. Функции плотности внутренних источников тепла стержней точно неизвестны, а заданы только границы области их значений. Управляются скорости изменения температур на концах стержней. Цель выбора управления заключается в том, чтобы в фиксированный момент времени модуль линейной функции, определяемой с помощью средних значений температур стержней, не превышал заданной величины при любых допустимых функциях плотности внутренних источников тепла. Средние значения вычисляются с помощью заданной функции. Задача сводится к одномерной однотипной задаче управления при наличии неопределенности. Для таких задач, рассматриваемых в рамках теории линейных дифференциальных игр [19], найдены необходимые и достаточные условия окончания и построены соответствующие управления игроков [20, 21].

§ 1. Постановка задачи

Уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial T_i(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 T_i(x,t)}{\partial x^2} + f_i(x,t), \tag{1}$$

где $0 \leqslant t \leqslant p$ и $0 \leqslant x \leqslant 1$, описывают распределения температур $T_i(x,t)$, $i = \overline{1,n}$, в однородных стержнях единичной длины как функцию от времени t. В начальный момент $t = 0$ заданы распределения температур $T_i(x,0) = g_i(x)$, где функции $g_i(x)$ являются непрерывными. Считается, что управляемые температуры $T_i(0,t)$ и $T_i(1,t)$ на концах i-го стержня меняются согласно уравнениям

$$\frac{d\,T_i(0,t)}{dt} = a_1(t) + a_2(t) G_i^{(1)} \overline{\xi}(t), \qquad \frac{d\,T_i(1,t)}{dt} = b_1(t) + b_2(t) G_i^{(2)} \overline{\xi}(t). \tag{2}$$

Здесь функции $a_j(t)$ и $b_j(t)$, $j = 1,2$, непрерывны при $0 \leqslant t \leqslant p$, причем $a_2(t) \geqslant 0$ и $b_2(t) \geqslant 0$. Вектор-функция $\overline{\xi}(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t), \ldots, \xi_l(t))^*$, где $|\xi_k(t)| \leqslant 1$, $k = \overline{1,l}$, является управлением. Символ $*$ обозначает операцию транспонирования. С помощью матриц $G^{(1)}$ и $G^{(2)}$ размерности n на l задается выбор соответствующего одномерного управления $\xi_k(t)$ для левого и правого конца каждого стержня. За $G_i^{(1)}$ и $G_i^{(2)}$ обозначены i-е строки соответствующих матриц. В каждой такой строке один элемент ненулевой, а остальные 0.

Известна оценка непрерывных функций $f_i(x,t)$, которые являются плотностями внутренних источников тепла:

$$f^{(1)}(x,t) \leqslant f_i(x,t) \leqslant f^{(2)}(x,t), \quad 0 \leqslant t \leqslant p, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1. \tag{3}$$

Здесь функции $f^{(j)}(x,t)$, $j = 1,2$ являются непрерывными.

Предположение 1. Каждая функция $f_i\colon [0,1] \times [0,p] \to \mathbb{R}$ такова, что для любых чисел $0 \leqslant \tau < \nu$ и непрерывных функций $\varrho_j\colon [\tau,\nu] \to \mathbb{R}$, $j = 1,2$, $\beta\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ таких, что выполнено условие согласования $\varrho_1(\tau) = \beta(0)$, $\varrho_2(\tau) = \beta(1)$, первая краевая задача

$$\begin{gathered}
\frac{\partial Q(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 Q(x,t)}{\partial x^2} + f_i(x,t), \\
Q(0,t) = \varrho_1(t), \quad Q(1,t) = \varrho_2(t), \quad \tau \leqslant t \leqslant \nu, \\
Q(x,\tau) = \beta(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,
\end{gathered}$$

имеет единственное решение $Q(x,t)$ непрерывное при $0 \leqslant x \leqslant 1$, $\tau \leqslant t \leqslant \nu$.

Пусть заданы числа $\alpha \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \geqslant 0$ и вектор $\overline{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)^* \in \mathbb{R}^n$ такой, что $\lambda_i > 0$, $i = \overline{1, n}$. Цель выбора управления (2) заключается в осуществлении неравенства

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \int_0^1 T_i(x, p)\sigma(x)\, dx - \alpha \right| \leqslant \varepsilon \tag{4}$$

для любых непрерывных функций $f_i(x, t)$ (3). Здесь $\sigma\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ — заданная непрерывная функция, удовлетворяющая условиям

$$\sigma(0) = \sigma(1) = 0. \tag{5}$$

§ 2. Формализация задачи

Опишем допустимое правило формирования функций $\overline{\xi}$. Это означает, что каждому моменту времени $0 \leqslant \nu < p$ и каждому допустимому распределению температур $\overline{T}(x, \nu) = (T_1(x, \nu), T_2(x, \nu), \ldots, T_n(x, \nu))$ в этот момент времени сопоставляется измеримая вектор-функция $\overline{\xi}(t)$ такая, что $\xi_i\colon [\nu, p] \to [-1, 1]$, $i = \overline{1, n}$. Будем обозначать это правило как

$$\overline{\xi}(t) = N(t, \overline{T}(\cdot, \nu)), \quad t \in [\nu, p]. \tag{6}$$

Зафиксируем разбиение

$$\omega\colon 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_j < t_{j+1} < \ldots < t_{m+1} = p$$

отрезка $[0, p]$ с диаметром

$$d(\omega) = \max_{0 \leqslant j \leqslant m} (t_{j+1} - t_j).$$

Пусть распределение температур $\overline{T}^{(\omega)}(x, t_j)$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, реализовалось в момент t_j, $j = \overline{0, m}$. Обозначим $\overline{\xi}^{(j)}(t) = N(t, \overline{T}^{(\omega)}(\cdot, t_j))$, $t \in [t_j, p]$. Пусть реализовались непрерывные функции $f_i(x, t)$, $i = \overline{1, n}$.

Обозначим через $T_i^{(\omega)}(x, t)$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$, $t_j \leqslant t \leqslant t_{j+1}$ решения уравнений (1) со следующими начальными и краевыми условиями:

$$T_i(x, t_j) = T_i^{(\omega)}(x, t_j), \quad x \in [0, 1]; \quad T_i(0, t) = T_i^{(\omega)}(0, t), \quad T_i(1, t) = T_i^{(\omega)}(1, t),$$

где

$$\begin{aligned} T_i^{(\omega)}(0, t) &= T_i^{(\omega)}(0, t_j) + \int_{t_j}^{t} (a_1(r) + a_2(r) G_i^{(1)} \overline{\xi}^{(j)}(r))\, dr \quad \text{при} \quad t \in [t_j, t_{j+1}]; \\ T_i^{(\omega)}(1, t) &= T_i^{(\omega)}(1, t_j) + \int_{t_j}^{t} (b_1(r) + b_2(r) G_i^{(2)} \overline{\xi}^{(j)}(r))\, dr \quad \text{при} \quad t \in [t_j, t_{j+1}]. \end{aligned} \tag{7}$$

Определение 1. Будем говорить, что управление (6) гарантирует выполнение поставленной цели (4), если для любого числа $\gamma > \varepsilon$ найдется число $\delta > 0$ такое, что для любых непрерывных функций $f_i(x, t)$, $i = \overline{1, n}$, удовлетворяющих предположению 1 и неравенствам (3), и для любого разбиения ω с диаметром $d(\omega) < \delta$, выполнено неравенство

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \int_0^1 T_i^{(\omega)}(x, p)\sigma(x)\, dx - \alpha \right| \leqslant \gamma. \tag{8}$$

§ 3. Переход к одномерной задаче

Обозначим через $\psi(x,\tau)$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant \tau \leqslant p$ решение следующей первой краевой задачи:

$$\frac{\partial\psi(x,\tau)}{\partial\tau} = \frac{\partial^2\psi(x,\tau)}{\partial x^2}, \quad \psi(x,0) = \sigma(x), \quad \psi(0,\tau) = \psi(1,\tau) = 0. \tag{9}$$

Из равенств (5) следует, что условия согласования на концах отрезка в задаче (9) выполнены.

Используя условия (3), можно показать, что

$$\int_0^1 f_i(x,t)\psi(x,p-t)\,dx = c_1(t) + c_2(t)s(t), \quad |s(t)| \leqslant 1, \quad i = \overline{1,n}, \tag{10}$$

где

$$c_1(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 (f^{(1)}(x,t) + f^{(2)}(x,t))\psi(x,p-t)\,dx,$$
$$c_2(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 (f^{(2)}(x,t) - f^{(1)}(x,t))|\psi(x,p-t)|\,dx.$$

Заметим, что функции $c_j(t)$, $j = 1,2$, являются непрерывными при $t \in [0,p]$ и $c_2(t) \geqslant 0$.

Зафиксируем управление (6) и разбиение ω. Обозначим

$$\begin{gathered} y_i^{(\omega)}(t) = \int_0^1 T_i^{(\omega)}(x,t)\psi(x,p-t)\,dx + \\ + T_i^{(\omega)}(0,t)\int_t^p \frac{\partial\psi(0,p-r)}{\partial x}\,dr - T_i^{(\omega)}(1,t)\int_t^p \frac{\partial\psi(1,p-r)}{\partial x}\,dr + \\ + \int_t^p \left(a_1(\tau)\int_\tau^p \frac{\partial\psi(0,p-r)}{\partial x}\,dr - b_1(\tau)\int_\tau^p \frac{\partial\psi(1,p-r)}{\partial x}\,dr + c_1(\tau)\right)d\tau. \end{gathered} \tag{11}$$

Тогда, принимая во внимание формулы (1), (7), (9) и (10), получим

$$\begin{gathered} \dot{y}_i^{(\omega)}(t) = \left(a_2(t)\int_t^p \frac{\partial\psi(0,p-r)}{\partial x}\,dr\right) G_i^{(1)}\overline{\xi}^{(j)}(t) - \\ - \left(b_2(t)\int_t^p \frac{\partial\psi(1,p-r)}{\partial x}\,dr\right) G_i^{(2)}\overline{\xi}^{(j)}(t) + c_2(t)s(t). \end{gathered} \tag{12}$$

Перепишем (12) в матричной форме

$$\dot{\overline{y}}^{(\omega)}(t) = -A(t)\overline{\xi}^{(j)}(t) + c_2(t)\overline{\eta}(t), \quad \overline{\xi}^{(j)}(t) \in \Pi(l), \quad \overline{\eta}(t) \in \Pi(n). \tag{13}$$

Здесь

$$\overline{y}^{(\omega)}(t) = (y_1^{(\omega)}(t), y_2^{(\omega)}(t), \ldots, y_n^{(\omega)}(t))^*,$$
$$A(t) = -\left(a_2(t)\int_t^p \frac{\partial\psi(0,p-r)}{\partial x}\,dr\right) G^{(1)} + \left(b_2(t)\int_t^p \frac{\partial\psi(1,p-r)}{\partial x}\,dr\right) G^{(2)},$$
$$\Pi(k) = \{\overline{s} = (s_1, s_2, \ldots, s_k) \in \mathbb{R}^k \colon |s_i| \leqslant 1, i = \overline{1,k}\}, \quad k = l,n.$$

Обозначим через $\langle\cdot,\cdot\rangle$ операцию скалярного произведения двух векторов. Положим

$$a(t) = \max_{\overline{\xi}\in\Pi(l)} \langle\overline{\lambda}, A(t)\overline{\xi}\rangle, \quad b(t) = \max_{\overline{\xi}\in\Pi(n)} \langle\overline{\lambda}, c_2(t)\overline{\eta}\rangle.$$

Отметим, что эти функции являются непрерывными.

Тогда из связности и симметричности компактов $\Pi(l)$ и $\Pi(n)$ следует

$$\langle\overline{\lambda}, A(t)\overline{\xi}\rangle = a(t)u, \quad |u| \leqslant 1; \quad \langle\overline{\lambda}, c_2(t)\overline{\eta}\rangle = b(t)v, \quad |v| \leqslant 1. \tag{14}$$

Перейдем к новой одномерной переменной

$$z = \langle\overline{\lambda}, \overline{y}\rangle - \alpha. \tag{15}$$

Подставим в формулу (11) реализовавшиеся функции $T_i^{(\omega)}(x,t)$. Учитывая (15), получим ломаную $z^{(\omega)}(t)$, которая удовлетворяет равенству

$$z^{(\omega)}(p) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \int_0^1 T_i^{(\omega)}(x,p)\sigma(x)dx - \alpha.$$

Отсюда следует, что неравенство (8) принимает вид

$$|z^{(\omega)}(p)| \leqslant \gamma. \tag{16}$$

Продифференцируем z, учитывая (13) и (14). Получим одномерную задачу

$$\dot{z}^{(\omega)}(t) = -a(t)u + b(t)v, \quad |u| \leqslant 1, \quad |v| \leqslant 1, \quad |z(p)| \leqslant \varepsilon. \tag{17}$$

Обозначим

$$F(z) = \max\left(|z| + \int_0^p (b(r) - a(r))\,dr; \quad \max_{0\leqslant\tau\leqslant p} \int_\tau^p (b(r) - a(r))\,dr\right).$$

Теорема 1. *Пусть начальные распределения температур $T_i(x,0) = g_i(x)$ и число $\varepsilon \geqslant 0$ таковы, что выполнено неравенство*

$$F(z(0)) \leqslant \varepsilon. \tag{18}$$

Тогда существует управление (6), гарантирующее выполнение поставленной цели (4).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Определим $\overline{\xi}_0(t) = N(t, \overline{T}(\cdot,\tau))$, $t \in [\tau, p]$, как решение задачи

$$\langle\overline{\lambda}, A(t)\overline{\xi}(t)\rangle \text{sign } z(t) \to \max_{\overline{\xi}(t)\in\Pi(l)}. \tag{19}$$

Здесь и в дальнейшем $\text{sign } 0 = 1$.

Далее, учитывая (14), подставим управление $\overline{\xi}_0(t)$ в (17). Получим, что

$$\dot{z}^{(\omega)}(t) = -a(t)\text{sign } z(t_j) + b(t)v(t), \quad |v(t)| \leqslant 1. \tag{20}$$

Здесь $v(t)$ — любое с $|v(t)| \leqslant 1$, если $b(t) = 0$ и $v(t) = \dfrac{\langle\overline{\lambda}, c_2(t)\overline{\eta}(t)\rangle}{b(t)}$ при $b(t) > 0$.

Каждая измеримая функция $v\colon [0,p] \to [-1,1]$ при $z^{(\omega)}(0) = z(0)$ определяет ломаную $z^{(\omega)}(t)$, удовлетворяющую уравнению (20). Семейство этих ломаных, определенных на отрезке $[0,p]$, является равномерно ограниченным и равностепенно непрерывным [20, с. 46]. По теореме Арцела [22, с. 104] из любой последовательности этих ломаных можно выделить подпоследовательность равномерно сходящуюся на отрезке $[0,p]$. Предельная функция $z(t)$ удовлетворяет [20, теорема 8.1] неравенству

$$|z(p)| \leqslant F(z(0)). \tag{21}$$

Возьмем число $\gamma > \varepsilon$. Покажем, что существует число $\delta > 0$ такое, что выполнено неравенство (16) для любой ломаной $z^{(\omega)}(t)$ с диаметром разбиения $d(\omega) < \delta$.

В самом деле, допустим противное. Тогда существует последовательность ломаных $z^{(\omega_k)}(t)$ с диаметрами $d(\omega_k) \to 0$, у которых $|z^{(\omega_k)}(p)| > \gamma$. Можно считать, что функции $z^{(\omega_k)}(t)$ сходятся на отрезке $[0, p]$ равномерно к функции $z(t)$ (иначе перейдем к подпоследовательности). Тогда $|z(p)| \geqslant \gamma$. Это неравенство противоречит неравенствам (18) и (21). $\square$

Рассмотрим теперь случай, когда в (13) при $t_j < t < t_{j+1}$ реализуется функция

$$\overline{\eta}(t) = \mathrm{sign}(z^{(\omega)}(t_j))(1, 1, \ldots, 1)^*.$$

Учитывая (14), подставим данную функцию $\eta(t)$ в (17). Получим, что

$$\dot{z}^{(\omega)}(t) = -a(t)u_j(t) + b(t)\mathrm{sign}\ z^{(\omega)}(t_j), \tag{22}$$

где

$$a(t)u_j(t) = \langle \overline{\lambda}, A(t)\overline{\xi}^{(j)}(t)\rangle.$$

Выбирая произвольные измеримые функции $\overline{\xi}^{(j)}(t) \in \Pi(l)$ и решая уравнение (22) с $z^{(\omega)}(0) = z(0)$, получим семейство ломаных $z^{(\omega)}(t)$.

Теорема 2. *Пусть число $0 \leqslant \gamma < F(z(0))$. Тогда существует число $\delta > 0$ такое, что $|z_\omega(p)| > \gamma$ для любой ломаной $z_\omega(t)$ с диаметром разбиения $d(\omega) < \delta$.*

Доказательство данной теоремы проводится по аналогии с доказательством теоремы 2 из [18].

§ 4. Пример

В качестве примера рассмотрим задачу о нагреве системы, состоящей из двух однородных стержней единичной длины.

Пусть функция $\sigma(x) = \sin \pi x$, $0 \leqslant x \leqslant 1$. Решением задачи (9) для этой функции является

$$\psi(x, \tau) = e^{-\pi^2 t} \sin \pi x, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad t \geqslant 0.$$

Далее, пусть $\overline{\xi}(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t), \xi_3(t))^*$, $\overline{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2)^*$ и

$$G^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad G^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вычислим

$$A(t) = -\left(a_2(t)\int_t^p \frac{\partial\psi(0, p-r)}{\partial x}dr\right)G^{(1)} + \left(b_2(t)\int_t^p \frac{\partial\psi(1, p-r)}{\partial x}dr\right)G^{(2)} =$$
$$= \frac{1 - e^{-\pi^2(p-t)}}{\pi}\begin{pmatrix} -a_2(t) & b_2(t) & 0 \\ 0 & -a_2(t) & -b_2(t) \end{pmatrix}.$$

Зафиксируем $\alpha \in \mathbb{R}$. Подставив найденную функцию $\psi(x, t)$ в формулу (11) при $T^{(\omega)}(x, t) = T(x, t)$ и применив (15), вычислим $z(t)$ в рассматриваемом примере.

Пусть $z(t) \geqslant 0$, тогда задача (19) примет вид

$$\langle \overline{\lambda}, A(t)\overline{\xi}(t)\rangle \to \max_{\overline{\xi}(t)\in\Pi(3)}.$$

Перепишем эту задачу в следующем виде

$$\langle A^*(t)\overline{\lambda}, \overline{\xi}(t)\rangle \to \max_{\overline{\xi}(t)\in\Pi(3)}, \tag{23}$$

где

$$A^*(t)\overline{\lambda} = \frac{1-e^{-\pi^2(p-t)}}{\pi}(-\lambda_1 a_2(t), \lambda_1 b_2(t) - \lambda_2 a_2(t), -\lambda_2 b_2(t))^*.$$

Получим решение задачи (23)

$$\overline{\xi}_0(t) = (-1, 1, -1)^* \quad \text{при } \lambda_1 b_2(t) - \lambda_2 a_2(t) \geqslant 0;$$
$$\overline{\xi}_0(t) = (-1, -1, -1)^* \quad \text{при } \lambda_1 b_2(t) - \lambda_2 a_2(t) < 0.$$

Пусть $z(t) < 0$. Тогда задача (19) примет вид

$$\langle \overline{\lambda}, A(t)\overline{\xi}(t)\rangle \to \min_{\overline{\xi}(t)\in\Pi(3)}.$$

Решая эту задачу, получим

$$\overline{\xi}_0(t) = (1, -1, 1)^* \text{ при } \lambda_1 b_2(t) - \lambda_2 a_2(t) \geqslant 0, \quad \overline{\xi}_0(t) = (1, 1, 1)^* \text{ при } \lambda_1 b_2(t) - \lambda_2 a_2(t) < 0.$$

Финансирование. Исследования выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 19–11–00105, https://rscf.ru/project/19-11-00105/.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Осипов Ю. С. Позиционное управление в параболических системах // Прикладная математика и механика. 1977. Т. 41. № 2. С. 195–201.
2. Короткий А. И., Осипов Ю. С. Аппроксимация в задачах позиционного управления параболическими системами // Прикладная математика и механика. 1978. Т. 42. № 4. С. 599–605.
3. Егоров А. И. Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами. М.: Наука, 1978.
4. Barseghyan V. R. The problem of control of rod heating process with nonseparated conditions at intermediate moments of time // Archives of Control Sciences. 2021. Vol. 31. No. 3. P. 481–493. https://doi.org/10.24425/acs.2021.138689
5. Casas E., Kunisch K. Optimal control of semilinear parabolic equations with non-smooth pointwise-integral control constraints in time-space // Applied Mathematics and Optimization. 2022. Vol. 85. Article number: 12. https://doi.org/10.1007/s00245-022-09850-7
6. Акча Х., Максимов В. И. Устойчивое граничное управление параболическим уравнением // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2021. Т. 27. № 2. С. 7–18. https://doi.org/10.21538/0134-4889-2021-27-2-7-18
7. Lohéac J. Nonnegative boundary control of 1D linear heat equations // Vietnam Journal of Mathematics. 2021. Vol. 49. Issue 3. P. 845–870. https://doi.org/10.1007/s10013-021-00497-5
8. Liu J., Zheng G., Ali M. M. Stability analysis of the anti-stable heat equation with uncertain disturbance on the boundary // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2015. Vol. 428. Issue 2. P. 1193–1201. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2015.03.073

9. Dai J., Ren B. UDE-based robust boundary control of heat equation with unknown input disturbance // IFAC-PapersOnLine. 2017. Vol. 50. Issue 1. P. 11403–11408. https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2017.08.1801
10. Feng H., Xu C.-Z., Yao P.-F. Observers and disturbance rejection control for a heat equation // IEEE Transactions on Automatic Control. 2020. Vol. 65. Issue 11. P. 4957–4964. https://doi.org/10.1109/TAC.2020.3022849
11. Homayounzade M. Adaptive robust output-feedback boundary control of an unstable parabolic PDE subjected to unknown input disturbance // International Journal of Systems Science. 2021. Vol. 52. Issue 11. P. 2324–2337. https://doi.org/10.1080/00207721.2021.1884316
12. Красовский Н. Н. Управление динамической системой. М.: Наука, 1985.
13. Осипов Ю. С., Охезин С. П. К теории дифференциальных игр в параболических системах // Докл. АН СССР. 1976. Т. 226. № 6. С. 1267–1270. http://mi.mathnet.ru/dan39791
14. Охезин С. П. Дифференциальная игра сближения–уклонения для параболической системы с интегральными ограничениями на управления игроков // Прикладная математика и механика. 1977. Т. 41. № 2. С. 202–209.
15. Власенко Л. А., Руткас А. Г., Чикрий А. А. О дифференциальной игре в абстрактной параболической системе // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21. № 2. С. 26–40. http://mi.mathnet.ru/timm1168
16. Allahabi F., Mahiub M. A. A problem of pursuit game with various constraints on controls of players // International Journal of Partial Differential Equations and Applications. 2019. Vol. 6. Issue 1. P. 13–17. http://pubs.sciepub.com/ijpdea/6/1/2
17. Ukhobotov V. I., Izmest'ev I. V. The problem of controlling the process of heating the rod in the presence of disturbance and uncertainty // IFAC-PapersOnLine. 2018. Vol. 51. Issue 32. P. 739–742. https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2018.11.458
18. Ухоботов В. И., Изместьев И. В. Задача управления процессом нагрева стержня с неизвестными температурой на правом конце и плотностью источника тепла // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2019. Т. 25. № 1. С. 297–305. https://doi.org/10.21538/0134-4889-2019-25-1-297-305
19. Понтрягин Л. С. Линейные дифференциальные игры преследования // Математический сборник (новая серия). 1980. Т. 112 (154). № 3 (7). С. 307–330. http://mi.mathnet.ru/msb2728
20. Ухоботов В. И. Метод одномерного проектирования в линейных дифференциальных играх с интегральными ограничениями. Челябинск: Челябинский государственный университет, 2005.
21. Ухоботов В. И. Однотипные дифференциальные игры с выпуклой целью // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16. № 5. С. 196–204. http://mi.mathnet.ru/timm622
22. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972.

Поступила в редакцию 18.11.2022

Принята к публикации 06.12.2022

Изместьев Игорь Вячеславович, к. ф.-м. н., доцент, Институт математики и механики УрО РАН, 620219, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16;
научный сотрудник, кафедра теории управления и оптимизации, Челябинский государственный университет, 454001, Россия, г. Челябинск, ул. Братьев Кашириных, 129.
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-0134-8466
E-mail: j748e8@gmail.com

Ухоботов Виктор Иванович, д. ф.-м. н., профессор, Институт математики и механики УрО РАН, 620219, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16;
заведующий кафедрой теории управления и оптимизации, Челябинский государственный университет, 454001, Россия, г. Челябинск, ул. Братьев Кашириных, 129.
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-2130-6482
E-mail: ukh@csu.ru

Цитирование: И. В. Изместьев, В. И. Ухоботов. Об одной задаче управления нагревом системы стержней при наличии неопределенности // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2022. Т. 32. Вып. 4. С. 546–556.

MATHEMATICS 2022. Vol. 32. Issue 4. Pp. 546–556.

I. V. Izmest'ev, V. I. Ukhobotov

On one problem of controlling the heating of a rod system under uncertainty

Keywords: control, uncertainty, parabolic system.

MSC2020: 35K05, 49N70, 91A23

DOI: 10.35634/vm220404

The problem of control of a parabolic system, which describes the heating of a given number of rods, is considered. The density functions of the internal heat sources of the rods are not exactly known, and only the segment of their change is given. Control are point heat sources that are located at the ends of the rods. The goal of the choice of control is to ensure that at a fixed time the modulus of the linear function determined using the average temperatures of the rods does not exceed the given value for any admissible functions of the density of internal heat sources. A technique has been developed for reducing this problem to a one-dimensional control problem under uncertainty. Necessary and sufficient termination conditions are found.

Funding. The research was supported by a grant from the Russian Science Foundation no. 19–11–00105, https://rscf.ru/project/19-11-00105/.

REFERENCES

1. Osipov Yu. S. Position control in parabolic systems, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1977, vol. 41, no. 2, pp. 187–193. https://doi.org/10.1016/0021-8928(77)90001-6
2. Korotkii A. I., Osipov Yu. S. Approximation in problems of position control of parabolic systems, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1978, vol. 42, no. 4, pp. 631–637. https://doi.org/10.1016/0021-8928(78)90004-7
3. Egorov A. I. *Optimal'noe upravlenie teplovymi i diffuzionnymi protsessami* (Optimal control of thermal and diffusion processes), Moscow: Nauka, 1978.
4. Barseghyan V. R. The problem of control of rod heating process with nonseparated conditions at intermediate moments of time, *Archives of Control Sciences*, 2021, vol. 31, no. 3, pp. 481–493. https://doi.org/10.24425/acs.2021.138689
5. Casas E., Kunisch K. Optimal control of semilinear parabolic equations with non-smooth pointwise-integral control constraints in time-space, *Applied Mathematics and Optimization*, 2022, vol. 85, article number: 12. https://doi.org/10.1007/s00245-022-09850-7
6. Akca H., Maksimov V. I. Stable boundary control of a parabolic equation, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2022, vol. 315, suppl. 1, pp. S1–S12. https://doi.org/10.1134/S0081543821060018
7. Lohéac J. Nonnegative boundary control of 1D linear heat equations, *Vietnam Journal of Mathematics*, 2021, vol. 49, issue 3, pp. 845–870. https://doi.org/10.1007/s10013-021-00497-5
8. Liu J., Zheng G., Ali M. M. Stability analysis of the anti–stable heat equation with uncertain disturbance on the boundary, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2015, vol. 428, issue 2, pp. 1193–1201. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2015.03.073
9. Dai J., Ren B. UDE-based robust boundary control of heat equation with unknown input disturbance, *IFAC-PapersOnLine*, 2017, vol. 50, issue 1, pp. 11403–11408. https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2017.08.1801
10. Feng H., Xu C.-Z., Yao P.-F. Observers and disturbance rejection control for a heat equation, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2020, vol. 65, issue 11, pp. 4957–4964. https://doi.org/10.1109/TAC.2020.3022849
11. Homayounzade M. Adaptive robust output-feedback boundary control of an unstable parabolic PDE subjected to unknown input disturbance, *International Journal of Systems Science*, 2021, vol. 52, issue 11, pp. 2324–2337. https://doi.org/10.1080/00207721.2021.1884316

12. Krasovskii N. N. *Upravlenie dinamicheskoi sistemoi* (Control of a dynamical system), Moscow: Nauka, 1985.
13. Osipov Yu. S., Okhezin S. P. On the theory of differential games in parabolic systems, *Soviet Mathematics. Doklady*, 1976, vol. 17, pp. 278–282. https://zbmath.org/?q=an:0367.90144
14. Okhezin S. P. Differential encounter–evasion game for a parabolic system under integral constraints on the player's controls, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1977, vol. 41, no. 2, pp. 194–201. https://doi.org/10.1016/0021-8928(77)90002-8
15. Vlasenko L. A., Rutkas A. G., Chikrii A. A. On a differential game in an abstract parabolic system, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2016, vol. 293, suppl. 1, pp. 254–269. https://doi.org/10.1134/S0081543816050229
16. Allahabi F., Mahiub M. A. A problem of pursuit game with various constraints on controls of players, *International Journal of Partial Differential Equations and Applications*, 2019, vol. 6, issue 1, pp. 13–179. http://pubs.sciepub.com/ijpdea/6/1/2
17. Ukhobotov V. I., Izmest'ev I. V. The problem of controlling the process of heating the rod in the presence of disturbance and uncertainty, *IFAC-PapersOnLine*, 2018, vol. 51, issue 32, pp. 739–742. https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2018.11.458
18. Ukhobotov V. I., Izmest'ev I. V. A control problem for a rod heating process with unknown temperature at the right end and unknown density of the heat source, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2019, vol. 25, no. 1, pp. 297–305 (in Russian). https://doi.org/10.21538/0134-4889-2019-25-1-297-305
19. Pontrjagin L. S. Linear differential games of pursuit, *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 1981, vol. 40, no. 3, pp. 285–303. https://doi.org/10.1070/SM1981v040n03ABEH001815
20. Ukhobotov V. I. *Metod odnomernogo proektirovaniya v lineinykh differentsial'nykh igrakh s integral'nymi ogranicheniyami* (Method of one-dimensional projecting in linear differential games with integral constraints), Chelyabinsk: Chelyabinsk State University, 2005.
21. Ukhobotov V. I. One type differential games with convex goal, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2010, vol. 16, no. 5, pp. 196–204 (in Russian). http://mi.mathnet.ru/eng/timm622
22. Kolmogorov A. N., Fomin S. V. *Elementy teorii funktsii i funktsional'nogo analiza* (Elements of the theory of functions and functional analysis), Moscow: Nauka, 1972.

Received 18.11.2022

Accepted 06.12.2022

Igor' Vyacheslavovich Izmest'ev, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620219, Russia;
Researcher, Department of Control Theory and Optimization, Chelyabinsk State University, ul. Brat'ev Kashirinykh, 129, Chelyabinsk, 454001, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-0134-8466
E-mail: j748e8@gmail.com

Viktor Ivanovich Ukhobotov, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620219, Russia;
Head of Department of Control Theory and Optimization, Chelyabinsk State University, ul. Brat'ev Kashirinykh, 129, Chelyabinsk, 454001, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-2130-6482
E-mail: ukh@csu.ru

Citation: I. V. Izmest'ev, V. I. Ukhobotov. On one problem of controlling the heating of a rod system under uncertainty, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2022, vol. 32, issue 4, pp. 546–556.