

УДК 532.3, 517.933

© *Е. В. Ветчанин, И. С. Мамаев*

## ПЕРИОДИЧЕСКОЕ ВОЗМУЩЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ НЕУРАВНОВЕШЕННОГО КРУГОВОГО ПРОФИЛЯ В ПРИСУТСТВИИ ТОЧЕЧНЫХ ВИХРЕЙ В ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

Рассмотрена динамика системы, описывающей управляемое движение неуравновешенного кругового профиля в присутствии точечных вихрей. Управление движением профиля реализуется за счет периодического изменения положения центра масс, гиростатического момента и момента инерции системы. Предложен вывод уравнений движения на основе подхода Седова, уравнения движения представлены в гамильтоновой форме. Рассмотрено периодическое возмущение известного интегрируемого случая.

*Ключевые слова:* движение в идеальной жидкости, точечные вихри, периодическое возмущение, взаимодействие вихрей с телом.

DOI: [10.35634/vm220409](https://doi.org/10.35634/vm220409)

### Введение

Одной из классических задач механики является задача об исследовании движения твердого тела в жидкости и влияния вихревых структур на его движение. Одной из простейших моделей, описывающих данный процесс, является модель движения кругового профиля в идеальной жидкости в присутствии точечных вихрей [8, 13–15]. Более сложные модели учитывают также смещение центра масс профиля [10] и описывают движение профилей более сложной формы, например, профилей с острой кромкой [11, 12]. Достаточно широкий литературный обзор по динамике вихревых структур можно найти в [1]. Отметим, также работу [5], в которой рассматривалось влияние точечной особенности другого типа (источник) на движение кругового профиля.

Различные модели, описывающие движение твердых тел (см., например, [4, 6, 7, 10, 16]), интересны не только с прикладной точки зрения, но и с точки зрения изучения их интегрируемости и обнаружения в них различных динамических эффектов. Например, в работе [10] было рассмотрено неуправляемое движение неуравновешенного кругового профиля в присутствии точечных вихрей в идеальной жидкости. Были указаны различные интегрируемые случаи.

Настоящая работа является продолжением статьи [10]. В § 1 построены уравнения движения, описывающие управляемое движение неуравновешенного кругового профиля в идеальной жидкости в присутствии точечных вихрей. В отличие от работы [10] при вычислении сил, действующих на профиль, здесь мы используем подход Седова [3], основанный на использовании комплексного потенциала течения и теоремы о вычетах. В § 2 выполнена редукция, исключаяющая из гамильтониана явную зависимость от координат, описывающих поворот профиля и положение его геометрического центра. В § 3 представлен известный из работы [10] интегрируемый случай и его периодическое возмущение.

### § 1. Математическая модель

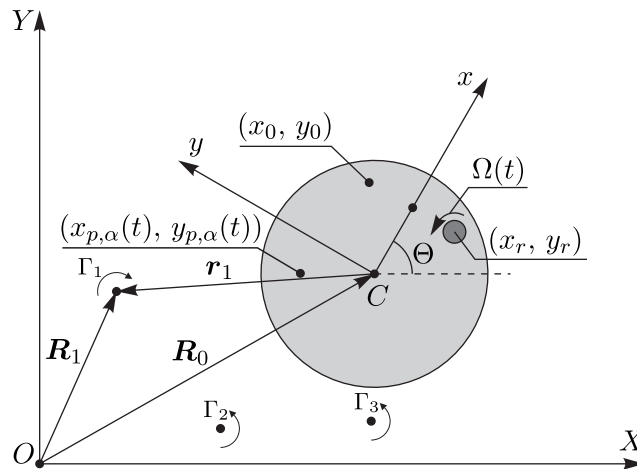
**1.1. Уравнения движения.** Рассмотрим плоскопараллельное движение кругового профиля в неограниченном объеме идеальной несжимаемой жидкости, управляемое с помощью

вращения ротора и перемещения внутренних материальных точек. Относительно рассматриваемой системы примем следующие допущения.

- 1° Движение жидкости потенциально. Жидкость покоится на бесконечности. Жидкость не подвержена действию каких-либо внешних сил.
- 2° В жидкости присутствуют точечные вихри. В силу несжимаемости жидкости и допущения 1° для рассматриваемой системы справедливы теоремы Лагранжа и Гельмгольца. Таким образом, точечные вихри не могут возникнуть или исчезнуть, а их интенсивности являются постоянными.
- 3° Ротор является однородным и осесимметричным. Ось вращения ротора проходит через его геометрический центр и перпендикулярна плоскости движения. Таким образом, вращение ротора не изменяет распределения масс системы.

Введем следующие обозначения:

- $m_0, I_0$  — масса и центральный момент инерции профиля соответственно;
- $m_r, I_r$  — масса и центральный момент инерции ротора соответственно;
- $m_\alpha$  — масса  $\alpha$ -ой материальной точки,  $\alpha = 1, \dots, M$ ;
- $\Gamma_0$  — собственная циркуляция профиля;
- $\Gamma_\alpha$  — интенсивность  $\alpha$ -ого вихря,  $\alpha = 1, \dots, N$ .



**Рис. 1.**  $OXY$  — неподвижная система координат,  $Cxy$  — подвижная система координат

Для описания движения системы введем две системы координат (см. рис. 1):

- неподвижную (инерциальную)  $OXY$ , в которой жидкость покоится на бесконечности;
- подвижную  $Cxy$ , жестко связанную с профилем, начало координат  $C$  которой совпадает с геометрическим центром профиля.

Положение цилиндра относительно неподвижной системы координат будем задавать радиус-вектором  $\mathbf{R}_0 = (X_0, Y_0)$  его геометрического центра, а ориентацию — углом  $\Theta$  между положительными направлениями осей  $OX$  и  $Cx$ , отсчитываемым от оси  $OX$  против часовой стрелки. Таким образом, конфигурационное пространство профиля представляет собой

$$\mathcal{N} = \{(X_0, Y_0, \Theta) \mid \Theta \bmod 2\pi\} \approx \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1.$$

Положение точечных вихрей относительно неподвижной системы координат обозначим как  $\mathbf{R}_\alpha = (X_\alpha, Y_\alpha)$ ,  $\alpha = 1, \dots, N$ . Поскольку положения вихрей попарно несовпадают, то конфигурационное пространство системы вихрей представляет собой

$$\mathcal{S} = \{(X_1, Y_1, \dots, X_N, Y_N) \mid X_j^2 + Y_j^2 > R^2, j = 1, \dots, N, \\ (X_i - X_j)^2 + (Y_i - Y_j)^2 > 0, \forall i \neq j\} \approx \underbrace{\mathbb{R}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \dots \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{S}^1}_{N \text{ times}} \setminus \mathcal{D},$$

где  $R$  — радиус цилиндра,  $\mathcal{D} = \{(X_1, Y_1, \dots, X_N, Y_N) \mid \exists i, j: X_i = X_j, Y_i = Y_j\}$  — обобщенная диагональ.

В силу допущений 1° и 2° движение жидкости может быть полностью описано комплексным потенциалом:

$$W = -\frac{\dot{Z}_0 R^2}{Z - Z_0} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln(Z - Z_0) + \sum_{\alpha=1}^N \frac{\Gamma_\alpha}{2\pi i} \left( \ln(Z - Z_\alpha) - \ln(Z - Z_\alpha^*) \right), \quad (1.1)$$

$$Z_\alpha^* = Z_0 + \frac{R^2}{Z_\alpha - Z_0}, \quad \Gamma = \Gamma_0 + \sum_{\alpha=1}^N \Gamma_\alpha,$$

где  $Z_0 = X_0 + iY_0$ ,  $Z_\alpha = X_\alpha + iY_\alpha$  — комплексные координаты геометрического центра профиля и  $\alpha$ -го вихря соответственно,  $Z_\alpha^*$  — образ  $\alpha$ -го вихря,  $\Gamma$  — суммарная завихренность системы.

**Замечание 1.** В выражении (1.1) первое слагаемое соответствует комплексному потенциалу кругового профиля. Второе слагаемое описывает циркуляционное движение жидкости вокруг профиля. Первое слагаемое под суммой описывает течение, создаваемое точечным вихрем, расположенным в точке  $Z_\alpha$ . Второе слагаемое под суммой возникает вследствие применения теоремы Милна–Томсона и обеспечивает выполнение условия непротекания на границе профиля.

Комплексный потенциал (1.1) позволяет определить скорость в любой точке жидкости, несовпадающей с точечными вихрями. Кроме того, в силу несжимаемости и допущения 1° движение жидкости обладает интегралом Коши–Лагранжа [2], из которого может быть найдено распределение давления по контуру профиля. Последнее в свою очередь позволяет вычислить силу, действующую на профиль со стороны жидкости. Для рассматриваемой системы вычисление силы удобно выполнить в комплексной форме с помощью формулы Седова [3]:

$$F_X + iF_Y = \frac{i\rho}{2} \oint_C \left( \frac{dW}{dZ} \right)^2 dZ + \frac{d}{dt} \left( \rho \frac{dS Z_0}{dt} + i\rho \oint_C Z \frac{dW}{dZ} dZ \right),$$

где  $S = \pi R^2$  — площадь профиля.

Явные вычисления приведут к следующему выражению для силы:

$$F_X + iF_Y = -\rho\pi R^2 \ddot{Z}_0 + f_X + if_Y, \quad (1.2)$$

где

$$f_X + if_Y = i\rho\Gamma_0 \dot{Z}_0 + i\rho R^2 \sum_{\alpha} \frac{\Gamma_{\alpha} \dot{Z}_{\alpha} \Delta Z_{\alpha}^2}{|\Delta Z_{\alpha}|^4} + \\ + \frac{\rho}{2\pi} \sum_{\alpha} \left( \frac{\Gamma_{\alpha}^2}{|\Delta Z_{\alpha}|^2 - R^2} - \frac{\Gamma \Gamma_{\alpha}}{|\Delta Z_{\alpha}|^2} \right) \Delta Z_{\alpha} + \\ + \frac{\rho}{2\pi} \sum_{\alpha < \beta} \frac{\Gamma_{\alpha} \Gamma_{\beta} (\Delta Z_{\alpha} (|\Delta Z_{\beta}|^2 - R^2) + \Delta Z_{\beta} (|\Delta Z_{\alpha}|^2 - R^2))}{|\Delta Z_{\alpha} \Delta Z_{\beta}|^2 - R^2 (\Delta \bar{Z}_{\alpha} \Delta Z_{\beta} + \Delta Z_{\alpha} \Delta \bar{Z}_{\beta}) + R^4}. \quad (1.3)$$

Здесь  $\Delta Z_\alpha = Z_\alpha - Z_0$ . Отметим, что первое слагаемое в выражении (1.2) совпадает с выражением для силы, обусловленной эффектом присоединенных масс, а первое слагаемое в выражении (1.3) совпадает с известной формулой Жуковского [2] для подъемной силы.

**Замечание 2.** Компоненты силы (1.2) могут быть вычислены также в действительной форме как это было сделано в работе [10].

Для построения уравнений движения профиля обозначим проекции импульса системы на неподвижные оси и ее момент импульса относительно геометрического центра профиля:

$$\begin{aligned} P_X &= A\dot{X}_0 - m(c_1(t) \sin \Theta + c_2(t) \cos \Theta)\dot{\Theta} + m(\dot{c}_1(t) \cos \Theta - \dot{c}_2(t) \sin \Theta), \\ P_Y &= A\dot{Y}_0 + m(c_1(t) \cos \Theta - c_2(t) \sin \Theta)\dot{\Theta} + m(\dot{c}_1(t) \sin \Theta + \dot{c}_2(t) \cos \Theta), \\ P_\Theta &= -m(c_1(t) \sin \Theta + c_2(t) \cos \Theta)\dot{X}_0 + m(c_1(t) \cos \Theta - c_2(t) \sin \Theta)\dot{Y}_0 + I(t)\dot{\Theta} + k(t), \\ m &= m_0 + m_r + \sum_{\alpha=1}^M m_\alpha, \quad A = m + \rho\pi R^2, \\ I(t) &= I_0 + m_0(x_0^2 + y_0^2) + I_r + m_r(x_r^2 + y_r^2) + \sum_{\alpha=1}^M m_\alpha(x_{p,\alpha}^2(t) + y_{p,\alpha}^2(t)), \\ c_1(t) &= \frac{1}{m} \left( m_0x_0 + m_r x_r + \sum_{\alpha=1}^M m_\alpha x_{p,\alpha}(t) \right), \quad c_2(t) = \frac{1}{m} \left( m_0y_0 + m_r y_r + \sum_{\alpha=1}^M m_\alpha y_{p,\alpha}(t) \right), \\ k(t) &= I_r\Omega(t) + \sum_{\alpha=1}^M m_\alpha (x_{p,\alpha}(t)\dot{y}_{p,\alpha}(t) - \dot{x}_{p,\alpha}(t)y_{p,\alpha}(t)), \end{aligned} \tag{1.4}$$

где  $x_0, y_0$  — координаты центра масс профиля относительно подвижной системы координат  $Cxy$ ,  $x_r, y_r$  — координаты центра масс ротора относительно подвижной системы координат  $Cxy$ ,  $x_{p,\alpha}(t), y_{p,\alpha}(t)$  — координаты  $\alpha$ -ой материальной точки относительно подвижной системы координат  $Cxy$ ,  $c_1(t), c_2(t)$  — координаты центра масс системы относительно осей подвижной системы координат  $Cxy$ ,  $I(t)$  — момент инерции системы, вычисленный относительно начала подвижной системы координат  $Cxy$ ,  $k(t)$  — гиростатический момент ротора,  $\Omega(t)$  — угловая скорость ротора.

**Замечание 3.** В работе [10] в определении импульсов были неверно выбраны знаки слагаемых, связанных с влиянием смещения центра масс:

$$\begin{aligned} P_X &= A\dot{X}_0 + m(c_1 \sin \Theta + c_2 \cos \Theta)\dot{\Theta}, \\ P_Y &= A\dot{Y}_0 - m(c_1 \cos \Theta - c_2 \sin \Theta)\dot{\Theta}, \\ P_\Theta &= +m(c_1 \sin \Theta + c_2 \cos \Theta)\dot{X}_0 - m(c_1 \cos \Theta - c_2 \sin \Theta)\dot{Y}_0 + I(t)\dot{\Theta}, \end{aligned}$$

Однако данная ошибка не оказывает влияния на качественные результаты, полученные в работе [10], и исправляется простой заменой  $\Theta \rightarrow \Theta + \pi$ .

Изменение величин (1.4) подчиняется следующим уравнениям:

$$\dot{P}_X = f_X, \quad \dot{P}_Y = f_Y, \quad \dot{P}_\Theta = P_X\dot{Y}_0 - P_Y\dot{X}_0. \tag{1.5}$$

Уравнения (1.5) необходимо дополнить уравнениями движения вихрей

$$\dot{\bar{Z}}_\alpha = \left. \frac{dW^*}{dZ} \right|_{Z=Z_\alpha}, \quad W^* = W - \frac{\Gamma_\alpha}{2\pi i} \ln(Z - Z_\alpha),$$

которые можно представить в следующей явной форме

$$\dot{Z}_\alpha = \frac{\dot{\bar{Z}}_0 \Delta Z_\alpha^2 R^2}{|\Delta Z_\alpha|^4} - \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{\Delta Z_\alpha}{|\Delta Z_\alpha|^2} + \frac{\Gamma_\alpha}{2\pi i} \frac{\Delta Z_\alpha}{|\Delta Z_\alpha|^2 - R^2} - \sum_{\beta \neq \alpha} \frac{\Gamma_\beta}{2\pi i} \left( \frac{\Delta Z_\alpha - \Delta Z_\beta}{|\Delta Z_\alpha - \Delta Z_\beta|^2} - \frac{\Delta Z_\beta (\Delta Z_\alpha \overline{\Delta Z_\beta} - R^2)}{|\Delta Z_\alpha \Delta Z_\beta - R^2|^2} \right). \quad (1.6)$$

**Замечание 4.** При построении уравнений движения вихрей (1.6) в данной работе используется стандартный подход, основанный на вычислении скорости потока в точке занятой вихрем по десингуляризованной части комплексного потенциала. Вопрос построения уравнения движения точечных особенностей (вихрей, источников, диполей, мультиполей) является дискуссионным, и обсуждался, например, в работе [9].

**1.2. Лагранжева форма уравнений движения.** Уравнения движения профиля (1.5) можно представить в лагранжевой форме

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{X}_0} - \frac{\partial L}{\partial X_0} = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{Y}_0} - \frac{\partial L}{\partial Y_0} = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\Theta}} - \frac{\partial L}{\partial \Theta} = 0 \quad (1.7)$$

с лагранжианом

$$L = T + B_X \dot{X}_0 + B_Y \dot{Y}_0 - U,$$

где кинетическая энергия  $T$  имеет вид

$$T = \frac{1}{2} A \left( \dot{X}_0^2 + \dot{Y}_0^2 \right) + \frac{1}{2} I(t) \dot{\Theta}^2 - m(c_1(t) \sin \Theta + c_2(t) \cos \Theta) \dot{X}_0 \dot{\Theta} + m(c_1(t) \cos \Theta - c_2(t) \sin \Theta) \dot{Y}_0 \dot{\Theta} + m(\dot{c}_1(t) \cos \Theta - \dot{c}_2(t) \sin \Theta) \dot{X}_0 + m(\dot{c}_1(t) \sin \Theta + \dot{c}_2(t) \cos \Theta) \dot{Y}_0 + k(t) \dot{\Theta},$$

а компоненты  $B_X$ ,  $B_Y$  векторного потенциала и скалярный потенциал  $U$  задаются выражениями

$$B_X = - \sum_{\alpha} \rho R^2 \Gamma_{\alpha} \frac{\Delta Y_{\alpha}}{\Delta X_{\alpha}^2 + \Delta Y_{\alpha}^2} + \frac{\rho \Gamma_0 Y_0}{2}, \quad B_Y = \sum_{\alpha} \rho R^2 \Gamma_{\alpha} \frac{\Delta X_{\alpha}}{\Delta X_{\alpha}^2 + \Delta Y_{\alpha}^2} - \frac{\rho \Gamma_0 X_0}{2},$$

$$U = \frac{\rho}{4\pi} \sum_{\alpha} \left( \Gamma_{\alpha}^2 \ln(\Delta X_{\alpha}^2 + \Delta Y_{\alpha}^2 - R^2) - \Gamma_{\alpha} \ln(\Delta X_{\alpha}^2 + \Delta Y_{\alpha}^2) \right) +$$

$$+ \frac{\rho}{4\pi} \sum_{\alpha < \beta} \Gamma_{\alpha} \Gamma_{\beta} \ln \frac{(\Delta X_{\alpha}^2 + \Delta Y_{\alpha}^2)(\Delta X_{\beta}^2 + \Delta Y_{\beta}^2) - 2R^2(\Delta X_{\alpha} \Delta X_{\beta} + \Delta Y_{\alpha} \Delta Y_{\beta}) + R^4}{(\Delta X_{\alpha} - \Delta X_{\beta})^2 + (\Delta Y_{\alpha} - \Delta Y_{\beta})^2},$$

где  $\Delta X_{\alpha} = X_{\alpha} - X_0$ ,  $\Delta Y_{\alpha} = Y_{\alpha} - Y_0$ .

Уравнения движения вихрей (1.6) также выражаются через лагранжиан

$$\dot{X}_{\alpha} = - \frac{1}{\rho \Gamma_{\alpha}} \frac{\partial L}{\partial Y_{\alpha}}, \quad \dot{Y}_{\alpha} = \frac{1}{\rho \Gamma_{\alpha}} \frac{\partial L}{\partial X_{\alpha}}, \quad (1.8)$$

однако по форме они схожи с каноническими уравнениями Гамильтона.

**1.3. Гамильтонова форма уравнений движения.** Уравнения движения (1.7), (1.8) могут быть представлены в гамильтоновой форме. Для этого обозначим обобщенные импульсы системы

$$\Pi_X = \frac{\partial L}{\partial \dot{X}_0} = P_X + B_X, \quad \Pi_Y = \frac{\partial L}{\partial \dot{Y}_0} = P_Y + B_Y, \quad \Pi_\Theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\Theta}} = P_\Theta.$$

и выполним преобразование Лежандра

$$H = \left( \Pi_X \dot{X}_0 + \Pi_Y \dot{Y}_0 + \Pi_\Theta \dot{\Theta} - L \right) \Big|_{\dot{X}_0, \dot{Y}_0, \dot{\Theta} \rightarrow \Pi_X, \Pi_Y, \Pi_\Theta}.$$

Гамильтониан рассматриваемой системы может быть записан в следующей форме:

$$H = \frac{1}{2A} \left( (\Pi_X - D_X - B_X)^2 + (\Pi_Y - D_Y - B_Y)^2 \right) + \frac{1}{2\Delta} \left( A(\Pi_\Theta - k(t)) + C_Y(\Pi_X - D_X - B_X) - C_X(\Pi_Y - D_Y - B_Y) \right)^2 + U, \quad (1.9)$$

где

$$\begin{aligned} C_X &= m(c_1(t) \cos \Theta - c_2(t) \sin \Theta), & C_Y &= m(c_1(t) \sin \Theta + c_2(t) \cos \Theta), \\ D_X &= m(\dot{c}_1(t) \cos \Theta - \dot{c}_2(t) \sin \Theta), & D_Y &= m(\dot{c}_1(t) \sin \Theta + \dot{c}_2(t) \cos \Theta), \\ \Delta &= A^2 I - A(C_X^2 + C_Y^2) = A^2 I - Am(c_1^2(t) + c_2^2(t)). \end{aligned}$$

Уравнения движения будут иметь следующие ненулевые скобки Пуассона

$$\{X_0, \Pi_X\} = \{Y_0, \Pi_Y\} = \{\Theta, \Pi_\Theta\} = 1, \quad \{X_\alpha, Y_\alpha\} = \frac{1}{\rho \Gamma_\alpha}$$

и примут вид

$$\begin{aligned} \dot{X}_0 &= \frac{\partial H}{\partial \Pi_X}, & \dot{Y}_0 &= \frac{\partial H}{\partial \Pi_Y}, & \dot{\Theta} &= \frac{\partial H}{\partial \Pi_\Theta}, \\ \dot{\Pi}_X &= -\frac{\partial H}{\partial X_0}, & \dot{\Pi}_Y &= -\frac{\partial H}{\partial Y_0}, & \dot{\Pi}_\Theta &= -\frac{\partial H}{\partial \Theta}, \\ \dot{X}_\alpha &= \frac{1}{\rho \Gamma_\alpha} \frac{\partial H}{\partial Y_\alpha}, & \dot{Y}_\alpha &= -\frac{1}{\rho \Gamma_\alpha} \frac{\partial H}{\partial X_\alpha}. \end{aligned} \quad (1.10)$$

**1.4. Симметрии и первые интегралы.** Уравнения движения (1.10) допускают три первых интеграла

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_X &= \Pi_X + \frac{\rho \Gamma_0}{2} Y_0 + \rho \sum_{\alpha} \Gamma_{\alpha} Y_{\alpha}, & \mathcal{P}_Y &= \Pi_Y - \frac{\rho \Gamma_0}{2} X_0 - \rho \sum_{\alpha} \Gamma_{\alpha} X_{\alpha}, \\ \mathcal{M}_\Theta &= \Pi_\Theta + X_0 \Pi_Y - Y_0 \Pi_X - \frac{\rho}{2} \sum_{\alpha} \Gamma_{\alpha} (X_{\alpha}^2 + Y_{\alpha}^2). \end{aligned} \quad (1.11)$$

В автономном случае  $\dot{c}_1 = \dot{c}_2 = 0$ ,  $\dot{I} = 0$ ,  $\dot{k} = 0$  уравнения движения (1.10) допускают также интеграл энергии, совпадающий с гамильтонианом (1.9).

## § 2. Редукция, уравнения относительного движения вихрей

Выполним замену переменных

$$\begin{aligned}x_\alpha &= \Delta X_\alpha \cos \Theta + \Delta Y_\alpha \sin \Theta, & y_\alpha &= -\Delta X_\alpha \sin \Theta + \Delta Y_\alpha \cos \Theta, \\p_x &= \left( \Pi_X - \frac{\rho \Gamma_0}{2} Y_0 \right) \cos \Theta + \left( \Pi_Y + \frac{\rho \Gamma_0}{2} X_0 \right) \sin \Theta + \rho \sum_\alpha \Gamma_\alpha y_\alpha, \\p_y &= -\left( \Pi_X - \frac{\rho \Gamma_0}{2} Y_0 \right) \sin \Theta + \left( \Pi_Y + \frac{\rho \Gamma_0}{2} X_0 \right) \cos \Theta - \rho \sum_\alpha \Gamma_\alpha x_\alpha, \\p_\theta &= \Pi_\Theta - \frac{\rho}{2} \sum_\alpha \Gamma_\alpha (x_\alpha^2 + y_\alpha^2),\end{aligned}$$

и введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}\pi_1 &= p_x - m\dot{c}_1 - \rho \sum_\alpha \Gamma_\alpha y_\alpha \left( 1 - \frac{R^2}{r_\alpha^2} \right), & \pi_2 &= p_y - m\dot{c}_2 + \rho \sum_\alpha \Gamma_\alpha x_\alpha \left( 1 - \frac{R^2}{r_\alpha^2} \right), \\ \pi_3 &= p_\theta - k(t) + \frac{\rho}{2} \sum_\alpha \Gamma_\alpha r_\alpha^2, & r_\alpha &= \sqrt{x_\alpha^2 + y_\alpha^2}.\end{aligned}$$

В новых переменных гамильтониан (1.9) примет вид

$$\begin{aligned}H &= \frac{1}{2A} (\pi_1^2 + \pi_2^2) + \frac{1}{2\Delta} (A\pi_3 + mc_2(t)\pi_1 - mc_1(t)\pi_2)^2 + U, \\U &= \frac{\rho}{4\pi} \sum_\alpha \left( \Gamma_\alpha^2 \ln (r_\alpha^2 - R^2) - \Gamma \Gamma_\alpha \ln r_\alpha^2 \right) + \\ &+ \frac{\rho}{4\pi} \sum_{\alpha < \beta} \Gamma_\alpha \Gamma_\beta \ln \frac{r_\alpha^2 r_\beta^2 - 2R^2(x_\alpha x_\beta + y_\alpha y_\beta) + R^4}{(x_\alpha - x_\beta)^2 + (y_\alpha - y_\beta)^2}, \\ \Delta &= A^2 I(t) - Am^2(c_1^2(t) + c_2^2(t)).\end{aligned}$$

Скобка Пуассона в новых переменных перестает быть канонической. Ненулевые базисные скобки имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}\{x_\alpha, y_\alpha\} &= \frac{1}{\rho \Gamma_\alpha}, & \{p_x, p_y\} &= -\rho \Gamma, & \{p_x, p_\theta\} &= p_y, & \{p_y, p_\theta\} &= -p_x, \\ \{X_0, p_x\} &= \{Y_0, p_y\} = \cos \Theta, & \{Y_0, p_x\} &= -\{X_0, p_y\} = \sin \Theta, & \{\Theta, p_\theta\} &= 1,\end{aligned} \quad (2.1)$$

а уравнения движения запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned}\dot{p}_x &= p_y \frac{\partial H}{\partial p_\theta} - \rho \Gamma \frac{\partial H}{\partial p_y}, & \dot{p}_y &= -p_x \frac{\partial H}{\partial p_\theta} + \rho \Gamma \frac{\partial H}{\partial p_x}, & \dot{p}_\theta &= p_x \frac{\partial H}{\partial p_y} - p_y \frac{\partial H}{\partial p_x}, \\ \dot{x}_\alpha &= \frac{1}{\rho \Gamma_\alpha} \frac{\partial H}{\partial y_\alpha}, & \dot{y}_\alpha &= -\frac{1}{\rho \Gamma_\alpha} \frac{\partial H}{\partial x_\alpha},\end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\dot{X}_0 = \cos \Theta \frac{\partial H}{\partial p_x} - \sin \Theta \frac{\partial H}{\partial p_y}, \quad \dot{Y}_0 = \sin \Theta \frac{\partial H}{\partial p_x} + \cos \Theta \frac{\partial H}{\partial p_y}, \quad \dot{\Theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta}. \quad (2.3)$$

Подсистема (2.2) отделяется от полной системы и описывает относительное движение точечных вихрей в системе координат, связанной с профилем. Для реконструкции движения системы в неподвижной системе координат необходимо проинтегрировать дополнительно уравнения (2.3).

Первые интегралы (1.11) в новых переменных не зависят явно от координат точечных вихрей и примут вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_X &= p_x \cos \Theta - p_y \sin \Theta + \rho \Gamma Y_0, & \mathcal{P}_Y &= p_x \sin \Theta + p_y \cos \Theta - \rho \Gamma X_0, \\ \mathcal{M}_\theta &= p_\theta + X_0(p_x \sin \Theta + p_y \cos \Theta) - Y_0(p_x \cos \Theta - p_y \sin \Theta) - \frac{\rho \Gamma}{2}(X_0^2 + Y_0^2). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Кроме того, скобка Пуассона (2.1) обладает функцией Казимира:

$$\mathcal{C} = p_x^2 + p_y^2 + 2\rho \Gamma p_\theta.$$

Далее приведем известный интегрируемый случай уравнений (2.2), а также исследуем его периодическое возмущение.

### § 3. Интегрируемый случай и его периодическое возмущение

**3.1. Неуправляемое движение неуравновешенного профиля в присутствии одного вихря.** В работе [10] был указан интегрируемый случай, который может быть описан в рамках уравнений (2.2).

Рассмотрим движение системы (2.2) при следующих предположениях.

1. Движение профиля является неуправляемым, то есть:

$$\dot{c}_1 = \dot{c}_2 = 0, \quad k = 0, \quad \dot{I} = 0.$$

Кроме того, будем считать, что  $c_2 = 0$ . Этого всегда можно добиться выбором подвижной системы координат  $Cxy$ .

2. Суммарная циркуляция системы равна нулю. Таким образом, первые интегралы (2.4) и функция Казимира принимают вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_X &= p_x \cos \Theta - p_y \sin \Theta, & \mathcal{P}_Y &= p_x \sin \Theta + p_y \cos \Theta, \\ \mathcal{M}_\theta &= p_\theta + X_0(p_x \sin \Theta + p_y \cos \Theta) - Y_0(p_x \cos \Theta - p_y \sin \Theta), \\ \mathcal{C} &= p_x^2 + p_y^2. \end{aligned} \quad (3.1)$$

3. Движение совершается на нулевом уровне интегралов импульса  $\mathcal{P}_X = \mathcal{P}_Y = 0$ . Таким образом, из выражений (3.1) получим

$$p_x = p_y = 0, \quad p_\theta = \text{const.}$$

При указанных допущениях получим редуцированную систему с одной степенью свободы, описывающую движение вихря с системе координат, связанной с профилем:

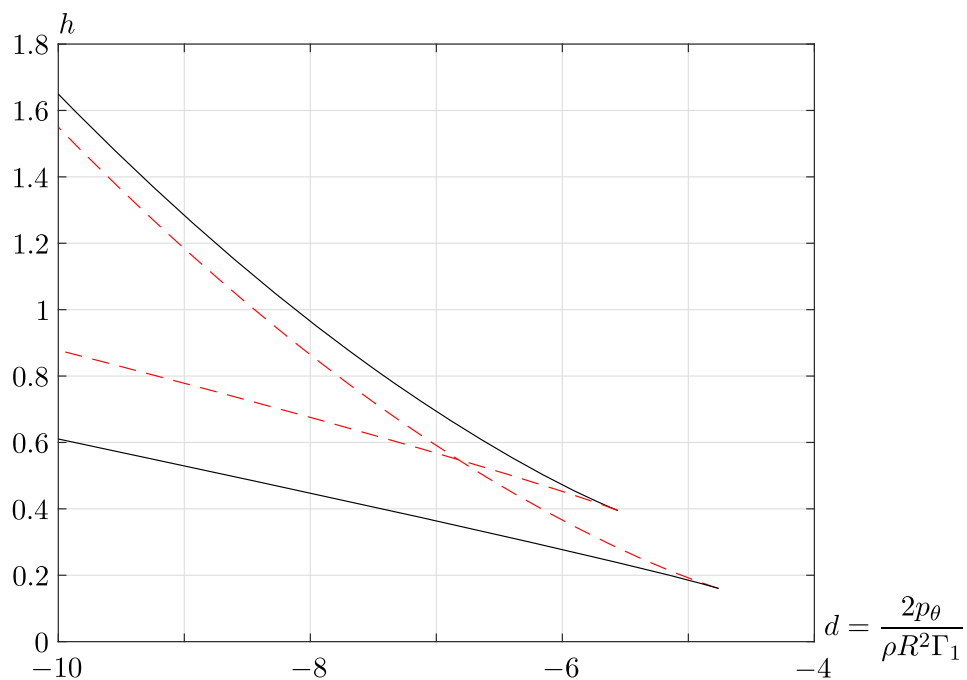
$$\dot{x}_1 = \frac{1}{\rho \Gamma_1} \frac{\partial H}{\partial y_1}, \quad \dot{y}_1 = -\frac{1}{\rho \Gamma_1} \frac{\partial H}{\partial x_1}, \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} H &= \frac{\rho^2 \Gamma_1^2}{2A} \left( r_1 - \frac{R^2}{r_1} \right)^2 + \\ &+ \frac{1}{2\Delta} \left( A \left( p_\theta + \frac{\rho \Gamma_1 r_1^2}{2} \right) - m \rho \Gamma_1 c_1 x_1 \left( 1 - \frac{R^2}{r_1^2} \right) \right)^2 + \frac{\rho \Gamma_1^2}{4\pi} \ln (r_1^2 - R^2), \\ \Delta &= A^2 I - A m c_1^2. \end{aligned} \quad (3.3)$$

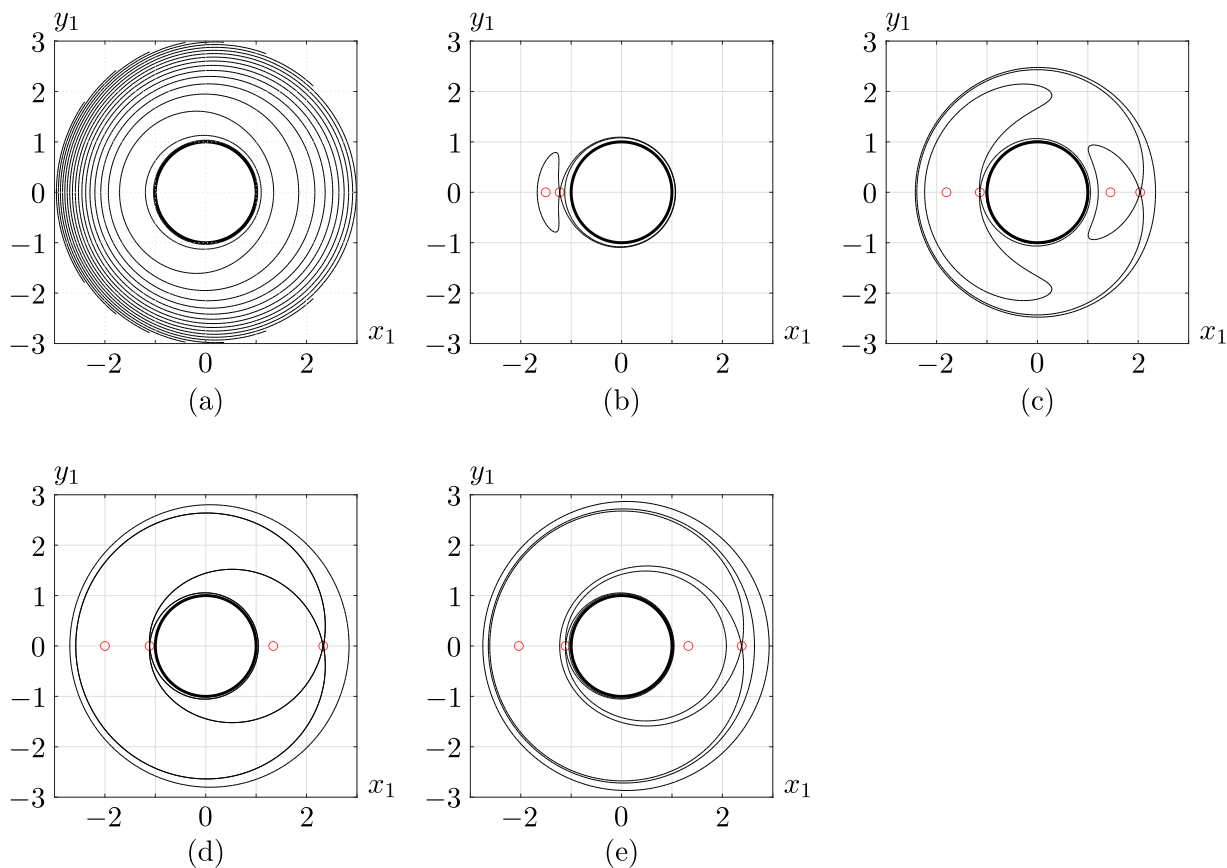
Динамика системы (3.2) существенно зависит от уровня  $p_\theta$  и может быть исследована с помощью построения бифуркационной диаграммы (см. рис. 2) и фазовых портретов (см. рис. 3), определяемых линиями уровня гамильтониана (3.3) [10].

Далее покажем, что добавление в систему периодических управлений, приводит к возникновению хаоса.





**Рис. 2.** Бифуркационная диаграмма. Значения параметров:  $m = \pi$ ,  $R = 1$ ,  $\Gamma_1 = 1$ ,  $\rho = 1$ ,  $c_1 = 0.6$ ,  $c_2 = 0$ ,  $I = 6.2204$



**Рис. 3.** Фазовые портреты при различных значениях безразмерного момента  $d = \frac{2p_0}{\rho R^2 \Gamma_1}$ :  
 а)  $d = -4$ ; б)  $d = -5$ ; в)  $d = -6$ ; д)  $d = -6.826$ ; е)  $d = -7$ . Значения параметров:  $m = \pi$ ,  $R = 1$ ,  $\Gamma_1 = 1$ ,  $\rho = 1$ ,  $c_1 = 0.6$ ,  $c_2 = 0$ ,  $I = 6.2204$

**3.2. Движение неуровновешенного профиля с периодически изменяющимся моментом инерции в присутствии одного вихря.** Рассмотрим движение системы при тех же предположениях, что и в предыдущем параграфе. Дополнительно будем считать, что момент инерции системы изменяется периодически по следующему закону:

$$I(t) = I_0 + \varepsilon \sin \Omega t.$$

В этом случае вид редуцированной системы (3.2) и ее гамильтониана (3.3) практически не изменяется, за тем исключением, что параметр  $\Delta$  в выражении (3.3) становится явно зависящим от времени:

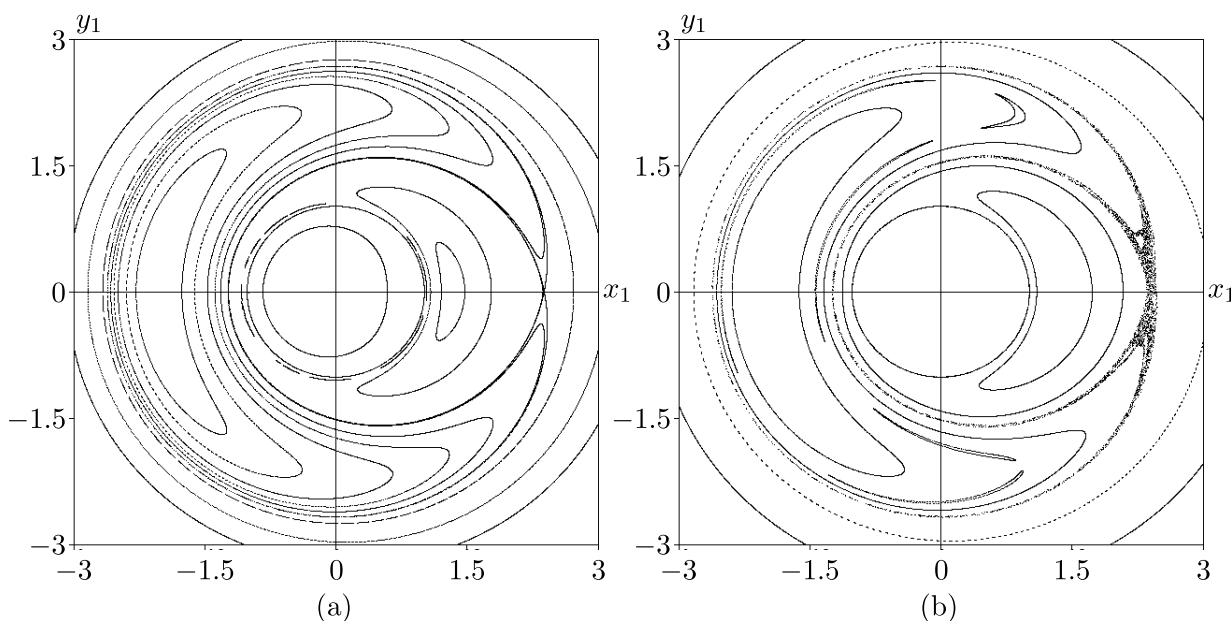
$$\Delta = A^2 I(t) - Amc_1^2.$$

Поскольку в рассматриваемом случае уравнения движения периодически зависят от времени, то для их исследования будем использовать отображение Пуанкаре за период.

Зафиксируем следующие значения параметров:

$$m = \pi, \quad R = 1, \quad \Gamma_1 = 1, \quad \rho = 1, \quad c_1 = 0.6, \quad c_2 = 0, \quad I_0 = 6.2204, \quad p_\theta = -3.5. \quad (3.4)$$

На рис. 4 показаны отображения за период при  $\varepsilon = 0.1$  и разных значениях  $\Omega$ .



**Рис. 4.** Отображения за период при а)  $\Omega = 2$ , б)  $\Omega = 0.5$  и значениях параметров (3.4)

Из рис. 4 видно, что при уменьшении частоты возмущения расширяется хаотический слой. Подобная ситуация наблюдается и в других системах с периодическими возмущениями, см., например, [17]. Поскольку система является гамильтоновой, то хаос может возникнуть только вследствие расщепления сепаратрис, см. рис. 5.

Таким образом, добавление в систему периодического возмущения приводит к возникновению хаоса и неинтегрируемости.

### Заключение

В данной работе возникновение хаоса в системе, описывающей движение неуровновешенного кругового профиля, было показано численно с помощью отображения Пуанкаре

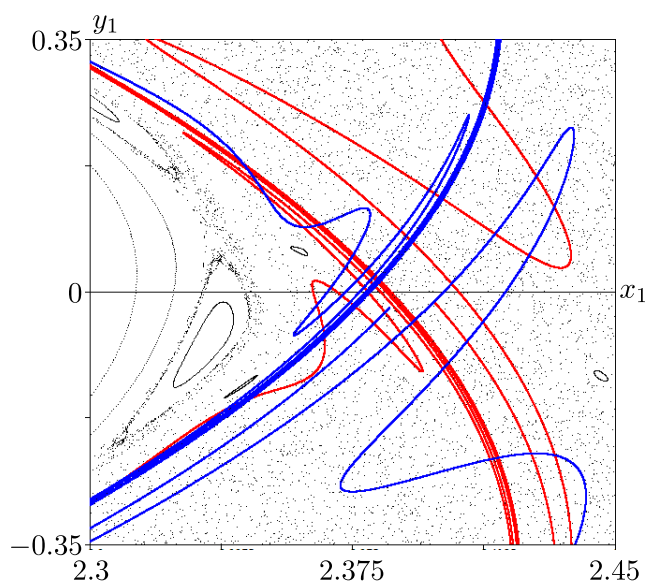


Рис. 5. Пример расщепления сепаратрис при  $\Omega = 0.5$

за период. Механизмом возникновения хаоса и, соответственно, неинтегрируемости является расщепление сепаратрис. В дальнейшем представляет интерес построить строгое доказательство неинтегрируемости с помощью метода Мельникова–Пуанкаре.

**Финансирование.** Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 22–21–00836).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Борисов А. В., Мамаев И. С. Математические методы динамики вихревых структур. М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005.
2. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. Ч. 1. М.: Физматгиз, 1963.
3. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.–Л.: ГИТТЛ, 1950.
4. Ветчанин Е. В., Килин А. А. Свободное и управляемое движение в жидкости тела с подвижной внутренней массой при наличии циркуляции вокруг тела // Доклады Академии наук. 2016. Т. 466. № 3. С. 293–297. <http://doi.org/10.7868/S0869565216030129>
5. Artemova E. M., Vetchanin E. V. The motion of an unbalanced circular disk in the field of a point source // Regular and Chaotic Dynamics. 2022. Vol. 27. Issue 1. P. 24–42. <http://doi.org/10.1134/S1560354722010051>
6. Borisov A. V., Mamaev I. S. On the motion of a heavy rigid body in an ideal fluid with circulation // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. 2006. Vol. 16. No. 1. 013118. <http://doi.org/10.1063/1.2166530>
7. Borisov A. V., Mamaev I. S., Vetchanin E. V. Self-propulsion of a smooth body in a viscous fluid under periodic oscillations of a rotor and circulation // Regular and Chaotic Dynamics. 2018. Vol. 23. Issues 7–8. P. 850–874. <http://doi.org/10.1134/S1560354718070043>
8. Borisov A. V., Mamaev I. S., Ramadanov S. M. Motion of a circular cylinder and  $n$  point vortices in a perfect fluid // Regular and Chaotic Dynamics. 2003. Vol. 8. Issue 4. P. 449–462. <http://doi.org/10.1070/RD2003v008n04ABEH000257>
9. Llewellyn Smith S. G. How do singularities move in potential flow? // Physica D: Nonlinear Phenomena. 2011. Vol. 240. Issue 20. P. 1644–1651. <https://doi.org/10.1016/j.physd.2011.06.010>
10. Mamaev I. S., Bizyaev I. A. Dynamics of an unbalanced circular foil and point vortices in an ideal fluid // Physics of Fluids. 2021. Vol. 33. Issue 8. 087119. <http://doi.org/10.1063/5.0058536>
11. Mason R. J. Fluid locomotion and trajectory planning for shape-changing robots. PhD Dissertation, Pasadena, Calif.: California Institute of Technology, 2003, 264 pp.

12. Michelin S., Llewellyn Smith S.G. An unsteady point vortex method for coupled fluid-solid problems // *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*. 2009. Vol. 23. Issue 2. P. 127–153. <https://doi.org/10.1007/s00162-009-0096-7>
13. Ramodanov S.M. Motion of a circular cylinder and a vortex in an ideal fluid // *Regular and Chaotic Dynamics*. 2001. Vol. 6. No. 1. P. 33–38. <https://doi.org/10.1070/RD2001v006n01ABEH000163>
14. Ramodanov S.M. Motion of a circular cylinder and  $N$  point vortices in a perfect fluid // *Regular and Chaotic Dynamics*. 2002. Vol. 7. No. 3. P. 291–298. <https://doi.org/10.1070/RD2002v007n03ABEH000211>
15. Shashikanth B.N., Marsden J.E., Burdick J.W., Kelly S.D. The Hamiltonian structure of a 2D rigid circular cylinder interacting dynamically with  $N$  point vortices // *Physics of Fluids*. 2002. Vol. 14. Issue 3. P. 1214–1227. <https://doi.org/10.1063/1.1445183>
16. Vetchanin E.V., Kilin A.A. Control of body motion in an ideal fluid using the internal mass and the rotor in the presence of circulation around the body // *Journal of Dynamical and Control Systems*. 2017. Vol. 23. Issue 2. P. 435–458. <https://doi.org/10.1007/s10883-016-9345-4>
17. Vetchanin E.V., Mikishanina E.A. Vibrational stability of periodic solutions of the Liouville equations // *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*. 2019. Vol. 15. No. 3. P. 351–363. <https://doi.org/10.20537/nd190312>

Поступила в редакцию 15.10.2022

Принята к публикации 10.12.2022

Ветчанин Евгений Владимирович, д. ф.-м. н., старший научный сотрудник, Уральский математический центр, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2617-7512>

E-mail: [eugene186@mail.ru](mailto:eugene186@mail.ru)

Мамаев Иван Сергеевич, д. ф.-м. н., главный научный сотрудник, Уральский математический центр, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3916-9367>

E-mail: [mamaev@rzd.ru](mailto:mamaev@rzd.ru)

**Цитирование:** Е. В. Ветчанин, И. С. Мамаев. Периодическое возмущение движения неуравновешенного кругового профиля в присутствии точечных вихрей в идеальной жидкости // *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки*. 2022. Т. 32. Вып. 4. С. 630–643.

*E. V. Vetchanin, I. S. Mamaev*

**Periodic perturbation of motion of an unbalanced circular foil in the presence of point vortices in an ideal fluid**

*Keywords:* motion in an ideal fluid, point vortices, period perturbation, vortex-body interaction.

MSC2020: 70E60, 37N35

DOI: [10.35634/vm220409](https://doi.org/10.35634/vm220409)

The dynamics of a system governing the controlled motion of an unbalanced circular foil in the presence of point vortices is considered. The foil motion is controlled by periodically changing the position of the center of mass, the gyrostatic momentum, and the moment of inertia of the system. A derivation of the equations of motion based on Sedov's approach is proposed, the equations of motion are presented in the Hamiltonian form. A periodic perturbation of the known integrable case is considered.

**Funding.** The work is supported by the Russian Science Foundation under grant 22–21–00836.

#### REFERENCES

1. Borisov A. V., Mamaev I. S. *Matematicheskie metody v dinamike vikhrevykh struktur* (Mathematical methods in the dynamics of vortex structures), Moscow–Izhevsk: Institute of Computer Science, 2005.
2. Kochin N. E., Kibel I. A., Roze N. V. *Theoretical hydrodynamics*, New York: Wiley, 1964.
3. Sedov L. I. *Ploskie zadachi gidrodinamiki i aerodinamiki* (Two-dimensional problems in hydro- and aeromechanics), Moscow–Leningrad: GITTL, 1950.
4. Vetchanin E. V., Kilin A. A. Free and controlled motion of a body with moving internal mass through a fluid in the presence of circulation around the body, *Doklady Physics*, 2016, vol. 61, issue 1, pp. 32–36. <http://doi.org/10.1134/S1028335816010110>
5. Artemova E. M., Vetchanin E. V. The motion of an unbalanced circular disk in the field of a point source, *Regular and Chaotic Dynamics*, 2022, vol. 27, issue 1, pp. 24–42. <http://doi.org/10.1134/S1560354722010051>
6. Borisov A. V., Mamaev I. S. On the motion of a heavy rigid body in an ideal fluid with circulation, *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 2006, vol. 16, no. 1, 013118. <http://doi.org/10.1063/1.2166530>
7. Borisov A. V., Mamaev I. S., Vetchanin E. V. Self-propulsion of a smooth body in a viscous fluid under periodic oscillations of a rotor and circulation, *Regular and Chaotic Dynamics*, 2018, vol. 23, issues 7–8, pp. 850–874. <http://doi.org/10.1134/S1560354718070043>
8. Borisov A. V., Mamaev I. S., Ramodanov S. M. Motion of a circular cylinder and  $n$  point vortices in a perfect fluid, *Regular and Chaotic Dynamics*, 2003, vol. 8, issue 4, pp. 449–462. <http://doi.org/10.1070/RD2003v008n04ABEH000257>
9. Llewellyn Smith S. G. How do singularities move in potential flow?, *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 2011, vol. 240, issue 20, pp. 1644–1651. <https://doi.org/10.1016/j.physd.2011.06.010>
10. Mamaev I. S., Bizyaev I. A. Dynamics of an unbalanced circular foil and point vortices in an ideal fluid, *Physics of Fluids*, 2021, vol. 33, issue 8, 087119. <http://doi.org/10.1063/5.0058536>
11. Mason R. J. *Fluid Locomotion and Trajectory Planning for Shape-Changing Robots*, PhD Dissertation, Pasadena, Calif.: California Institute of Technology, 2003, 264 pp.
12. Michelin S., Llewellyn Smith S. G. An unsteady point vortex method for coupled fluid-solid problems, *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, 2009, vol. 23, issue 2, pp. 127–153. <https://doi.org/10.1007/s00162-009-0096-7>
13. Ramodanov S. M. Motion of a circular cylinder and a vortex in an ideal fluid, *Regular and Chaotic Dynamics*, 2001, vol. 6, no. 1, pp. 33–38. <https://doi.org/10.1070/RD2001v006n01ABEH000163>
14. Ramodanov S. M. Motion of a circular cylinder and  $N$  point vortices in a perfect fluid, *Regular and Chaotic Dynamics*, 2002, vol. 7, no. 3, pp. 291–298. <https://doi.org/10.1070/RD2002v007n03ABEH000211>

15. Shashikanth B.N., Marsden J.E., Burdick J.W., Kelly S.D. The Hamiltonian structure of a 2D rigid circular cylinder interacting dynamically with  $N$  point vortices, *Physics of Fluids*, 2002, vol. 14, issue 3, pp. 1214–1227. <https://doi.org/10.1063/1.1445183>
16. Vetchanin E. V., Kilin A. A. Control of body motion in an ideal fluid using the internal mass and the rotor in the presence of circulation around the body, *Journal of Dynamical and Control Systems*, 2017, vol. 23, issue 2, pp. 435–458. <https://doi.org/10.1007/s10883-016-9345-4>
17. Vetchanin E. V., Mikishanina E. A. Vibrational stability of periodic solutions of the Liouville equations, *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*, 2019, vol. 15, no. 3, pp. 351–363. <https://doi.org/10.20537/nd190312>

Received 15.10.2022

Accepted 10.12.2022

Evgenii Vladimirovich Vetchanin, Doctor of Physics and Mathematics, Senior Researcher, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, 426034, Izhevsk, Russia.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2617-7512>

E-mail: [eugene186@mail.ru](mailto:eugene186@mail.ru)

Ivan Sergeevich Mamaev, Doctor of Physics and Mathematics, Chief Researcher, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, 426034, Izhevsk, Russia.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3916-9367>

E-mail: [mamaev@rcd.ru](mailto:mamaev@rcd.ru)

**Citation:** E. V. Vetchanin, I. S. Mamaev. Periodic perturbation of motion of an unbalanced circular foil in the presence of point vortices in an ideal fluid, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2022, vol. 32, issue 4, pp. 630–643.